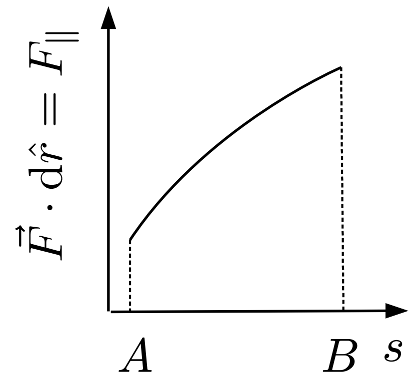
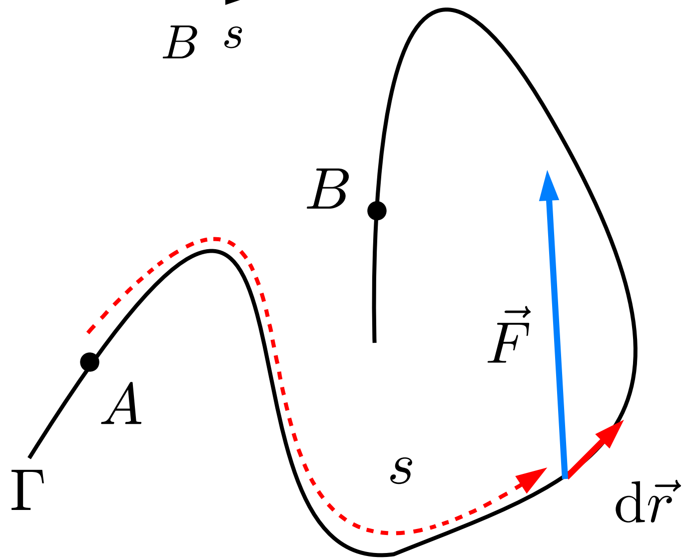
Trabalho de uma força

Definição: $\mathrm{W}_{AB,\Gamma} = \int_{A,\Gamma}^{B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$





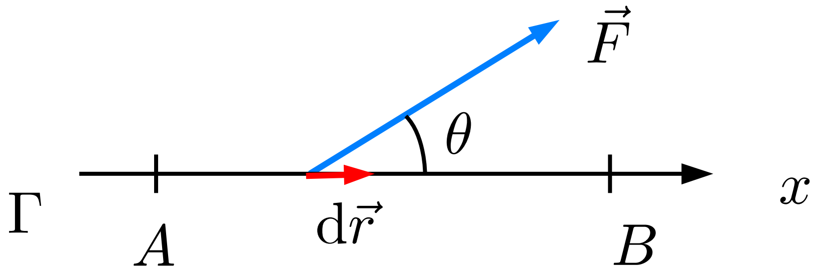
$[W]$ = Força $\times$ comprimento = Energia

No SI, N $\times$ m = J (Joule)

Note que trabalho é uma grandeza escalar.
(Trabalho não é esforço físico.)

Trabalho de uma força

Exemplo: Caminho é uma reta



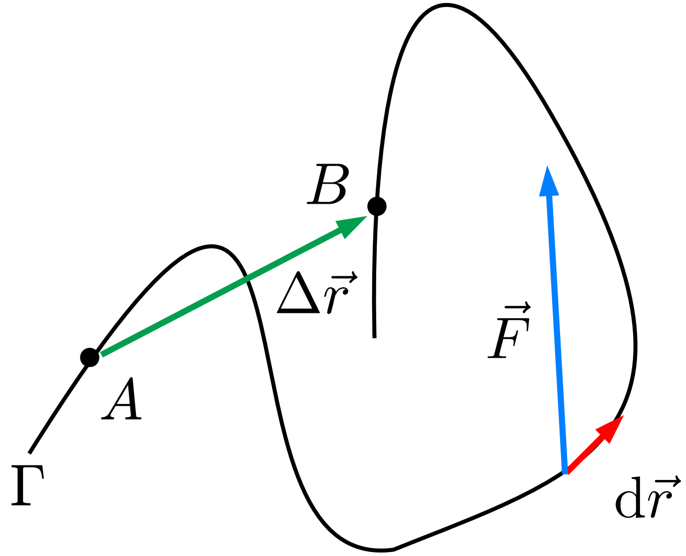
$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_{||}\mathrm{d}x = F\cos\theta \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{W}_{AB,\Gamma} = \int_A^B F\cos\theta \mathrm{d}x$$

Trabalho de uma força

Exemplo: Força constante

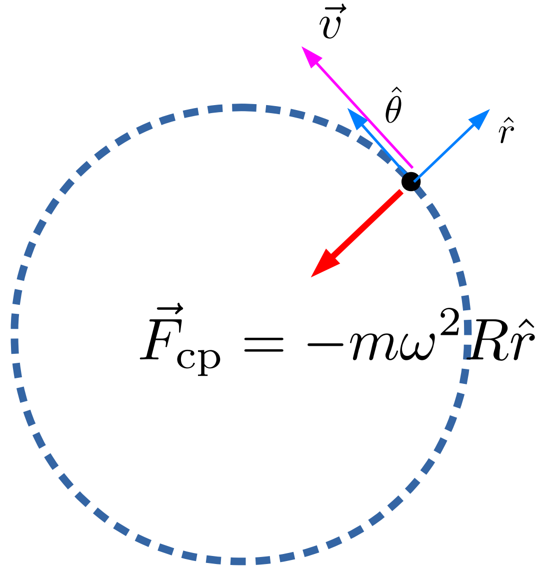
$$
\begin{aligned}
W_{AB,\Gamma} &= \int_{A,\Gamma}^{B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \vec{F} \cdot \int_{A,\Gamma}^{B} \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}
\end{aligned}
$$

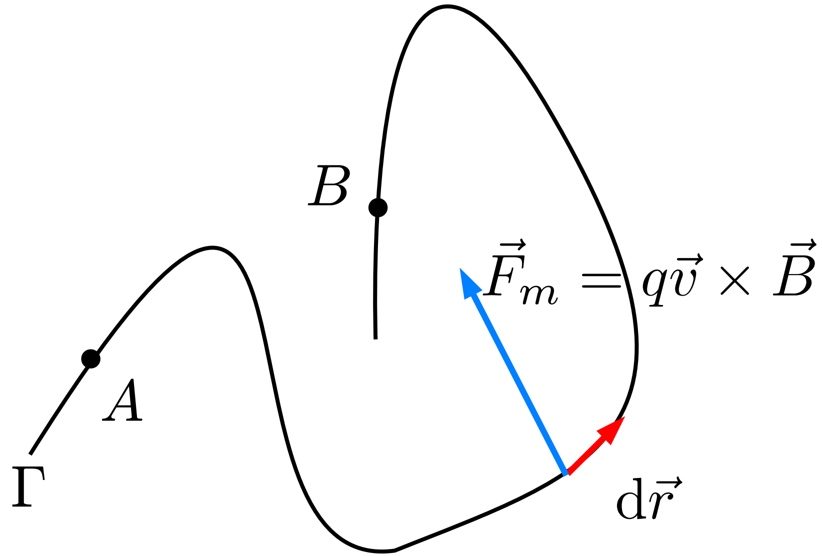


Trabalho de uma força

Exemplo: Força perpendicular à trajetória

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$



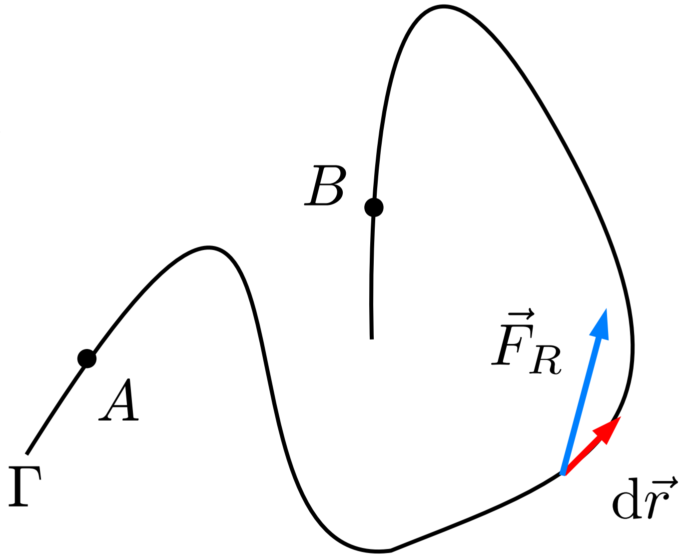


A força de Lorentz e a força centrípeta não realizam trabalho.

Teorema trabalho-energia cinética

Qual o trabalho da força resultante?

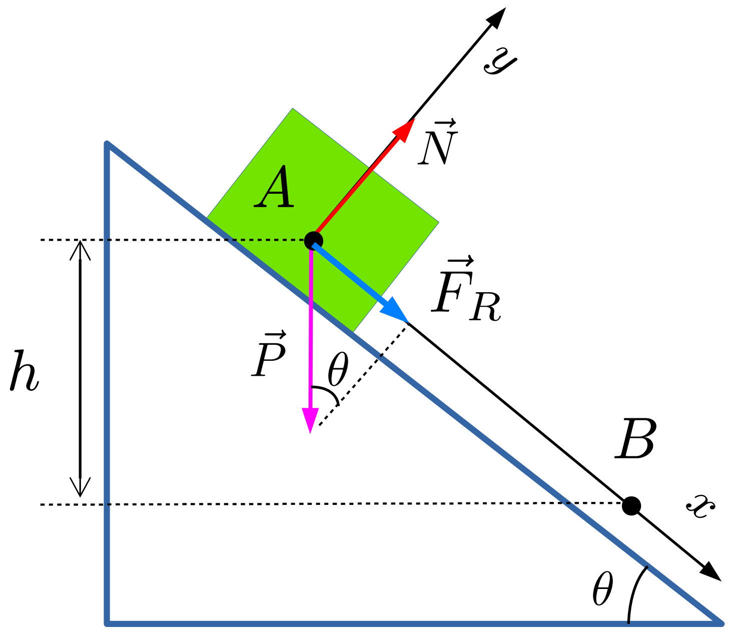
$$
\begin{aligned}
W_R &= \int_{A,\Gamma}^{B} \vec{F}_R \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{A,\Gamma}^{B} \vec{F}_R \cdot \vec{v}\mathrm{d}t = \int_{A,\Gamma}^{B} \mathrm{d}\vec{p} \cdot \vec{v} \\
&= \int_{A,\Gamma}^{B} \mathrm{d}\left(m\vec{v}\right) \cdot \vec{v} = m \int_{A,\Gamma}^{B} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} \\
&= \frac{1}{2} m \left(v_B^2 - v_A^2\right) = E_{c,B} - E_{c,A} = \Delta E_c
\end{aligned}
$$



O trabalho da força resultante (ou o trabalho de todas as forças) sobre uma partícula material é igual à variação de sua energia cinética.

Teorema trabalho-energia cinética

Exemplo: Plano inclinado sem atrito



$$
\begin{aligned}
W_R &= \int \vec{F}_R \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int \left(\vec{P} + \vec{N}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = W_P + W_N \\
&= W_P + 0 = m\vec{g} \cdot \int \mathrm{d}\vec{r} = m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r} \\
&= mgAB \sin\theta = mgh
\end{aligned}
$$

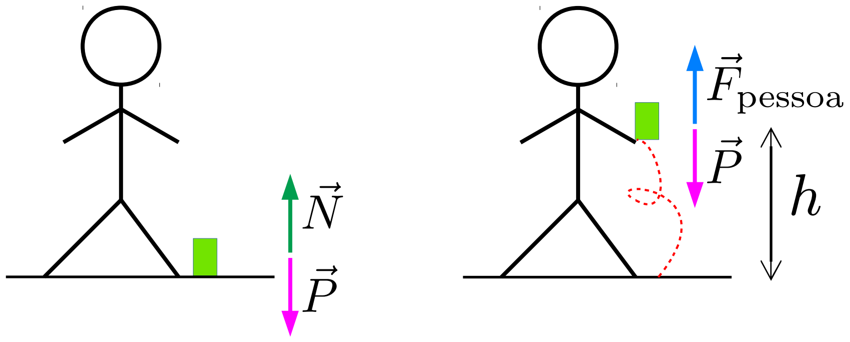
$$W_R = \Delta E_c = \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right) = mgh$$

$$\Rightarrow \quad v_B^2 = v_A^2 + 2gh$$

(Torricelli)

Teorema trabalho-energia cinética

Exemplo: Trabalho da força muscular



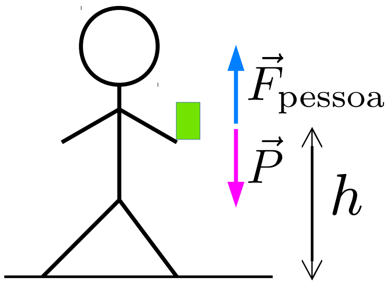
$$
\begin{aligned}
W_R &= \Delta E_c = 0 \\
&= W_P + W_F = m\vec{g}\cdot\Delta\vec{r} + W_F \\
&= -mgh + W_F, \quad \Rightarrow \quad W_F = mgh
\end{aligned}
$$

Importante: Note que o trabalho da força peso independe do caminho.

Teorema trabalho-energia cinética

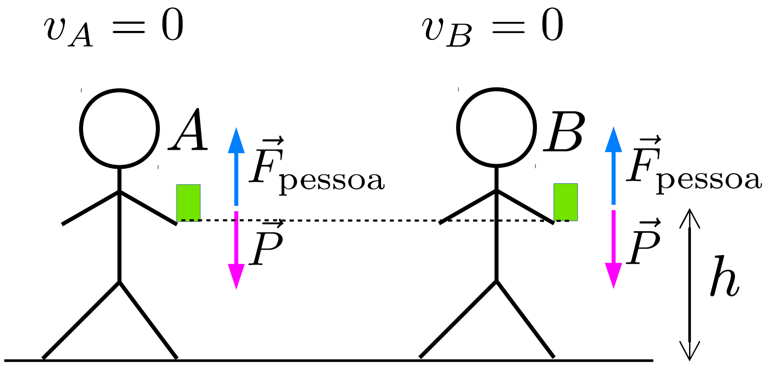
Exercício: Qual o trabalho da força peso e da força muscular da pessoa sobre o objeto quando o mesmo é mantido parado?

1) mgh e -mgh
2) mgh e 0
3) -mgh e mgh
4) 0 e mgh
5) 0 e 0



Teorema trabalho-energia cinética

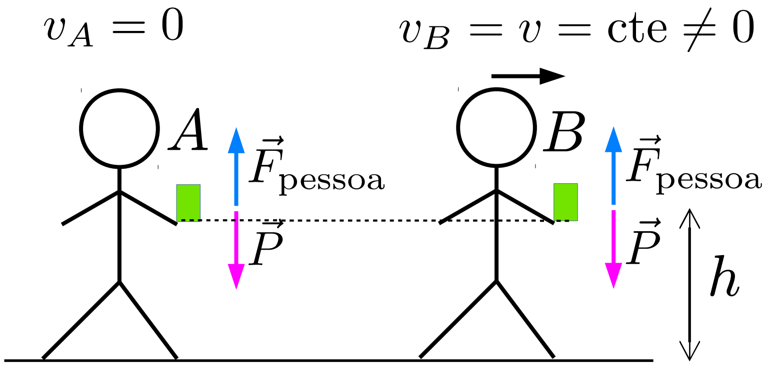
Exercício: Qual o trabalho da força peso e da força muscular da pessoa sobre o objeto quando o mesmo é levado do ponto A ao B na situação abaixo?



1) mgh e -mgh
2) mgh e 0
3) -mgh e mgh
4) 0 e mgh
5) 0 e 0

Teorema trabalho-energia cinética

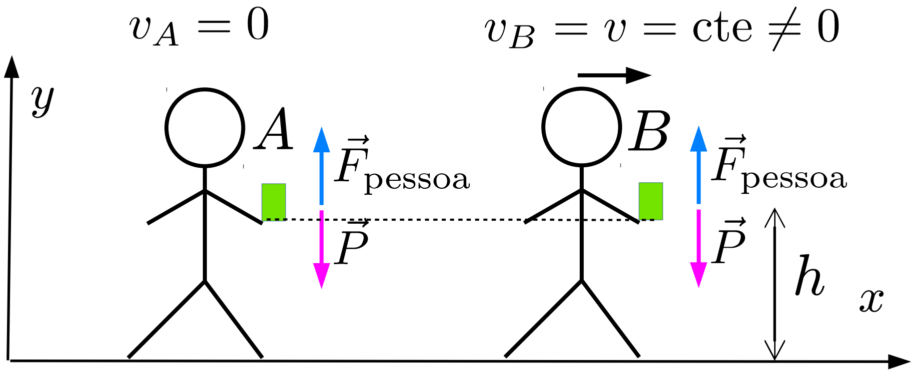
Exercício: Qual o trabalho da força peso e da força muscular da pessoa sobre o objeto quando o mesmo é levado do ponto A ao B na situação abaixo?



1) mgh e -$mv^2/2$
2) $mv^2/2$ e 0
3) -$mv^2/2$ e $mv^2/2$
4) 0 e $mv^2/2$
5) $mv^2/2$ e mgh

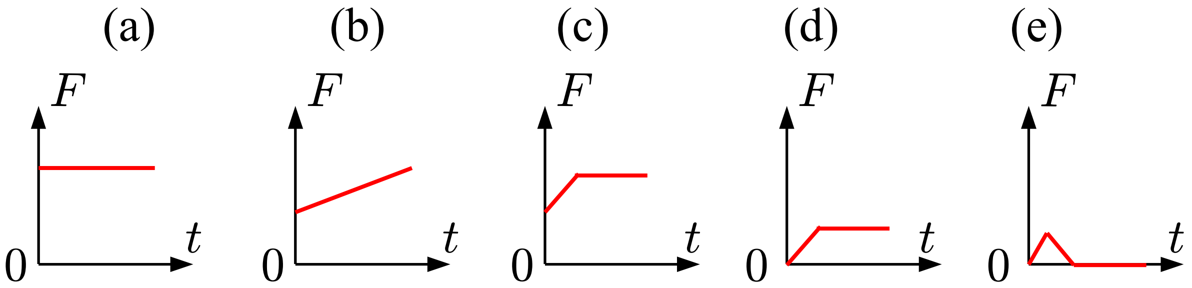
Teorema trabalho-energia cinética

Exercício: Qual alternativa representa, respectivamente, as componentes x e y da força que a pessoa exerce sobre o objeto ao longo do tempo?



F_x F_y

1) (a) e (d)
2) (e) e (a)
3) (d) e (a)
4) (b) e (a)
5) (c) e (a)



Forças conservativas e energia potencial

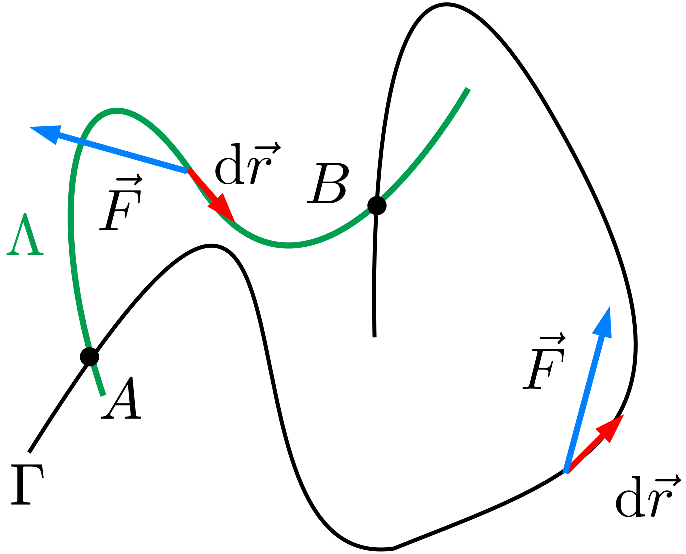
Definição:

Uma força é dita conservativa se e somente se o trabalho associado independe do caminho.

Alternativamente:

Uma força é dita conservativa quando o trabalho associado é nulo em qualquer caminho que retorne ao ponto inicial.

$$W_{AB,\Gamma} = \int_{A,\Gamma}^{B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \equiv \int_{A,\Lambda}^{B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = W_{AB,\Lambda}$$



Forças conservativas e energia potencial

Definição:

Uma força é dita conservativa se e somente se o trabalho associado independe do caminho.

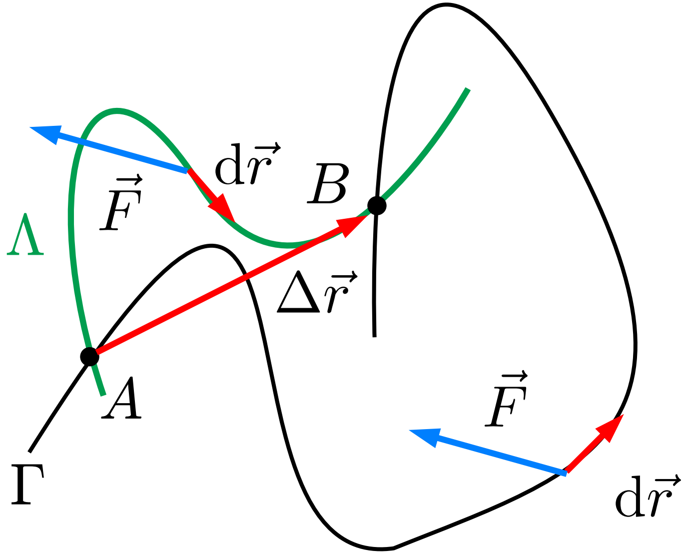
Alternativamente:

Uma força é dita conservativa quando o trabalho associado é nulo em qualquer caminho que retorne ao ponto inicial.

Exemplo: Força constante (força peso)

$$W_{AB,\Gamma} = \int_{A,\Gamma}^{B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{A,\Gamma}^{B} \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

$=$ Função do espaço



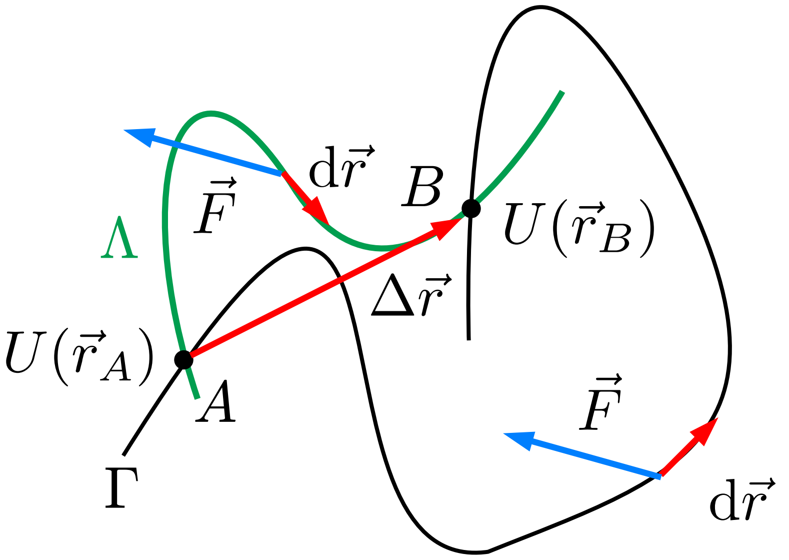
Forças conservativas e energia potencial

Definição:

A energia potencial associada a uma força conservativa é uma função do espaço tal que

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \equiv -\Delta U = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B)$$

Observe que não é possível associar uma energia potencial a uma força não-conservativa porque o trabalho depende do caminho.



Forças conservativas e energia potencial

Energia potencial gravitacional (associada à força peso).

$$
\begin{aligned}
W_{AB} &= \int_{A,\Gamma}^{B} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}\cdot \int_{A,\Gamma}^{B} \mathrm{d}\vec{r} = -mg\hat{y}\cdot \Delta\vec{r} = mg\left(y_A - y_B\right) \\
&\equiv -\Delta U = U\left(\vec{r_A}\right) - U\left(\vec{r_B}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad U\left(\vec{r}\right) = mgy + \mathrm{cte}
$$

Forças conservativas e energia potencial

Como determinar uma força associada a uma (função) energia potencial?

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\mathrm{d}z = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -F_x\mathrm{d}x - F_y\mathrm{d}y - F_z\mathrm{d}z,$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

A força é (menos) o gradiente da energia potencial.

Exemplo 1:

$$U(\vec{r}) = mgy + \mathrm{cte}, \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} = -mg\hat{y}$$

Exemplo 2:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2}kx^2 + \mathrm{cte}, \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} = -kx\hat{x}$$

Forças conservativas e energia potencial

Como determinar uma força associada a uma (função) energia potencial?

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\mathrm{d}z = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -F_x\mathrm{d}x - F_y\mathrm{d}y - F_z\mathrm{d}z,$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

A força é (menos) o gradiente da energia potencial.

Exemplo 3:

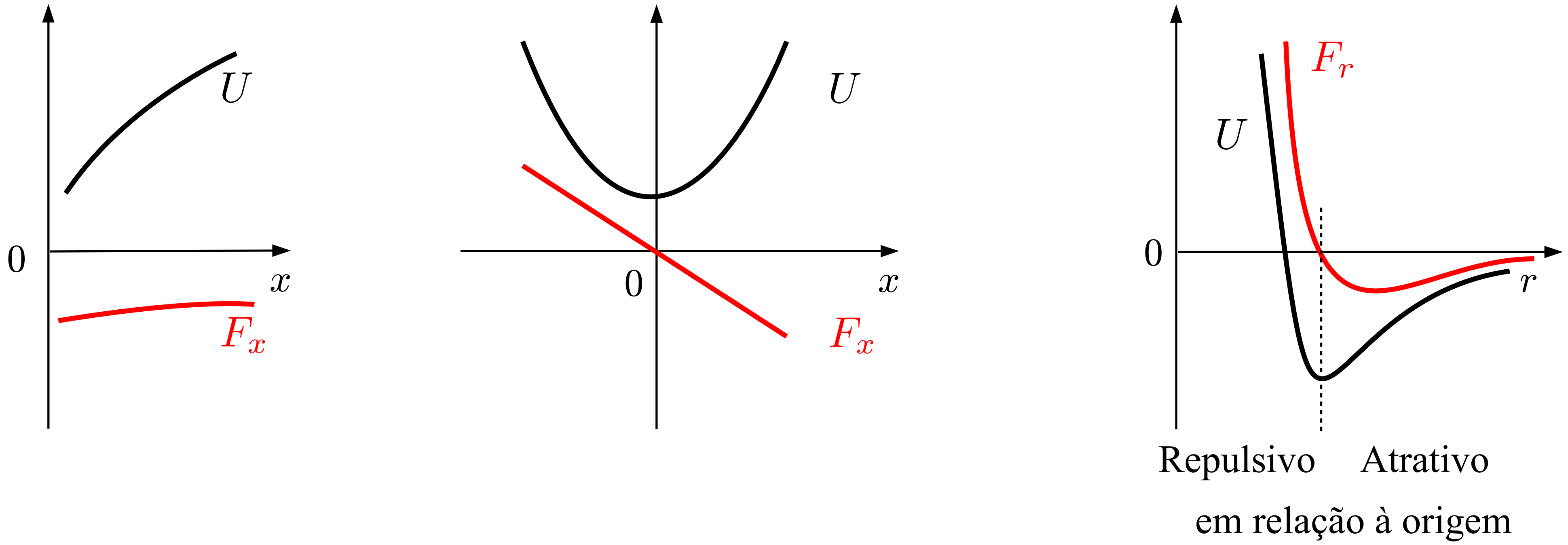
$$U\left(\vec{r}\right) = -\frac{GMm}{r}, \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Exemplo 4:

$$U\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{2}kr^2, \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -kr\left(\nabla r\right) = -kr\hat{r} = -k\vec{r}$$

Forças conservativas e energia potencial

Exemplos:



Forças conservativas e conservação da energia mecânica

Para o caso em que a força resultante é conservativa: $\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i^{(\text{conserv})}$

$$W_R = \Delta E_c = \int_A^B \vec{F}_R \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i^{(\text{conserv})} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum_i (-\Delta U_i)$$

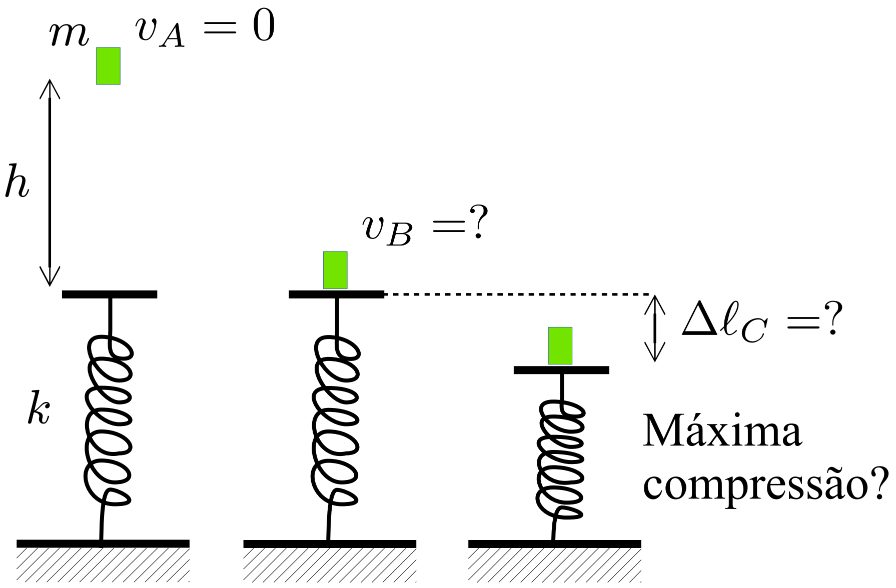
$$\Rightarrow \quad \Delta E_c + \sum_i \Delta U_i = 0, \quad \Rightarrow \quad \boxed{E \equiv E_c + \sum_i U_i = \text{constante}}$$

Sob a ação de forças conservativas, a energia mecânica de um sistema físico E é constante no tempo.

Forças conservativas e conservação da energia mecânica

Exemplo:

$$E = E_c + U_g + U_e = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = \text{constante}$$



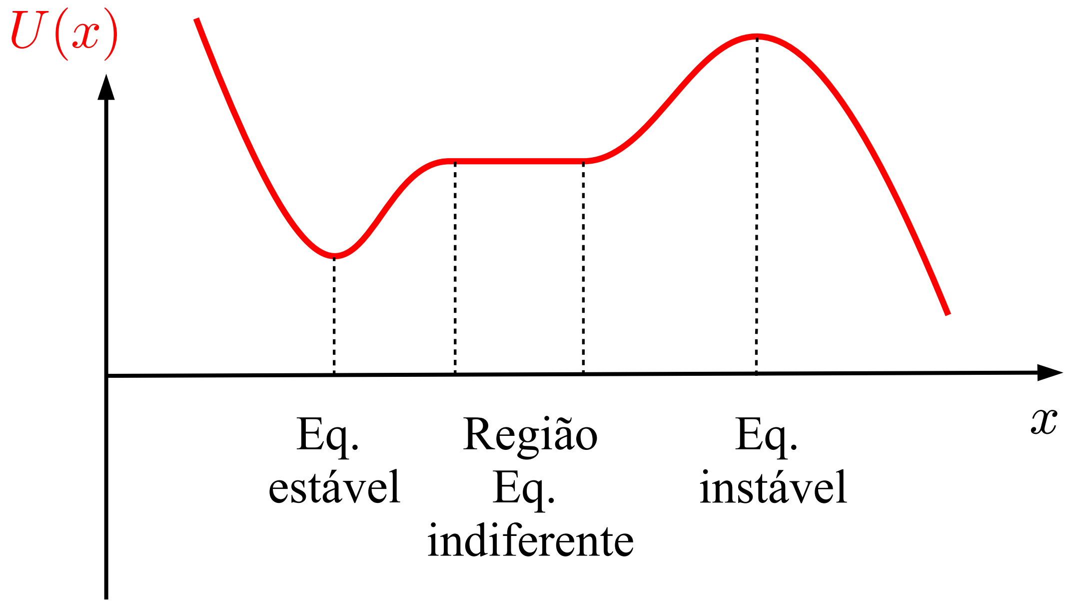
$$E_A = mgh = E_B = \frac{1}{2}mv_B^2, \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh}$$

$$E_A = mgh = E_C = -mg\Delta\ell_C + \frac{1}{2}k\Delta\ell_C^2,$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\ell_C = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{hk}{mg}}\right)$$

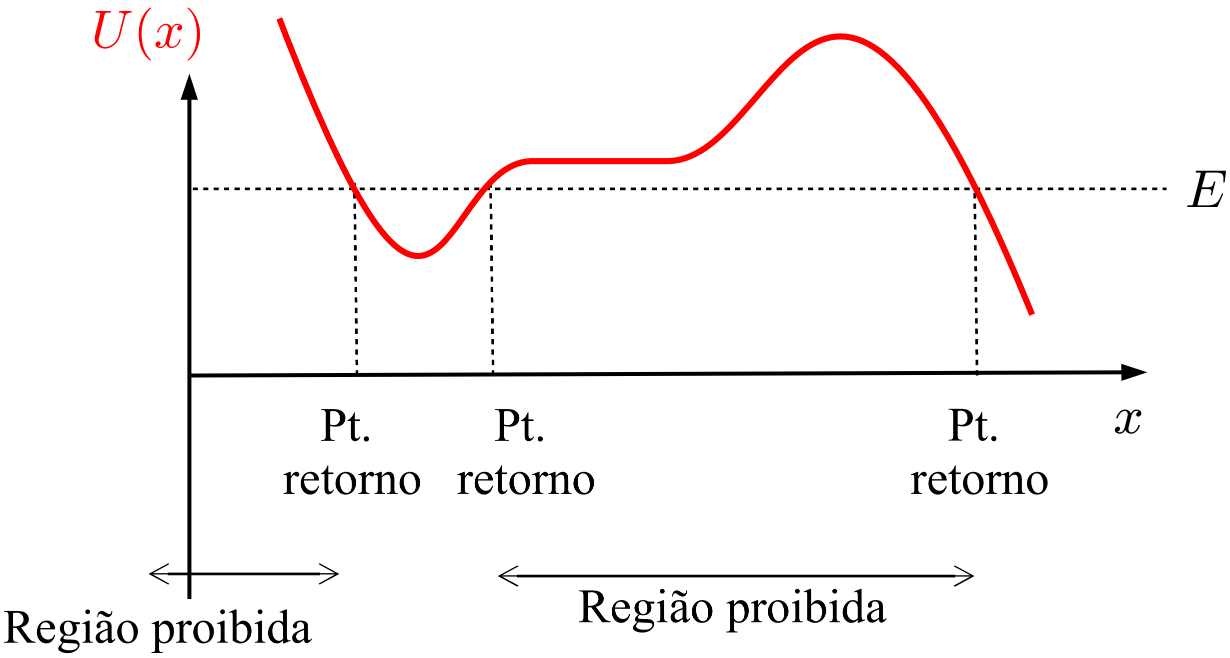
Forças conservativas e conservação da energia mecânica

Movimento 1D sob a ação de uma força conservativas



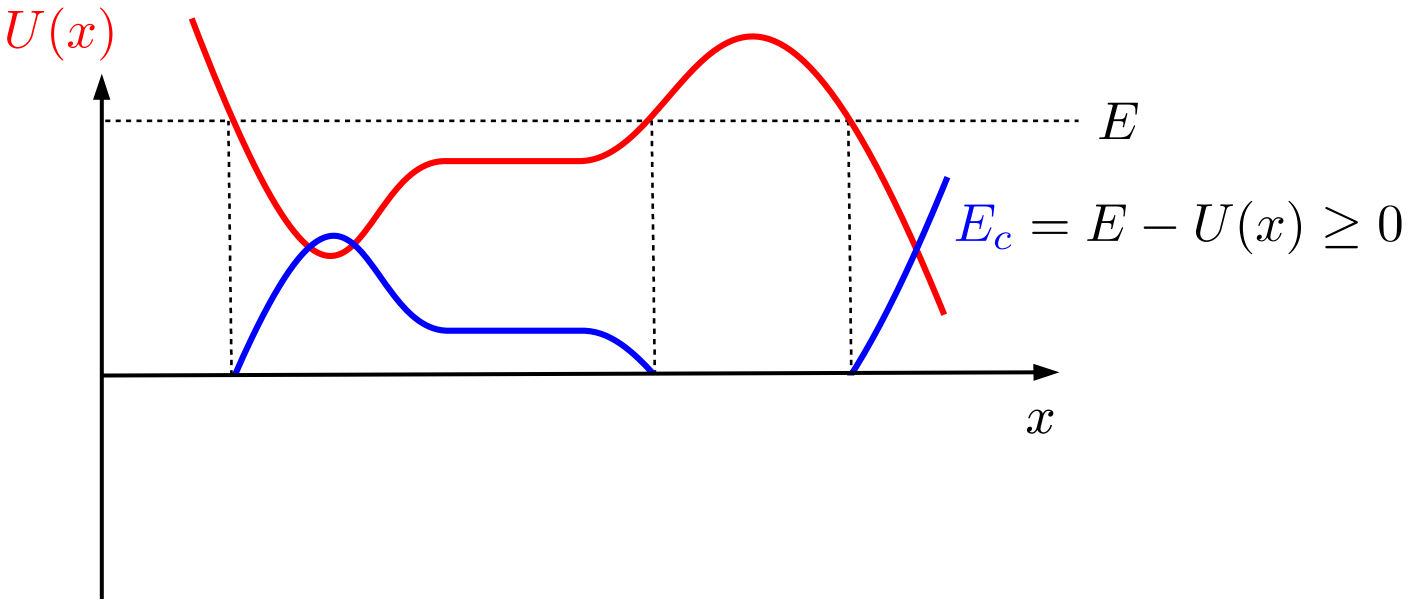
Forças conservativas e conservação da energia mecânica

Movimento 1D sob a ação de uma força conservativas



Forças conservativas e conservação da energia mecânica

Movimento 1D sob a ação de uma força conservativas



Forças não-conservativas e conservação da energia mecânica

$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i^{(\text{cons})} + \sum_i \vec{F}_i^{(\text{n-cons})}$$

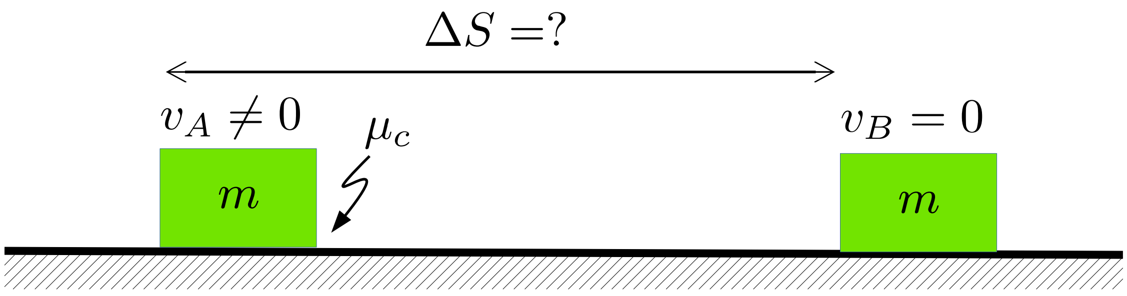
$$\begin{aligned} W_{R,\Gamma} &= \Delta E_c = \int_{A,\Gamma}^{B} \vec{F}_R \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i^{(\text{cons})} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \sum_i \int_{A,\Gamma}^{B} \vec{F}_i^{(\text{n-cons})} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\ &= \sum_i (-\Delta U_i) + \sum_i W_{i,AB,\Gamma}^{\text{n-cons}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_c + \sum_i \Delta U_i = \sum_i W_{i,AB,\Gamma}^{(\text{n-cons})} = W_{R,AB,\Gamma}^{(\text{n-cons})}, \qquad \Rightarrow \quad \boxed{W_{R,AB,\Gamma}^{(\text{n-cons})} = \Delta E}$$

O trabalho das forças não-conservativas é igual à variação da energia mecânica total.

Forças não-conservativas e conservação da energia mecânica

Exemplo:



$$W_{\text{at}} = \int_{A,\Gamma}^{B} \vec{F}_{\text{at}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -F_{\text{at}} \Delta S = -\mu_c m g \Delta S = \Delta E_c = -\frac{1}{2} m v_A^2$$

sempre negativo

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \frac{v_A^2}{2\mu_c g}$$

Note que o trabalho da força de atrito depende do caminho.

Princípio da conservação da energia

A energia total do universo é constante.
Ela pode ser convertida de uma forma para outra, transportada de uma região para a outra, mas nunca pode ser criada ou destruída.

$$\xrightarrow{E_{\text{entra}}} \boxed{E_{\text{sistema}}} \xrightarrow{E_{\text{sai}}}$$

$$\boxed{\Delta E_{\text{sistema}} = E_{\text{entra}} - E_{\text{sai}}}$$

$$E_{\text{sistema}} = E_c + U + E_{\text{térmica}} + E_{\text{química}} + E_{\text{radiação}} + E_{\text{outros}}$$

Massa e energia

$$^{2}\mathrm{H} + {}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{n} + \text{fótons}$$

$$m_{^2\mathrm{H}}c^2 = 1\,875.613\ \mathrm{MeV}$$
$$m_{^3\mathrm{H}}c^2 = 2\,808.410\ \mathrm{MeV}$$
$$m_{\mathrm{n}}c^2 = \ 939.565\ \mathrm{MeV}$$
$$m_{^4\mathrm{He}}c^2 = 3\,728.400\ \mathrm{MeV}$$

Diferença de massa:

$$\begin{aligned} \Delta mc^2 &= (4\,684.023 - 4\,667.965)\ \ \mathrm{MeV} \\ &\approx 16\ \mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Para onde foi essa massa?
R: Energia dos fótons.
A energia de interação entre os prótons confere inércia aos mesmos.

Potência

Potência instantânea: $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Potência média: $\overline{P} = \frac{W_{AB,\Gamma}}{\Delta t}$

$[P]$ = Energia / tempo.
No SI, $\mathrm{J/s} = \mathrm{W}$ (Watt)

Potência da força resultante: $P_R = \vec{F}_R \cdot \vec{v} = m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v} = m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (E_c)$

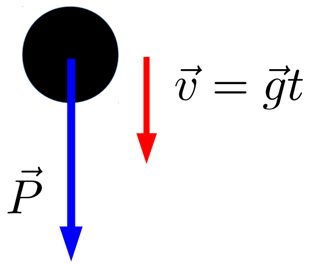
No caso conservativo: $P_R = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (E_c + U) = 0$

(conservação da energia mecânica)

Potência

Exemplo: queda livre sem atrito

Potência da força resultante: $P_R = \vec{F}_R \cdot \vec{v} = m\vec{g} \cdot \vec{v}, \quad \Rightarrow \quad P_R = mg^2t$



Taxa de variação de energia cinética:

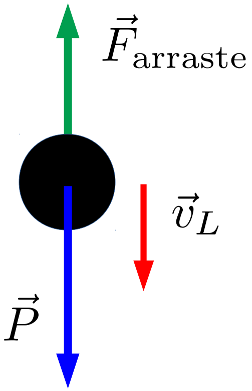
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c) = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g^2t^2\right) = mg^2t$$

Taxa de variação de energia potencial gravitacional:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U = mg\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y) = mg\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y_0 - \frac{1}{2}gt^2\right) = -mg^2t$$

Potência

Exemplo: queda livre com atrito (no regime de velocidade constante)



Potência da força resultante: $P_R = \vec{F}_R \cdot \vec{v} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = 0$

Potência da força peso: $P_g = m\vec{g} \cdot \vec{v} = mgv_L$

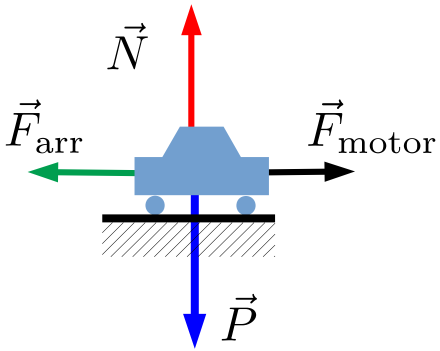
Potência da força de arraste: $P_{\text{arr}} = -P_g = -mgv_L$

Taxa de variação de energia mecânica:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_c + U) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U = mg\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y) = mg\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\text{cte} - v_L t) = -mgv_L = P_{\text{arr}}$$

Potência

Exemplo: arraste de pressão
(Carro na estrada em
velocidade constante)



$$\vec{F}_R \approx \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{arr}} + \vec{F}_{\text{motor}} = \vec{0}$$

$$F_{\text{arr}} = \frac{1}{2}\rho_{\text{ar}} A C_D v^2 = \frac{1}{2}\left(1.2\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(3.0\ \text{m}^2\right) 0.5 \left(30.\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 0.81\ \text{kN}$$

$$P_{\text{arr}} = -\frac{1}{2}\rho_{\text{ar}} A C_D v^3 = -\frac{1}{2}\left(1.2\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(3.0\ \text{m}^2\right) 0.5 \left(30.\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = -24.\ \text{kW}$$

O que está suprindo esta perda de energia mecânica?