Aulas passadas

Eq. de onda na corda: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ $\qquad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ (velocidade da onda)

Soluções (ondas propagantes): $y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

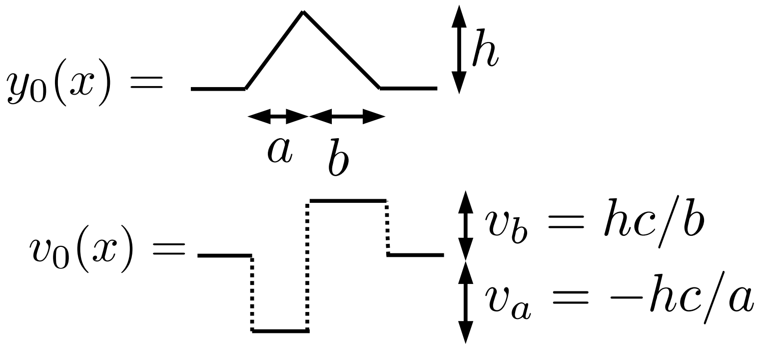
Condições iniciais:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}y_0(x) - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z \\ g(x) &= \frac{1}{2}y_0(x) + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Ondas harmônicas: $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t - \phi),\ \omega = ck$

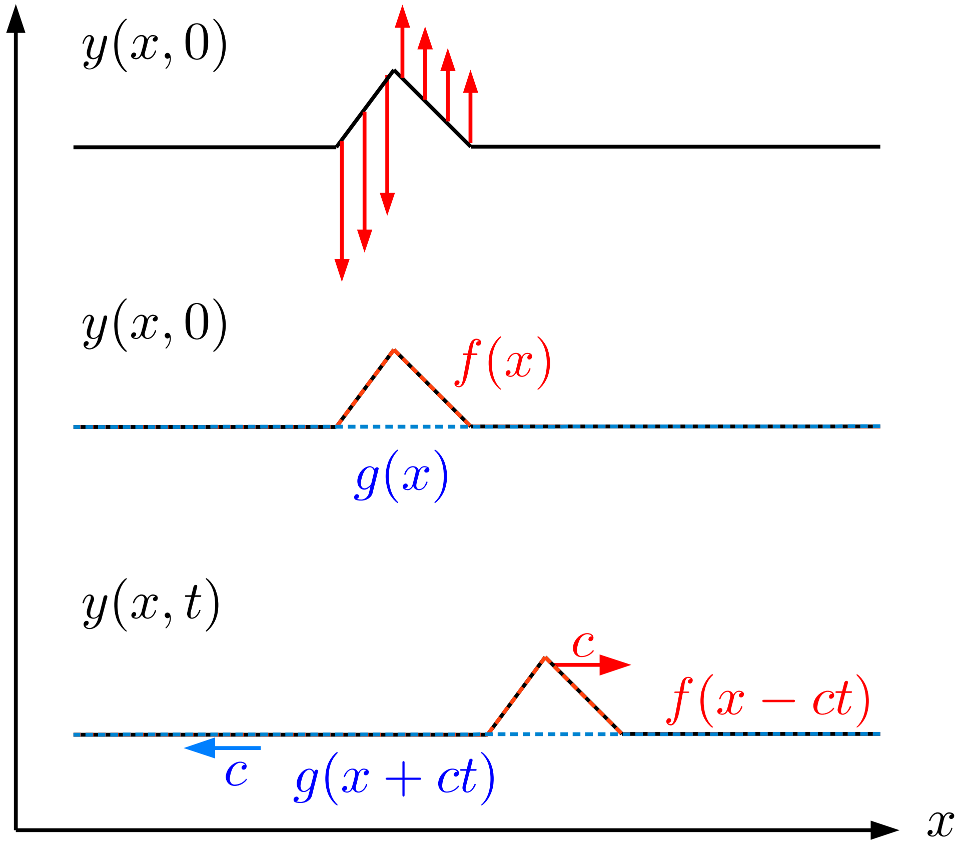
1 – Exercício:

Determine o movimento subsequente de uma corda perfeitamente elástica cujas condições iniciais são:



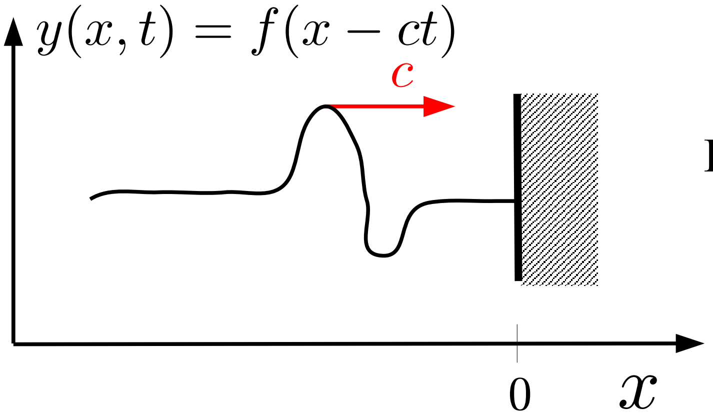
$$\color{red}{f(x)} = \frac{1}{2} y_0(x) - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z = y_0(x)$$

$$\color{blue}{g(x)} = \frac{1}{2} y_0(x) + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z = 0$$

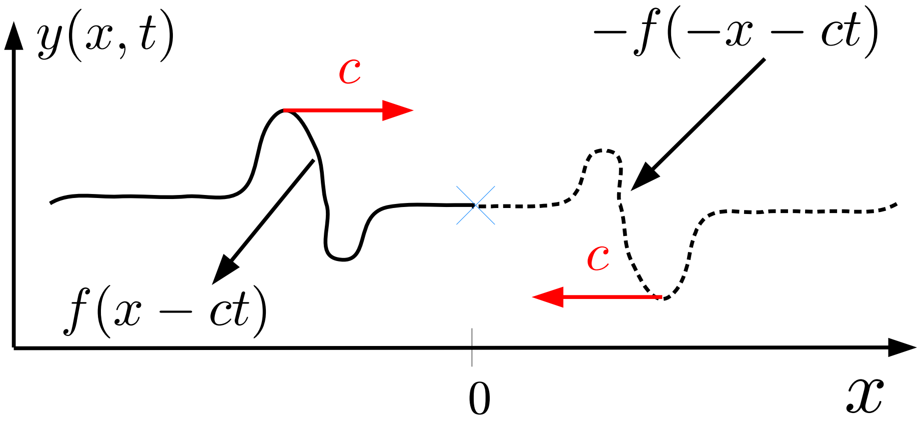


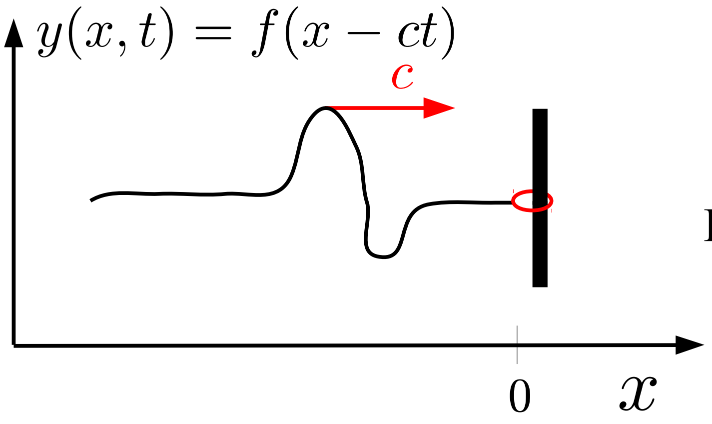
Aulas passadas

Reflexão em interfaces:

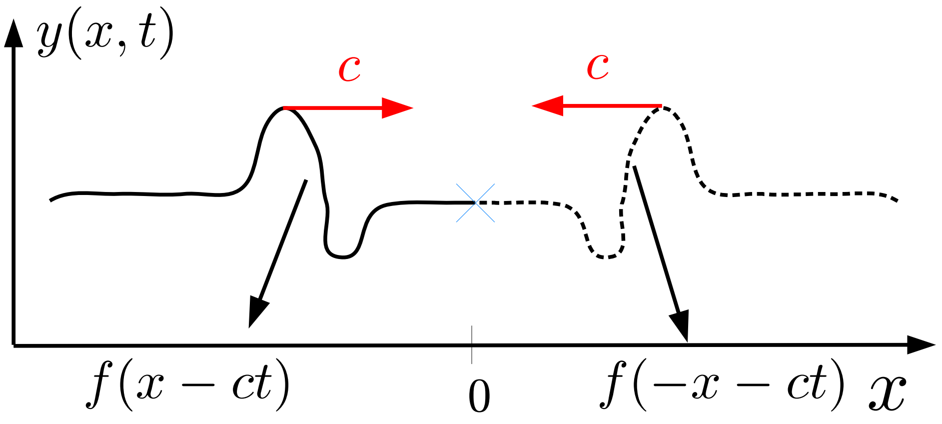


Equivalente
$\rightarrow$



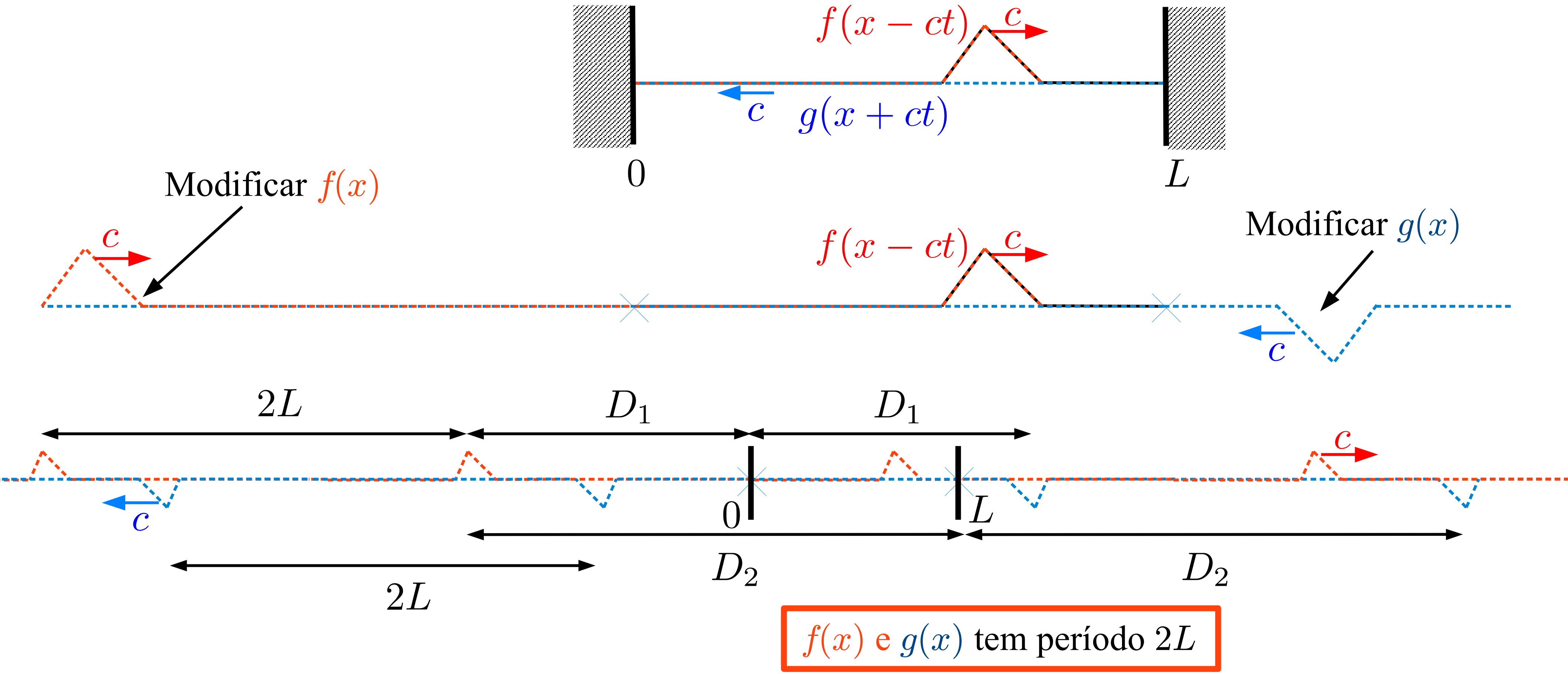


Equivalente
$\rightarrow$



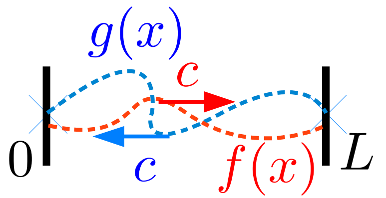
2 – Exercício:

Resolva o exercício 1 para o caso da corda estar fixa nas duas extremidades.

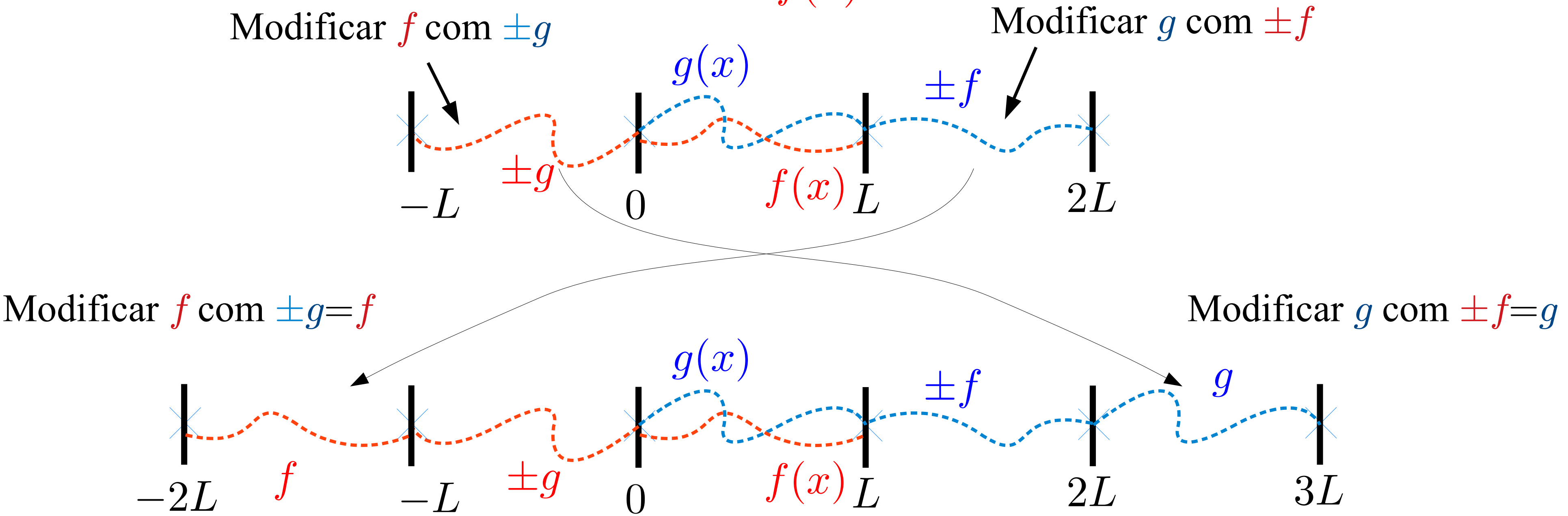


2.a – Exercício:

Mostre que f e g tem período $2L$ para o movimento genérico da corda finita com extremidas ambas fixas ou ambas abertas.



f e g obtidos das condições iniciais da corda finita em $0<x<L$.

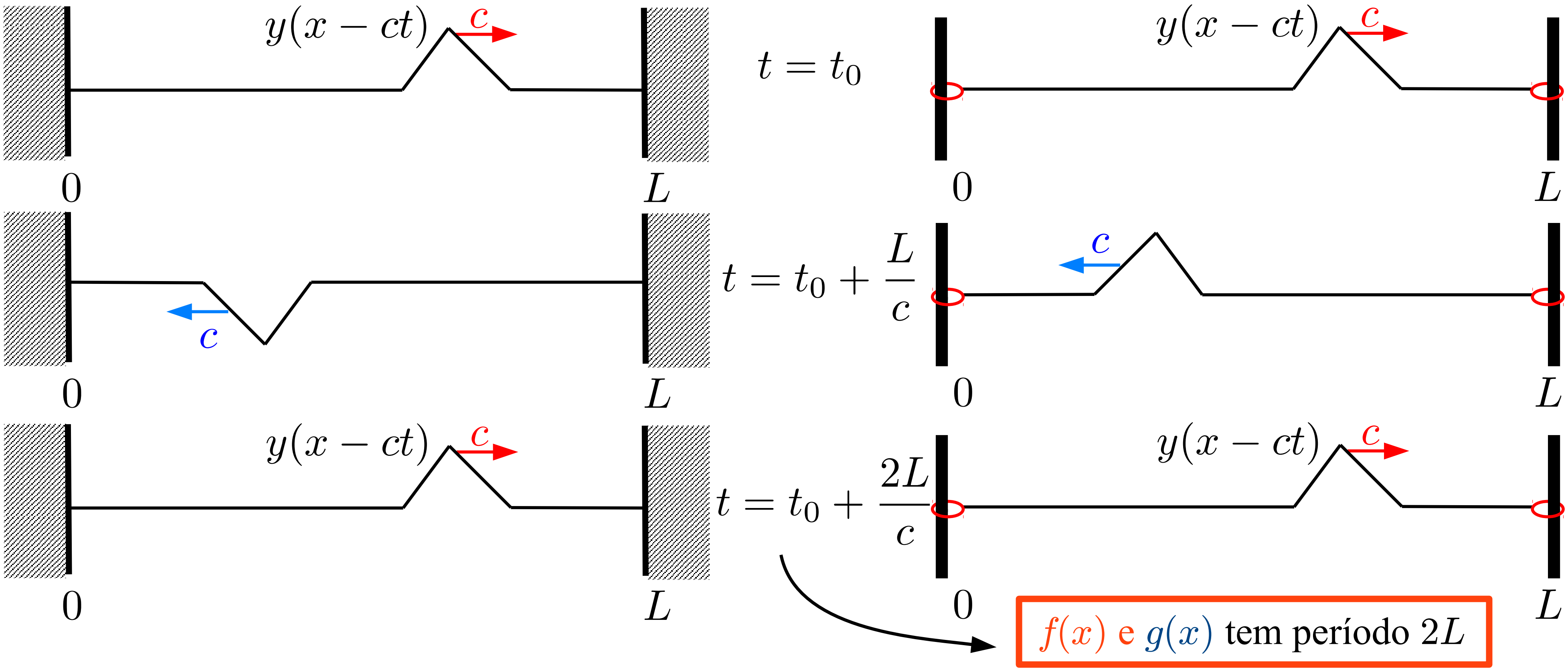


$\boxed{f(x) \text{ e } g(x) \text{ tem período } 2L}$

2.a – Exercício:

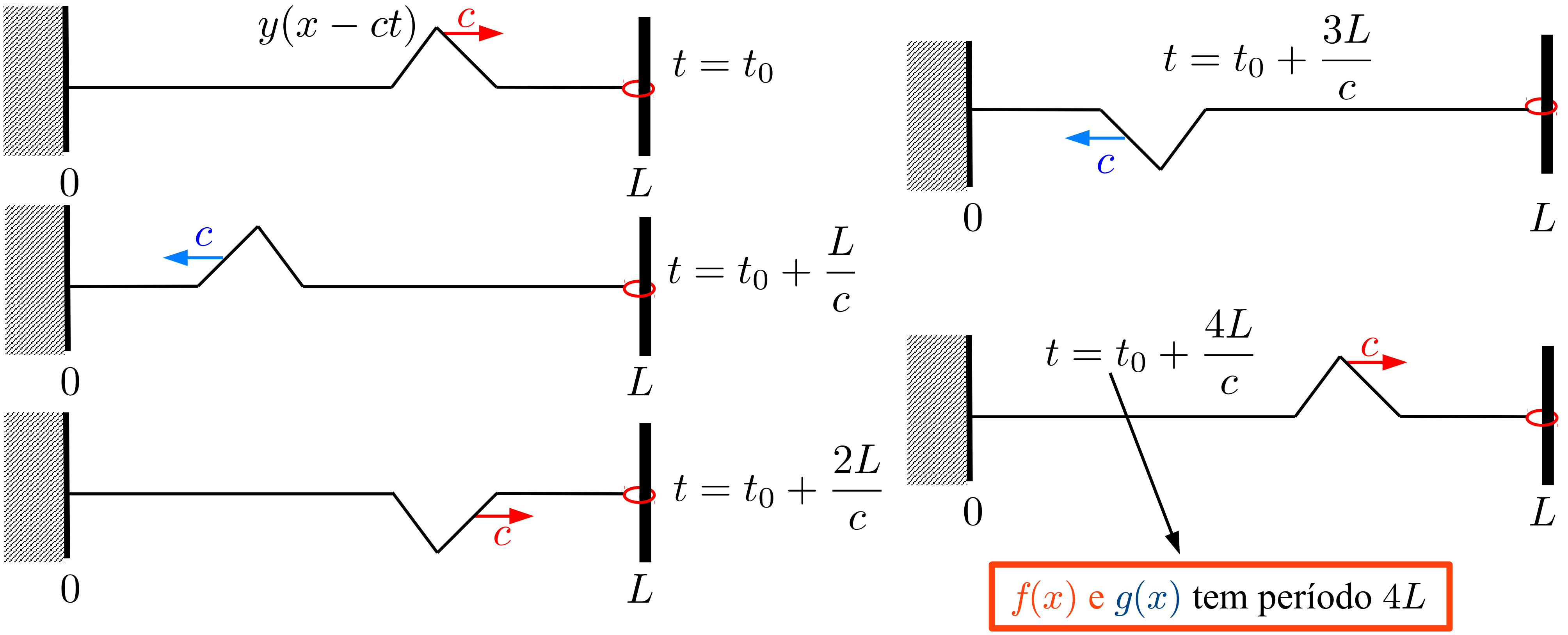
Mostre que f e g tem período $2L$ para o movimento genérico da corda finita com extremidas ambas fixas ou ambas abertas.

Resolução alternativa:



2.a – Exercício:

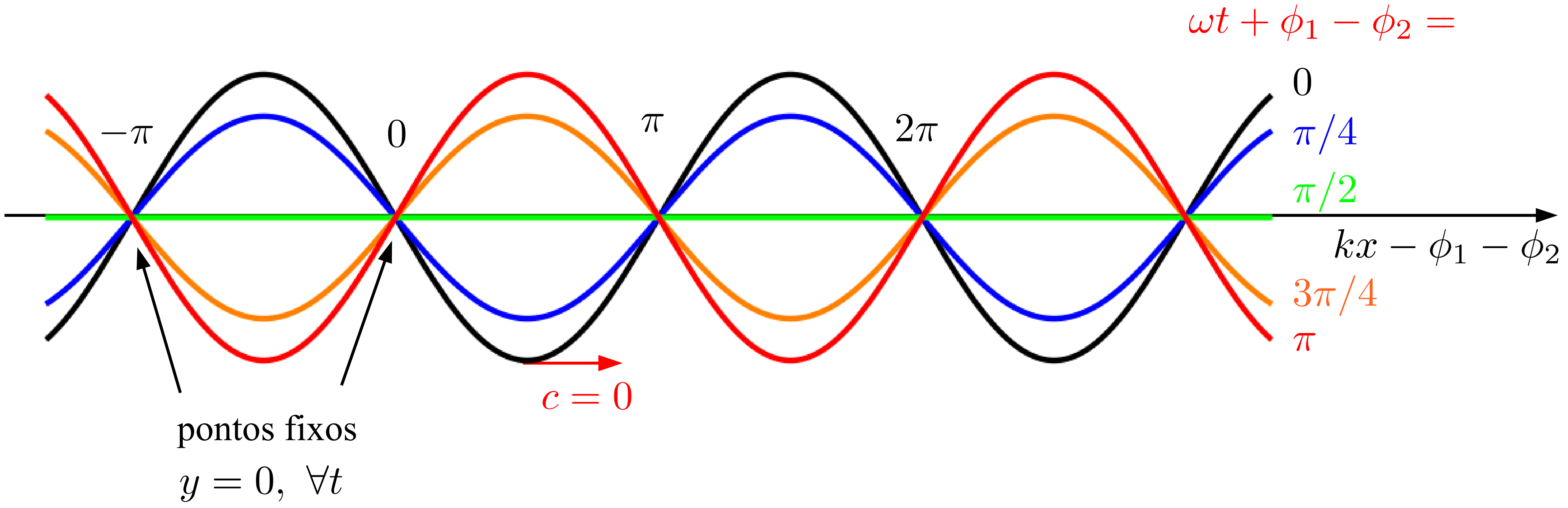
Mostre que f e g tem período $4L$ para o movimento genérico da corda finita com uma extremida fixa e outra aberta.



Aulas passadas

Ondas estacionárias:

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= A\sin(kx-\omega t-2\phi_1)+A\sin(kx+\omega t-2\phi_2)\\
&= 2A\sin(kx-\phi_1-\phi_2)\cos(\omega t+\phi_1-\phi_2)
\end{aligned}
$$

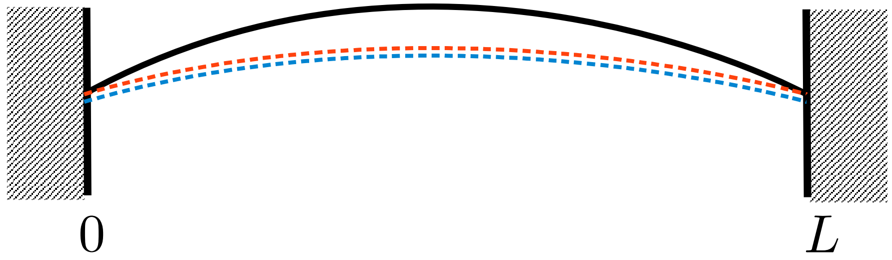


3 – Exercício:

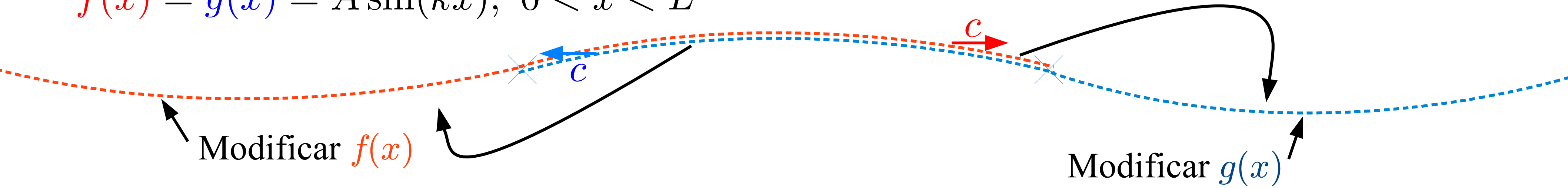
Resolva o movimento da corda abaixo dado que ela está inicialmente parada:

$$v_0(x) = 0$$

$$y_0(x) = 2A\sin(kx),\ k = \frac{\pi}{L}$$



$$f(x) = g(x) = A\sin(kx),\ \ 0 < x < L$$



$$f(x) = -g(-x) = A\sin(kx) = f(x)$$

$$g(x) = -f(2L - x),\ \ (x > L)$$
$$= A\sin(kx - 2kL) = g(x)$$

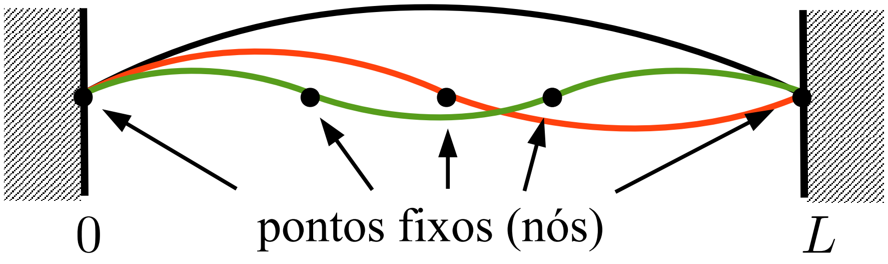
$$2kL = 2\pi$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= A\sin(k(x - ct)) \\ g(x) &= A\sin(k(x + ct)) \end{aligned} \quad \forall x}$$

Simples representação matemática porque senos e cossenos são funções periódicas

4 – Modos normais na corda finita: ondas estacionárias permitidas

a) duas extremidades fechadas



Ondas harmônicas estacionárias:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \phi)\cos(\omega t - \varphi), \quad \omega = ck$$

Condições de contorno: $y(0,t) = y(L,t) = 0$

$$y(0,t) = A\sin(\phi)\cos(\omega t + \varphi) = 0, \quad \Rightarrow \quad \phi = 0$$

$$y(L,t) = A\sin(kL)\cos(\omega t + \varphi) = 0, \quad \Rightarrow \quad kL = \pi n \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Modos normais quantizados: $y_n(x,t) = \sin(k_n x)\cos(\omega_n t - \varphi_n)$

Note que
$y(x + 2L, t) = y(x,t)$

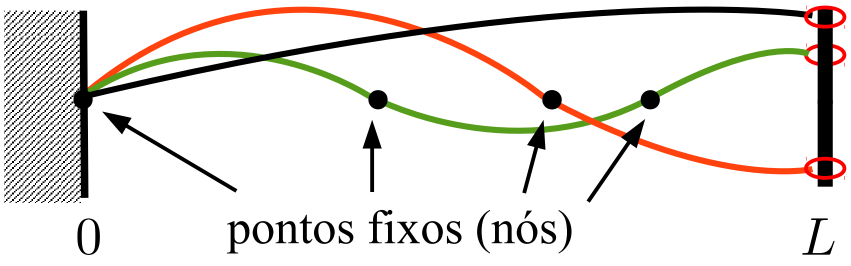
Solução geral: $$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)\left(A_n\cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right)$$

$\{C_n, \varphi_n\}$
$\{A_n, B_n\}$ determinados pelas condições iniciais

4 – Modos normais na corda finita: ondas estacionárias permitidas

b) uma extremidade fechada e outra aberta



Ondas harmônicas estacionárias:

$$y(x,t) = A\sin(kx-\phi)\cos(\omega t - \varphi), \quad \omega = ck$$

Condições de contorno: $\quad y(0,t) = \partial_x y(L,t) = 0$

$$y(0,t) = A\sin(\phi)\cos(\omega t + \varphi) = 0, \quad \Rightarrow \quad \phi = 0$$

$$\partial_x y(L,t) = Ak\cos(kL)\cos(\omega t+\varphi) = 0, \quad \Rightarrow \quad kL = \tfrac{2n-1}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \tfrac{2\pi}{k_n} = \tfrac{4L}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Modos normais quantizados: $\quad y_n(x,t) = \sin(k_n x)\cos(\omega_n t - \varphi_n)$

Note que
$y(x+4L,t) = y(x,t)$

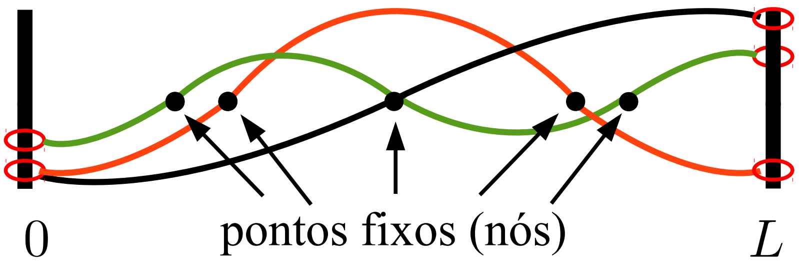
Solução geral: $\quad y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t - \varphi_n)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)\left(A_n\cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right)$$

$\{C_n, \varphi_n\}$
$\{A_n, B_n\}$ determinados pelas condições iniciais

4 – Modos normais na corda finita: ondas estacionárias permitidas

c) duas extremidades abertas



Ondas harmônicas estacionárias:

$$y(x,t) = A\cos(kx - \phi)\cos(\omega t - \varphi), \quad \omega = ck$$

Condições de contorno: $\partial_x y(0,t) = \partial_x y(L,t) = 0$

$$\partial_x y(0,t) = -Ak\sin(\phi)\cos(\omega t + \varphi) = 0, \quad \Rightarrow \quad \phi = 0$$

$$\partial_x y(L,t) = -Ak\sin(kL)\cos(\omega t + \varphi) = 0, \quad \Rightarrow \quad kL = n\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Modos normais quantizados: $y_n(x,t) = \cos(k_n x)\cos(\omega_n t - \varphi_n)$

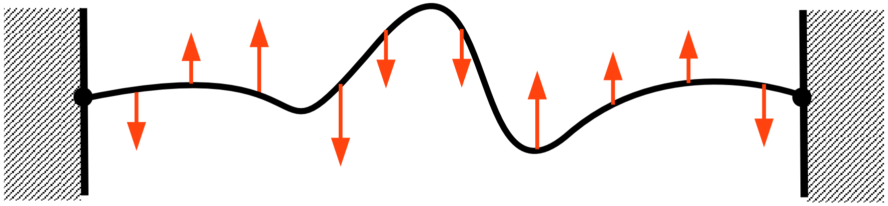
Note que
$y(x+2L,t) = y(x,t)$

Solução geral: $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(k_n x)\cos(\omega_n t - \varphi_n)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n x)\left(A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)\right)$$

$\{C_n, \varphi_n\}$
$\{A_n, B_n\}$ determinados pelas condições iniciais

5 – Movimento geral na corda finita: descrição via ondas estacionárias (modos normais)



$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)\left(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right)$$

$$k_n = \frac{\pi}{L} n, \quad \omega_n = c k_n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$\{A_n, B_n\}$ determinados pelas condições iniciais:

$$y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \longrightarrow A_n = \frac{2}{L}\int_0^L y_0(x)\sin(k_n x)\mathrm{d}x$$

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin(k_n x) \longrightarrow B_n = \frac{2}{\omega_n L}\int_0^L v_0(x)\sin(k_n x)\mathrm{d}x$$

$$C_n^2 = A_n^2 + B_n^2, \quad \tan\varphi_n = B_n/A_n$$

5 – Movimento geral na corda finita: descrição via ondas estacionárias (modos normais)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x) \longrightarrow a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(k_n x)\mathrm{d}x$$

$$k_n = \tfrac{\pi}{L}n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < x < L$$

Prova:

Usar a identidade $\displaystyle\int_0^L \sin(k_n x)\sin(k_m x)\mathrm{d}x = \int_0^L \sin(n\pi x/L)\sin(m\pi x/L)\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{n,m}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x) \longrightarrow \int_0^L f(x)\sin(k_m x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L \sin(k_n x)\sin(k_m x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{L}{2}\delta_{m,n} = \frac{L}{2}a_m$$

Logo, $\boxed{a_m = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin(k_m x)\mathrm{d}x}$

5 – Movimento geral na corda finita: descrição via ondas estacionárias (modos normais)

Prova da identidade $\displaystyle\int_0^L \sin(n\pi x/L)\sin(m\pi x/L)\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{n,m}$

Usando que $\cos(A-B)-\cos(A+B) = 2\sin(A)\sin(B)$

$$\int_0^L \sin(n\pi x/L)\sin(m\pi x/L)\mathrm{d}x =$$

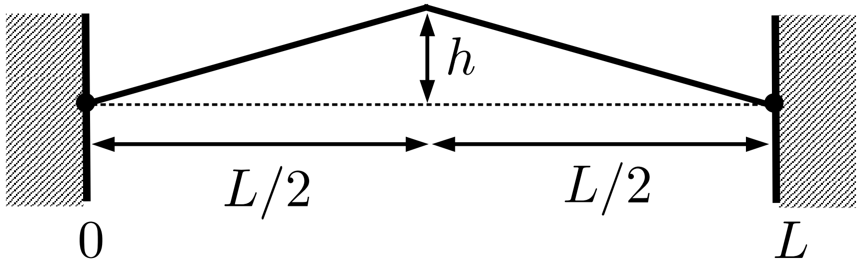
$$= \int_0^L \frac{\cos((n-m)\pi x/L)-\cos((n+m)\pi x/L)}{2}\mathrm{d}x \underset{\uparrow}{=} \int_0^L \frac{\cos((n-m)\pi x/L)}{2}\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\delta_{n,m}$$

$n, m \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\{\sin(n\pi x/L)\} \longrightarrow \text{Funções ortogonais no intervalo } 0 < x < L}$$

5 – Movimento geral na corda finita: descrição via ondas estacionárias (modos normais)

Exemplo: corda esticada pelo meio inicialmente em repouso



$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)\left(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right)$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n L}\int_0^L v_0(x)\sin(k_n x)\mathrm{d}x = 0$$

$$k_n = \tfrac{\pi}{L}n, \quad \omega_n = ck_n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

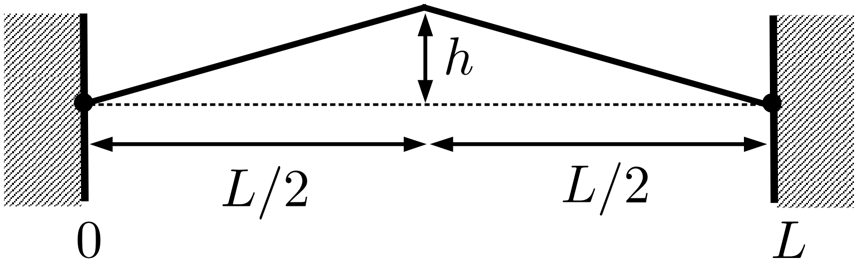
$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2h}{L}x\sin(k_n x)\mathrm{d}x + \frac{2}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L}\left(2h - \frac{2h}{L}x\right)\sin(k_n x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4h}{L^2}\int_0^{\frac{L}{2}} x\sin(k_n x)\mathrm{d}x + \frac{4h}{L^2}\int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-x)\sin(k_n x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4h}{L^2}\left(\left.\frac{\sin(k_n x) - k_n x\cos(k_n x)}{k_n^2}\right|_0^{\frac{L}{2}} - L\left.\frac{\cos(k_n x)}{k_n}\right|_{\frac{L}{2}}^{L} - \left.\frac{\sin(k_n x) - k_n x\cos(k_n x)}{k_n^2}\right|_{\frac{L}{2}}^{L}\right)$$

5 – Movimento geral na corda finita: descrição via ondas estacionárias (modos normais)

Exemplo: corda esticada pelo meio inicialmente em repouso



$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)\left(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right)$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n L}\int_0^L v_0(x)\sin(k_n x)\mathrm{d}x = 0$$

$$k_n = \tfrac{\pi}{L}n, \quad \omega_n = ck_n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

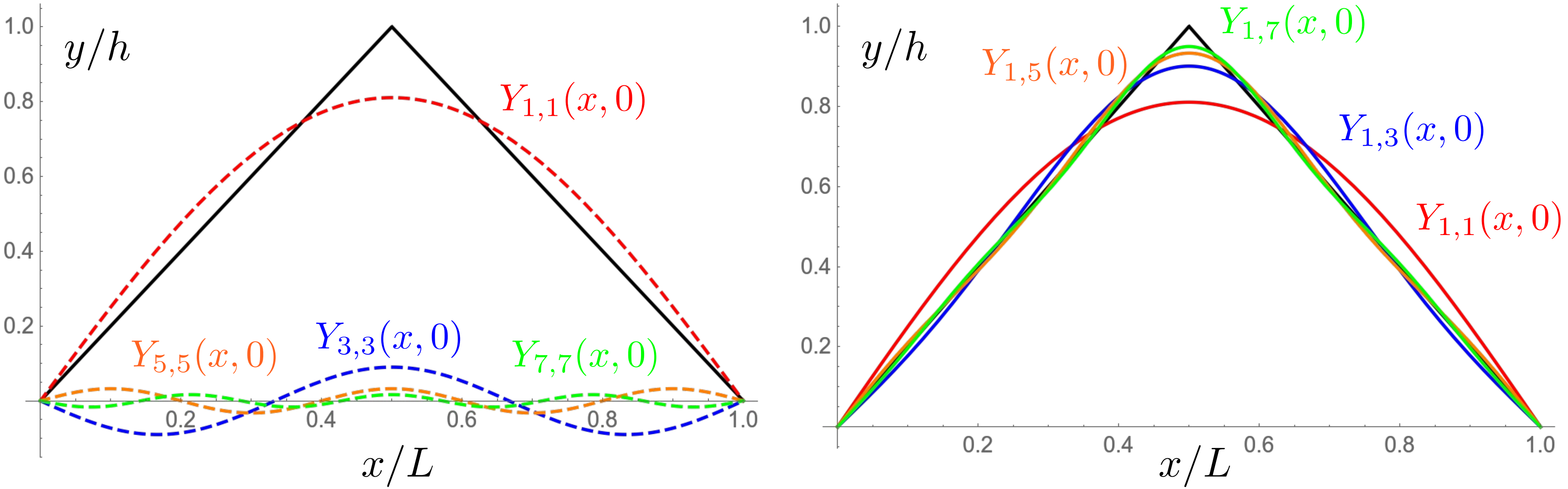
$$A_n = \frac{4h}{L^2}\left(L^2\frac{\sin(\frac{n\pi}{2}) - \frac{n\pi}{2}\cos(\frac{n\pi}{2})}{(n\pi)^2} - L^2\frac{\cos(n\pi) - \cos(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} - L^2\frac{-\sin(\frac{n\pi}{2}) - n\pi(\cos(n\pi) - \frac{1}{2}\cos(\frac{n\pi}{2})}{(n\pi)^2}\right)$$

$$= 8h\left(\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{(n\pi)^2}\right), \quad \Rightarrow \quad A_n = \frac{8h}{\pi^2}, 0, -\frac{8h}{9\pi^2}, 0, \frac{8h}{25\pi^2}, \ldots$$

$$\boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin((2n-1)\pi x/L)\cos((2n-1)\pi ct/L)}{(2n+1)^2}}$$

5 – Movimento geral na corda finita: descrição via ondas estacionárias (modos normais)

Exemplo: corda esticada pelo meio inicialmente em repouso



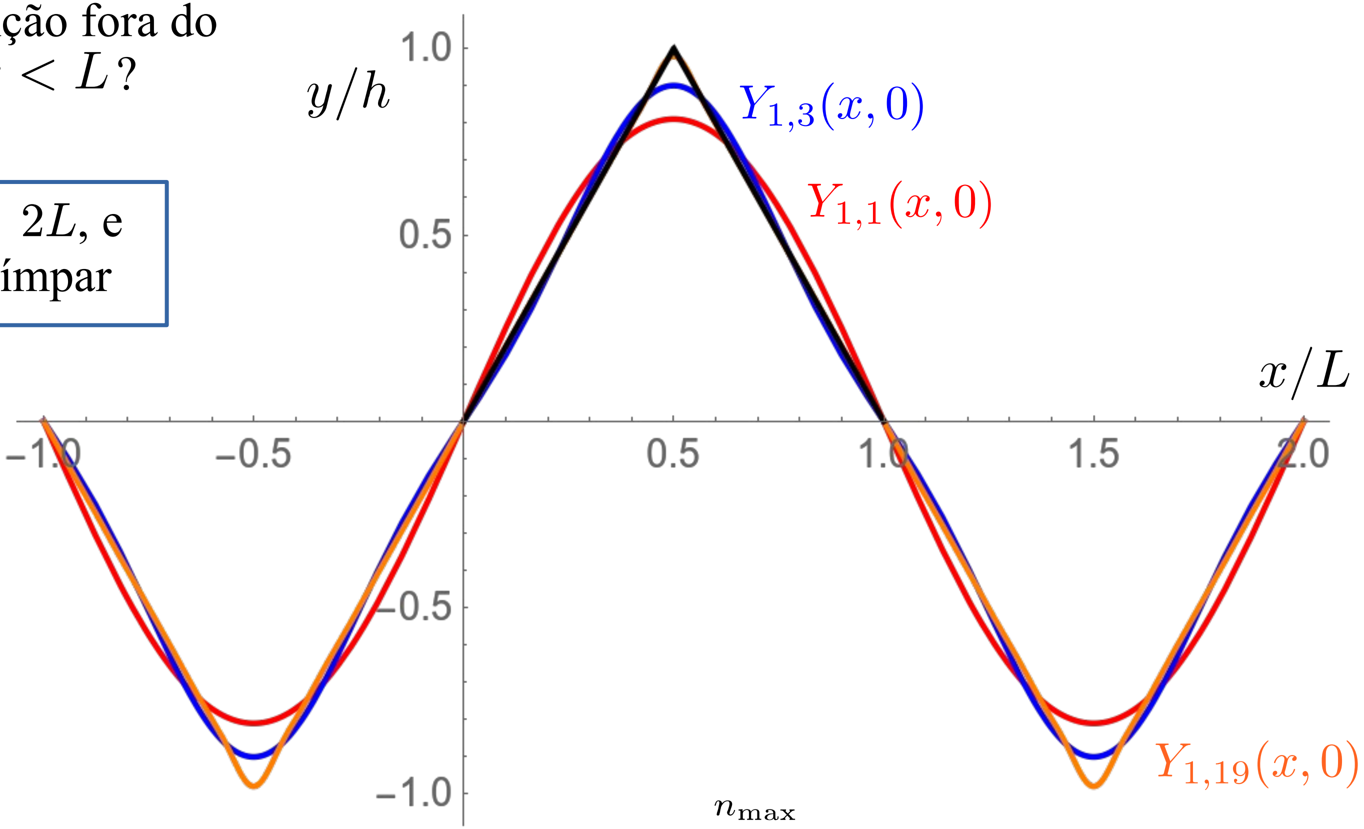
$$y(x,t) = Y_{1,\infty}(x,t), \quad Y_{n_{\min},n_{\max}}(x,t) = \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$$

5 – Movimento geral na corda finita: descrição via ondas estacionárias (modos normais)

Exemplo: corda esticada pelo meio inicialmente em repouso.

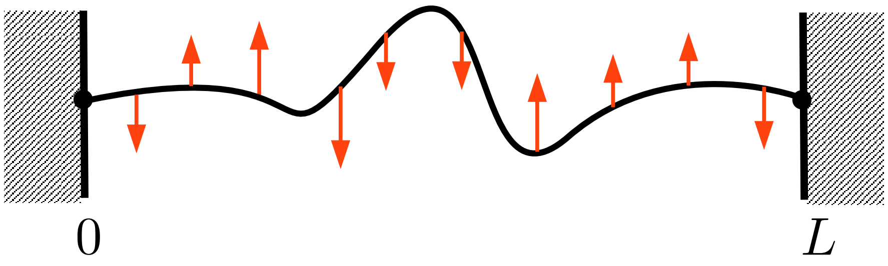
Como fica a função fora do intervalo $0 < x < L$?

Note o período $2L$, e que a função é ímpar



$$y(x,t) = Y_{1,\infty}(x,t), \quad Y_{n_{\min},n_{\max}}(x,t) = \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$$

5 – Movimento geral na corda finita: descrição via ondas estacionárias (modos normais)



RESUMO:

Movimento geral: superposição dos modos normais

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)\left(A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right)$$

$$k_n = \tfrac{\pi}{L} n, \quad \omega_n = c k_n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Coeficientes de "Fourier":

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L y_0(x) \sin(k_n x) \mathrm{d}x$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L v_0(x) \sin(k_n x) \mathrm{d}x$$