Ondas

1 – Conceito

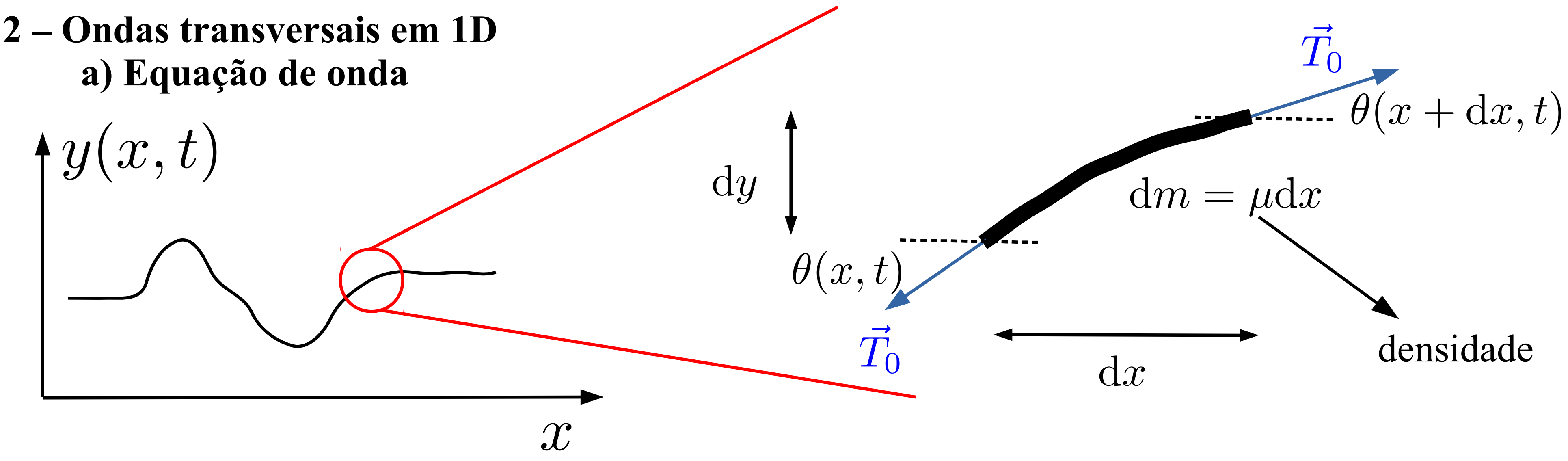
- Efeito coletivo de muitas partículas (interagentes) num meio material (em resposta a uma perturbação)
- Transporte de energia e informação
- Não há transporte de massa

Exemplos:

Som → ondas de densidade (onda longitudinal)
Ondas no mar → ondas de gravidade (onda transversal)
Luz → ondas eletromagnéticas (onda transversal)

2 – Ondas transversais em 1D

a) Equação de onda



Aproximações: pequenas perturbações $\rightarrow$ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \tan\theta \ll 1$

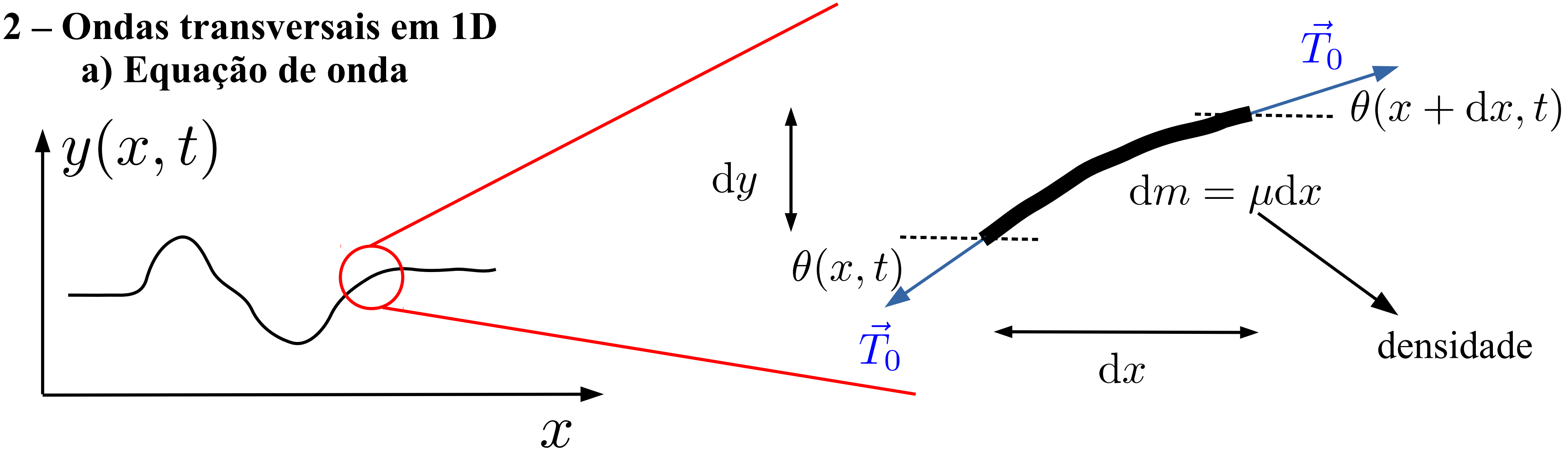
$T(x) = T_0$

movimentos verticais, apenas

2a. lei de Newton $\rightarrow$ $\mathrm{d}m\ddot{y} = \mu \mathrm{d}x \ddot{y} = T_0[\sin\theta(x+\mathrm{d}x,t) - \sin\theta(x,t)]$

2 – Ondas transversais em 1D

a) Equação de onda



Aproximações: pequenas perturbações $\rightarrow$ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \tan\theta \ll 1, \Rightarrow \sin\theta \approx \tan\theta$

2a. lei de Newton $\rightarrow$ $\dfrac{\mu}{T_0}\ddot{y} = \dfrac{\sin\theta(x+\mathrm{d}x,t) - \sin\theta(x,t)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\sin\theta(x,t) \approx \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Eq. de onda $\rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$ onde $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$

2 – Ondas transversais em 1D

b) Soluções – ondas propagantes

$$y(x,t) = f(x \pm ct) = f(z)$$

Prova: $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}, \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \pm c\frac{\partial f}{\partial z}, \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Logo, $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{c^2}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

2 – Ondas transversais em 1D
b) Soluções – ondas propagantes

$$y(x,t) = f(x \pm ct) = f(z)$$

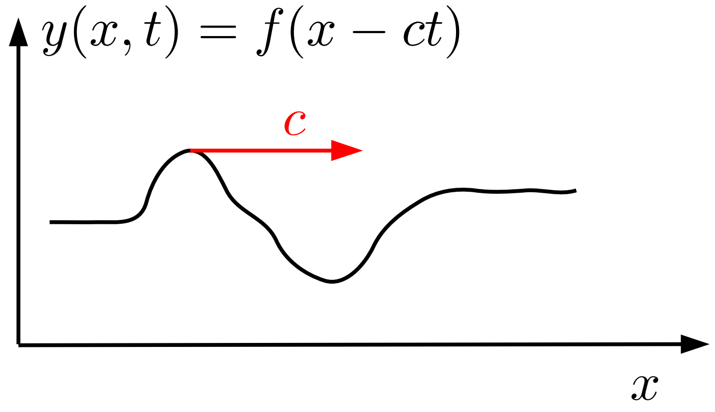
Interpretação:

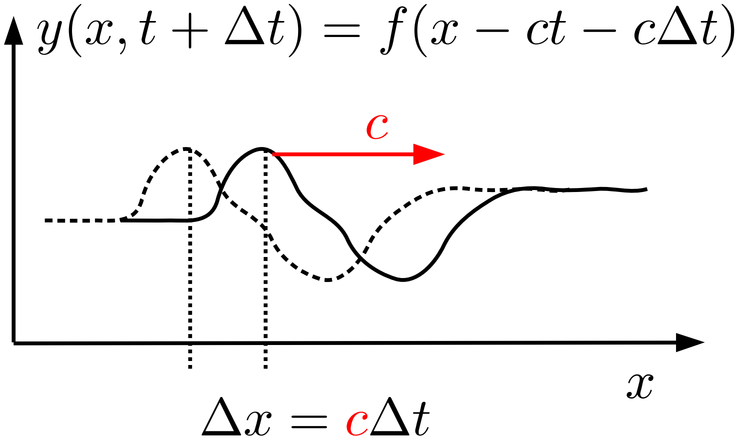
$$y(x,t) = f(x - ct)$$

Onda propagante para a direita

$$y(x,t) = f(x + ct)$$

Onda propagante para a esquerda





2 – Ondas transversais em 1D

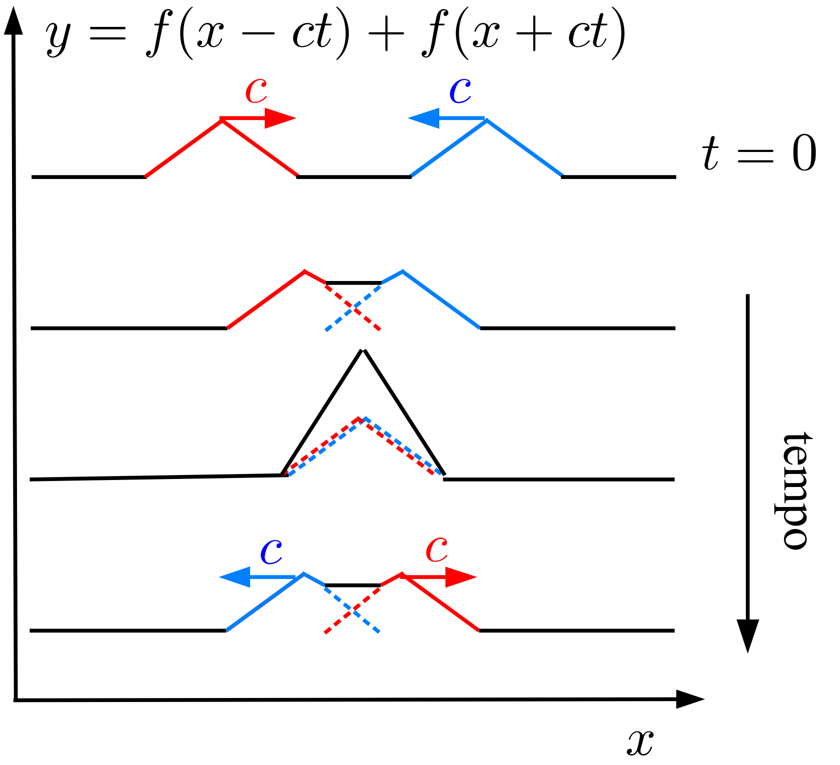
c) Solução geral – superposição (equação de onda é linear)

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= f_1(x-ct) + f_2(x-ct) + \cdots + g_1(x+ct) + \dots \\
&= f(x-ct) + g(x+ct)
\end{aligned}
$$

Consequências:

- Interferência (destrutiva, construtiva)
- Batimentos
- Ondas estacionárias
- Difração
- ...

Exemplo:



2 – Ondas transversais em 1D

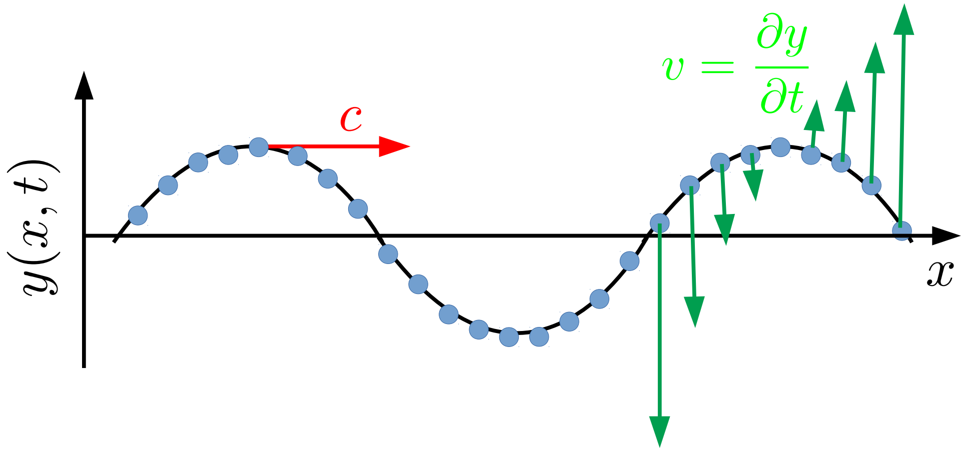
c) Solução geral – interpretação de c^2 na equação de onda

Onda propagante para a direita

$$y(x,t) = f(x-ct)$$

Note que $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial y}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

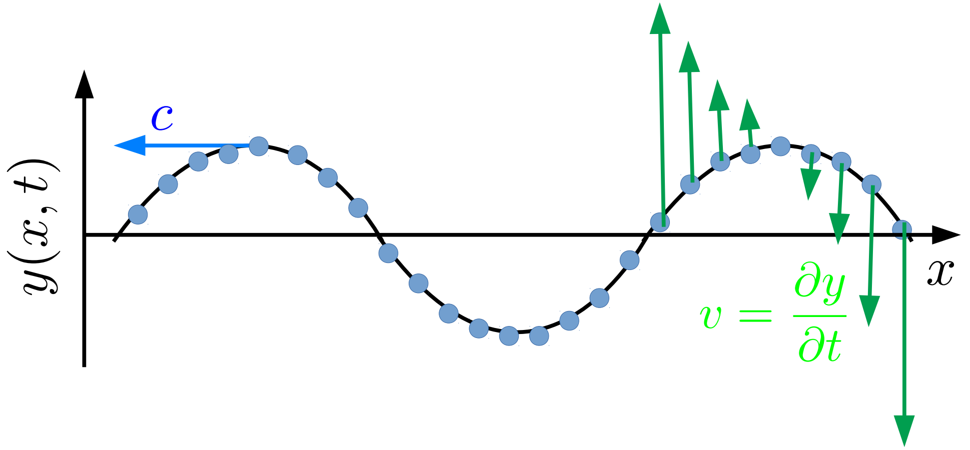


Onda propagante para a esquerda

$$y(x,t) = g(x+ct)$$

Note que $\dfrac{\partial y}{\partial x} = +\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial y}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(+\frac{1}{c}\frac{\partial y}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



2 – Ondas transversais em 1D

d) Ondas harmônicas

$$y(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t + \phi) = A\cos(k(x \pm ct) + \phi)$$

amplitude

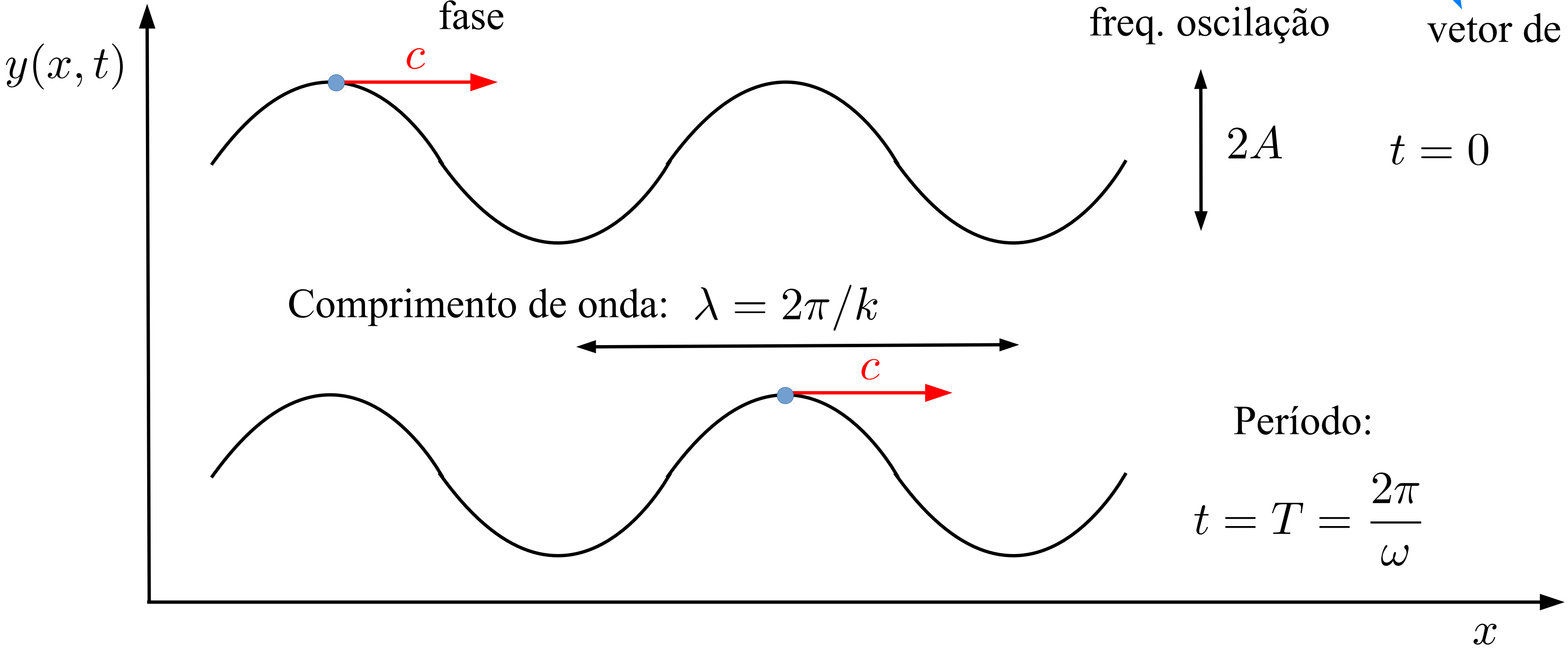
fase

Relação de dispersão linear:

onde $\boxed{\omega = ck}$

freq. oscilação

vetor de onda



Comprimento de onda: $\lambda = 2\pi/k$

Período:

$$t = T = \frac{2\pi}{\omega}$$

2 – Ondas transversais em 1D
e) Solução geral e as condições iniciais

$$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

Configuração inicial de posição:

$$y_0(x) = y(x,0) = f(x) + g(x)$$

Configuração inicial de velocidade:

$$v_0(x) = \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = c\left(g'(x) - f'(x)\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(x) - f(x) &= c^{-1}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z - (g_{-\infty} - f_{-\infty}) \\ &= c^{-1}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z + \text{const} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ const = 0, sem prejuízos para $y(x,t)$

Solução:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}y_0(x) - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z \\ g(x) &= \frac{1}{2}y_0(x) + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z \end{aligned}}$$

2 – Ondas transversais em 1D

e) Solução geral e as condições iniciais

Exemplo 1:

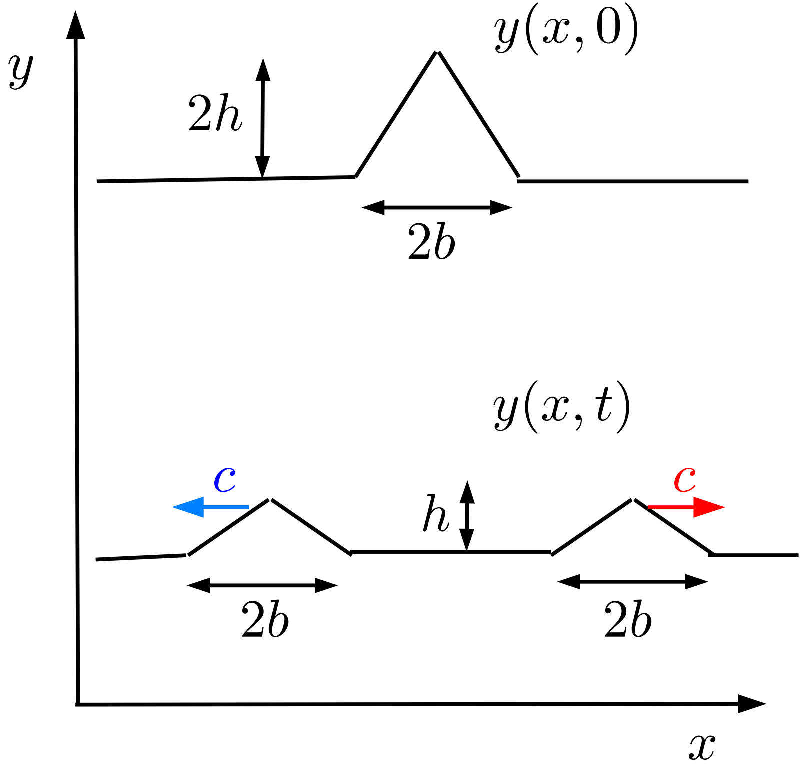
Configuração inicial de posição:

$$y_0(x) = y(x,0) = f(x) + g(x)$$

Configuração inicial de velocidade:

$$v_0(x) = 0 = c\,(g'(x) - f'(x))$$

Solução:
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} y_0(x) \\ g(x) &= \frac{1}{2} y_0(x) \end{aligned}$$



$$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) = \frac{1}{2}(y_0(x-ct) + y_0(x+ct))$$

2 – Ondas transversais em 1D
e) Solução geral e as condições iniciais

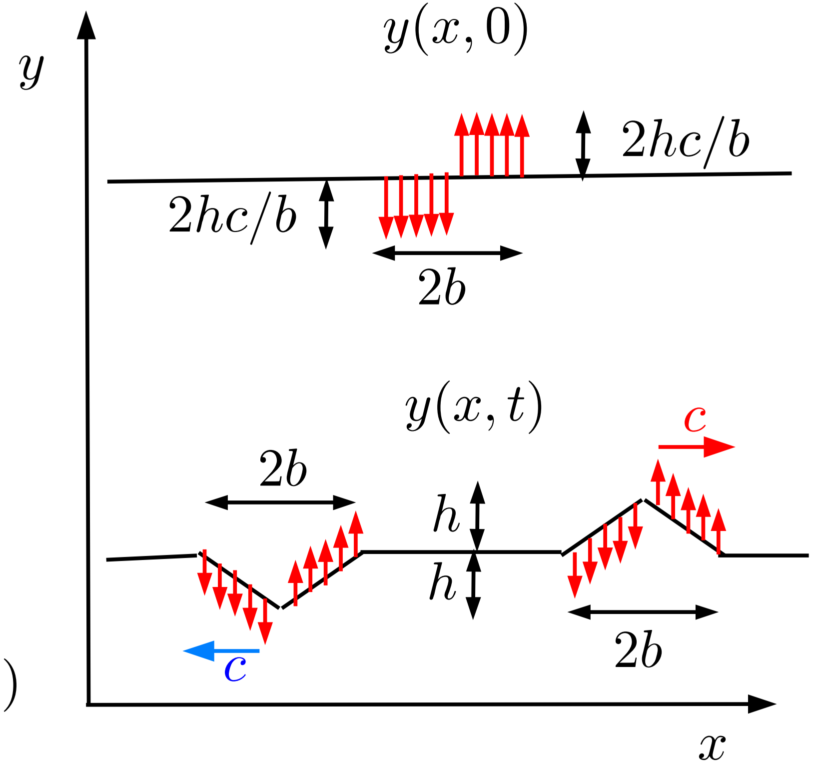
Exemplo 2:

Configuração inicial de posição:

$$y_0(x) = 0 = f(x) + g(x)$$

Configuração inicial de velocidade:

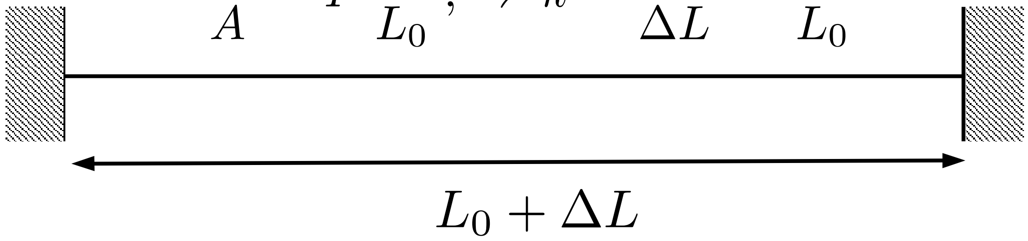
$$v_0(x) = c\,(g'(x) - f'(x))$$



Solução:
$$f(x) = -\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}y_0(x)$$
$$g(x) = \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}y_0(x)$$
$$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) = \frac{1}{2}(y_0(x-ct) - y_0(x+ct))$$

2 – Ondas transversais em 1D
f) Potência transmitida

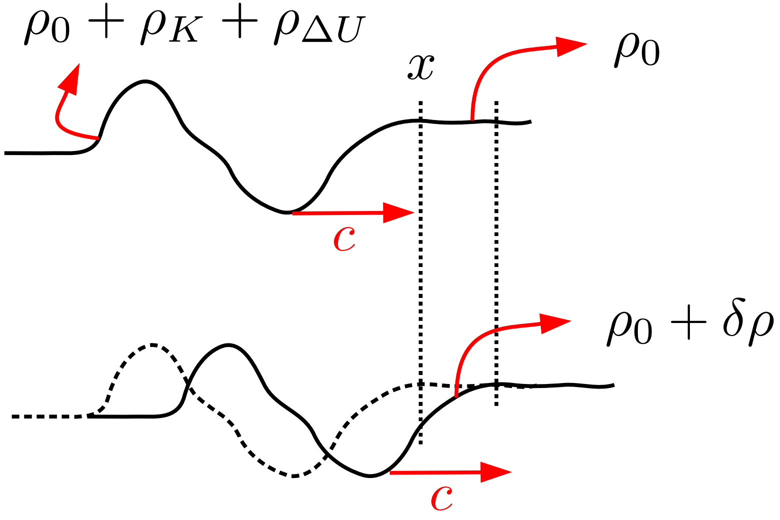
$$\frac{T_0}{A} = Y\frac{\Delta L}{L_0}, \Rightarrow k = \frac{T_0}{\Delta L} = \frac{YA}{L_0}$$



Densidade de energia elástica na corda estática (energia de fundo):

$$\rho_0 = \frac{E_0}{L_0 + \Delta L} \approx \frac{E_0}{L_0} = \frac{k(\Delta L)^2}{2L_0} = \frac{T_0^2}{2AY}$$

Energia transmitida por uma onda propagante:



Energia da onda é aquela acima da energia de fundo E_0, igual à energia cinética das partículas mais a energia potencial elástica extra

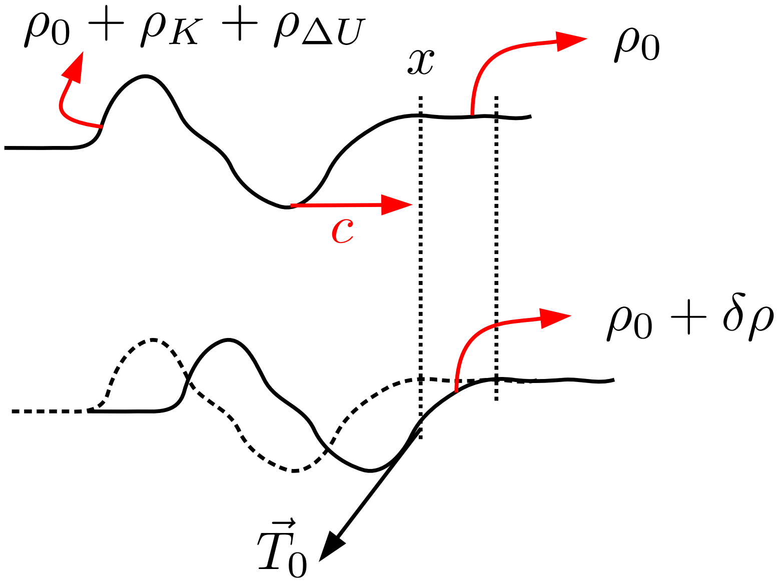
Fluxo de energia atravessando o ponto x para direita. A energia que atravessa o ponto x está relacionada à energia da onda.

2 – Ondas transversais em 1D

f) Potência transmitida

Potência transmitida: $P(x,t) = \dfrac{\text{Energia atravessando o ponto } x}{\text{tempo}}$ (fluxo de energia)

$$= \frac{\text{trabalho da força do lado esquerdo sobre o direito}}{\text{tempo}}$$



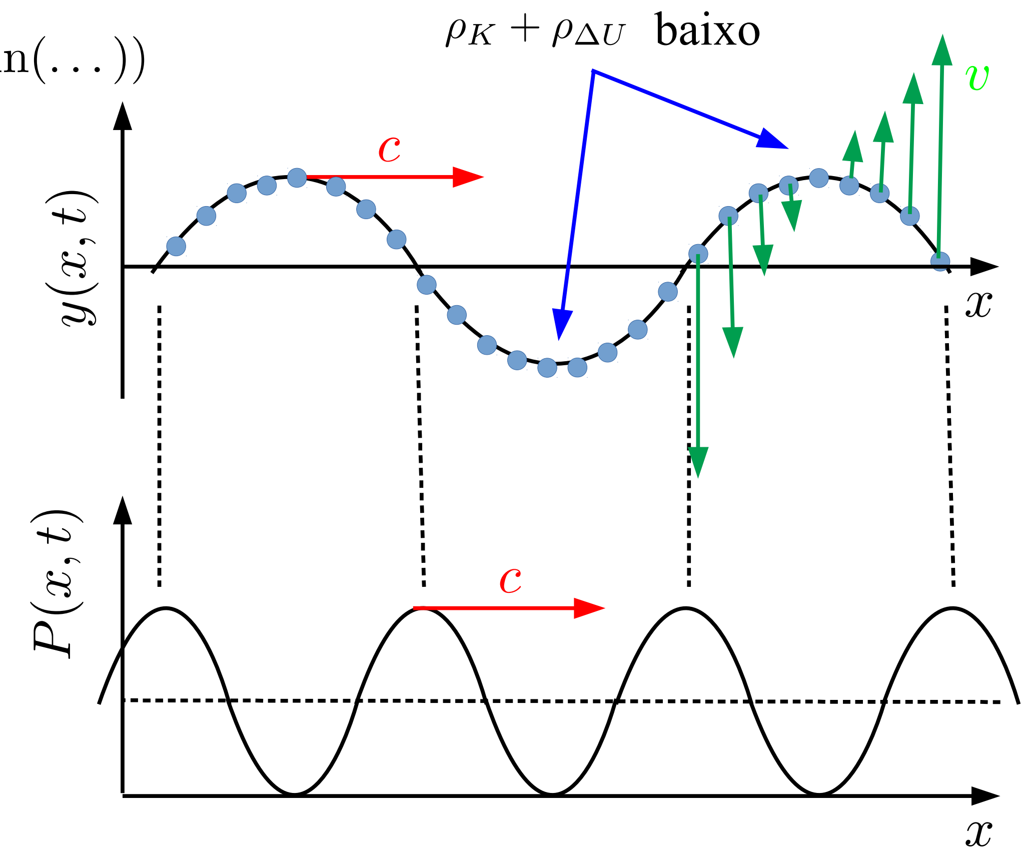
$$P(x,t) = \vec{F}\cdot\vec{v} = F_y v_y = -T_0 \sin\theta \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\boxed{P(x,t) \approx -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}}$$

2 – Ondas transversais em 1D
f) Potência transmitida

Potência transmitida por uma onda harmônica: $y(x,t) = A\cos(kx \mp \omega t + \phi)$

$$P(x,t) \approx -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t} = -T_0(-kA\sin(\dots))(\pm\omega A\sin(\dots))$$
$$= \pm T_0 k\omega A^2 \sin^2(kx \mp \omega t + \phi)$$
$$= \pm\frac{1}{2}\mu c\omega^2 A^2\,(1 - \cos(2(kx \mp \omega t + \phi)))$$



Potência média transmitida:

$$\overline{P}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T P(x,t)\mathrm{d}t$$
$$= \pm\frac{1}{2}\mu c\omega^2 A^2$$

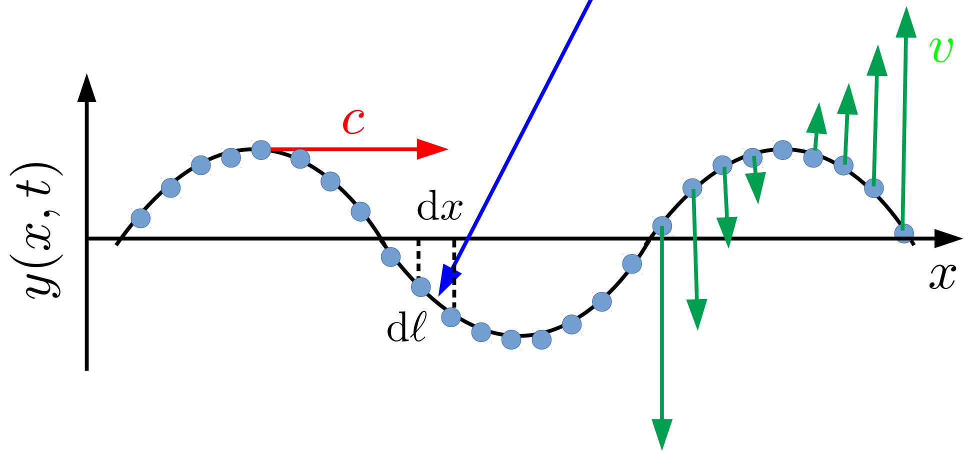
2 – Ondas transversais em 1D

f) Potência transmitida (visão alternativa)

Densidade de energia:

$$\mathrm{d}K = \frac{1}{2}\mathrm{d}m v^2 \quad \text{e} \quad \mathrm{d}U = T_0(\mathrm{d}\ell - \mathrm{d}x)$$

Trabalho da força elástica para esticar a corda quando da passagem da onda



$$\rho_K(x,t) = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

Lembre-se que:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan\theta \ll 1$$

$$\mathrm{d}U = T_0\left(\sqrt{\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}x^2} - \mathrm{d}x\right) = T_0\mathrm{d}x\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1\right) \approx \frac{1}{2}T_0\mathrm{d}x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

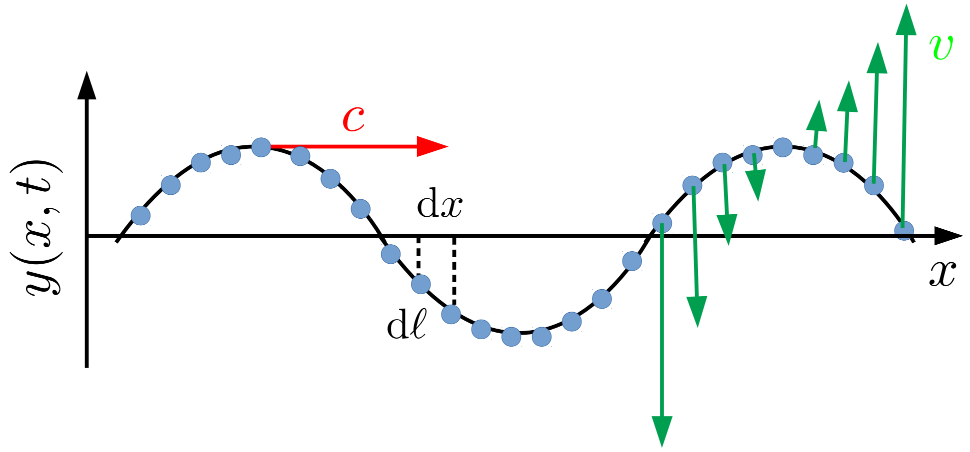
$$\rho_{\Delta U}(x,t) = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$\boxed{\rho_{\text{extra}} = \rho_K + \rho_{\Delta U} = \frac{1}{2}\mu c^2\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right]}$$

2 – Ondas transversais em 1D

f) Potência transmitida (visão alternativa)

Igualdade entre as energias cinéticas e elásticas:



Equação de onda:

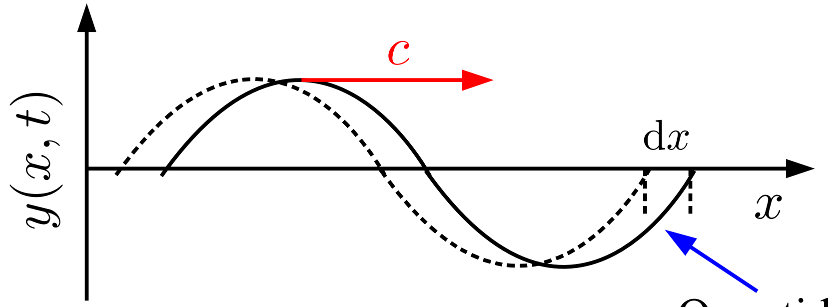
$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = 0$$

$$\rho_{\text{extra}} = \rho_K + \rho_{\Delta U} = \frac{1}{2}\mu c^2 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right] = \boxed{2\rho_K = 2\rho_{\Delta U}} = \mu c^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

2 – Ondas transversais em 1D

f) Potência transmitida (visão alternativa)

Fluxo de energia:



Equação de onda:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = 0, \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \mp\frac{1}{c}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Quantidade de energia que atravessou $= \mathrm{d}E_{\mathrm{extra}} = \rho_{\mathrm{extra}}\mathrm{d}x$

$$P(x,t) = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{extra}}}{\mathrm{d}t} = \rho_{\mathrm{extra}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm c\rho_{\mathrm{extra}} = \pm 2c\rho_{\Delta U} = \mu c^2 \times \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \times \left[\pm c\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right] = -T_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

Como esperado, recuperamos o resultado obtido via $P(x,t) = \vec{F}\cdot\vec{v} = F_y v_y = -T_0\dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial t}$