Considere um sistema unidimensional de N massas m e $N+1$ molas de constante elástica κ e comprimentos relaxados ℓ presas entre duas paredes que distam de L entre si. Qual a tensão no sistema? Escreva a energia potencial elástica em termos dos descolamentos longitudinais u_i em torno das posições de equilíbrio.

Cada mola está deformada de $a-\ell$, onde $a=\frac{L}{N+1}$. Logo, a tração é

$$T_0=\kappa\left(a-\ell\right).$$

A energia elástica total é

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\kappa\left(x_1-\ell\right)^2+\sum_{i=2}^{N}\frac{1}{2}\kappa\left(x_{i+1}-x_i-\ell\right)^2+\frac{1}{2}\kappa\left(L-x_N-\ell\right)^2\\
&= \sum_{i=1}^{N+1}\frac{1}{2}\kappa\left(x_i-x_{i-1}-\ell\right)^2,\ \text{com } x_0=0 \text{ e } x_{N+1}=L,\\
&= \sum_{i=1}^{N+1}\frac{1}{2}\kappa\left[\left(u_i+ai\right)-\left(u_{i-1}+a\left(i-1\right)\right)-\ell\right]^2\\
&= \sum_{i=1}^{N+1}\frac{1}{2}\kappa\left(u_i-u_{i-1}+a-\ell\right)^2,
\end{aligned}$$

onde $u_0=u_{N+1}=0$.

Escreva a equação do movimento para as N massas do problema anterior.

Como a força é conservativa,

$$
\begin{aligned}
m\ddot{u}_j &= -\frac{\partial U}{\partial u_j} \\
&= -\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{\kappa}{2}\left(u_j - u_{j-1} + a - \ell\right)^2 + \frac{\kappa}{2}\left(u_{j+1} - u_j + a - \ell\right)^2\right) \\
&= -\kappa\left[\left(u_j - u_{j-1} + a - \ell\right) - \left(u_{j+1} - u_j + a - \ell\right)\right] \\
&= \kappa\left(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right)
\end{aligned}
$$

Considere agora pequenos deslocamentos transversais y_i em torno das posições de equilíbrio. Qual o potencial e equações de movimento correspondentes?

$$
\begin{aligned}
U_\perp &= \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\kappa}{2} \left(\sqrt{(y_i - y_{i-1})^2 + a^2} - \ell \right)^2 \\
&= \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^{N+1} (a - \ell)^2 + \frac{\kappa (a - \ell)}{2a} \sum_{i=1}^{N+1} (y_i - y_{i-1})^2 + \mathcal{O}\,(y_i - y_{i-1})^4 \,.
\end{aligned}
$$

As equações de movimento são

$$
\begin{aligned}
m\ddot{y}_j &\approx -\frac{\partial U_\perp}{\partial y_j} \\
&= -\frac{\kappa (a - \ell)}{2a} \frac{\partial U_\perp}{\partial y_j} \left[\left(y_j - y_{j-1}\right)^2 + \left(y_{j+1} - y_{j-1}\right)^2 \right] \\
&= \frac{\kappa (a - \ell)}{a} \left(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}\right) \\
&= \frac{T_0}{a} \left(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}\right)
\end{aligned}
$$

Tome o limite contínuo ($a \to 0$ e $N \to \infty$) nas equações de movimento dos problemas anteriores e escreva as equações de onda correspondente.

Das expansões

$$\psi\left(x \pm \mathrm{d}x\right) \approx \psi \pm \psi' \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\psi''\left(\mathrm{d}x\right)^2, \;\Rightarrow\; \psi'' = \frac{\psi\left(x+\mathrm{d}x\right) - 2\psi\left(x\right) + \psi\left(x-\mathrm{d}x\right)}{\left(\mathrm{d}x\right)^2}.$$

Discretizando,

$$\psi'' = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \to \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{a^2}.$$

Finalmente,

$$m\ddot{u}_j = \kappa\left(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right) \to \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_\parallel^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \text{ com } c_\parallel^2 = \frac{k}{ma^2}.$$

$$m\ddot{y}_j = \frac{T_0}{a}\left(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}\right) \to \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c_\perp^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \text{ com } c_\perp^2 = \frac{T_0}{m/a}.$$

Escreva a equação secular para os modos normais de vibração.

Em ambos os casos, temos a mesma equação de movimento

$$\ddot{\psi}_j = \omega_0^2 \left(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}\right), \text{ para } j = 0, \ldots, N+1 \text{ e } \psi_0 = \psi_{N+1} = 0, \tag{1}$$

e $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$ $(\omega_0 = \sqrt{\frac{T_0}{am}})$ para as oscilações longitudinais (verticais). Assumindo soluções do tipo

$$\psi_j = A_j e^{-i\omega t} \text{ (com } \omega \in \mathbb{R}\text{)}, \tag{2}$$

então,

$$-\omega^2 A_j e^{-i\omega t} = \omega_0^2 \left(A_{j+1} - 2A_j + A_{j-1}\right) e^{-i\omega t} \;\Rightarrow\; \omega_0^2 \left(-A_{j+1} + 2A_j - A_{j-1}\right) = \omega^2 A_j.$$

Logo,

$$\mathbb{M}\vec{A} = \omega^2 \vec{A}, \tag{3}$$

onde,

$$\mathbb{M} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ é matriz tridiagonal, e } \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{N-1} \\ A_N \end{pmatrix}. \tag{4}$$

A equação secular $\left(\det\left(\mathbb{M} - \omega^2 \mathbb{I}\right) = 0\right)$ fornecendo os N modos normais são os N autovalores ω^2 e autovetores correspondentes.

OBSERVAÇÕES:

O que está por trás da Eq. (2)? Os deslocamentos ψ_j são reais. Como ψ_j pode ser real sendo representado por (2)? Lembre-se que ψ_j é combinação de todos os modos normais:

$$\psi_j = A_{j,1}e^{-i\omega_1 t} + A_{j,2}e^{-i\omega_2 t} + \dots . \tag{5}$$

Quantos termos existem nessa somatória? Note que os autovalores de (3) são ω^2. Portanto, há $2N$ frequências distintas. Principalmente, note que se $\omega = \omega_\alpha$ é auto-frequência do sistema, então $\omega = -\omega_\alpha$ também é. Neste caso, podemos reescrever (5) como

$$\begin{aligned}
\psi_j &= \sum_{\alpha=1}^{N} A_{j,\alpha}e^{-i\omega_\alpha t} + B_{j,\alpha}e^{i\omega_\alpha t} = \sum_{\alpha=1}^{N} A_{j,\alpha}e^{-i\omega_\alpha t} + A^*_{j,\alpha}e^{i\omega_\alpha t} = \sum_{\alpha=1}^{N} \mathrm{Re}\left(A_{j,\alpha}e^{-i\omega_\alpha t}\right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{N} a_{j,\alpha}\cos\left(\omega_\alpha t\right) + b_{j,\alpha}\sin\left(\omega_\alpha t\right) = \sum_{\alpha=1}^{N} c_{j,\alpha}\cos\left(\omega_\alpha t - \phi_{j,\alpha}\right),
\end{aligned}$$

onde usamos que $A_{j,\alpha} = B^*_{j,\alpha}$ na segunda igualdade para garantir que $\psi_j \in \mathbb{R}$.

Note então que (2) é equivalente a

$$\psi_j = \mathrm{Re}\left(Ae^{-i\omega t}\right) = c\cos\left(\omega t - \phi\right), \tag{6}$$

resultando na mesma equação de autovalores (3).

Utilizando a série de Fourier para os coeficientes A_j em (2), diagonalize o sistema.

A série de Fourier correspondente é

$$\psi_j = \sum_{\alpha} \mathrm{Re}\left(A_{j,\alpha} e^{-i\omega_\alpha t}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k,\alpha} \tilde{A}_{k,\alpha} e^{i\left(kR_j - \omega_\alpha t\right)}\right), \text{ com } R_j = aj. \tag{7}$$

(OBSERVAÇÃO: Note que no limite contínuo, $A_j \to A(x)$, e sabemos que podemos usar a transformada de Fourier para resolver o problema nesse caso. Será se conseguimos resolver o problema usando a série (7) para resolver o problema no caso discreto?) Substituindo (6) na equação do movimento (1), temos que

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_j &= \omega_0^2 \left(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}\right), \\ \Rightarrow \sum_{k,\alpha} -\omega_\alpha^2 \tilde{A}_{k,\alpha} e^{i\left(kR_j - \omega_\alpha t\right)} &= \sum_{k,\alpha} \omega_0^2 \left(e^{ika} - 2 + e^{-ika}\right) \tilde{A}_{k,\alpha} e^{i\left(kR_j - \omega_\alpha t\right)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\omega_\alpha^2 = \omega_0^2 \left(2 - e^{ika} - e^{-ika}\right) = 2\omega_0^2 \left(1 - \cos(ka)\right) = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right). \quad \text{(relação de dispersão)}$$

Então, podemos simplificar (7) para

$$\begin{aligned}\psi_j &= \sum_\alpha \mathrm{Re}\left(A_{j,\alpha}e^{-i\omega_\alpha t}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_k A_k e^{i\left(kR_j-\omega_k t\right)} + \sum_k B_k e^{i\left(kR_j+\omega_k t\right)}\right), \\ &= \sum_k a_k \sin\left(kR_j-\omega_k t\right) + c_k \sin\left(kR_j+\omega_k t\right) \\ &\quad + \sum_k b_k \cos\left(kR_j-\omega_k t\right) + d_k \cos\left(kR_j+\omega_k t\right)\end{aligned} \tag{8}$$

com $a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$, $R_j = aj$ e

$$\omega_k = 2\omega_0 \sin\left(\frac{1}{2}ka\right), \tag{9}$$

que é análogo ao caso contínuo. (Levando $a \to 0$, a relação de dispersão se torna

$$\omega_k \to \omega_0 ak = ck,\ \text{com } c_\parallel = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}a \text{ e } c_\perp = \sqrt{\frac{T_0 a}{m}} = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}},$$

que é um sistema não dispersivo com velocidades de fase independentes de k.)

Quais são os valores de k? São determinados pelas condições de contorno $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$. Logo,

$$\psi_0 = 0 = \sum_k \left(c_k - a_k\right)\sin\left(\omega_k t\right) + \left(b_k + d_k\right)\cos\left(\omega_k t\right).$$

Ou seja, $a_k - c_k = d_k + b_k = 0$. Com isso, as "ondas planas" em (8) podem ser reescritas em termos de "ondas harmônicas estacionárias"

$$\psi_j = \sum_k \sin\left(kR_j\right)\left(a_k \cos\left(\omega_k t\right) + b_k \sin\left(\omega_k t\right)\right).$$

A segunda condição de contorno quantiza os valores de k:

$$\psi_{N+1} = 0 = \sum_k \sin\left(ka\left(N+1\right)\right)\left(a_k \cos\left(\omega_k t\right) + b_k \sin\left(\omega_k t\right)\right).$$

Logo,

$$ka = \frac{\pi n}{N+1}, \text{ com } n = 1, 2, \ldots N. \tag{10}$$

Finalmente,

$$\boxed{\psi_j\left(t\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos\left(\omega_n t\right) + b_n \sin\left(\omega_n t\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right), \text{ com } \omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi n}{2\left(N+1\right)}\right).} \tag{11}$$

Os coeficientes de Fourier são simplesmente

$$a_n = \frac{2}{N+1}\sum_{j=1}^{N}\psi_j\left(0\right)\sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right), \tag{12}$$

$$b_n = \frac{\sum_{j=1}^{N}\dot{\psi}_j\left(0\right)\sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right)}{\left(N+1\right)\omega_0 \sin\left(\frac{\pi n}{2(N+1)}\right)}. \tag{13}$$

Note que a Eq. (11) define os autovalores e autovetores da matriz tridiagonal em (4). Os vetores

$$\vec{A}_\alpha = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{N+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{\pi\alpha j}{N+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{\pi\alpha N}{N+1}\right) \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha = 1, \ldots, N, \tag{14}$$

são autovetores normalizados de $\mathbb{M}$ com autovalores $\omega_\alpha^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{2(N+1)}\right) = 2\omega_0^2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{N+1}\right.\right.$

PROVA:

Primeiramente, vamos analisar o autovalor. Definindo $\theta = \frac{\pi}{N+1}$, então

$$
\begin{aligned}
\mathbb{M}\begin{pmatrix} \sin(\theta\alpha) \\ \vdots \\ \sin(\theta\alpha j) \\ \vdots \\ \sin(\theta\alpha N) \end{pmatrix} &= \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2\sin(\theta\alpha) - \sin(2\theta\alpha) \\ \vdots \\ -\sin(\theta\alpha(j-1)) + 2\sin(\theta\alpha j) - \sin(\theta\alpha(j+1)) \\ \vdots \\ -\sin(\theta\alpha(N-1)) + 2\sin(\theta\alpha N) \end{pmatrix} \\
&= \omega_0^2 \begin{pmatrix} \left[2 - \frac{\sin(2\theta\alpha)}{\sin(\theta\alpha)}\right]\sin(\theta\alpha) \\ \vdots \\ \left[2 - \frac{\sin(\theta\alpha(j-1)) + \sin(\theta\alpha(j+1))}{\sin(\theta\alpha j)}\right]\sin(\theta\alpha j) \\ \vdots \\ \left[2 - \frac{\sin(\theta\alpha(N-1))}{\sin(\theta\alpha N)}\right]\sin(\theta\alpha N) \end{pmatrix} \\
&= 2(1-\cos(\theta\alpha))\,\omega_0^2 \begin{pmatrix} \sin(\theta\alpha) \\ \vdots \\ \sin(\theta\alpha j) \\ \vdots \\ \sin(\theta\alpha N) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

onde usamos que $\alpha\theta N = \alpha\pi - \alpha\theta$.

Agora vamos analisar a orto-normalização dos autovetores $\vec{A}_\alpha$.

$$\begin{aligned}\vec{A}_\alpha \cdot \vec{A}_\beta &= \frac{2}{N+1}\sum_{j=1}^{N} \sin\left(\theta\alpha j\right)\sin\left(\theta\beta j\right) = \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} \cos\left(\theta\left(\alpha-\beta\right)j\right) - \cos\left(\theta\left(\alpha+\beta\right)j\right)\\ &= \frac{1}{2\left(N+1\right)}\sum_{j=0}^{N}\left[e^{i\theta(\alpha-\beta)j} + e^{-i\theta(\alpha-\beta)j} - e^{i\theta(\alpha+\beta)j} - e^{-i\theta(\alpha+\beta)j}\right].\end{aligned}$$

A soma geométrica para $\gamma \in \mathbb{N}$ é

$$\sum_{j=0}^{N} e^{i\theta\gamma j} = \frac{e^{i\theta\gamma(N+1)}-1}{e^{i\theta\gamma}-1} = \frac{e^{i\pi\gamma}-1}{e^{i\theta\gamma}-1} = \begin{cases} 2/\left(1-e^{i\theta\gamma}\right), & \gamma \text{ ímpar},\\ 0, & \gamma \text{ par},\\ N+1, & \gamma = 0.\end{cases}$$

Portanto, para $\gamma = \alpha - \beta$ ímpar,

$$\sum_{j=0}^{N} \cos\left(\theta\gamma j\right) = \frac{1}{1-e^{i\theta\gamma}} + \frac{1}{1-e^{-i\theta\gamma}} = \frac{2-e^{-i\theta\gamma}-e^{i\theta\gamma}}{2-e^{i\theta\gamma}-e^{-i\theta\gamma}} = 1.$$

Neste caso, $\delta = \alpha + \beta$ também é impar e, consequentemente,

$$\sum_{j=0}^{N} \cos\left(\theta\gamma j\right) - \cos\left(\theta\delta j\right) = 1 - 1 = 0.$$

Para $\gamma = \alpha - \beta$ par, $\delta = \alpha + \beta$ também é par e, portanto,

$$\sum_{j=0}^{N} \cos\left(\theta\gamma j\right) - \cos\left(\theta\delta j\right) = 0 - (0) = 0.$$

Finalmente, para $\gamma = \alpha - \beta = 0$ (e δ par), temos que

$$\sum_{j=1}^{N} \cos\left(\theta\gamma j\right) - \cos\left(\theta\delta j\right) = \sum_{j=0}^{N} 1 - (0) = N + 1.$$

Com esses resultados, concluímos que

$$\vec{A}_\alpha \cdot \vec{A}_\beta = \delta_{\alpha,\beta}.$$

Ou seja, os vetores em (14) são os auto-vetores normalizados de $\mathbb{M}$ em (4) e formam uma base para os vetores no espaço $\mathbb{R}^N$.

(Definindo $\delta x = \frac{L}{N+1}$, então os auto-vetores podem ser reescritos como

$$A_{\alpha,j} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{\pi\alpha j}{N+1}\right) = \sqrt{\frac{2\delta x}{L}} \sin\left(\frac{\pi\alpha\left(j\delta x\right)}{L}\right) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$

que são as ondas harmônicas estacionárias (modos normais) da corda contínua presa nas duas extremidades. Ou seja, se os auto-vetores $\left\{\vec{A}_\alpha\right\}$ formam uma base para os vetores do $\mathbb{R}^N$, no limite contínuo $N \rightarrow \infty$ esses vetores tornam-se funções harmônicas que formam uma base para todas as funções (integráveis) no intervalo $0 < x < L$ e que obedecem as condições de contorno $f(0) = f(L) = 0$. Essa é a ideia básica por trás da série de Fourier.)

Finalmente, podemos demonstrar o valor dos coeficientes listados em (12) e (13):

$$\psi_j(0) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right),$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \psi_j(0) \sin\left(\frac{\pi m j}{N+1}\right) &= \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\pi m j}{N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{N+1}{2}\right) \sum_{j=1}^{N} \left[\sqrt{\frac{2}{N+1}} \left(\frac{\pi m j}{N+1}\right)\right] \left[\sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{N+1}{2}\right) \vec{A}_m \cdot \vec{A}_n = \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{N+1}{2}\right) \delta_{m,n} \\
&= \left(\frac{N+1}{2}\right) a_m.
\end{aligned}$$

$$\dot{\psi}_j(0) = \sum_{n=1}^{N} b_n \omega_n \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right), \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{N} \dot{\psi}_j(0) \sin\left(\frac{\pi m j}{N+1}\right) = \frac{N+1}{2} b_m \omega_m.$$

Considere agora que cada oscilador está sujeito a ação de uma força dissipativa igual a $-b\dot{\psi}_j$. Escreva as equações de movimento. No caso em que $2\omega_0 > \gamma_0 = \frac{b}{2m}$, quais modos normais são super-amortecidos? Em que condições eles existem? Escreva a solução geral para o caso em que todos os modos são sub-amortecidos.

$$\ddot{\psi}_j = \omega_0^2 \left(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}\right) - 2\gamma_0\dot{\psi}_j, \text{ onde } 2\gamma_0 = b/m.$$

Vamos generalizar e série de Fourier (7) para

$$\psi_j = \sum_\alpha \operatorname{Re}\left(A_{j,\alpha} e^{-\gamma_\alpha t} e^{-i\bar{\omega}_\alpha t}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k,\alpha} \tilde{A}_{k,\alpha} e^{-\gamma_k t} e^{i\left(kR_j - \bar{\omega}_k t\right)}\right), \tag{15}$$

(com $A_{j=0} = A_{j=N+1} = 0$). Então

$$\begin{aligned}
\left(\gamma_k + i\bar{\omega}_k\right)^2 - 2\gamma_0\left(\gamma_k + i\bar{\omega}_k\right) + 2\omega_0^2 - \omega_0^2\left(e^{ika} + e^{-ika}\right) &= 0 \\
\left(\gamma_k + i\bar{\omega}_k\right)^2 - 2\gamma_0\left(\gamma_k + i\bar{\omega}_k\right) + 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}(ka)\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\gamma_\alpha + i\bar{\omega}_\alpha = \gamma_0 \pm i\sqrt{4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}(ka)\right) - \gamma_0^2},$$

$$\Rightarrow \ \gamma_k = \gamma_0 \text{ e } \bar{\omega}_k^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}(ka)\right) - \gamma_0^2 = \omega_k^2 - \gamma_0^2.$$

Portanto, os modos super-amortecidos ($\omega_\alpha^2 < 0$) são aqueles em que

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) < \frac{\gamma_0}{2\omega_0}.$$

Como no caso não amortecido, as condições de contorno determinam os possíveis k's (vide (10)), ou seja,

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2\left(N+1\right)}\right) < \frac{\gamma_0}{2\omega_0}.$$

Para que um modo seja super-amortecido, é necessário que N seja suficientemente grande. Para que o 1o. modo seja super-amortecido ($n = 1$), então N tem que ser maior que N^* onde

$$\sin\left(\frac{\pi}{2\left(N^*+1\right)}\right) = \frac{\gamma_0}{2\omega_0}.$$

No limite da corda contínua ($c = \omega_0 a$),

$$\omega_k^2 \to c^2k^2 - \gamma_0^2 < 0, \;\Rightarrow\; k_n = \frac{\pi}{L}n < \frac{\gamma_0}{c}.$$

Para que o primeiro modo seja super-amortecido, então $L > L^* = \pi c/\gamma_0$.

Considerando que $N < N^*$, então todos os modos são sub-amortecidos. Neste caso, a solução geral (que generaliza (11)) é

$$\boxed{\psi_j(t) = \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(\bar{\omega}_n t) + b_n \sin(\bar{\omega}_n t)\right) e^{-\gamma_0 t} \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right),} \tag{16}$$

onde

$$\bar{\omega}_n = \sqrt{4\omega_0^2 \sin\left(\frac{\pi n}{2(N+1)}\right) - \gamma_0^2} = \sqrt{\omega_n^2 - \gamma_0^2}.$$

Note que todos os modos são amortecidos na mesma taxa ($\gamma_n = \gamma_0$), e que o sistema continua dispersivo ($\omega_k \neq ck$).

Os coeficientes são determinados pelas condições iniciais:

$$\psi_j(0) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right), \;\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^{N} \psi_j(0) \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right).$$

O coeficiente $b_{n,j}$ é mais envolvente por causa da exponencial amortecedora.

$$\dot{\psi}_j(0) = \sum_{j=1}^{N} (\bar{\omega}_n b_n - \gamma_0 a_n) \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right),$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\bar{\omega}_n}\left[\gamma_0 a_n + \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^{N} \dot{\psi}_j(0) \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right)\right].$$

Considere agora que há uma força externa atuando no ℓ-ésimo oscilador igual a $F_\ell(t) = F_0 \sin(\Omega t)$. Qual é o movimento geral do sistema?

$$\ddot{\psi}_j = \omega_0^2 \left(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}\right) - 2\gamma_0 \dot{\psi}_j + \delta_{j,\ell} \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) \, .$$

A solução da equação homogênea ($F_0 = 0$) foi obtida anteriormente. Resta-nos obter a solução particular (que vamos chamar de $\phi_j(t)$). Assumindo

$$\phi_j(t) = \sum_{n=1}^{N} \left(\tilde{A}_n \cos(\varepsilon_n t) + \tilde{B}_n \sin(\varepsilon_n t)\right) \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right),$$

então

$$\ddot{\phi}_j = \sum_n -\varepsilon_n^2 \left(\tilde{A}_n \cos(\varepsilon_n t) + \tilde{B}_n \sin(\varepsilon_n t)\right) \sin(k_n R_j)$$

$$-2\gamma \dot{\phi}_{0j} = \sum_n -2\gamma_0 \varepsilon_n \left(\tilde{B}_n \cos(\varepsilon_n t) - \tilde{A}_n \sin(\varepsilon_n t)\right) \sin(k_n R_j)$$

$$\omega_0^2 \left(\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}\right) = \sum_n -\omega_0^2 \left(\tilde{A}_n \cos(\varepsilon_n t) + \tilde{B}_n \sin(\varepsilon_n t)\right) 4 \sin^2\left(\frac{k_n a}{2}\right) \sin(k_n R_j)$$

$$\frac{F_0}{m}\delta_{j,\ell} = \sum_n \tilde{F}_n \sin\left(k_n R_j\right) = \frac{2F_0}{m\left(N+1\right)} \sum_n \sin\left(k_n R_\ell\right) \sin\left(k_n R_j\right).$$

Agrupando todos esses termos na equação de movimento,

$$\begin{aligned}
&\sum_n \left(2\gamma_0 \varepsilon_n \tilde{B}_n - \left(\varepsilon_n^2 - 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{k_n a}{2}\right)\right) \tilde{A}_n\right) \cos\left(\varepsilon_n t\right) \times \sin\left(k_n R_j\right) \\
&+ \sum_n \left(-2\gamma_0 \varepsilon_n \tilde{A}_n - \left(\varepsilon_n^2 - 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{k_n a}{2}\right)\right) \tilde{B}_n\right) \sin\left(\varepsilon_n t\right) \times \sin\left(k_n R_j\right) \\
&= \sum_n \tilde{F}_n \sin\left(\Omega t\right) \times \sin\left(k_n R_j\right). \qquad (17)
\end{aligned}$$

Então temos uma equação algébrica para cada modo normal k_n. Para cada n, temos que

$$\varepsilon_n = \Omega \text{ (todos modos normais oscilam com mesma frequência externa)},$$

$$\begin{aligned}
2\gamma_0 \Omega \tilde{B}_n - \left(\Omega^2 - \omega_n^2\right) \tilde{A}_n &= 0, \\
-2\gamma_0 \Omega \tilde{A}_n - \left(\Omega^2 - \omega_n^2\right) \tilde{B}_n &= \tilde{F}_n.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\tilde{A}_n = \frac{-2\gamma_0 \Omega \tilde{F}_n}{\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\gamma_0 \Omega\right)^2} \text{ e } \tilde{B}_n = \frac{\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right) \tilde{F}_n}{\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\gamma_0 \Omega\right)^2}.$$

Aqui vemos as ressonâncias. As amplitudes

$$\tilde{C}_n = \sqrt{\tilde{A}_n^2 + \tilde{B}_n^2} = \frac{\tilde{F}_n}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\gamma_0\Omega\right)^2}}$$

são máximas quando a frequência de oscilação externa se iguala a uma das frequências naturais de oscilação $\Omega = \omega_n = 2\omega_0 \sin\left(k_n a/2\right)$.

A solução geral é então

$$\psi_j = \sum_{n=1}^{N} \left[\left(a_n \cos\left(\bar{\omega}_n t\right) + b_n \sin\left(\bar{\omega}_n t\right)\right) e^{-\gamma_0 t} + \left(\tilde{A}_n \cos\left(\Omega t\right) + \tilde{B}_n \sin\left(\Omega t\right)\right)\right] \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right),$$

com as condições iniciais determinando os coeficientes a_n e b_n.

$$\psi_j\left(0\right) = \sum_{n=1}^{N} \left[a_n + \tilde{A}_n\right] \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right), \;\Rightarrow\; a_n = -\tilde{A}_n + \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^{N} \psi_j\left(0\right) \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right).$$

$$\dot{\psi}_j\left(0\right) = \sum_{j=1}^{N} \left(\bar{\omega}_n b_n - \gamma_0 a_n + \Omega \tilde{B}_n\right) \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right),$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\bar{\omega}_n} \left[\gamma_0 a_n - \Omega \tilde{B}_n + \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^{N} \dot{\psi}_j\left(0\right) \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right)\right].$$

Para longos tempos $\gamma_0 t \gg 1$, apenas a solução particular sobrevive. Neste caso,

$$\psi_j\left(t\right) \to \phi_j\left(t\right) = \sum_{n=1}^{N} \tilde{C}_n \cos\left(\Omega t + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{\pi n j}{N+1}\right) = C_j \cos\left(\Omega t + \eta_j\right).$$

Como a amplitude C_j varia com a distância ao (ℓ-ésimo) oscilador forçado longe de ressonâncias ($\Omega > 2\omega_0$)?

Note que $\tilde{C}_n \propto \tilde{F}_n$ é uma função "larga" em k_n porque $F \propto \delta_{j,\ell}$ é "estreita" no espaço real. Por esse motivo, a largura de $\tilde{C}_n$ é dominada pela Lorentziana. Dessa maneira tomando N muito grande, há $\delta n \approx \frac{\sqrt{\gamma_0 \Omega}}{\omega_0}$ modos normais sendo levados em conta em torno do modo normal próximo de Ω. Portanto, esperamos que $C_{j-\ell} \sim e^{-|j-\ell|\delta n}$.

O que muda se um nova força harmônica (de mesma frequência e amplitude) atua num outro oscilador?

$$\ddot{\psi}_j = \omega_0^2 \left(\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}\right) - 2\gamma_0 \dot{\psi}_j + \delta_{j,\ell_A} \frac{F_0}{m} \sin\left(\Omega t\right) + \delta_{j,\ell_B} \frac{F_0}{m} \sin\left(\Omega t + \eta\right).$$

Seguimos os mesmos passos do problema anterior. A diferença vem da série de Fourier (no espaço) da nova força.

$$\delta_{j,\ell_A} + \delta_{j,\ell_B} = \vec{A}_j \cdot \left(\vec{A}_{\ell_A} + \vec{A}_{\ell_B}\right) = \frac{2}{N+1} \sum_n \left[\sin\left(k_n R_{\ell_A}\right) + \sin\left(k_n R_{\ell_B}\right)\right] \sin\left(k_n R_j\right).$$

Ou seja,

$$F_{\text{ext},j}\left(t\right) = \sum_n \left(\tilde{F}_{\text{s},n} \sin\left(\Omega t\right) + \tilde{F}_{\text{c},n} \cos\left(\Omega t\right)\right) \sin\left(k_n R_j\right),$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\text{s},n} &= \frac{2F_0}{m\left(N+1\right)} \left[\sin\left(k_n R_{\ell_A}\right) + \cos\eta \sin\left(k_n R_{\ell_B}\right)\right] \\ \tilde{F}_{\text{c},n} &= \frac{2F_0}{m\left(N+1\right)} \left[\sin\eta \sin\left(k_n R_{\ell_B}\right)\right] \end{aligned}$$

As equações de movimento são quase idênticas às anteriores (17):

$$\sum_n \left(2\gamma_0\varepsilon_n\tilde{B}_n - \left(\varepsilon_n^2 - 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{k_n a}{2}\right)\right)\tilde{A}_n\right)\cos\left(\varepsilon_n t\right) \times \sin\left(k_n R_j\right)$$

$$+\sum_n \left(-2\gamma_0\varepsilon_n\tilde{A}_n - \left(\varepsilon_n^2 - 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{k_n a}{2}\right)\right)\tilde{B}_n\right)\sin\left(\varepsilon_n t\right) \times \sin\left(k_n R_j\right)$$

$$= \sum_n \left(\tilde{F}_{\mathrm{s},n}\sin\left(\Omega t\right) + \tilde{F}_{\mathrm{c},n}\cos\left(\Omega t\right)\right) \times \sin\left(k_n R_j\right).$$

Portanto,

$$\varepsilon_n = \Omega \text{ (todos modos normais oscilam com mesma frequência externa)},$$

$$\begin{aligned} 2\gamma_0\Omega\tilde{B}_n - \left(\Omega^2 - \omega_n^2\right)\tilde{A}_n &= \tilde{F}_{\mathrm{c},n}, \\ -2\gamma_0\Omega\tilde{A}_n - \left(\Omega^2 - \omega_n^2\right)\tilde{B}_n &= \tilde{F}_{\mathrm{s},n}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\tilde{A}_n = \frac{\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)\tilde{F}_{\mathrm{c},n} - 2\gamma_0\Omega\tilde{F}_{\mathrm{s},n}}{\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\gamma_0\Omega\right)^2} \text{ e } \tilde{B}_n = \frac{2\gamma_0\Omega\tilde{F}_{\mathrm{c},n} + \left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)\tilde{F}_{\mathrm{s},n}}{\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\gamma_0\Omega\right)^2}.$$

Aqui vemos as ressonâncias. As amplitudes

$$\begin{aligned} \tilde{C}_n &= \sqrt{\tilde{A}_n^2 + \tilde{B}_n^2} = \sqrt{\frac{\tilde{F}_{\mathrm{c},n}^2 + \tilde{F}_{\mathrm{s},n}^2}{\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)^2 + (2\gamma_0\Omega)^2}}. \\ &= \frac{2F_0}{m\,(N+1)}\sqrt{\frac{\sin^2\left(k_n R_{\ell_A}\right) + 2\cos\eta\sin\left(k_n R_{\ell_A}\right)\sin\left(k_n R_{\ell_B}\right) + \sin^2\left(k_n R_{\ell_B}\right)}{\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)^2 + (2\gamma_0\Omega)^2}}. \end{aligned}$$

As ressonâncias continuam aparecendo quando a frequência externa se igual a alguma frequência natural do sistema $\Omega = \omega_n$. Entretanto, esta ressonâncias pode ser suprimida pelo novo numerador. Por exemplo, considere o caso em que a diferença de fase $\eta = 0$. Neste caso, a amplitude $\tilde{C}_n \propto \sin\left(k_n R_{\ell_A}\right) + \sin\left(k_n R_{\ell_B}\right)$ que pode ser nula.

Escreva o movimento geral de uma corda perfeitamente elástica de tamanho L presa pelas suas extremidades.

Substituindo

$$\psi\left(x,t\right)=\int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\left(\tilde{\psi}_{+}\left(k\right)e^{i\left(kx-\omega_{k}t\right)}+\tilde{\psi}_{-}\left(k\right)e^{i\left(kx+\omega_{k}t\right)}\right)$$

na equação de onda

$$\frac{\partial^{2}\psi}{\partial x^{2}}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\psi}{\partial t^{2}}=0,$$

encontramos que $\omega_{k}=ck$. O fato de $\psi\in\mathbb{R}$, implica que $\tilde{\psi}_{\pm}\left(k\right)=\tilde{\psi}_{\pm}^{*}\left(k\right)$. Dessa maneira, a transformada de Fourier reduz para

$$\psi\left(x,t\right)=\int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\left(\tilde{\psi}_{+,\mathrm{s}}\left(k\right)\sin\left(kx-\omega_{k}t-\varphi_{k}\right)+\tilde{\psi}_{-,\mathrm{s}}\left(k\right)\sin\left(kx+\omega_{k}t+\eta_{k}\right)\right),$$

com $\tilde{\psi}_{\pm,\mathrm{s}}\in\mathbb{R}$.

A condição de contorno $\psi\left(0,t\right)=0$ diz que as ondas planas contra-propagantes de mesma frequência devem ter mesma amplitude e que as fases $\eta_{k}=\varphi_{k}$.

$$\begin{aligned}0 &= \int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\left(\tilde{\psi}_{-,\mathrm{s}}\left(k\right)\sin\left(\omega t+\eta_{k}\right)-\tilde{\psi}_{+,\mathrm{s}}\left(k\right)\sin\left(\omega_{k}t+\varphi_{k}\right)\right)\\ \left(\text{fazendo }\eta_{k}=\varphi_{k}\right)\Rightarrow &= \int\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\left(\tilde{\psi}_{-,\mathrm{s}}\left(k\right)-\tilde{\psi}_{+,\mathrm{s}}\left(k\right)\right)\sin\left(\omega_{k}t+\varphi_{k}\right).\end{aligned}$$

Logo, $\tilde{\psi}_{-,\mathrm{s}}(k) = \tilde{\psi}_{+,\mathrm{s}}(k)$. Dessa maneira, a transformada de Fourier se reduz para

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \tilde{\psi}_{+,\mathrm{s}}(k) \left(\sin\left(kx - \omega_k t - \varphi_k\right) + \sin\left(kx + \omega_k t + \varphi_k\right)\right) \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \tilde{\psi}(k) \sin(kx) \sin\left(\omega_k t + \gamma_k\right),
\end{aligned}$$

que são ondas estacionárias. (Note que podemos restringir a soma para $k > 0$ sem perda de generalidade.)

A condição de contorno $\psi(L,t) = 0$ quantiza os k's.

$$0 = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \tilde{\psi}(k) \sin(kL) \sin\left(\omega_k t + \gamma_k\right), \;\Rightarrow\; kL = \pi n, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*.$$

Para os outros k's, não é possivel satisfazer a condição de contorno para todo t e, portanto, $\tilde{\psi}(k) = 0$ se $kL \neq \pi n$. Desta forma, a integral passa a ser uma somatória:

$$\psi(x,t) \to \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}_n \sin(k_n x) \sin\left(\omega_n t + \gamma_n\right), \text{ com } k_n L = \pi n \text{ e } \omega_n = c k_n.$$

Escreva o movimento geral de uma membrana perfeitamente elástica presa nas bordas de um retângulo de dimensões $L_x \times L_y$.

A equação de onda correspondente é

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

Em termos de sua transformada,

$$\psi\left(x, y, t\right) = \int \frac{\mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \mathrm{d}\omega}{\left(2\pi\right)^3} \tilde{\psi}\left(k_x, k_y, \omega\right) e^{i\left(k_x x + k_y y - \omega t\right)}.$$

Portanto,

$$\int \frac{\mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \mathrm{d}\omega}{\left(2\pi\right)^3} \left[-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right] \tilde{\psi}\left(k_x, k_y, \omega\right) e^{i\left(k_x x + k_y y - \omega t\right)} = 0.$$

Ou seja, $\tilde{\psi}$ é não nulo apenas quando

$$\omega^2 = c^2 k^2 = c^2\left(k_x^2 + k_y^2\right), \text{ onde } \vec{k} = \left(k_x, k_y\right).$$

Dessa forma, a transformada simplifica para

$$\begin{aligned}
\psi\left(x, y, t\right) &= \int \frac{\mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y}{\left(2\pi\right)^2} \left(\tilde{\psi}_+\left(k_x, k_y\right) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t\right)} + \tilde{\psi}_-\left(k_x, k_y\right) e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega_k t\right)}\right), \\
&= \int \frac{\mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y}{\left(2\pi\right)^2} \tilde{\psi}_{+,\mathrm{s}} \sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t + \varphi_k\right) + \tilde{\psi}_{-,\mathrm{s}} \sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega_k t + \eta_k\right)
\end{aligned}$$

com

$$\omega_{\vec{k}} = ck = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \text{ e } \tilde{\psi}_{\pm}\left(\vec{k}\right) = \tilde{\psi}^*_{\mp}\left(-\vec{k}\right) \text{ (garantindo que } \psi \in \mathbb{R}).$$

Como no exercício anterior, as condições de contorno quantizam os possíveis k_x's e k_y's além de restringir as amplitudes das ondas planas a tal ponto de torná-las ondas estacionárias. Logo,

$$\begin{aligned} \psi\left(\vec{r}, t\right) &\rightarrow \sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{n_x,n_y} \sin\left(k_{x,n_x}x\right) \sin\left(k_{y,n_y}y\right) \sin\left(\omega_{n_x,n_y}t + \gamma_n\right) \\ &= \sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty} \left[a_{n_x,n_y} \cos\left(\omega_{n_x,n_y}t\right) + b_{n_x,n_y} \sin\left(\omega_{n_x,n_y}t\right)\right] \sin\left(k_{x,n_x}x\right) \sin\left(k_{y,n_y}y\right), \end{aligned}$$

$$\text{com } k_{x,n_x} = \frac{\pi n_x}{L_x},\ k_{y,n_y} = \frac{\pi n_y}{L_y} \text{ e } \omega_{n_x,n_y} = c\sqrt{k_{x,n_x}^2 + k_{y,n_y}^2}.$$

As condições iniciais determinam os coeficientes

$$\begin{aligned} a_{n,m} &= \frac{4}{L_x L_y}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\psi\left(x, y, 0\right) \sin\left(k_{x,n}x\right) \sin\left(k_{y,m}y\right), \\ b_{n,m} &= \frac{4}{\omega_{m,n} L_x L_y}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\dot{\psi}\left(x, y, 0\right) \sin\left(k_{x,n}x\right) \sin\left(k_{y,m}y\right). \end{aligned}$$