Aula passada

Eq. de onda: $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$ (velocidade da onda)

Soluções: $$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

Condições iniciais:
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}y_0\left(x\right) - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z \\ g(x) &= \frac{1}{2}y_0\left(x\right) + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Potência transmitida: $$P(x,t) = -T_0\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Onda harmônica: $$y(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t + \phi) = A\cos(k(x \pm ct) + \phi)$$

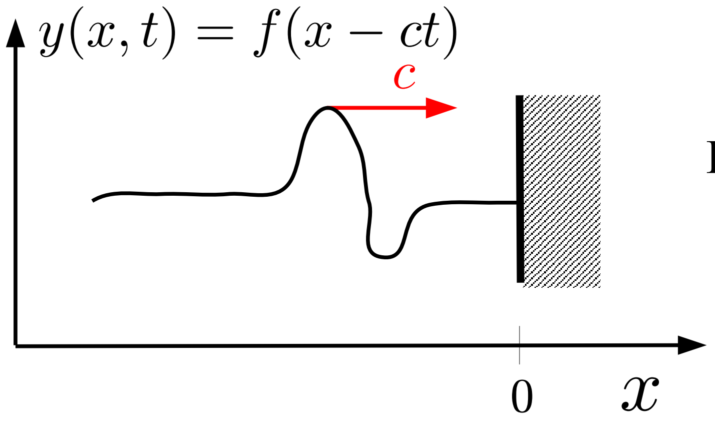
$$\lambda = 2\pi/k$$
$$T = 2\pi/\omega$$
$$\omega = ck$$

Potência transmitida pela onda harmônica:

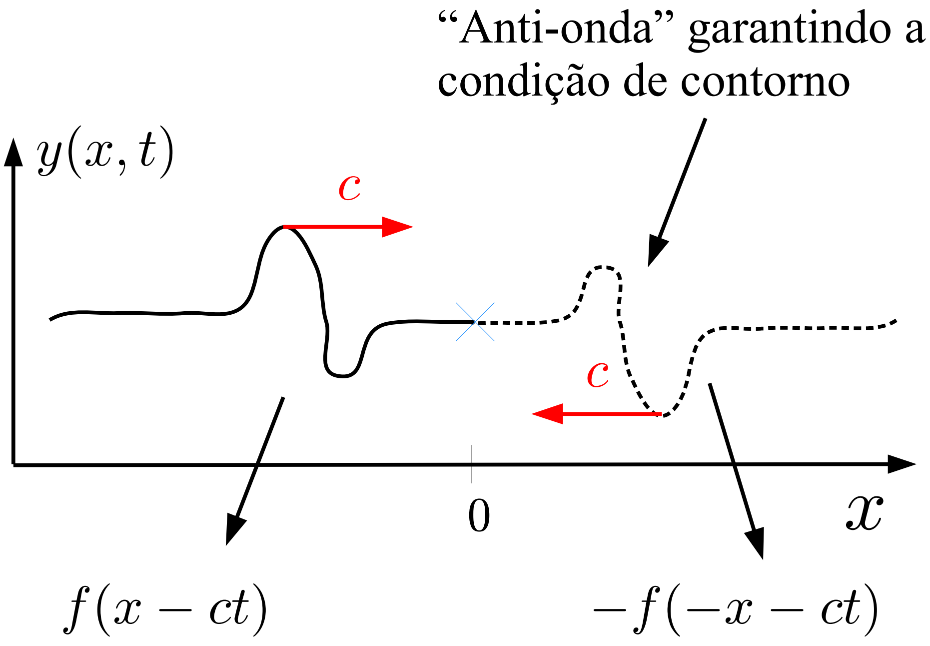
$$P(x,t) = \pm\mu c\omega^2 A^2 \sin^2(kx \mp \omega t + \phi)$$

$$\overline{P}(x) = \tfrac{1}{T}\int_0^T P(x,t)\mathrm{d}t = \pm\tfrac{1}{2}\mu c\omega^2 A^2$$

2 – Ondas transversais em 1D
g) Reflexão em interfaces fixas



Equivalente
$\rightarrow$



A eq. de onda é válida para toda corda exceto na interface. Logo, as soluções de ondas propagantes estão garantidas para todo x<0.

Para todos os efeitos, resolver a eq. de Newton para todas as partículas da corda incluindo a interação com a interface é equivalente a resolver a eq. de onda com a condição de contorno $y(x = 0,t) = 0$, para todo t.

Logo,

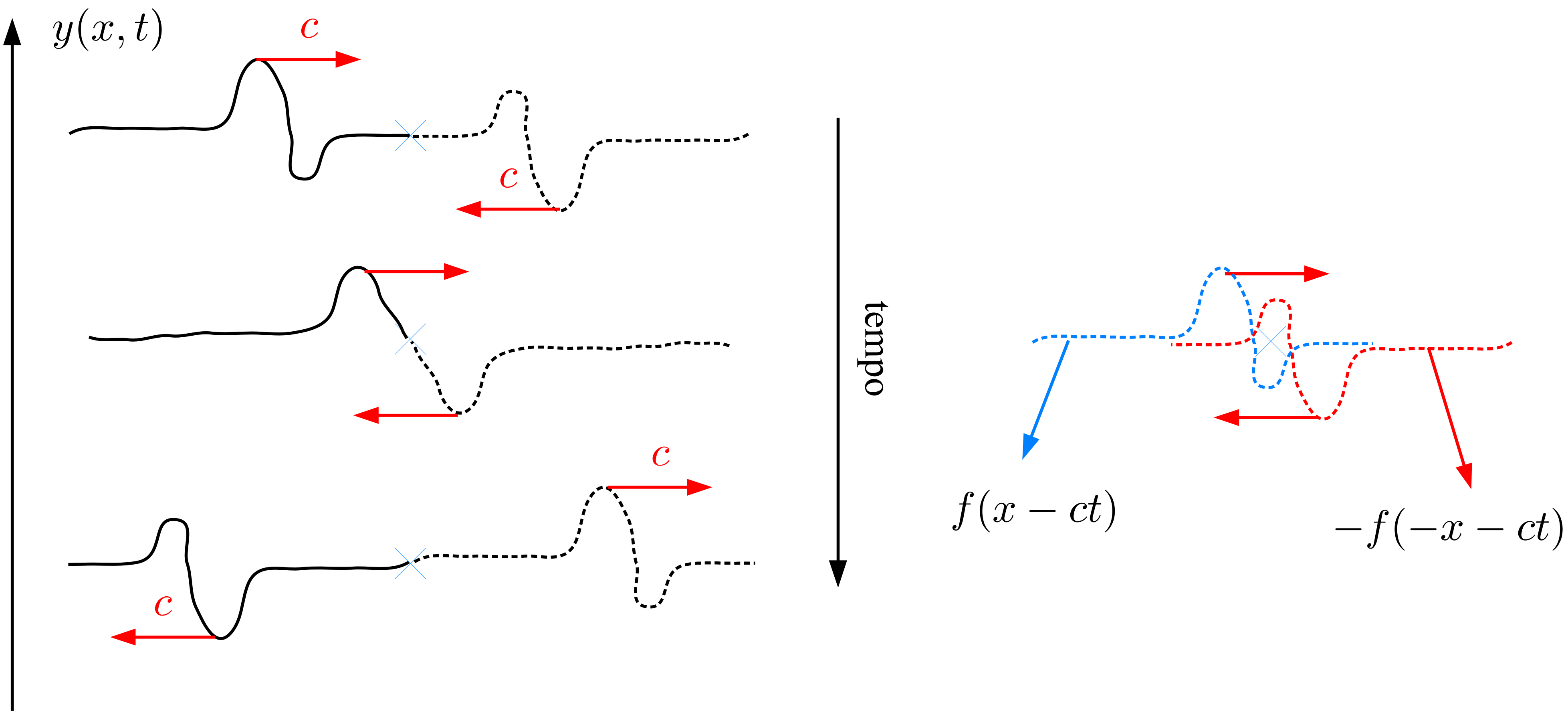
$$y(x,t) = f(x - ct) - f(-(x + ct))$$

garantindo a cond. de contorno

$$y(0,t) = f(-ct) - f(-ct) = 0,\ \forall t$$

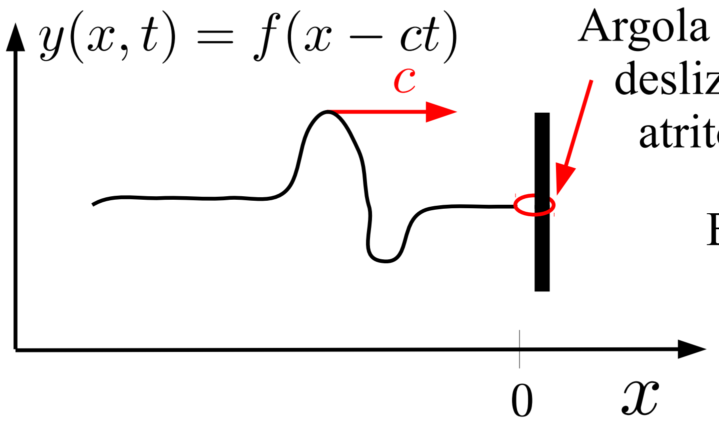
2 – Ondas transversais em 1D

g) Reflexão em interfaces fixas



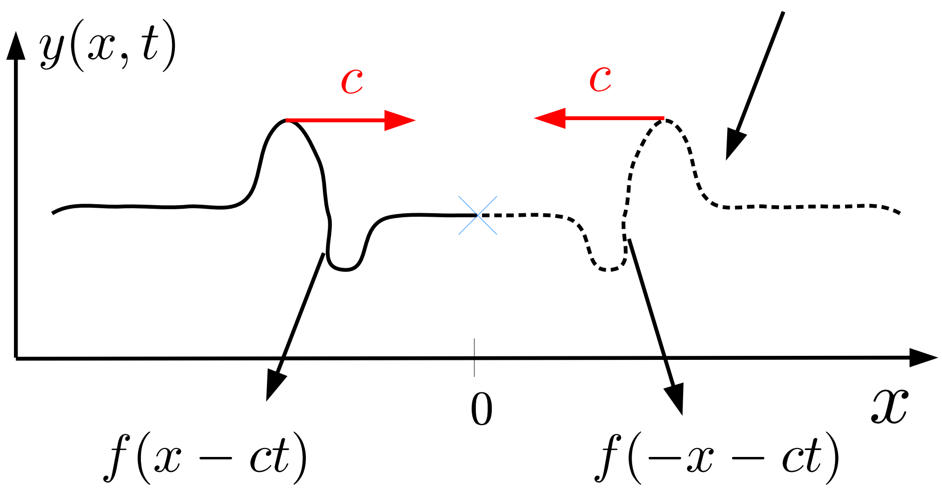
2 – Ondas transversais em 1D

g) Reflexão em interfaces abertas



Argola sem massa deslizando sem atrito

Equivalente $\rightarrow$



Qual a condição de contorno correspondente?

$$F_y + F_{\text{at}} = m_{\text{arg}}\ddot{y} = 0 = F_y = -T_0 \sin\theta(x=0,t)$$

$$\Rightarrow \sin\theta(0,t) \approx \tan\theta(0,t) = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \forall t$$

Logo,

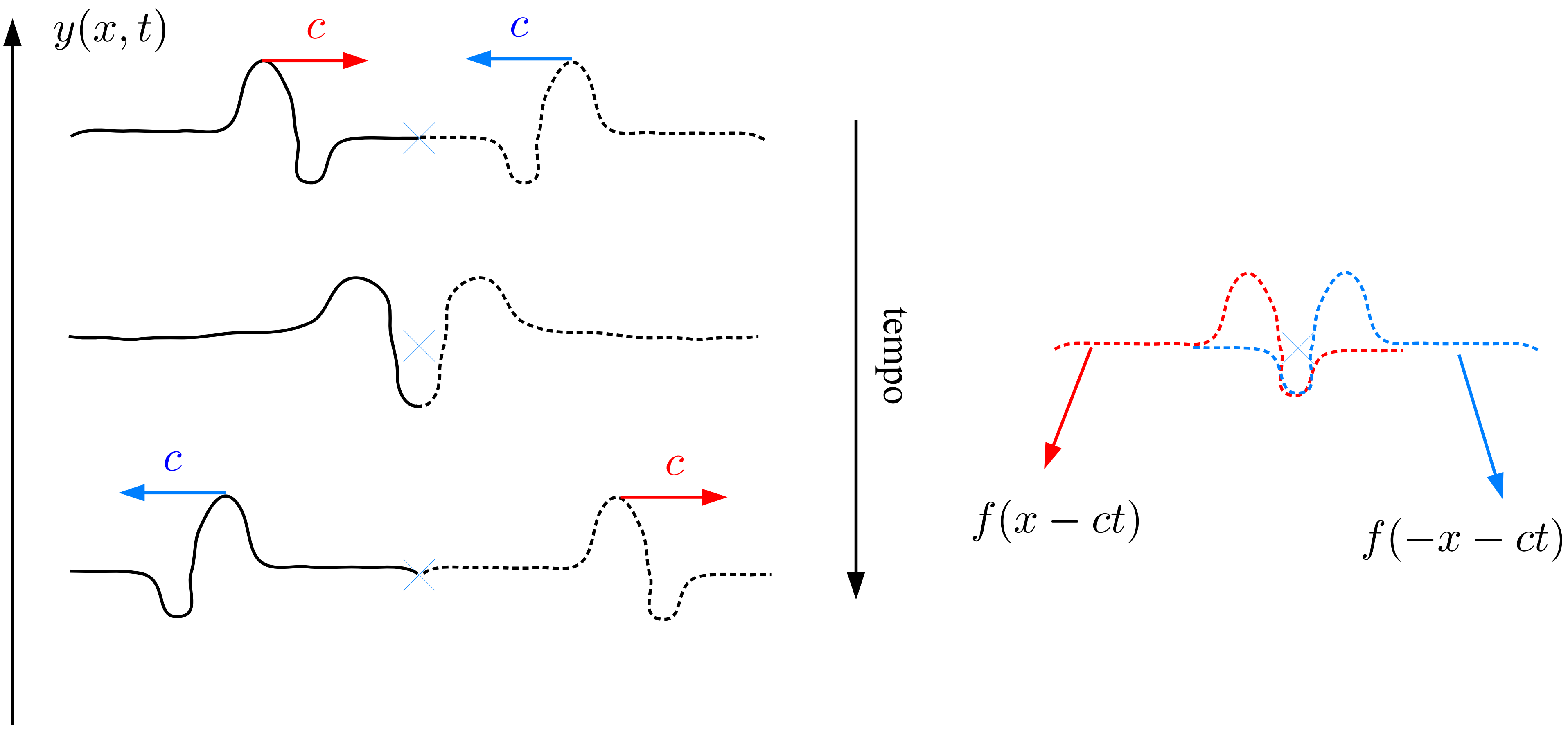
$$y(x,t) = f(x-ct) + f(-(x+ct))$$

garantindo a cond. de contorno

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = f'(-ct) - f'(-ct)) = 0,\ \forall t$$

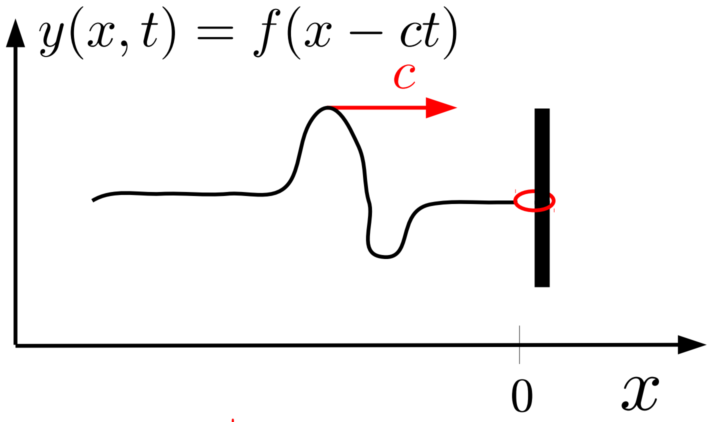
2 – Ondas transversais em 1D

g) Reflexão em interfaces abertas



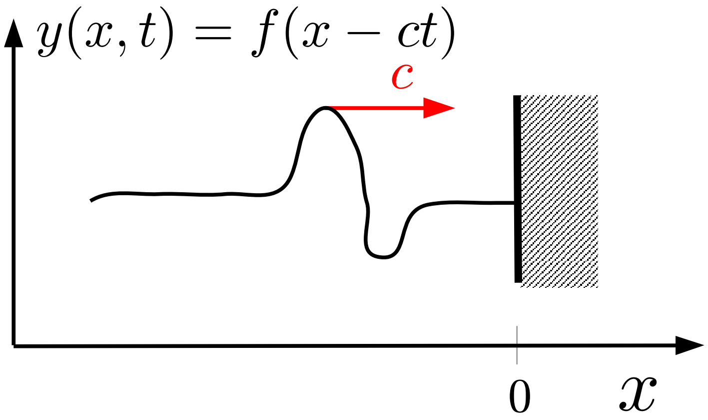
2 – Ondas transversais em 1D

g) Reflexão em interfaces abertas e fechadas



$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \forall t$$

$$y(x,t) = f(x-ct) + f(-(x+ct))$$



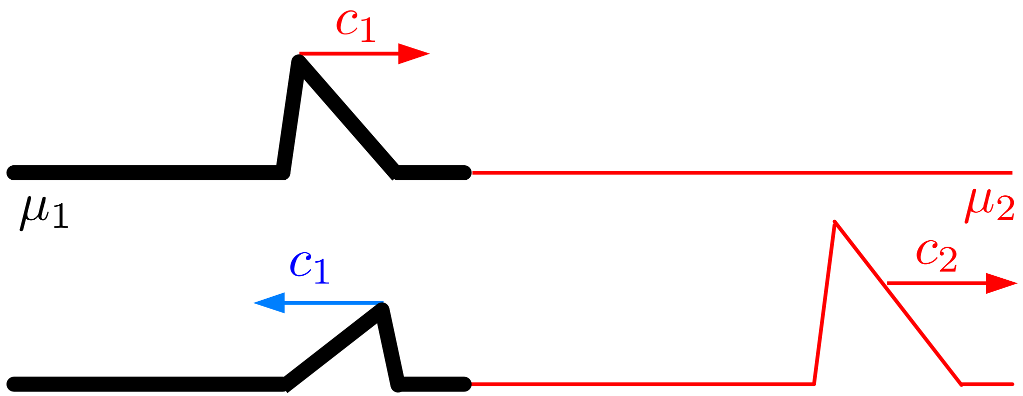
$$y(x=0,t) = 0, \forall t$$

$$y(x,t) = f(x-ct) - f(-(x+ct))$$

Em ambos os casos, a potência transmitida é nula: $P(x,t) = -T_0 \dfrac{\partial y}{\partial x}\dfrac{\partial y}{\partial t} = 0$

2 – Ondas transversais em 1D

h) Reflexão e transmissão: ondas em cordas de densidades distintas



Onda incidente

Ondas transmitida e refletida

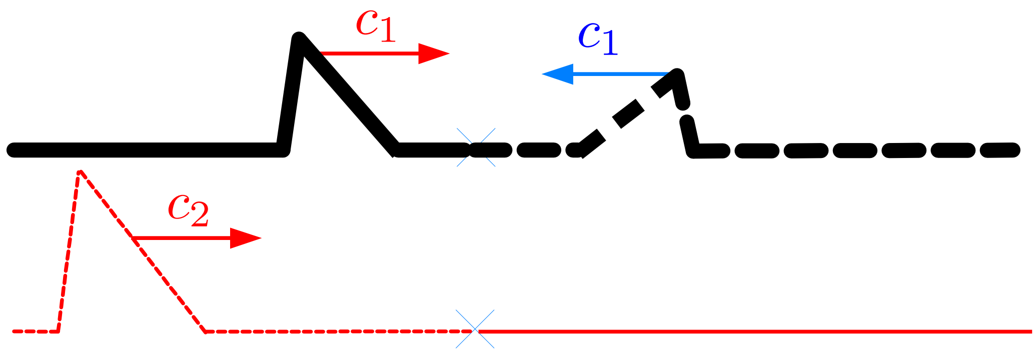
Estratégia de solução:

Considerar 2 cordas homogêneas e infinitas

Satisfazer as condições de contorno correspondentes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

para $x<0$ para $x>0$

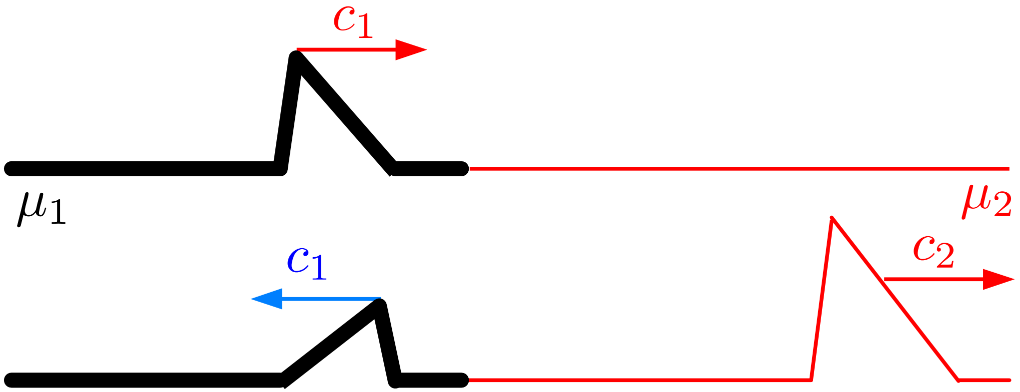


$$y(x,t) = \begin{cases} f_{\mathrm{in}}(x - c_1 t) + g_{\mathrm{R}}(x + c_1 t)\,, & x < 0 \\ f_{\mathrm{T}}(x - c_2 t)\,, & x > 0 \end{cases}$$

Quais são as condições de contorno?

2 – Ondas transversais em 1D

h) Reflexão e transmissão: ondas em cordas de densidades distintas



$$y(x,t) = \begin{cases} f_{\text{in}}\left(x - c_1 t\right) + g_{\text{R}}\left(x + c_1 t\right), & x < 0 \\ f_{\text{T}}\left(x - c_2 t\right), & x > 0 \end{cases}$$

Quais são as condições de contorno?

1 – Continuidade da corda

$$y(x \to 0_-, t) = y(x \to 0_+, t)$$

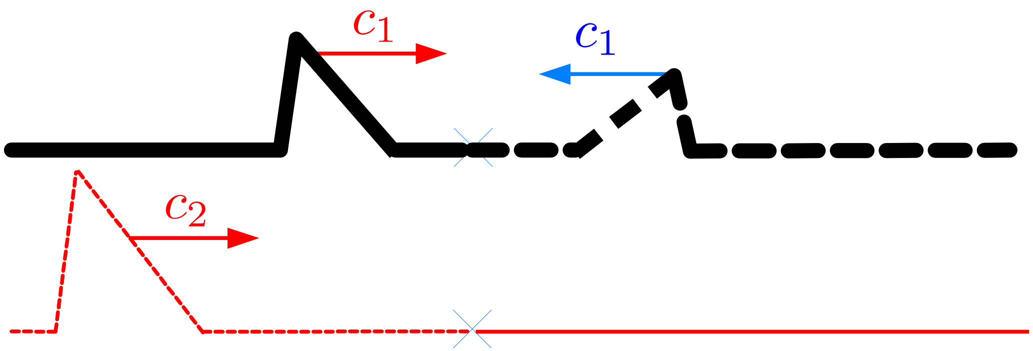
2 – Continuidade da derivada corda (ação e reação)

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x \to 0_-} = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x \to 0_+}$$

Estratégia de solução:

Considerar 2 cordas homogêneas e infinitas

Satisfazer as condições de contorno correspondentes



Encontrar g_{R} e f_{T} correspondentes

2 – Ondas transversais em 1D

h) Reflexão e transmissão: ondas em cordas de densidades distintas

$$y(x,t) = \begin{cases} f_{\mathrm{in}}\left(x - c_1 t\right) + g_{\mathrm{R}}\left(x + c_1 t\right), & x < 0 \\ f_{\mathrm{T}}\left(x - c_2 t\right), & x > 0 \end{cases}$$

1 – Continuidade da corda
$$f_{\mathrm{in}}\left(-c_1 t\right) + g_{\mathrm{R}}\left(c_1 t\right) = f_{\mathrm{T}}\left(-c_2 t\right)$$

2 – Continuidade da derivada corda
(ação e reação)
$$f'_{\mathrm{in}}\left(-c_1 t\right) + g'_{\mathrm{R}}\left(c_1 t\right) = f'_{\mathrm{T}}\left(-c_2 t\right)$$

Integrando no tempo $\Rightarrow \dfrac{-f_{\mathrm{in}}\left(-c_1 t\right) + g_{\mathrm{R}}\left(c_1 t\right)}{c_1} = \dfrac{-f_{\mathrm{T}}\left(-c_2 t\right)}{c_2} + \mathrm{const}$

A constante é $\mathrm{const} = \dfrac{f_{\mathrm{T}}\left(-c_2 t_0\right)}{c_2} + \dfrac{-f_{\mathrm{in}}\left(-c_1 t_0\right) + g_{\mathrm{R}}\left(c_1 t_0\right)}{c_1}$

que deve ser constante para qualquer t_0

Logo, $\mathrm{const} = 0$

$$\Rightarrow f_{\mathrm{in}}\left(-c_1 t\right) - g_{\mathrm{R}}\left(c_1 t\right) = \frac{c_1}{c_2} f_{\mathrm{T}}\left(-c_2 t\right)$$

2 – Ondas transversais em 1D

h) Reflexão e transmissão: ondas em cordas de densidades distintas

$$y(x,t) = \begin{cases} f_{\mathrm{in}}\left(x - c_1 t\right) + g_{\mathrm{R}}\left(x + c_1 t\right), & x < 0 \\ f_{\mathrm{T}}\left(x - c_2 t\right), & x > 0 \end{cases}$$

1 – Continuidade da corda

$$f_{\mathrm{in}}\left(-c_1 t\right) + g_{\mathrm{R}}\left(c_1 t\right) = f_{\mathrm{T}}\left(-c_2 t\right)$$

2 – Continuidade da derivada corda
(ação e reação)

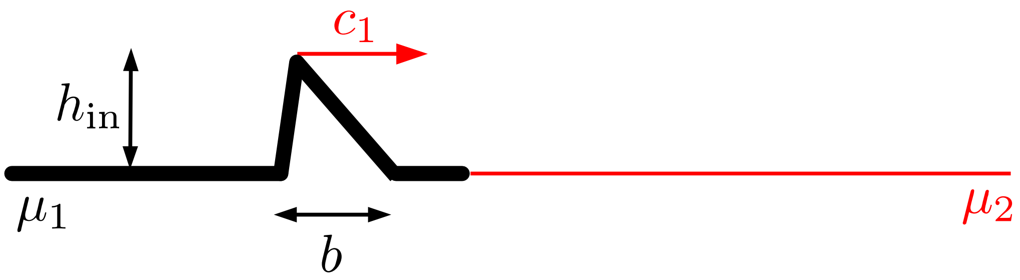
$$f_{\mathrm{in}}\left(-c_1 t\right) - g_{\mathrm{R}}\left(c_1 t\right) = \frac{c_1}{c_2} f_{\mathrm{T}}\left(-c_2 t\right)$$

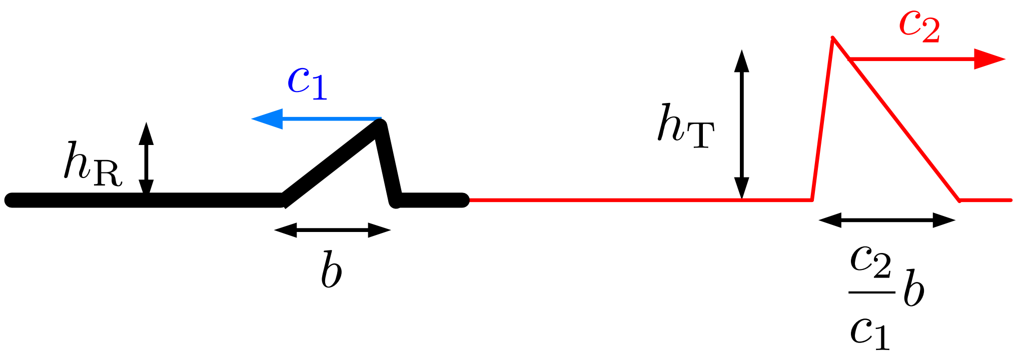
$$f_{\mathrm{T}}\left(-c_2 t\right) = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} f_{\mathrm{in}}\left(-c_1 t\right), \quad \overset{t \to t - \frac{x}{c_2}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{f_{\mathrm{T}}\left(x - c_2 t\right) = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} f_{\mathrm{in}}\left(\frac{c_1}{c_2}\left(x - c_2 t\right)\right)}$$

$$g_{\mathrm{R}}\left(c_1 t\right) = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2} f_{\mathrm{in}}\left(-c_1 t\right), \quad \overset{t \to t + \frac{x}{c_1}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{g_{\mathrm{R}}\left(x + c_1 t\right) = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2} f_{\mathrm{in}}\left(-x - c_1 t\right)}$$

2 – Ondas transversais em 1D

h) Reflexão e transmissão: ondas em cordas de densidades distintas





$$y(x,t) = \begin{cases} f_{\rm in}\left(x - c_1 t\right) + g_{\rm R}\left(x + c_1 t\right), & x < 0 \\ f_{\rm T}\left(x - c_2 t\right), & x > 0 \end{cases}$$

Coeficientes de reflexão e transmissão
(Relações de Fresnel)

$$R \equiv \frac{g_{\rm R}}{f_{\rm in}} = \frac{h_{\rm R}}{h_{\rm in}} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$$

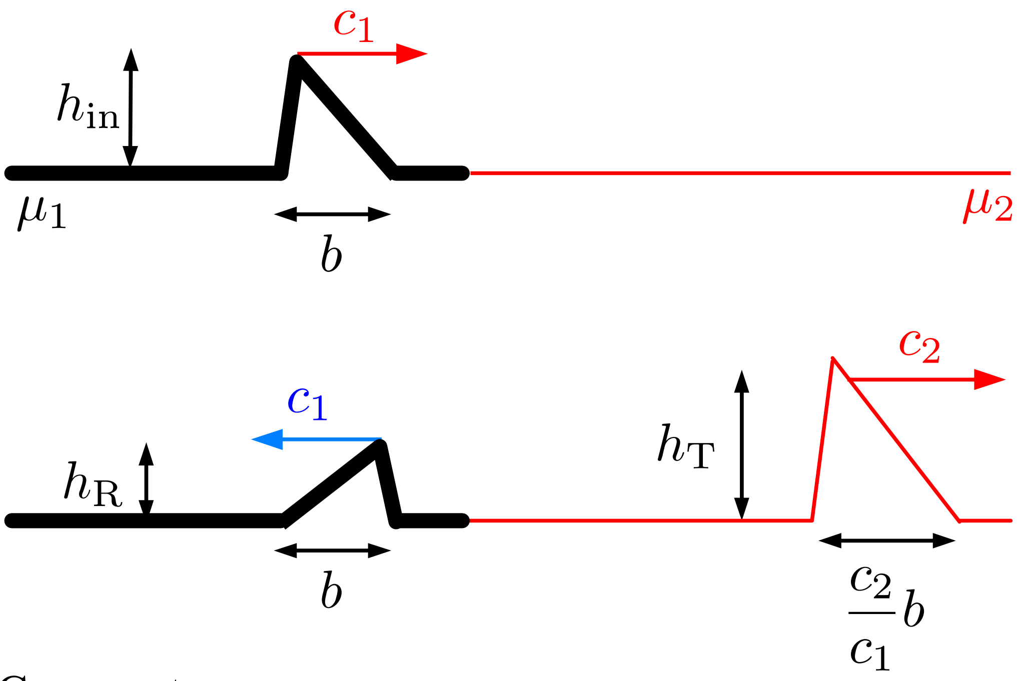
$$T \equiv \frac{f_{\rm T}}{f_{\rm in}} = \frac{h_{\rm T}}{h_{\rm in}} = \frac{2c_2}{c_2 + c_1}$$

$$f_{\rm T}\left(x - c_2 t\right) = \frac{2c_2}{c_1 + c_2} f_{\rm in}\left(\frac{c_1}{c_2}\left(x - c_2 t\right)\right)$$

$$g_{\rm R}\left(x + c_1 t\right) = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2} f_{\rm in}\left(-x - c_1 t\right)$$

2 – Ondas transversais em 1D

h) Reflexão e transmissão: ondas em cordas de densidades distintas



Coeficientes de reflexão e transmissão
(Relações de Fresnel)

$$R \equiv \frac{g_{\text{R}}}{f_{\text{in}}} = \frac{h_{\text{R}}}{h_{\text{in}}} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}$$

$$T \equiv \frac{f_{\text{T}}}{f_{\text{in}}} = \frac{h_{\text{T}}}{h_{\text{in}}} = \frac{2c_2}{c_2 + c_1}$$

$$f_{\text{T}}\left(x - c_2 t\right) = T f_{\text{in}}\left(\frac{c_1}{c_2}\left(x - c_2 t\right)\right)$$

$$g_{\text{R}}\left(x + c_1 t\right) = R f_{\text{in}}\left(-x - c_1 t\right)$$

Casos extremos:

$c_2 = 0$ (interface fechada) $\quad R = -1,\ T = 0$

$c_2 = \infty$ (interface aberta) $\quad R = 1,\ T = 2$

$c_2 = c_1$ (única densidade) $\quad R = 0,\ T = 1$

Conservação de energia (lista de exercícios 3):

$$1 = R^2 + \frac{c_1}{c_2}T^2$$