Calcule as velocidades das ondas transversais e longitudinais que se propagam em um bloco de aço.

Vamos considerar apenas ondas longitudinais em um sólido isotrópico e homogêneo se propagando em um dos eixos de simetria:

$$m\ddot{x}_{\alpha,\beta,\gamma} = -k\left(2x_{\alpha,\beta,\gamma} - x_{\alpha+1,\beta,\gamma} - x_{\alpha-1,\beta,\gamma}\right).$$

Agora usamos o "chute"

$$x_{\alpha,\beta,\gamma} = Ae^{i(k\alpha a-\omega t)}, \ \Rightarrow \ \omega = 2\omega_0\left|\sin\frac{ka}{2}\right|, \ \text{onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Para longos comprimentos de onda ($ka \ll 1$), então

$$\omega \approx ck, \ \text{onde } c = \omega_0 a = \sqrt{\frac{ka^2}{m}}.$$

Agora, relacionamos com a constante de mola microscópica k com o módulo de Young Y:

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{N_y N_z k\left(\frac{\Delta L}{x}\right)/\left(a^2 N_y N_z\right)}{\Delta L/\left(aN_x\right)} = \frac{k}{a}.$$

Finalmente,

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{Ya^3}{m}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \overset{\text{aço}}{\approx} \sqrt{\frac{200\ \text{GPa}}{8.0\ \text{T/m}^3}} \approx 5.0\ \text{km/s}.$$

OBS: Caso a onda distorça as molas transversais, a velocidade muda para $\sqrt{\left(Y + \frac{4}{3}G\right)/\rho}$.

Analogamente, para o caso de ondas transversais, o módulo de Young é substituído pelo módulo de cisalhamento G:

$$c_\perp = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \overset{\text{aço}}{\approx} \sqrt{\frac{80\ \text{GPa}}{8.0\ \text{T/m}^3}} \approx 3.2\ \text{km/s}.$$

Um diapasão preso a um fio tencionado gera ondas transversais. A vibração do diapasão é perpendicular ao fio. A sua frequência é 400 Hz e a amplitude da sua oscilação 0,50 mm. O fio tem a densidade linear de massa de 0,01 kg/m e está sob tensão de 1,00 kN. Admita que não existam, no fio, ondas refletidas.

Ache o período e a frequência das ondas no fio.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2.5 \text{ ms}.$$

Qual a velocidade das ondas?

$$c = \sqrt{\frac{\text{tensão}}{\text{densidade}}} = \sqrt{\frac{1.00 \text{ kN}}{0.01 \text{ kg/m}}} = 316 \text{ m/s}.$$

Qual a comprimento das ondas e qual o número de onda?

$$\lambda = cT = 79.1 \text{ cm}.$$

Escreva uma função de onda apropriada para as ondas no fio.

$$y\left(x,t\right)=A\cos\left(kx-\omega t\right)=A\cos\left(2\pi\left(x/\lambda-t/T\right)\right),$$

onde $A=0.50$ mm.

Calcule a velocidade máxima e a aceleração máxima de um ponto do fio.

$$v=\dot{y}=\frac{2\pi A}{T}\sin\left(kx-\omega t\right),\ \Rightarrow\ v_{\mathrm{max}}=2\pi Af=1.26\ \mathrm{m/s}.$$

$$a=\ddot{y}=-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^{2}A\cos\left(kx-\omega t\right),\ \Rightarrow\ a_{\mathrm{max}}=\left(2\pi f\right)^{2}A=3.16\ \mathrm{km/s^{2}}.$$

Qual deve ser a taxa média de energia fornecida ao diapasão a fim de mantê-lo oscilando com amplitude constante?

$$P=\frac{1}{2}\mu c\omega^{2}A^{2}=4.99\ \mathrm{W}.$$

Uma corda pesada e homogênea de comprimento L está presa ao teto de uma sala e pende livremente. Mostre que a velocidade das ondas transversais na corda independe da sua densidade e do seu comprimento, mas depende da distância em relação à ponta livre da corda y de acordo com $c = \sqrt{gy}$, onde g é a aceleração da gravidade.

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{\mu y g}{\mu}} = \sqrt{gy}.$$

Se a extremidade livre da corda receber um deslocamento lateral momentâneo, quanto tempo leva o pulso ondulatório resultante para ir até o teto, refletir-se e retornar?

$$\mathrm{d}y = c\mathrm{d}t, \;\Rightarrow\; t_{\text{subida}} = \int_0^L \frac{\mathrm{d}y}{c} = \int_0^L \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{gy}} = 2\left.\sqrt{\frac{y}{g}}\right|_{y=0}^{L} \;\Rightarrow\; 2t_{\text{subida}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Uma corda muito longa de densidade μ está tensionada de T_0 e se encontra inicialmente estática. Dois impulsos são imprimidos na corda no instante $t = 0$. O primeiro imprime velocidades verticais nas partículas da corda de magnitude v em uma região de tamanho a. O segundo, é idêntico ao primeiro exceto pela diferença de que ele é imprimido numa região que dista de D do primeiro e a velocidade das partículas está no sentido oposto $(-v)$. Determine o movimento subsequente da corda detalhadamente. Faça gráficos esquemáticos detalhados e precisos do perfil da corda para diversos instantes de tempo relevantes.

$$y(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)\,, \text{ com } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}},$$

e

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}y_0(x) - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2c}\begin{cases} 0, & x < 0, \\ vx, & 0 \le x < a, \\ va, & a \le x < D, \\ -v(x - D - a)\,, & D \le x < D + a, \\ 0, & D + a \le x. \end{cases} \\ g(x) &= \frac{1}{2}y_0(x) + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\,\mathrm{d}z = -f(x)\,. \end{aligned}$$