Aulas passadas: ondas na corda

Eq. de onda: $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Soluções: $$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$ (velocidade da onda)

Condições iniciais:
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}y_0(x) - \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z \\ g(x) &= \frac{1}{2}y_0(x) + \frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{x} v_0(z)\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Potência transmitida: $$P(x,t) = -T_0\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Onda harmônica: $$y(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t + \phi) = A\cos(k(x \pm ct) + \phi)$$

$$\lambda = 2\pi/k$$
$$T = 2\pi/\omega$$
$$\omega = ck$$

Potência transmitida pela onda harmônica:

$$P(x,t) = \pm\mu c\omega^2 A^2 \sin^2(kx \mp \omega t + \phi)$$

$$\overline{P}(x) = \tfrac{1}{T}\int_0^T P(x,t)\mathrm{d}t = \pm\tfrac{1}{2}\mu c\omega^2 A^2$$

1 – Ondas sonoras: ondas de pressão/densidade/deslocamento

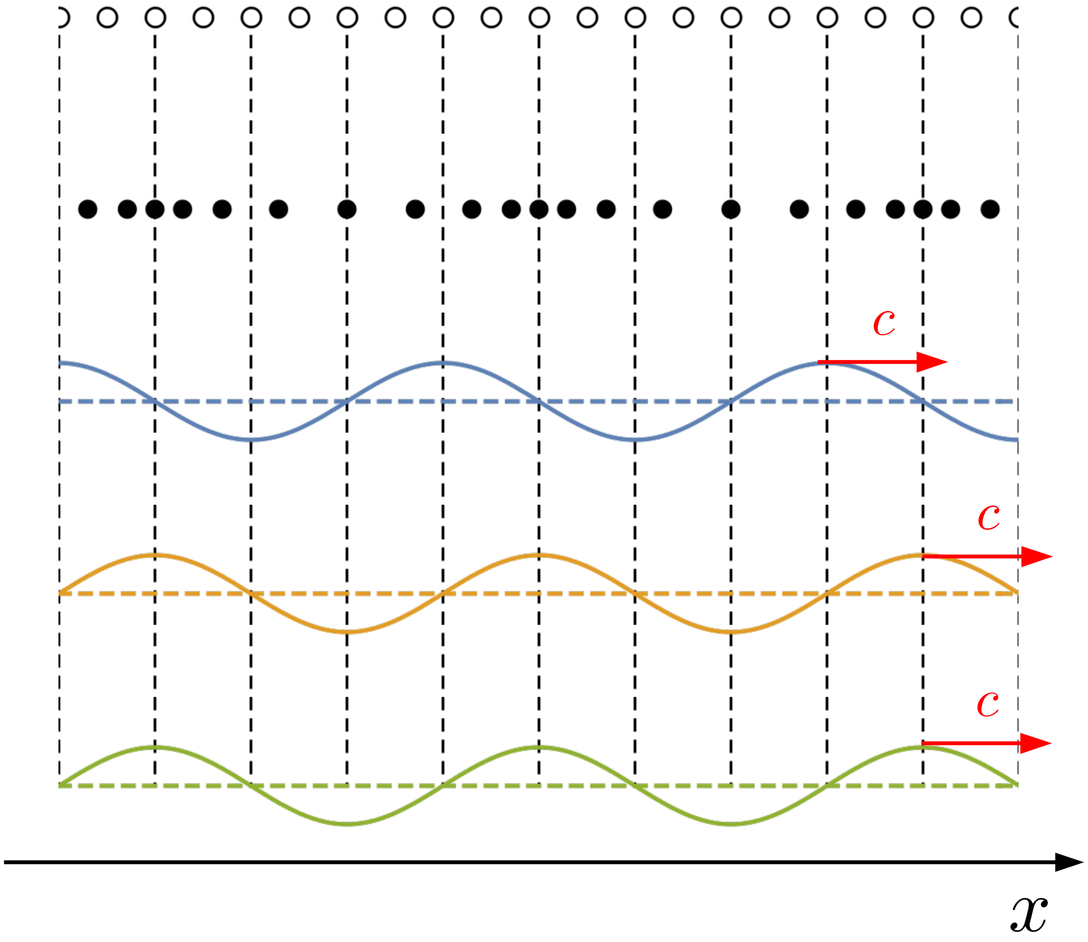
Posição de equilíbrio das partículas do meio:

Posição das partículas em um instante t quando da passagem de uma onda sonora longitudinal em um tubo fino e longo:

Deslocamento das partículas $u(x,t)$:

Variação da pressão $\delta P(x,t)$:

Variação da densidade $\delta\rho(x,t)$:



1 – Ondas sonoras: ondas de pressão/densidade/deslocamento

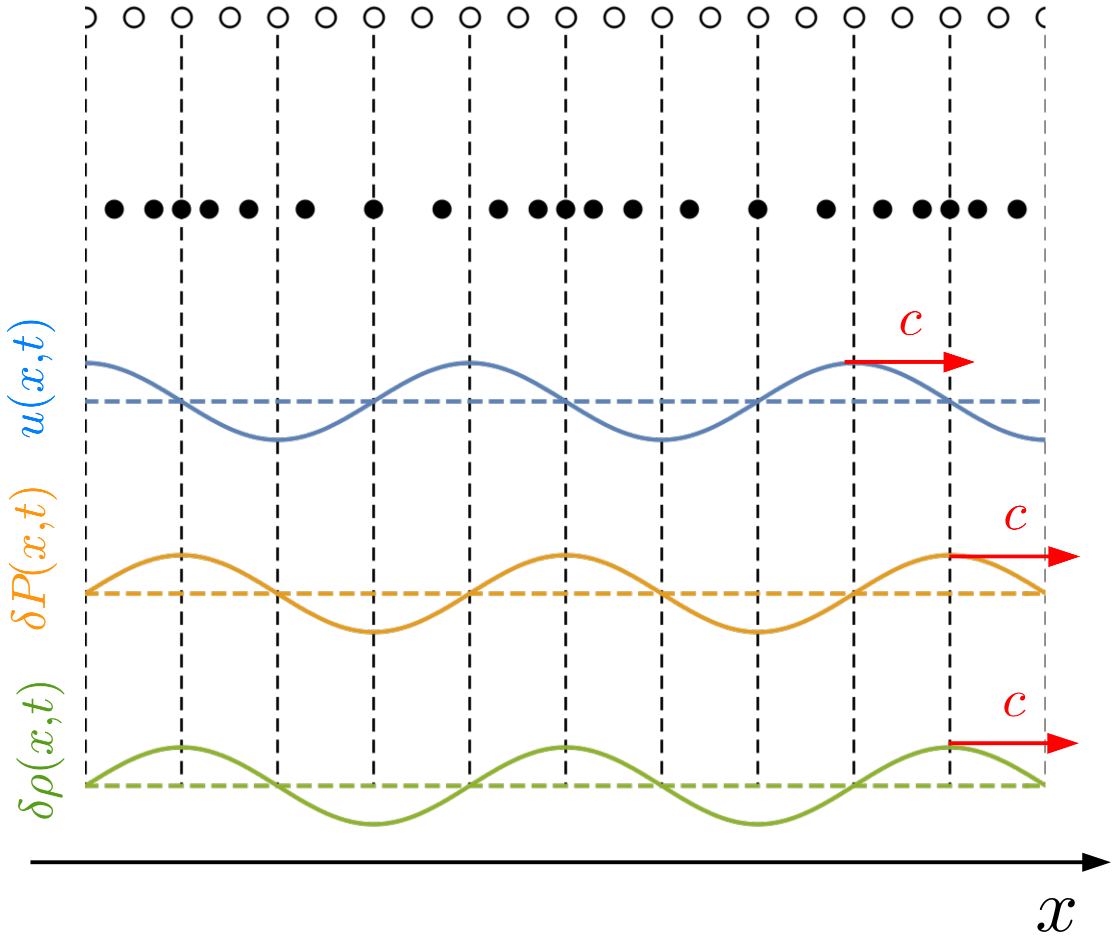
Posição de equilíbrio das partículas do meio:

Posição das partículas em um instante t quando da passagem de uma onda sonora longitudinal em um tubo fino e longo:

Deslocamento não-uniforme das partículas

Gradiente de pressão

Variações não-uniforme de densidade



2 – Equação de onda e a velocidade do som

Hipóteses:

$$P(x,t) = P_0 + \delta P(x,t),\ \text{onde } |\delta P| \ll P_0$$

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \delta \rho(x,t),\ \text{onde } |\delta \rho| \ll \rho_0$$

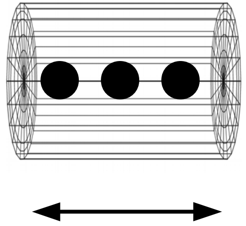
a) Pressão e deslocamento

2ª lei de Newton:

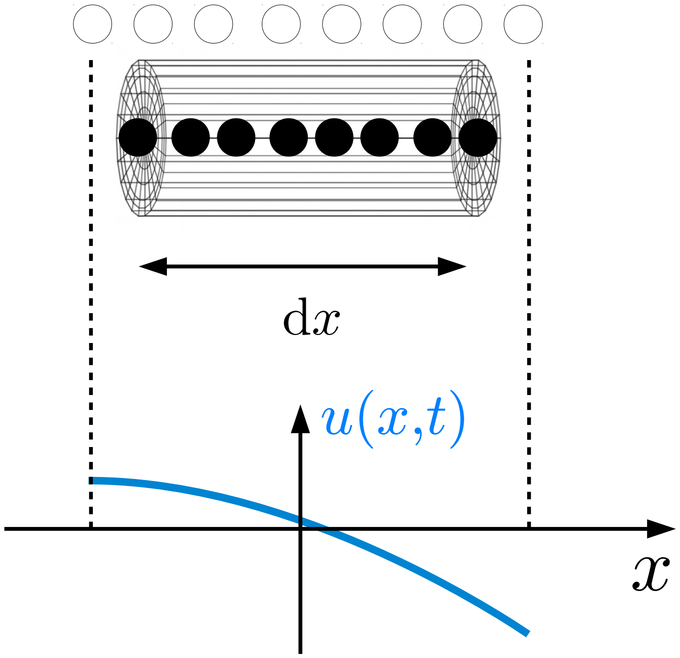
$$[P(x,t) - P(x+\mathrm{d}x,t)]\mathrm{d}A = \rho(x,t)\mathrm{d}A\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \rho(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial x}\delta P \approx \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$



2 – Equação de onda e a velocidade do som



b) Densidade e deslocamento

Geometria: $$\delta\rho(x,t) \approx \frac{\rho_0 u(x,t) - \rho_0 u(x+\mathrm{d}x,t)}{\mathrm{d}A\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\frac{\partial u}{\partial x}}$$

c) Densidade e pressão

Equação de estado do meio:

$$\boxed{\delta P \approx \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\delta\rho \equiv \frac{B}{\rho_0}\delta\rho}$$

Módulo de elasticidade volumétrico

$$B \equiv -V\frac{\partial P}{\partial V} = \rho\frac{\partial P}{\partial \rho}$$

2 – Equação de onda e a velocidade do som

Pressão e deslocamento

$$-\frac{\partial}{\partial x}\delta P = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Densidade e deslocamento

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Densidade e pressão

$$\delta P = \frac{B}{\rho_0}\delta\rho$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\delta P = -B\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right) = B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)}$$

Exemplo: água

$$c = \sqrt{\frac{2.15\,\mathrm{GPa}}{1.00\,\mathrm{T/m^3}}} = 1.46\,\mathrm{km/s}$$

2 – Velocidade do som em gases: modelo de compressão

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)}$$ depende do processo de compressão

Isotérmico:

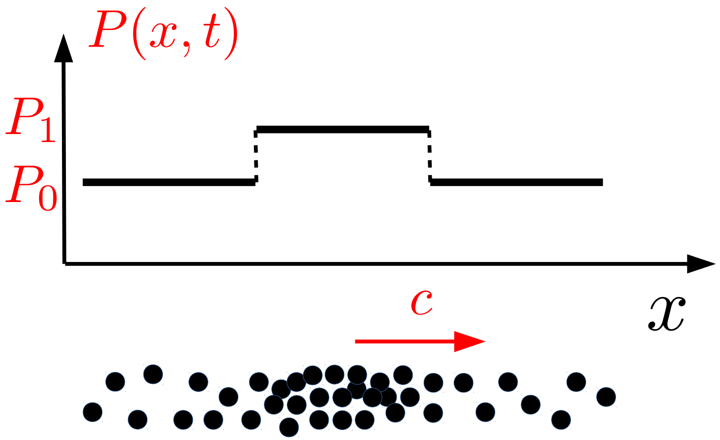
$$\underbrace{PV = \text{const}}_{\text{gás ideal}}, \Rightarrow\ P\rho^{-1} = \text{const}, \Rightarrow\ c = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}} \underbrace{\approx}_{\text{ar em } T=0\ ^\circ\text{C}} \sqrt{\frac{1.00\,\mathrm{atm}}{1.29\,\mathrm{kg/m^2}}} = 280\,\mathrm{m/s}$$

Adiabático:

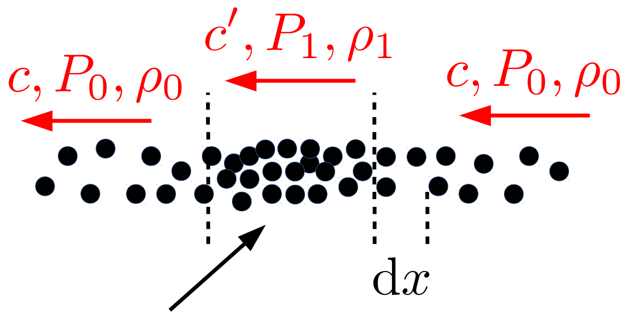
$$PV^{\gamma} = \text{const}, \Rightarrow\ P\rho^{-\gamma} = \text{const}, \Rightarrow\ c \approx \sqrt{\gamma\frac{P_0}{\rho_0}} \approx \sqrt{\underbrace{\gamma_{\mathrm{ar}}}_{\approx 1.4}}\,280\,\mathrm{m/s} \approx 331\,\mathrm{m/s}$$

$$c_{\exp} = 332\,\mathrm{m/s}$$

2 – Velocidade do som: derivação alternativa



No referencial do pulso



Análise do elemento de massa entrando no pulso

Continuidade: $\rho_0 c = \rho_1 c'$

2ª lei: $(P_1 - P_0)A = \rho_0 \mathrm{d}x A \left(\dfrac{c - c'}{\mathrm{d}t}\right) = A\rho_0 c \left(c - c\dfrac{\rho_0}{\rho_1}\right)$

$$\boxed{c^2 = \frac{P_1 - P_0}{\rho_1 - \rho_0} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)}$$

3 – Equação de onda e a velocidade da luz no vácuo

Equações de Maxwell no vácuo

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Usando a identidade

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0}$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$$

4 – Ondas sonoras harmônicas

Deslocamento das partículas $u(x,t)$:

$$u(x,t) = u_0 \cos(kx - \omega t - \phi),\ \omega = ck$$

Variação da densidade $\delta\rho(x,t)$:

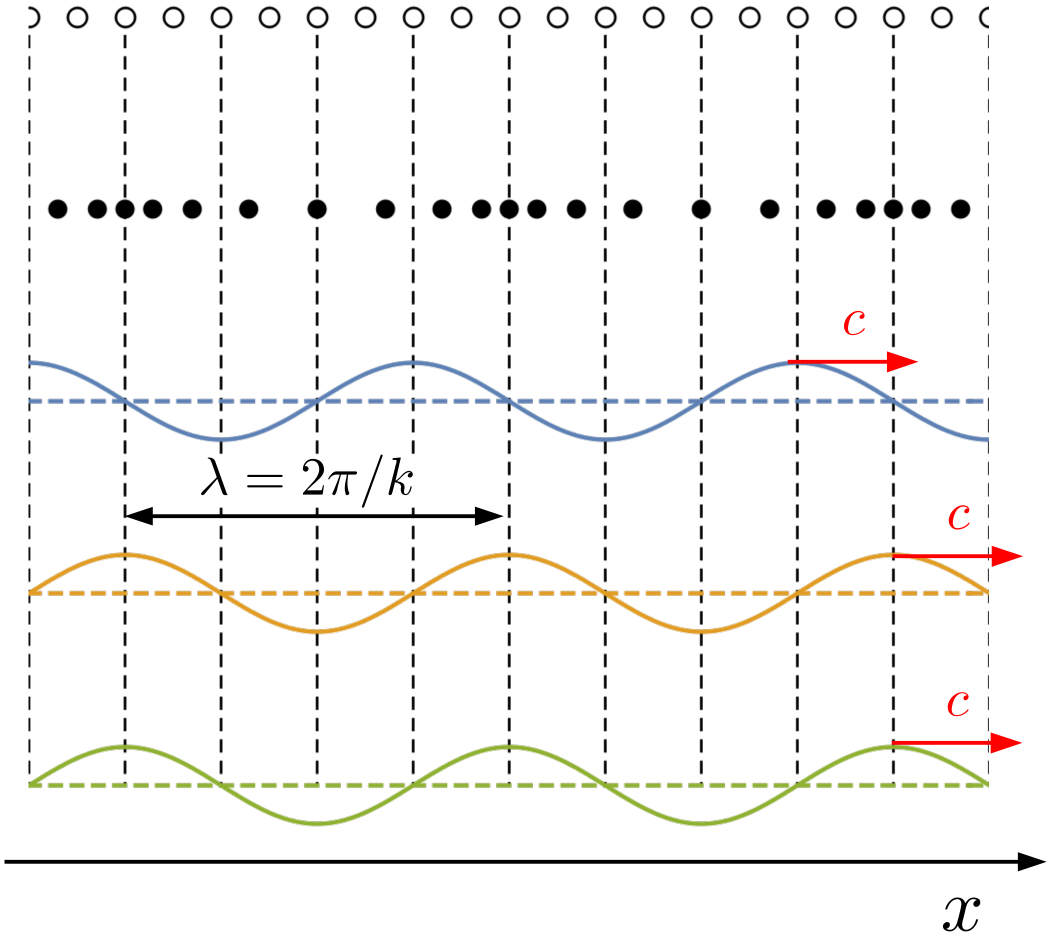
$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\frac{\partial u}{\partial x} = k u_0 \sin(\cdots)$$

$$\rho(x,t) = \rho_0[1 + k u_0 \sin(kx - \omega t - \phi)]$$

Variação da pressão $\delta P(x,t)$:

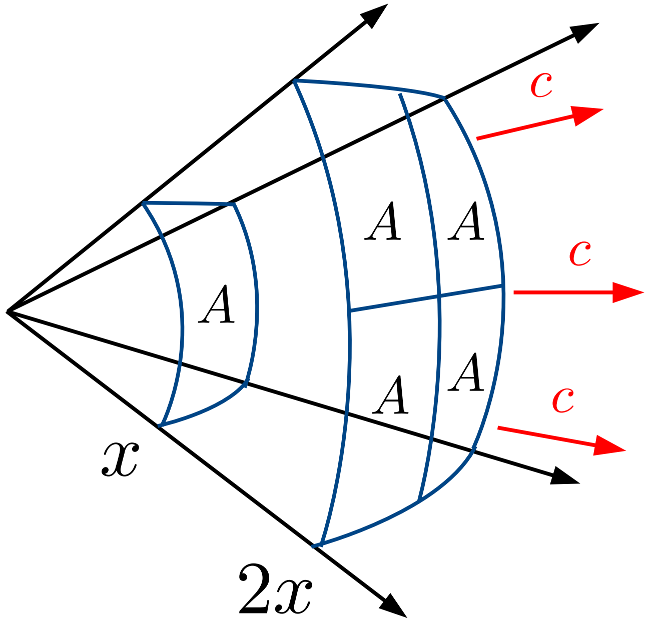
$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$P(x,t) = P_0 + \rho_0 c^2 k u_0 \sin(kx - \omega t - \phi)$$



5 – Intensidade

$$\mathcal{I} \equiv \frac{\text{Energia}}{\text{Área}_\perp \times \text{Tempo}} = \frac{\text{Potência}}{\text{Área}_\perp} = \frac{\mathcal{P}}{A_\perp}$$



Exemplo: $\mathcal{P}_{\text{Sol}} = 3.8 \times 10^{26}\ \text{W}$

$$D_{\text{ST}} = 1.5 \times 10^{11}\ \text{m}$$
$$R_{\text{T}} = 6.4 \times 10^{6}\ \text{m}$$

$$\mathcal{I}_{\text{Terra}} = \frac{\mathcal{P}}{4\pi D_{\text{ST}}^2} = 1.3 \times 10^3\ \text{W/m}^2$$

$$\mathcal{P}_{\text{Terra}} = \mathcal{I}_{\text{Terra}} \pi R_{\text{T}}^2 = 1.7 \times 10^{17}\ \text{W}$$

Para ondas sonoras:

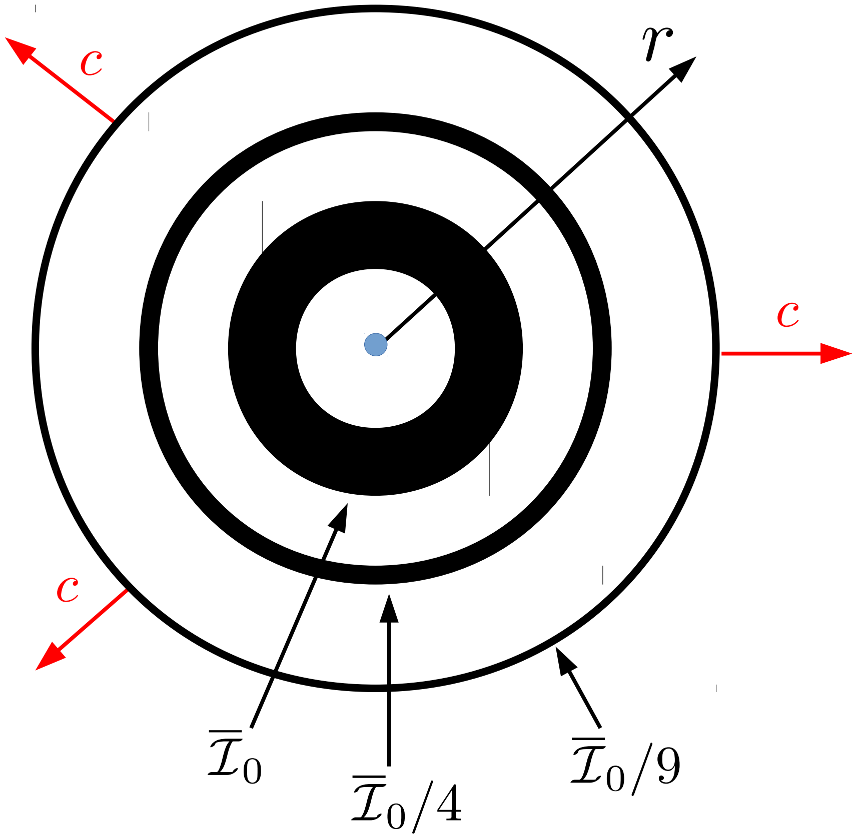
$$\mathcal{P} = F(x,t)v(x,t) = \delta P \times A \times \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{I} = \delta P \frac{\partial u}{\partial t}} \xrightarrow[\text{ondas harmônicas}]{} \mathcal{I} = \rho_0 c \omega^2 u_0^2 \sin^2(kx - \omega t - \phi), \Rightarrow \boxed{\overline{\mathcal{I}} = \frac{1}{2}\rho_0 c \omega^2 u_0^2}$$

5 – Intensidade

$$\mathcal{I} \equiv \frac{\text{Energia}}{\text{Área}_\perp \times \text{Tempo}} = \frac{\text{Potência}}{\text{Área}_\perp} = \frac{\mathcal{P}}{A_\perp}$$

$$\overline{\mathcal{I}} = \frac{1}{2}\rho_0 c\omega^2 u_0^2 \qquad \text{(ondas harmônicas)}$$



Como a intensidade diminui com a distância à fonte?

$$\overline{\mathcal{I}} \propto r^{-2}$$

Como a amplitude de deslocamento diminui com r?

$$u_0 = \sqrt{\frac{2\overline{\mathcal{I}}}{\rho_0 c\omega^2}} = \sqrt{\frac{\overline{\mathcal{P}}}{2\pi\rho_0 c\omega^2 r^2}} \propto r^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(r,t) = \frac{d_0^2}{r}\cos(kr - \omega t - \phi),} \; d_0 = \left(\frac{\overline{\mathcal{P}}}{2\pi\rho_0 c\omega^2}\right)^{1/4}$$

5 – Intensidade e a escala decibel (dB)

$$\mathrm{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{\overline{\mathcal{I}}}{\mathcal{I}_0}\right)$$

$$\mathcal{I}_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$$

Limiar audível para 1 kHz:

$$\mathrm{dB} = 0,\ \overline{\mathcal{I}} = \mathcal{I}_0$$

Deslocamento correspondente:

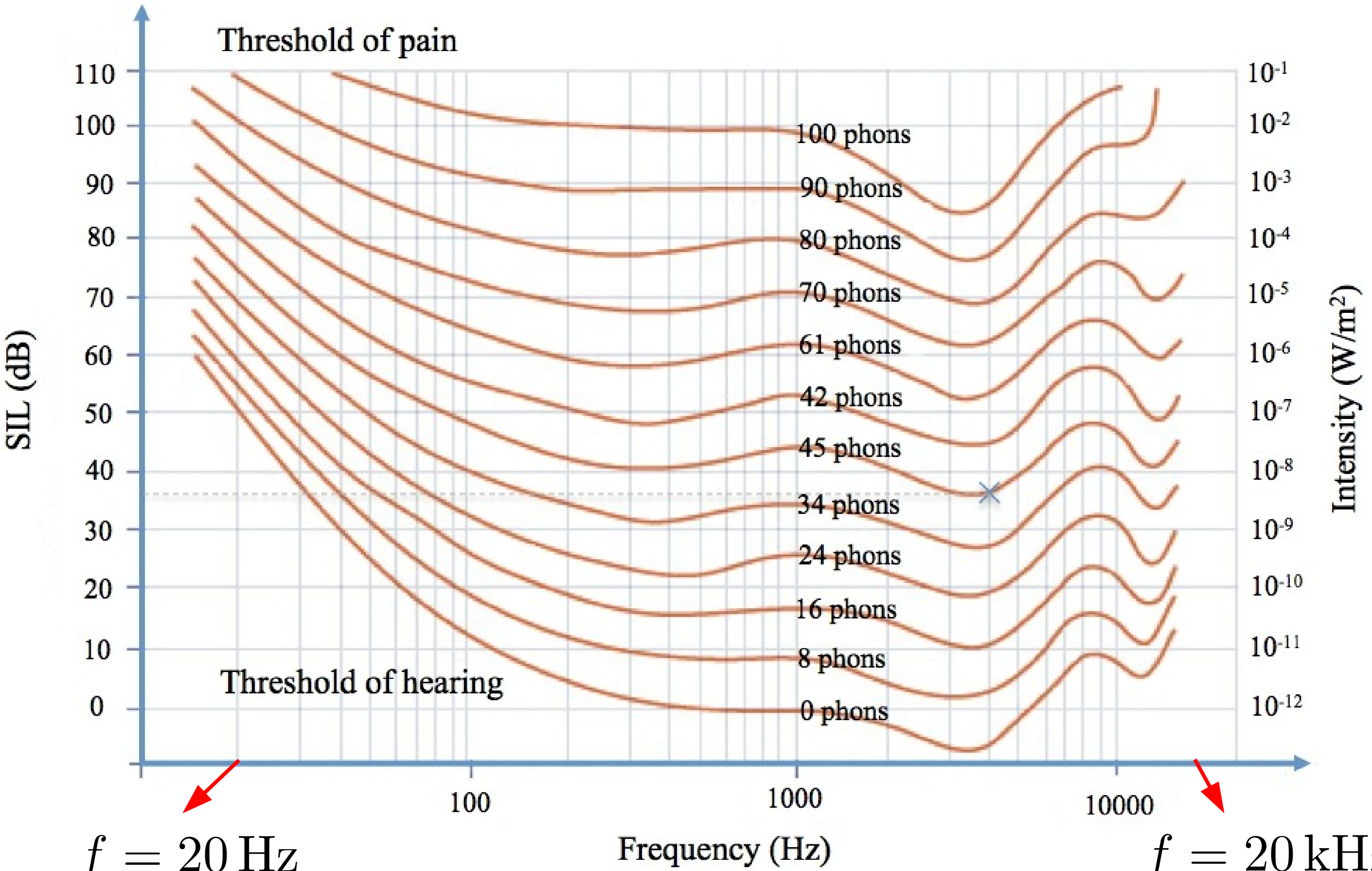
$$u_0 = \sqrt{\frac{2\overline{\mathcal{I}}}{\rho_0 c\omega^2}} = 0.1\,\text{Å}$$

Variação de pressão:

$$\delta P_0 = \sqrt{2\rho_0 c\overline{\mathcal{I}}} = 28\,\mu\mathrm{Pa}$$

Variação de densidade:

$$\delta\rho_0 = \sqrt{2\rho_0 c^{-3}\overline{\mathcal{I}}} = 2.5\times10^{-10}\,\mathrm{kg/m^3}$$



$f = 20\,\mathrm{Hz}$ $\lambda = 17\,\mathrm{m}$

$c = 340\,\mathrm{m/s},\ \rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$

$f = 20\,\mathrm{kHz}$ $\lambda = 1.7\,\mathrm{cm}$