

Fluidos

1ª parte: Hidrostática

Estudar as propriedades de fluidos em equilíbrio estático (parados em relação a um referencial).

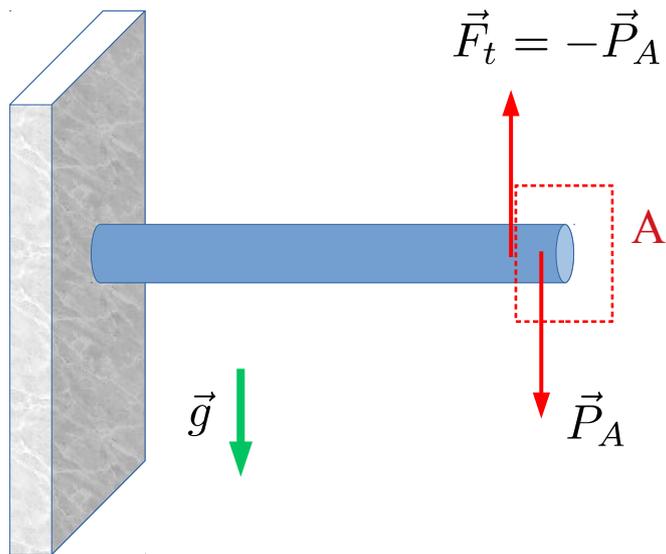
Para esse estudo, devemos introduzir os conceitos de **densidade**, **pressão**, **módulo de elasticidade volumétrica**, **o princípio de Pascal** e **empuxo**. Evidentemente, devemos entender as relações entre esses conceitos e como eles nos auxiliam na descrição dos fluidos em equilíbrio estático.

2ª parte: Hidrodinâmica

Descrever o movimento de fluidos. Neste curso, primeiramente iremos considerar situações idealizadas onde não há forças viscosas e/ou dissipativas. O movimento será descrito com auxílio das **equações de continuidade** e **de Bernoulli**. Ao final, estudaremos o movimento de fluidos viscosos em um regime laminar através da **equação de Pouseuille**.

Definição de fluido

É todo sistema macroscópico de partículas que não suporta tensões de **cisalhamento** (forças tangenciais).

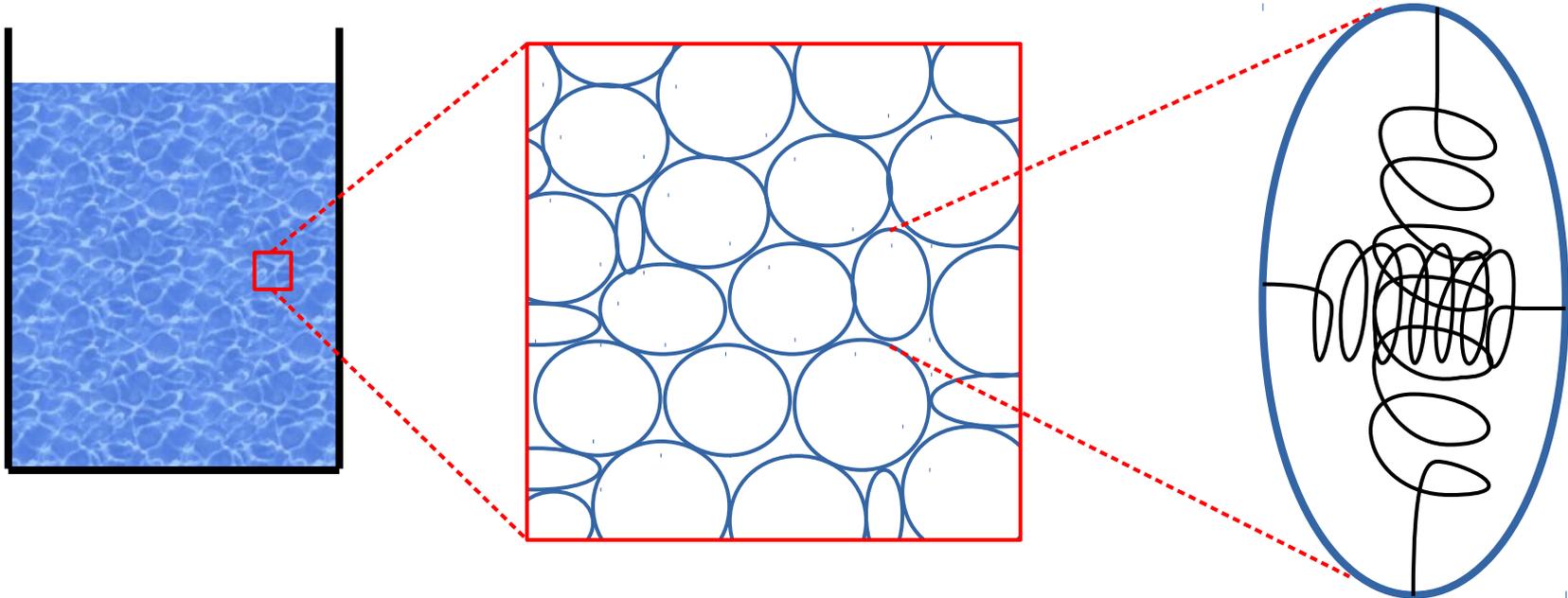


Considere a barra anexada a uma parede como ilustra a situação ao lado. A parte mais extrema da barra (em destaque) permanece estática porque o restante do sólido é capaz de exercer uma força **tangencial** anulando a força peso.

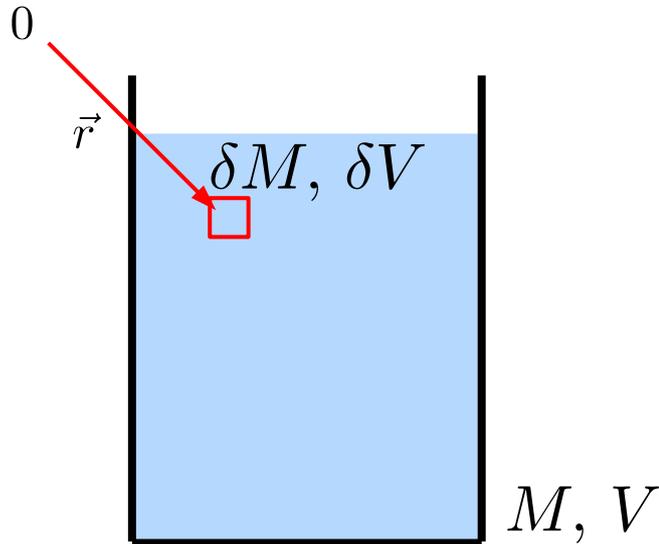
Se a barra fosse fluida, não haveria força tangencial (por definição) e a barra não seria capaz de manter sua forma, ou seja, a barra **escoaria**.

Modelo simplificado para um fluido

Ter em mente um modelo (mesmo que simplificado) nos auxilia no entendimento do fluido. Aqui, iremos desprezar qualquer movimento de origem térmica. (Não é uma boa hipótese para gases em muitas situações.) É então conveniente pensar num conjunto de “bolinhas” idealmente deformáveis muito pequenas cujas superfícies são **perfeitamente lisas**. Este modelo facilmente contempla a nossa definição de que um fluido não suporta tensões de cisalhamento.



Definição de densidade



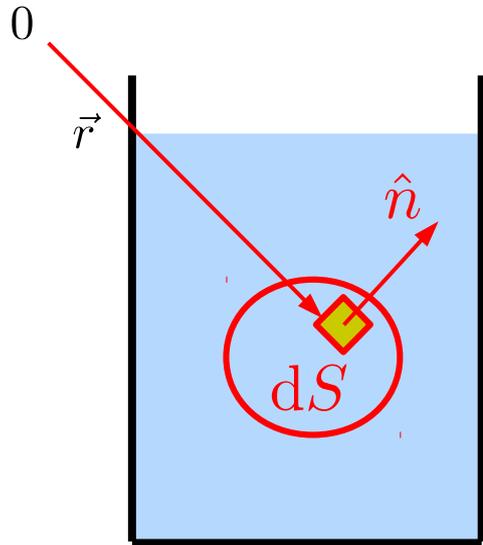
Densidade média:

$$\bar{\rho} \equiv \frac{M}{V}$$

Densidade:

$$\rho \equiv \rho(\vec{r}) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta M}{\delta V} \equiv \frac{dM}{dV}$$

Definição de pressão



Sobre o elemento de área, o restante do fluido exerce uma força **normal** ao elemento de fluido interno. Por ação-reação, o fluido interno à superfície exerce uma força contrária de mesma magnitude igual a

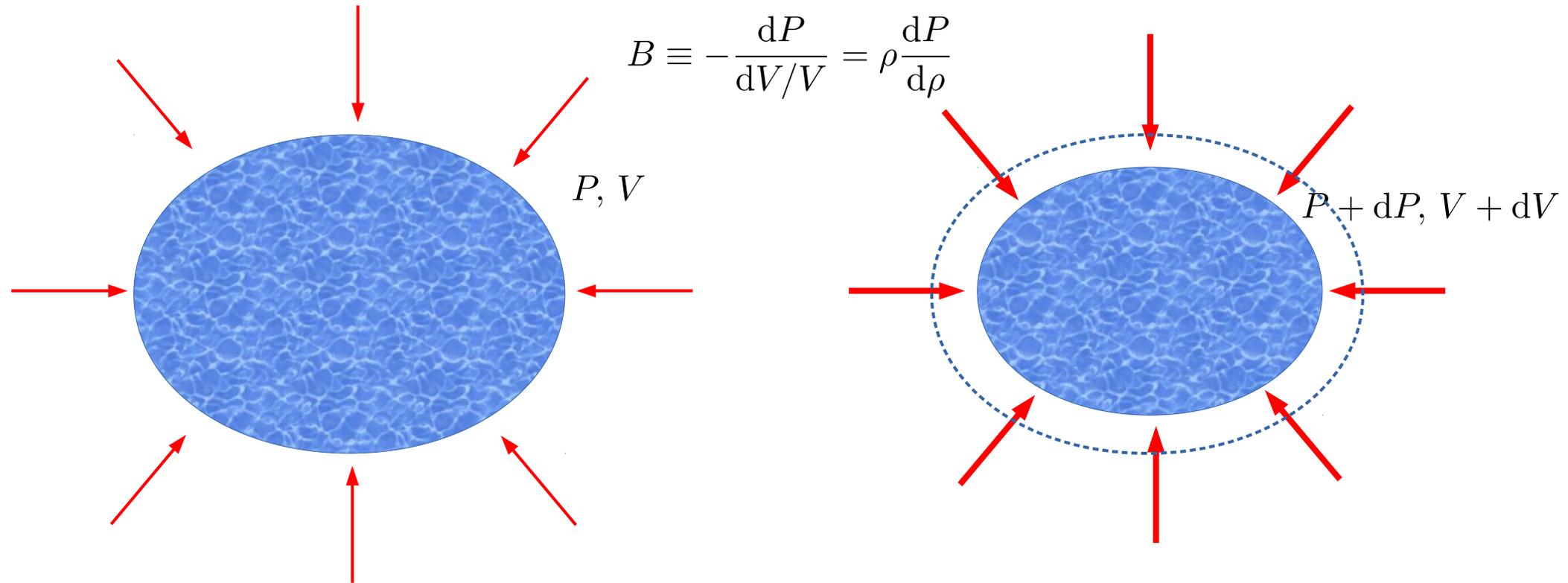
$$d\vec{F}_N \equiv P(\vec{r})\hat{n}dS$$

Note que a pressão P é um **escalar**, depende da posição e independe da direção normal, ou seja, o restante do fluido exerce forças de maneira **isotrópica** sobre um determinado ponto do fluido.

$$P \equiv \frac{\text{Força normal}}{\text{Área}}, \quad \Rightarrow \quad [P] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \quad (\text{no SI})$$

Densidade e pressão

Se a pressão sobre um objeto aumenta isotropicamente, então o volume do mesmo decresce aumentando sua densidade. A quantidade que relaciona essa variação de pressão com a diminuição relativa de volume é denominada **módulo de elasticidade volumétrico**.



Alguns valores

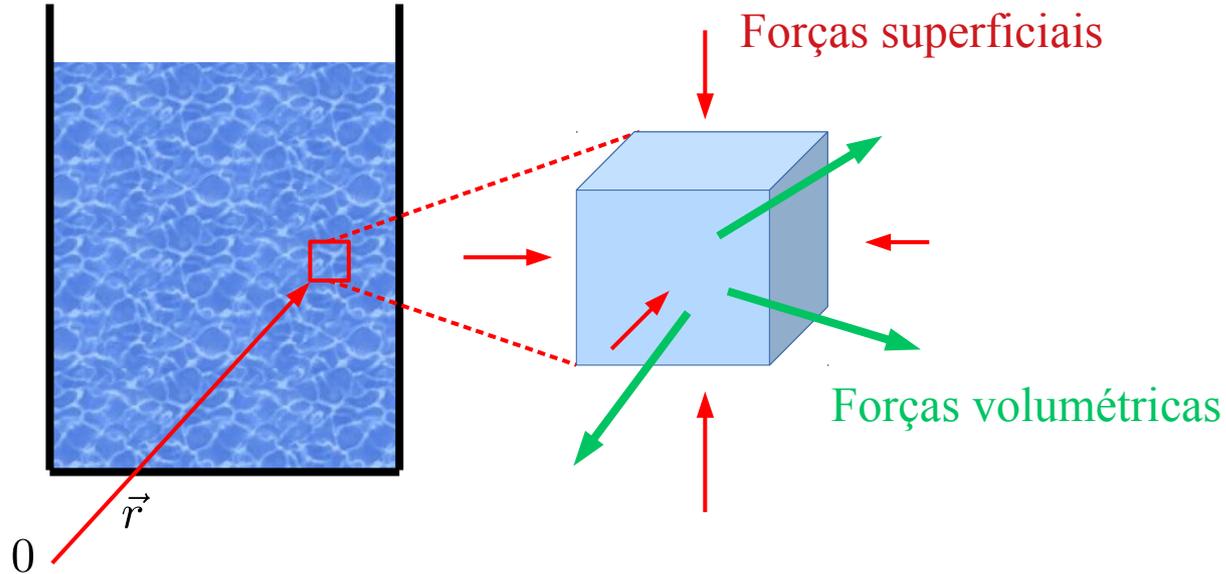
Densidade (kg/m ³)	Pressão (Pa)	Módulo de elasticidade (GPa)
$\rho_{\text{ar } 20^\circ\text{C}, 1 \text{ atm}} = 1.21$	$P_{\text{melhor vácuo(lab)}} \sim 10^{-12}$	$B_{\text{diamante}} \sim 600$
$\rho_{\text{ar } 20^\circ\text{C}, 50 \text{ atm}} = 60.5$	$P_{1 \text{ atm}} \approx 10^5$	$B_{\text{aço}} \sim 160$
$\rho_{\text{H}_2\text{O } 20^\circ\text{C}, 1 \text{ atm}} = 0.998 \cdot 10^3$	$P_{\text{arterial sistólica}} = 1.6 \cdot 10^4 = 120 \text{ Torr}$ (acima de 1 atm)	$B_{\text{vidro}} \sim 30 - 60$
$\rho_{\text{H}_2\text{O } 20^\circ\text{C}, 50 \text{ atm}} = 1.000 \cdot 10^3$	$P_{\text{pneu}} \approx 2 \cdot 10^5$	$B_{\text{H}_2\text{O}} \approx 2.2$
$\rho_{\text{Terra(média/núcleo/crosta)}} = (5.5/9.5/2.8) \cdot 10^3$	$P_{\text{salto alto}} \sim 10^6$	$B_{\text{CH}_4} \approx 0.82$
$\rho_{\text{Sol(média/núcleo)}} = (1.4/160) \cdot 10^3$	$P_{\text{fossa Marianas}} \sim 10^8$	$B_{\text{ar(isotérmico)}} \approx 101 \text{ kPa}$
$\rho_{\text{anã branca(núcleo)}} \sim 10^{10}$	$P_{\text{lab(maior)}} \sim 10^{10}$	$B_{\text{ar(adiabático)}} \approx 142 \text{ kPa}$
$\rho_{\text{núcleo do átomo}} \sim 10^{17}$	$P_{\text{núcleo da Terra}} \sim 10^{11}$	
$\rho_{\text{estrela de nêutrons(núcleo)}} \sim 10^{18}$	$P_{\text{núcleo do Sol}} \sim 10^{16}$	
$\rho_{\text{melhor vácuo(lab)}} \sim 10^{-17}$		

Forças num fluido em equilíbrio estático

Quais são as forças sobre um elemento infinitesimal do fluido?

Como qualquer sistema de partículas, são as **forças internas** e as **forças externas**.

Por se tratar de um fluido, as forças **internas** são as forças **normais** às superfícies. Essas forças são ditas **superficiais** ou **hidrostáticas**.



As forças **externas** são genéricas. Elas atuam em todo o volume do elemento de fluido. Por isso são ditas **volumétricas**.

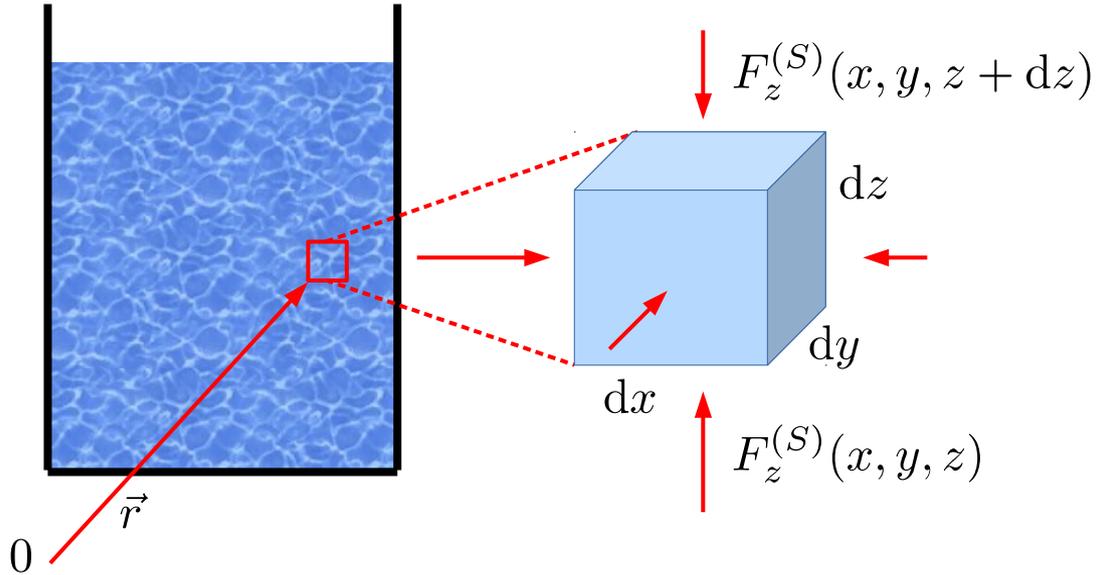
Como o elemento de fluido está em equilíbrio estático, então pela **2ª lei de Newton**

$$\vec{F}_R^{(V)} + \vec{F}_R^{(S)} = \vec{0}$$

Forças num fluido em equilíbrio estático

Força hidrostática (superficial) resultante no eixo z :

$$\begin{aligned} F_z^{(S)}(x, y, z) - F_z^{(S)}(x, y, z + dz) &= P(x, y, z)dx dy - P(x, y, z + dz)dx dy \\ &= \left[\frac{P(x, y, z) - P(x, y, z + dz)}{dz} \right] dx dy dz \equiv - \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) dV \end{aligned}$$



Força **hidrostática** (superficial) resultante:

$$\vec{F}_R^{(S)} = - \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} \right) dV \equiv - (\nabla P) dV$$

A força hidrostática resultante aponta na direção **contrária** à direção de crescimento da pressão.

Forças num fluido em equilíbrio estático

Força resultante sobre o elemento de fluido:

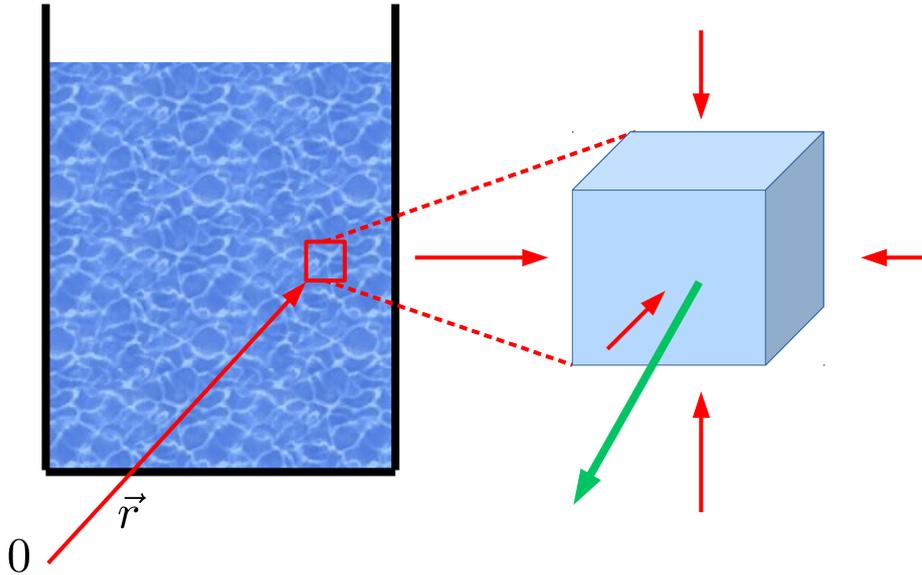
$$\vec{0} = \vec{F}_R^{(V)} + \vec{F}_R^{(S)} = \vec{F}_R^{(\text{ext})} - (\nabla P) dV = \left[\vec{f}_R^{(\text{ext})} - \nabla P \right] dV$$



Densidade de força externa resultante

Finalmente, para fluidos em equilíbrio estático, o gradiente de pressão é

$$\nabla P = \vec{f}_R^{(\text{ext})}$$

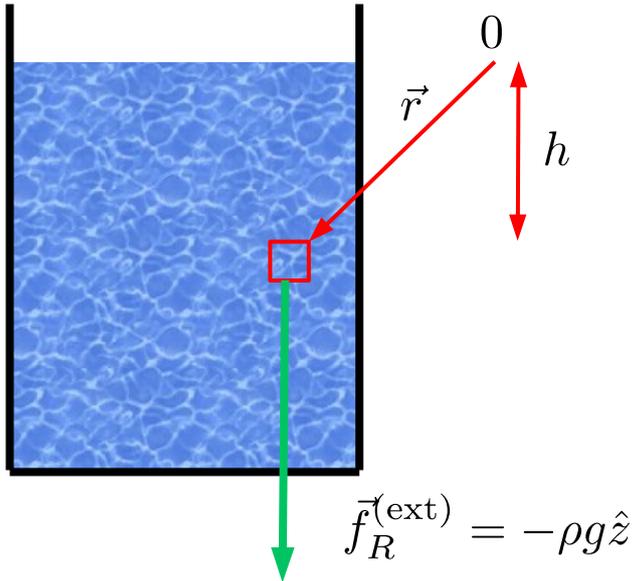


Lei de Stevin

Considere um fluido incompressível num campo gravitacional constante.

$$\nabla P = \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \vec{f}_R^{(\text{ext})} = \frac{-(dm)g\hat{z}}{dV} = -\rho g\hat{z} = (0, 0, -\rho g)$$

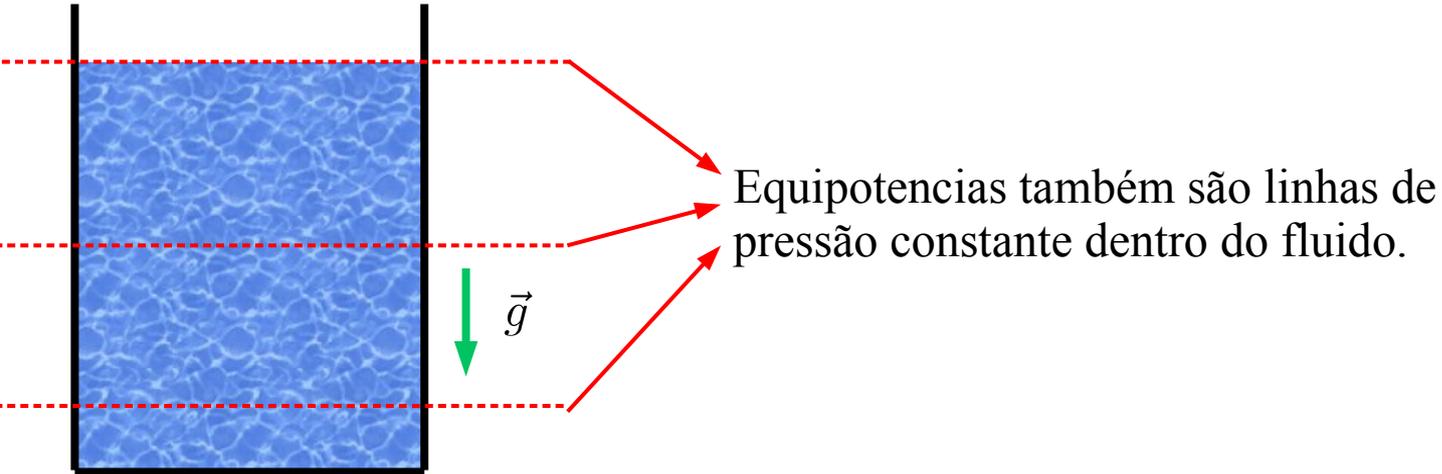
$$\Rightarrow P(\vec{r}) = P(z) = P_0 - \rho g z = P_0 + \rho g h$$



Pressão e densidade de energia

Num fluido **incompressível**, quando as forças externas são conservativas há uma **densidade de energia potencial** associada

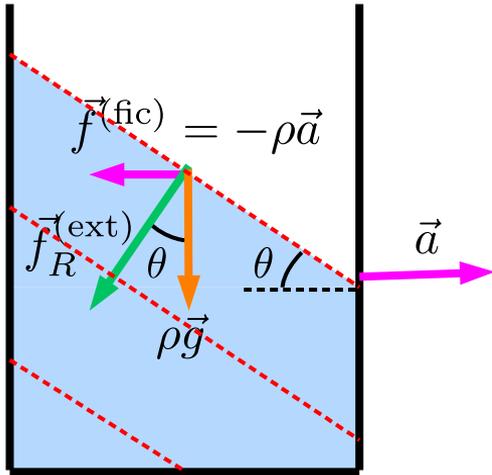
$$\vec{f}_R^{(\text{ext})} = -\nabla u, \quad \Rightarrow \quad -\nabla u = \nabla P, \quad \Rightarrow \quad P + u = \text{const}$$



Ex: fluido uniformemente acelerado

Qual o perfil de um fluido num balde acelerado uniformemente na direção horizontal?
Após um transiente, o fluido fica em **equilíbrio estático no referencial do balde**.

$$\vec{f}_R^{(\text{ext})} = \vec{f}_R^{(\text{inerc})} + \vec{f}_R^{(\text{n-inerc})} = -\rho g \hat{z} - \rho a \hat{x} = \nabla(-\rho g z - \rho a x) = \nabla P$$



$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{a}{g}$$

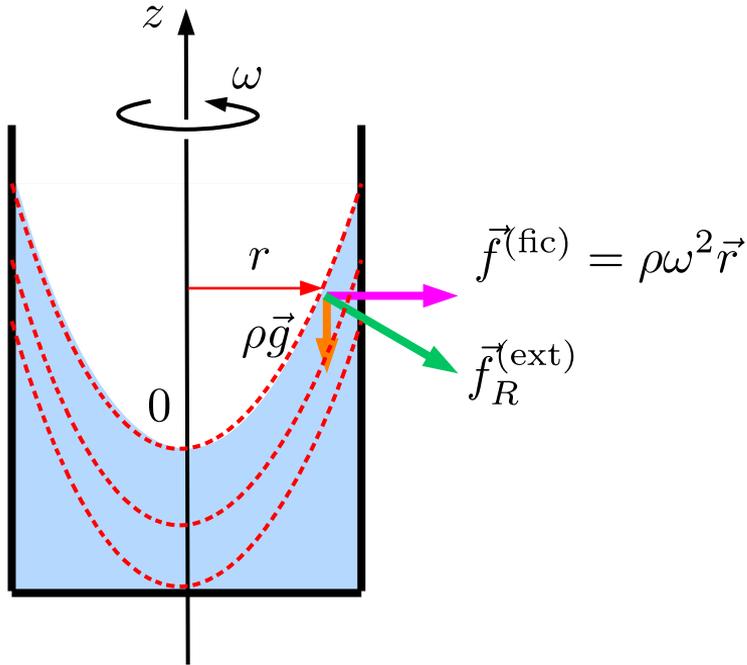
É como se o fluido estivesse em um campo gravitacional inclinado em relação à vertical.

Ex: fluido girante no campo gravitacional

Qual o perfil de um fluido num balde que gira com velocidade angular constante?

Após um transiente, o fluido fica em **equilíbrio estático no referencial girante**.

$$\vec{f}_R^{(\text{ext})} = -\rho g \hat{z} + \rho \omega^2 \vec{r} = -\nabla u = -\nabla \left(\rho g z - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \right) = \nabla P$$



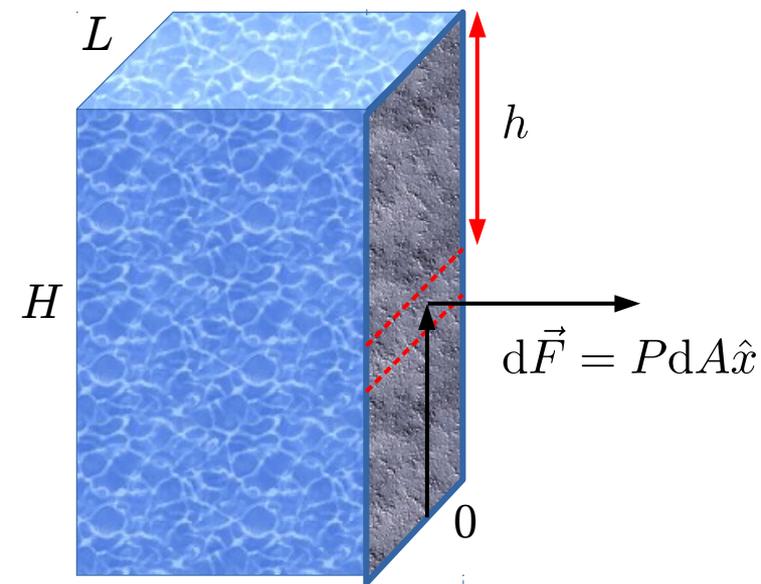
$$\Rightarrow P = P_{\text{atm}} - \rho g \left(z - \frac{\omega^2}{2g} r^2 \right)$$

A superfície do fluido é uma superfície de pressão constante (equipotencial no referencial girante não-inercial).

$$\Rightarrow z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 \quad (\text{parabolóide de revolução})$$

Ex: força e torque sobre uma represa

Calcule a força e o torque que um fluido exerce sobre uma parede retangular.



$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int d\vec{F} = \int_0^H P(h) L dh \hat{x} = \left[\int_0^H (P_0 + \rho gh) dh \right] L \hat{x} \\ &= \left(P_0 + \frac{1}{2} \rho g H \right) H L \hat{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \int (H - h) dF \hat{y} = \left[\int_0^H (H - h) (P_0 + \rho gh) dh \right] L \hat{y} \\ &= \frac{1}{2} \left(P_0 + \frac{1}{3} \rho g H \right) H^2 L \hat{y}\end{aligned}$$

Ex: lei de Halley

Pressão de um fluido compressível em equilíbrio num campo gravitacional constante.

Hipótese: $PV = \text{const}$ (ex: gás ideal a temperatura constante)

$$\text{Fluido em equilíbrio estático: } \nabla P = \vec{f}_R^{(\text{ext})}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dz} = -\rho(z)g$$

(note que ρ depende de z)

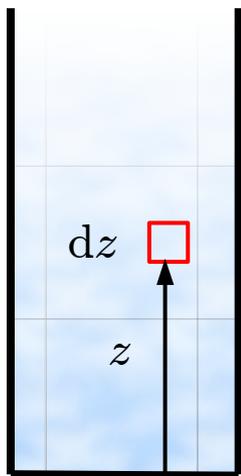
$$\text{Equação de estado: } P/\rho = \text{const} = P_0/\rho_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP}{dz} = -\frac{\rho_0 P g}{P_0}, \quad \Rightarrow \quad \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = - \int_0^z \frac{dz}{z_0} \quad \text{onde } z_0 = \frac{P_0}{\rho_0 g}$$

$$P(z) = P_0 e^{-z/z_0}$$

Para $P_0 = 1 \text{ atm}$
 $\rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$
 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

$$\Rightarrow z_0 = 8.6 \text{ km}$$



H

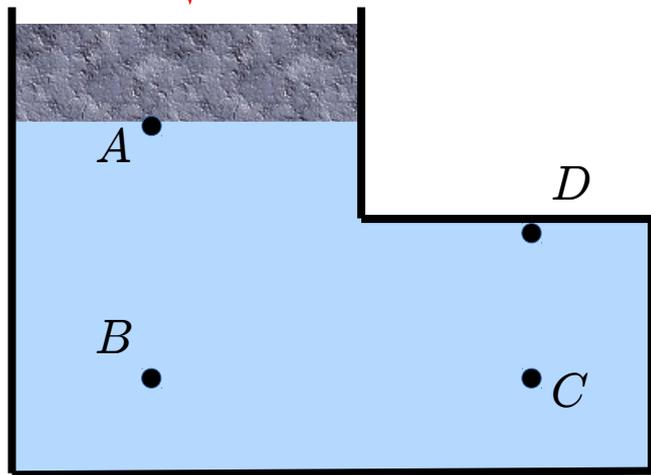
dz

z

Princípio de Pascal

Se uma variação de pressão é produzida num ponto de um fluido, ela é comunicada sem diminuir para todo o fluido e para as paredes do recipiente que o contem.

$$\vec{F} \rightarrow \vec{F} + \Delta\vec{F} \Rightarrow P(\vec{r}) \rightarrow P(\vec{r}) + \Delta P(\vec{r})$$

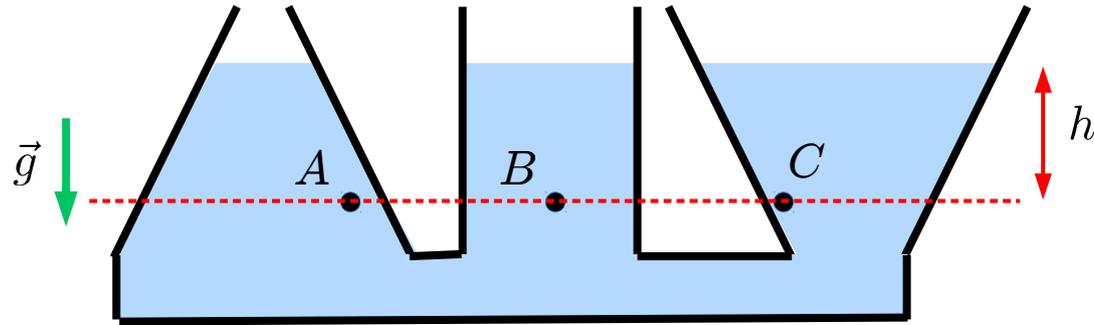


O princípio de Pascal implica que a variação de pressão não depende da posição

$$\Delta P(\vec{r}) = \Delta P$$

Isso é consequência do equilíbrio das forças internas do fluido junto com o fato de que as forças são necessariamente normais (o fluido não suporta tensões de cisalhamento).

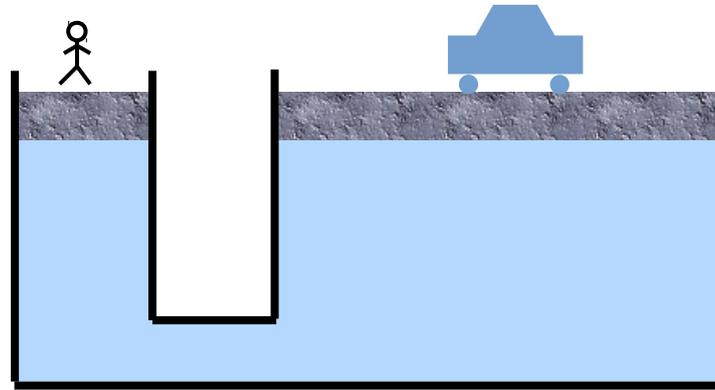
Princípio de Pascal: vasos comunicantes



Lei de Stevin: $P_A = P_B = P_C = P_{\text{atm}} + \rho gh$

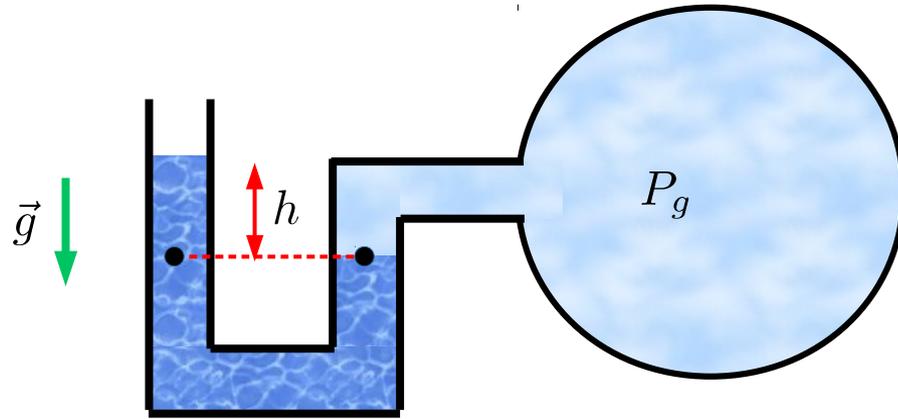
A coluna de fluido acima do ponto A é menor que a dos outros pontos. De onde vem a pressão extra para exatamente igualar com a dos outros pontos?

Princípio de Pascal: prensa hidráulica



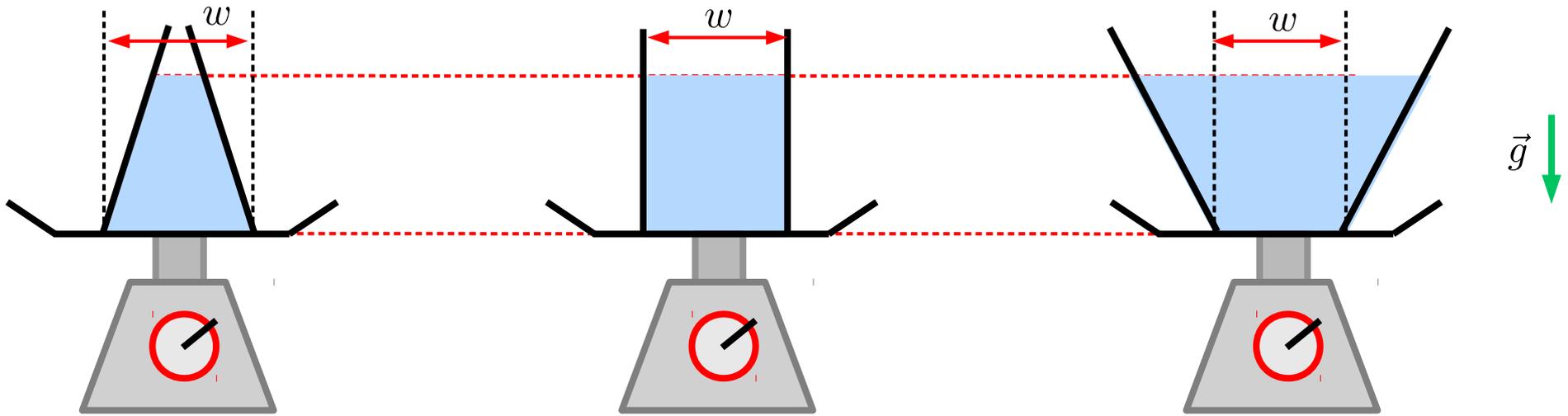
$$F_1 A_2 = F_2 A_1$$

Princípio de Pascal: manômetros



$$P_g = P_{\text{atm}} + \rho gh$$

Princípio de Pascal: paradoxo da hidrostática



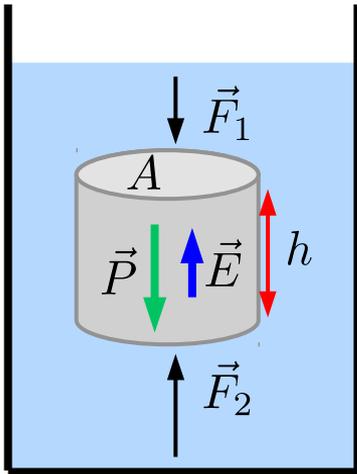
De acordo com a lei de Stevin, a força do líquido sobre o fundo da balança é igual nas 3 situações:

$$\vec{F} = -\rho g h A_w \hat{z}$$

Entretanto, a massa de fluido contida nos recipientes são distintas. Como a balança mede o peso correto?

Princípio de Arquimedes

Um corpo totalmente ou parcialmente submerso em um fluido sofre uma força de empuxo de magnitude igual ao peso do fluido deslocado e direção oposta à força peso.



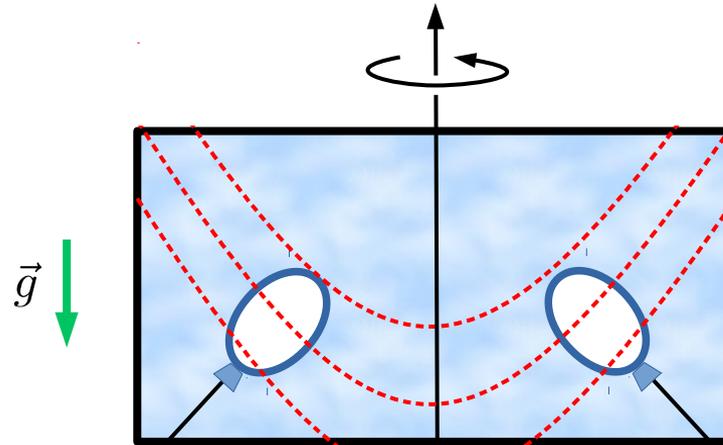
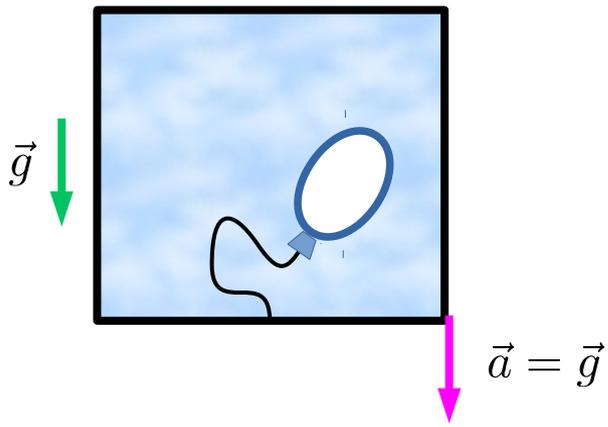
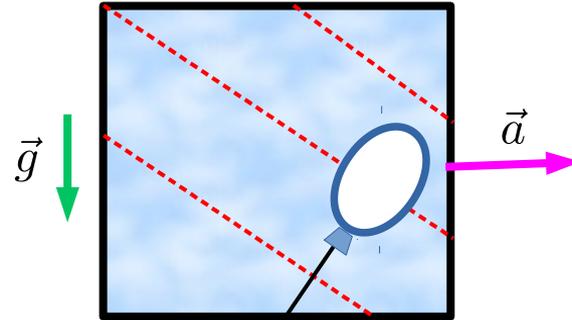
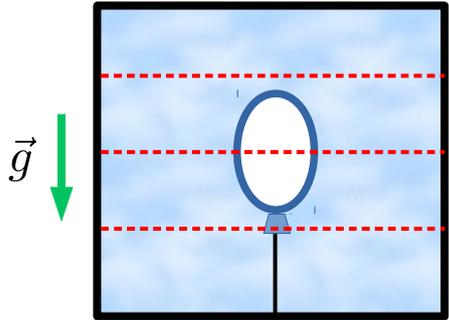
Para um corpo cilíndrico, é fácil deduzir esse princípio usando a lei de Stevin.

$$\vec{E} = \vec{F}_R^{(\text{hidrost})} = [P(z) - P(z + h)] A \hat{z} = \rho g h A \hat{z} = -\vec{P}_{\text{fluido deslocado}}$$

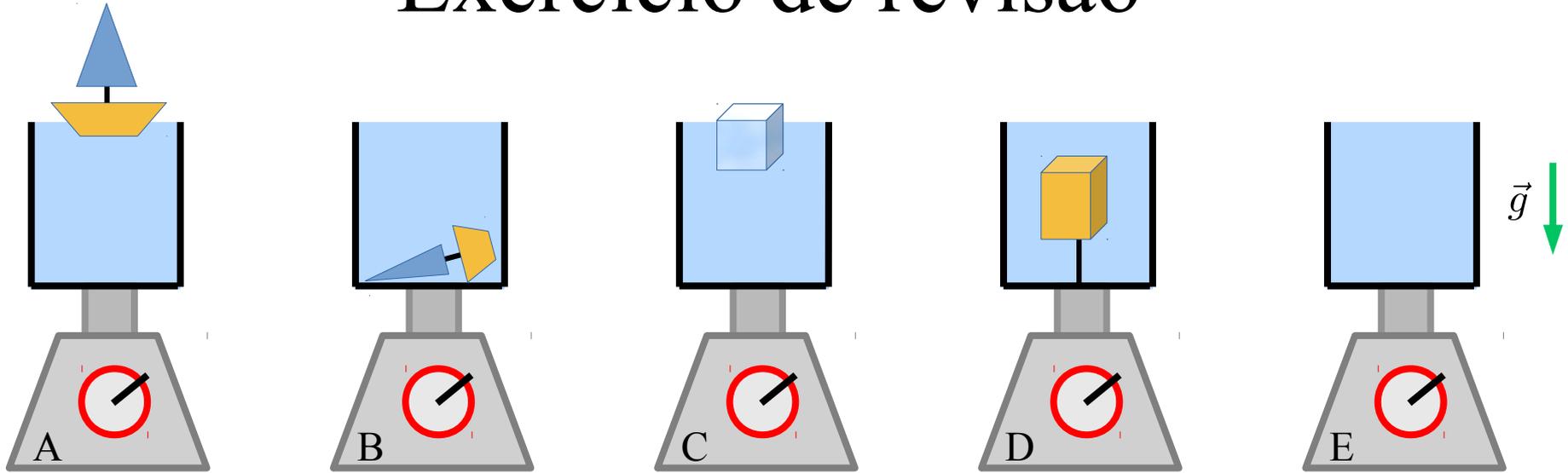
Para um corpo qualquer, este princípio pode ser facilmente deduzido calculando a força associada à energia potencial gravitacional do sistema. Se o objeto desce, o CM do fluido sobe e vice-versa. Logo,

$$U_T = (M_{\text{objeto}} - \rho V_{\text{objeto submerso}}) g z, \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{objeto}} = -\frac{dU_T}{dz} = \vec{P}_{\text{objeto}} - \vec{P}_{\text{fluido deslocado}}$$

Empuxo em referenciais acelerados



Exercício de revisão



Qual das alternativas abaixo representa a leitura nas balanças?

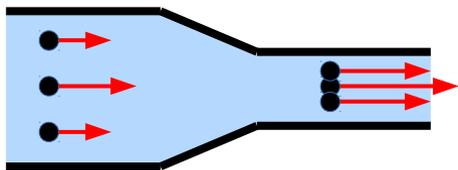
- 1) $B > A = C = E > D$
- 2) $B > A > C > E > D$
- 3) $B > A > E > C > D$
- 4) $B > E > C = A > D$
- 5) $B = A > E = C > D$

Descrevendo o movimento de fluidos

Lagrange: Subdividir o fluido em pequenos elementos e tratá-los como partículas. (Muito difícil, e raramente temos interesse na trajetória de cada elemento do fluido.)

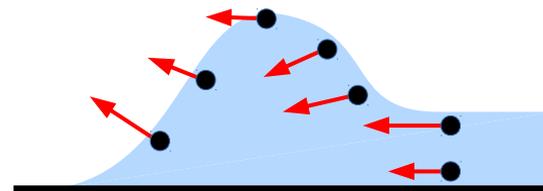
$$\rho \delta V \vec{a} = \vec{F}_R^{(V)} + \vec{F}_R^{(S)} = \delta V \left(\vec{f}_R^{(\text{ext})} - \nabla P \right), \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \equiv \vec{r}(t, \vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0)$$

Euler: Descrever o **campo de velocidades**: velocidade do fluido (não das partículas do fluido) em um determinado instante de tempo em uma determinada posição.



$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$$

Escoamento estacionário



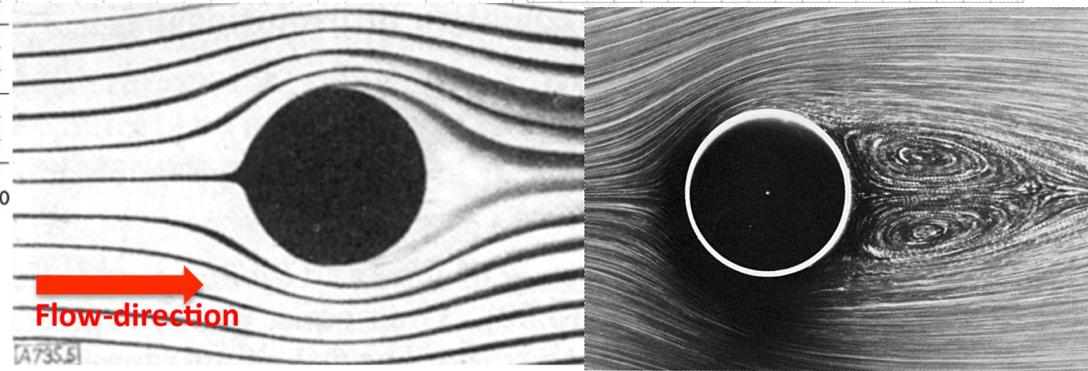
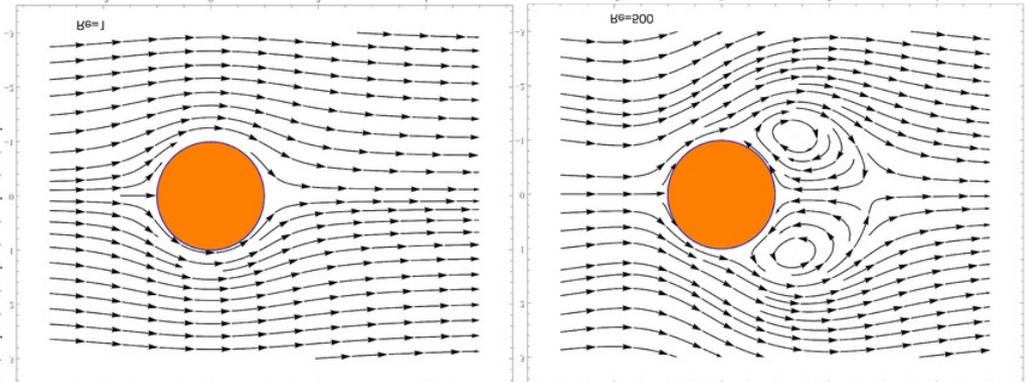
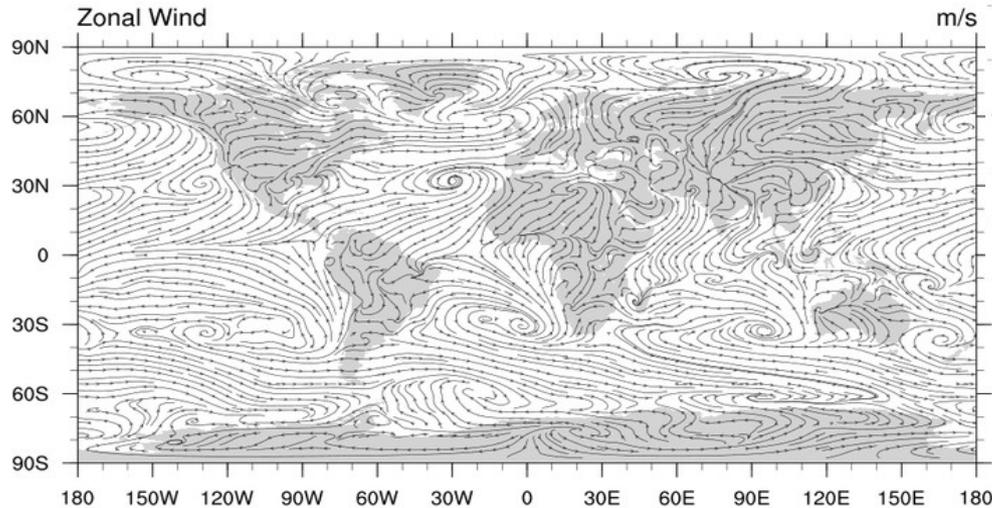
$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$$

Escoamento não-estacionário

Linhas de corrente

Definição: linha em que em cada ponto é tangente à velocidade naquele ponto num determinado instante de tempo. Duas linhas de corrente nunca se cruzam (caso contrário, haveria ambiguidade na velocidade das partículas). No caso de fluxo estacionário, as linhas de corrente também são as trajetórias das partículas.

Example of a streamline plot



Equação de continuidade

Fluxo de massa por uma superfície:

$$I_1 \equiv \frac{dm_1}{dt} = \frac{\rho_1 dV_1}{dt} = \rho_1 A_1 v_1$$

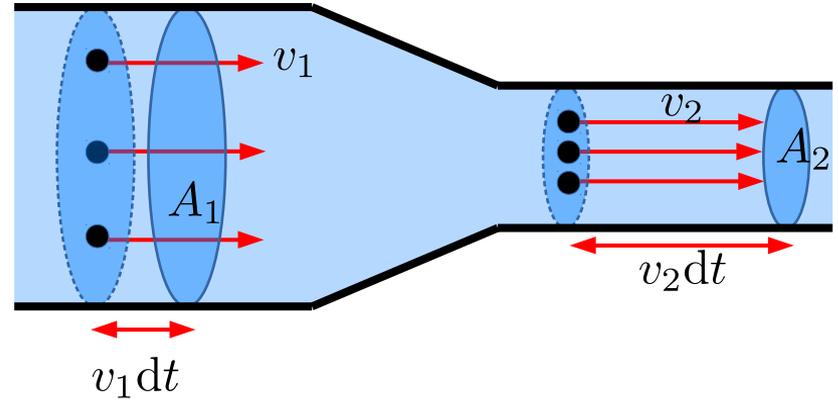
Na ausência de drenos e/ou fontes na região entre 1 e 2, **conservação de massa** implica em:

$$\frac{dm_{1,2}}{dt} = I_1 - I_2$$

Eq. de continuidade

No caso **estacionário** (independente do tempo), o fluxo de massa pelas duas superfícies são iguais:

$$\frac{dm_{1,2}}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \quad \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$



No caso de **fluidos incompressíveis**, a equação de continuidade se torna uma equação de **conservação de volume**.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Equação de continuidade (reload)

Fluxo de massa entrando na superfície fechada:

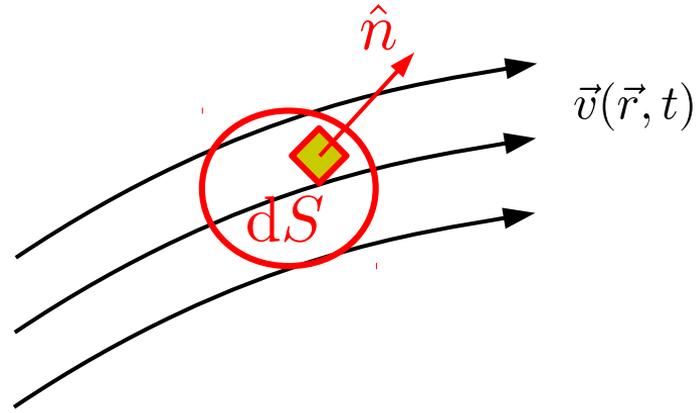
$$I = \int dI = - \oint_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

Variação de massa dentro da superfície fechada:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Teorema de Gauss:

$$\oint_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV$$



Na ausência de fontes e/ou drenos, **conservação de massa** implica em:

$$\frac{dm}{dt} = I, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0}$$

Fluido **incompressível**: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

Equação de Bernoulli

Conservação da energia mecânica em um fluxo laminar.
Necessariamente, o fluido é ideal (não-viscoso) e incompressível.

Trabalho da força hidrostática “externa”:

$$dW_1 = F_1 dx_1 = P_1 dV$$

$$dW_2 = -F_2 dx_2 = -P_2 dV$$

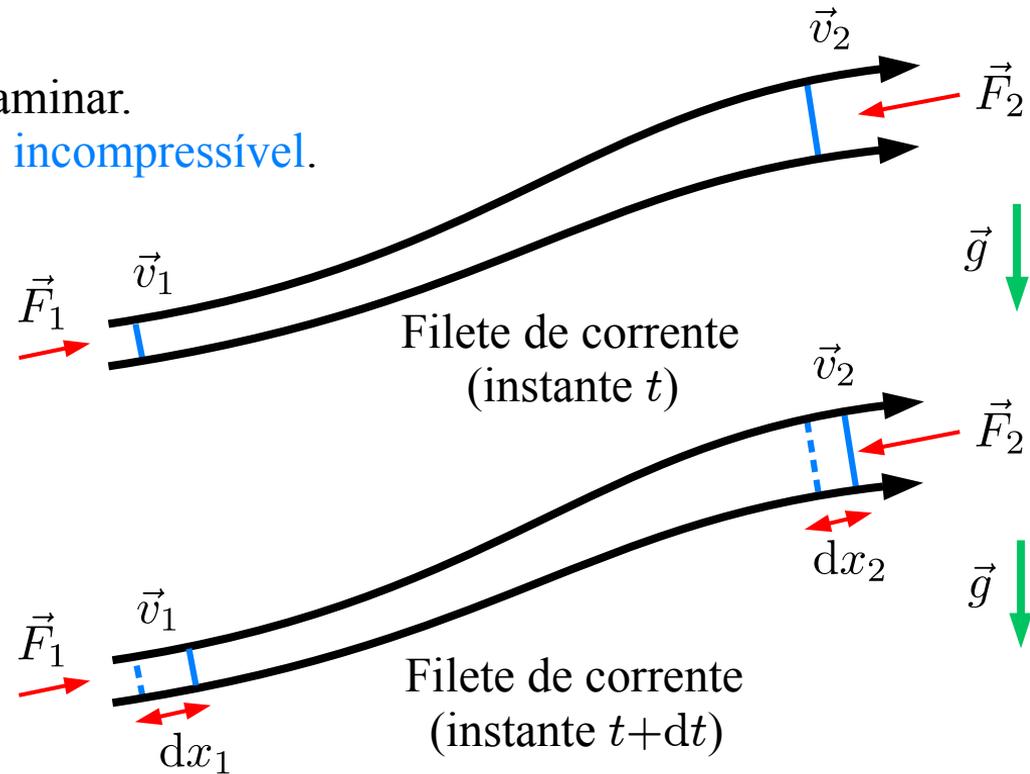
Variação das energias cinética e potencial:

$$dE_c = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2)$$

$$dU = \rho dV g (z_2 - z_1)$$

Trabalho e variação da energia mecânica:

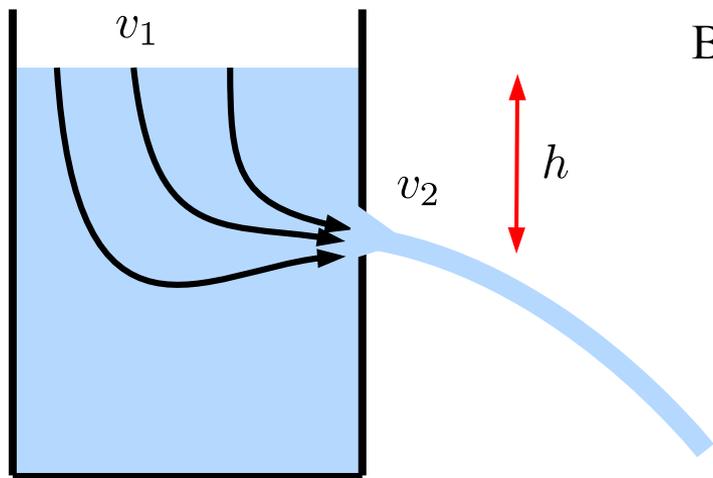
$$dW = dW_1 + dW_2 = dE_c + dU, \quad \Rightarrow \quad P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{constante no filete de corrente}$$



Lei de Torricelli

Em muitos casos, a constante é a mesma em todos os filetes de corrente.

Ex: Fluxo advindo de uma superfície horizontal. Sobre a superfície, a pressão e a velocidade são as mesmas para todas as linhas de corrente. Consequentemente, a constante é a mesma.



Bernoulli:
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

como
$$P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$$

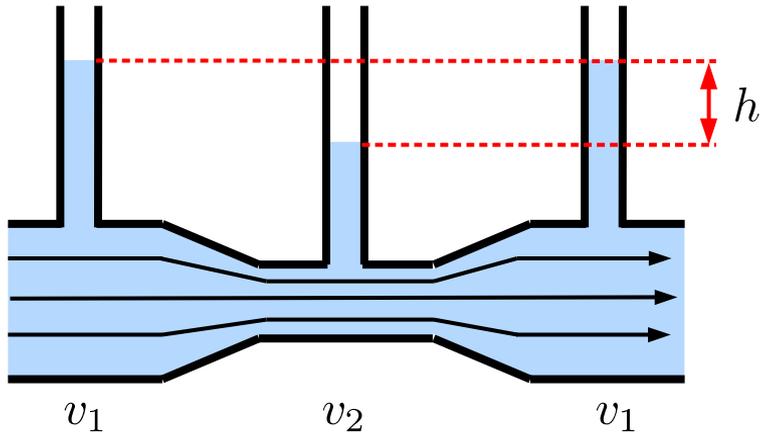
$$\Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2gh$$

Note que a lei de Torricelli pode ser diretamente obtida por conservação de energia mecânica.

Efeito Venturi

Quando forçado a passar por uma constrição, a velocidade de um fluido cresce e sua pressão diminui.

Alternativamente: Quanto maior a densidade de linhas de corrente, menor a pressão no fluido.



Aplicando Bernoulli na linha de corrente central:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Continuidade:
(supondo
incompressível)

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Stevin:

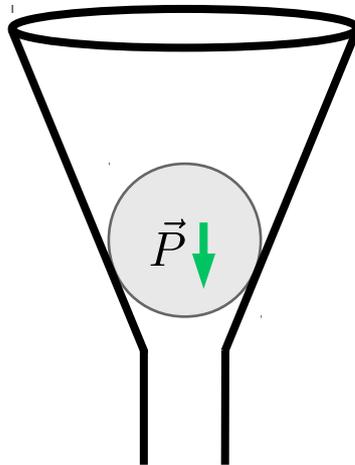
$$\Delta P = P_1 - P_2 = \rho g h$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2g} \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right) v_1^2$$

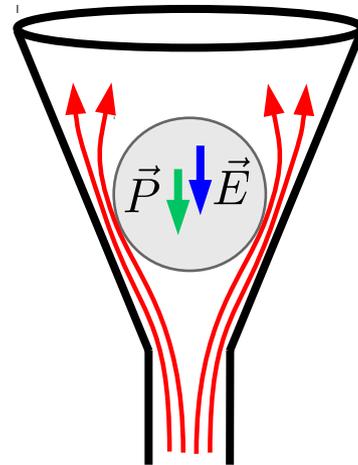
Exercício de revisão

Uma bolinha se encontra no fundo de um funil como ilustrado em (a). Você assopra pelo cano e verifica que a bolinha não sobe [vide (b)]. Você repete o experimento com o funil invertido e verifica que a bolinha não cai se o sopro for suficientemente forte [vide (c)]. Essas afirmações são

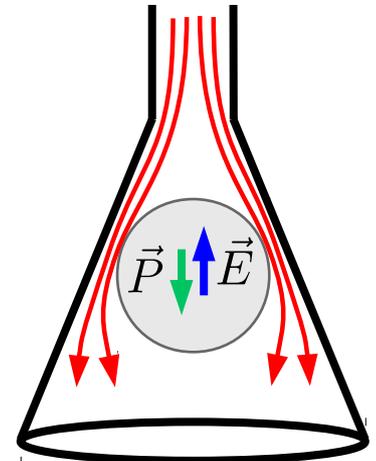
- 1) Verdadeiras. Esse é o paradoxo da hidrodinâmica.
- 2) Falsas. A bolinha sobe na primeira situação, e sempre cai na segunda. O paradoxo da hidrodinâmica é outro fenômeno.



(a)



(b)

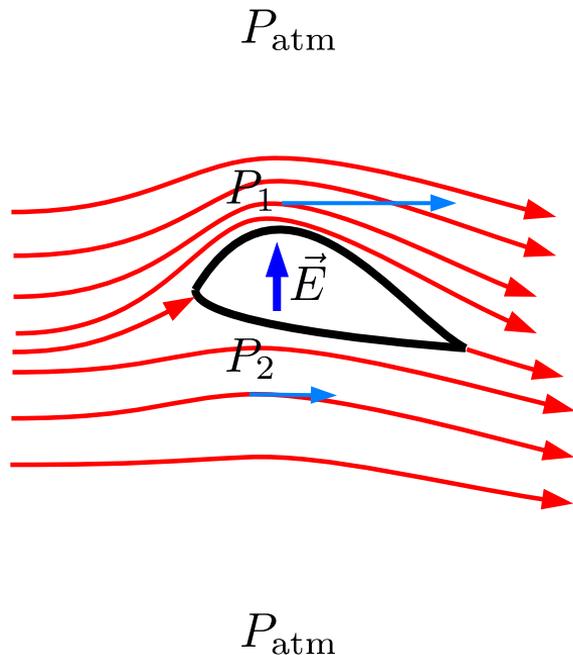


(c)

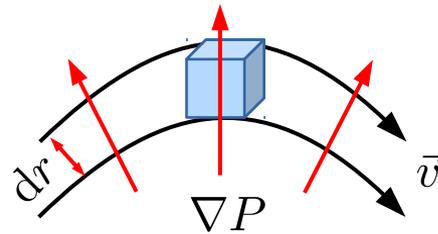
Empuxo hidrodinâmico

Sobre um objeto que causa curvaturas nas linhas de corrente do fluxo de um fluido há uma força de empuxo hidrodinâmico.

Entendimento intuitivo: 3ª lei de Newton. O objeto empurra o fluido e o fluido empurra o objeto.



Gradiente de pressão num fluxo curvilíneo:



Desprezando as forças externas,

$$\begin{aligned}\vec{F}_R &= \vec{F}_{cp} = -\rho dV \omega^2 \vec{r} \\ &= [-P(\vec{r} + d\vec{r}) + P(\vec{r})] dA \\ \Rightarrow \nabla P &= \rho \omega^2 \vec{r} = -\vec{f}_{cp}\end{aligned}$$

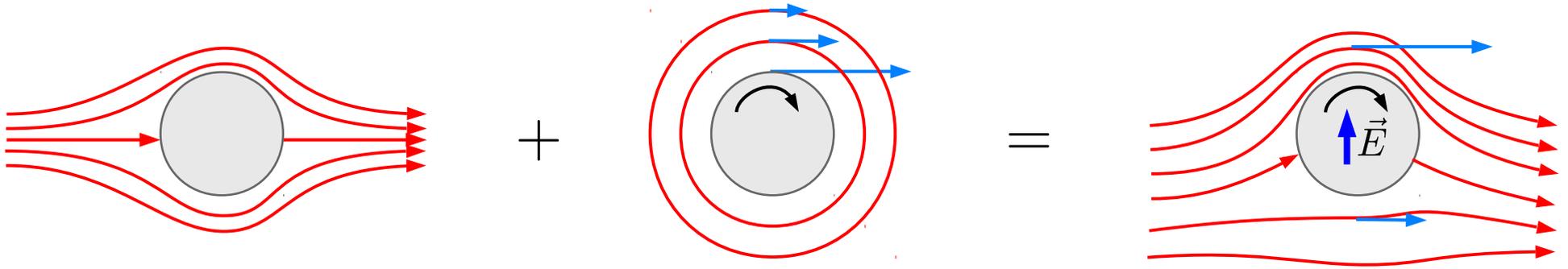
Obedecendo as condições de contorno:

$$P_1 < P_{atm} < P_2, \Rightarrow$$

$$\vec{E} \propto (P_2 - P_1) \hat{z}$$

Efeito Magnus

A trajetória de um objeto se movendo em um fluido depende de sua rotação.

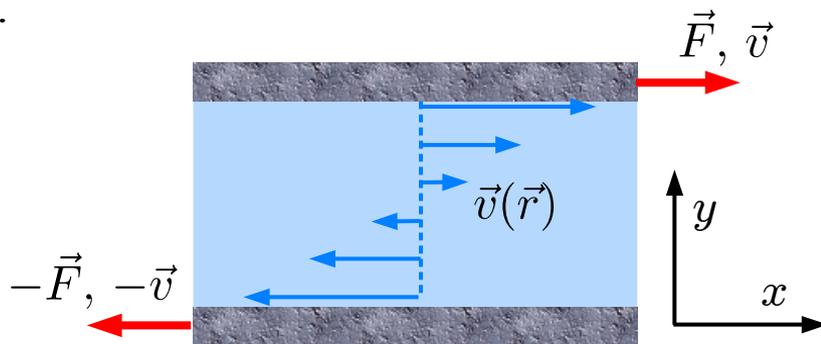


O objeto girante **arrasta** o fluido causando uma distorção curvilínea nas linhas de corrente. (Note que esse efeito é análogo ao do aerofólio, a diferença é que o perfil assimétrico do aerofólio causou a distorção. Note ainda que fluidos ideais não arrastam ou são arrastados por objetos.)

O diferença na **densidade** de linhas de corrente em regiões distintas indica, como consequência do efeito Venturi, um gradiente de pressão.

Viscosidade

Num fluido real, há uma força de **arraste** (“atrito”) entre camadas vizinhas que se propagam com **velocidades distintas**.



Tensão de cisalhamento

$$\frac{F_x}{A} \equiv \eta \frac{dv_x}{dy}$$

Para que as placas se desloquem entre si com velocidades constantes e distintas, uma força deve ser aplicada proporcional à área das placas, à razão entre as diferenças de velocidade e a distância entre as placas (gradiente de velocidades normal), e à **viscosidade**.

$$[\eta] = \text{Pressão} \times \text{tempo}$$

$$\text{SI: Pa} \cdot \text{s}$$

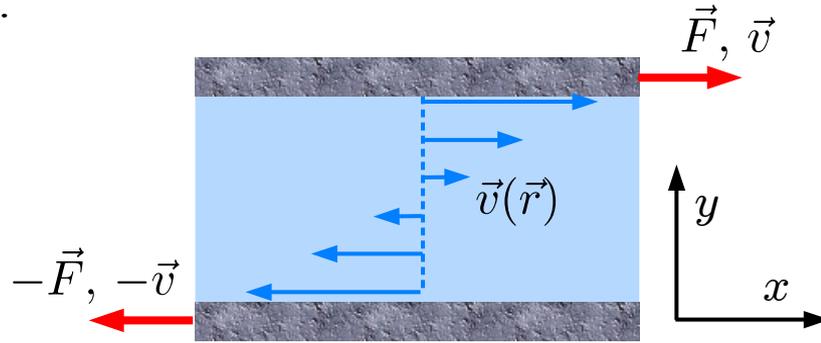
Outras unidades comumente usadas:

Poise (p), e centipoise (cp)

$$1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ p}$$

Viscosidade

Num fluido real, há uma força de **arraste** (“atrito”) entre camadas vizinhas que se propagam com **velocidades distintas**.



Tensão de cisalhamento

$$\frac{F_x}{A} \equiv \eta \frac{dv_x}{dy}$$

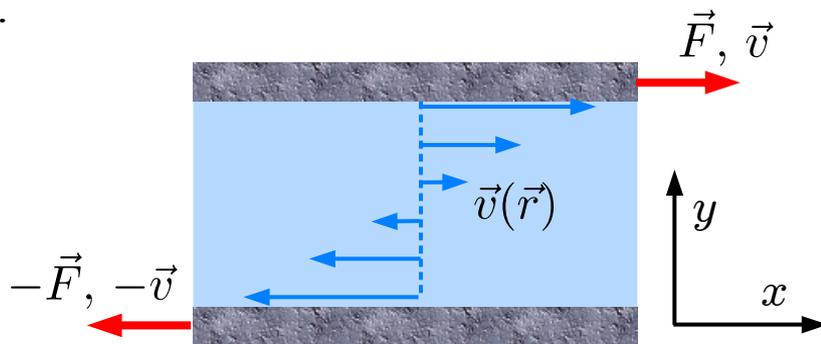
Água (20° C)	1.002 mPa·s
Acetona (25° C)	0.306 mPa·s
Nitrogênio líquido (77 K)	0.158 mPa·s
Mel	2–10 Pa·s
Ketchup	50–10 Pa·s
Ar (27° C)	18.6 μPa·s
Hidrogênio (27° C)	9 μPa·s
Hélio superfluido	0

Em líquidos: $\eta \downarrow$ quando $T \uparrow$

Em gases: $\eta \uparrow$ quando $T \uparrow$

Viscosidade

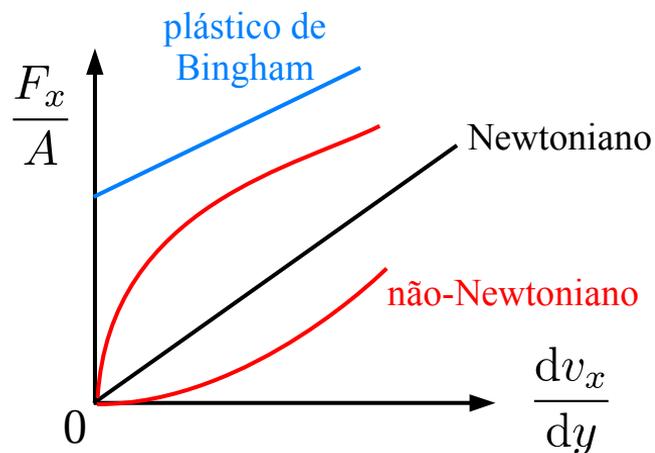
Num fluido real, há uma força de **arraste** (“atrito”) entre camadas vizinhas que se propagam com **velocidades distintas**.



Tensão de cisalhamento

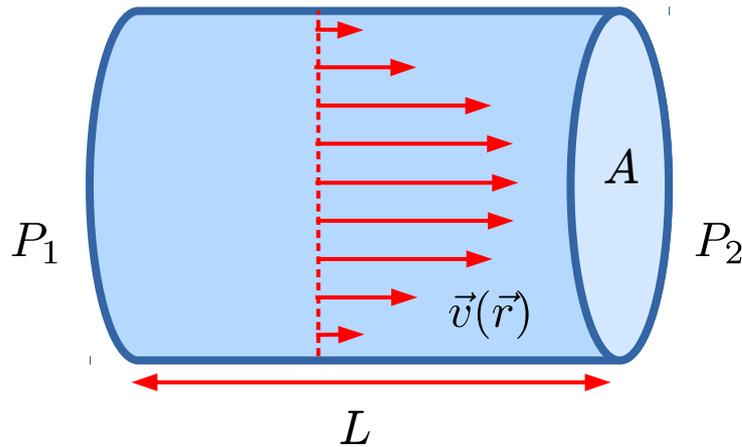
$$\frac{F_x}{A} \equiv \eta \frac{dv_x}{dy}$$

Alguns tipos de fluidos



Lei de Hagen-Poiseuille

A **vazão** (ou fluxo de volume) de um fluido viscoso e incompressível em fluxo laminar por um tubo cilíndrico é proporcional à **diferença de pressão** entre as extremidades do tubo, ao quadrado da seção reta do tubo, e inversamente proporcional ao comprimento do mesmo.

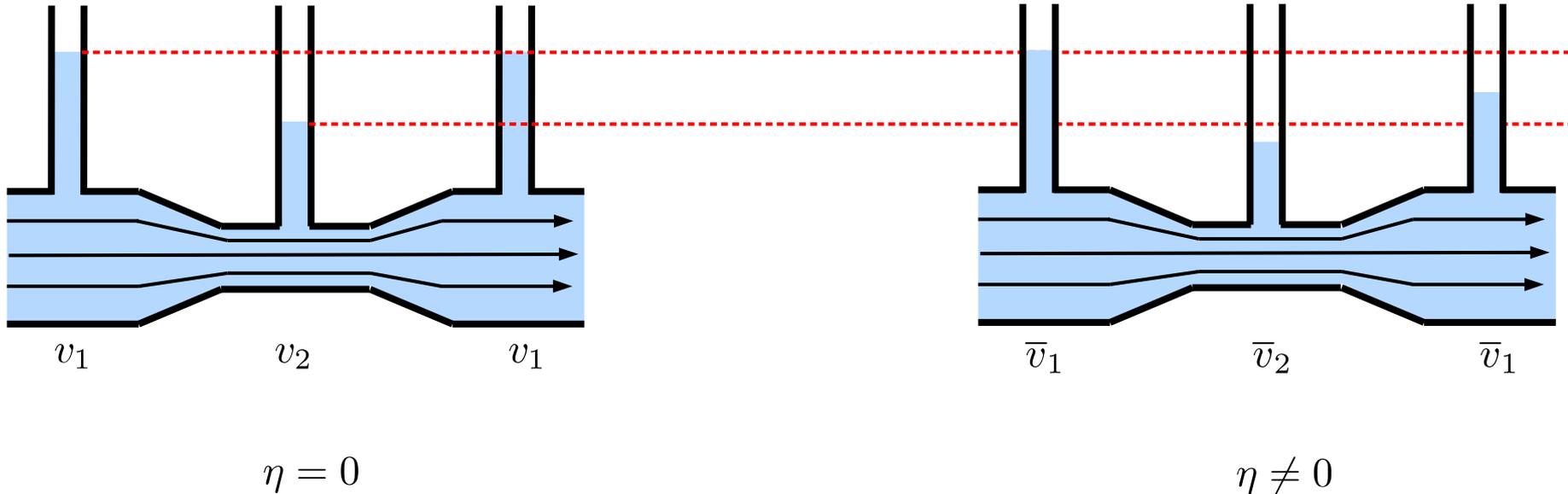


$$\text{vazão} \equiv I = \left(\frac{A^2}{8\pi\eta L} \right) \Delta P$$

Note a analogia com a lei de Ohm: $I = \frac{\Delta V}{R}$

Lei de Hagen-Poiseuille

Energia cinética é dissipada pela força viscosa com as paredes do tubo. Por continuidade (conservação de massa), entretanto, energia cinética não deve ser dissipada (como ilustrado abaixo). Com conciliar esses cenários aparentemente contraditórios? A energia hidrostática (pressão) supre a energia cinética dissipada pela força viscosa. Por isso, a “queda” de pressão ao longo do fluxo.



Lei de Hagen-Poiseuille

Derivação:

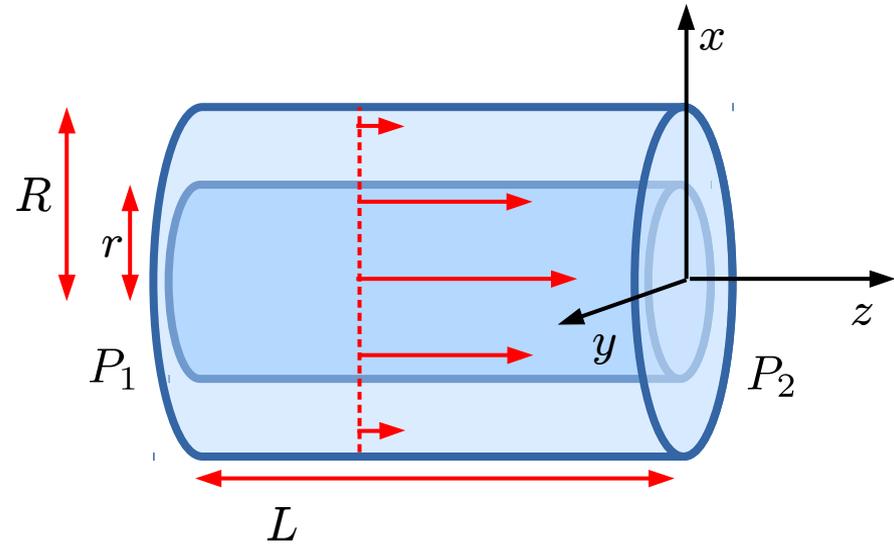
Por simetria, o campo de velocidades é

$$\vec{v}(\vec{r}) = v(r)\hat{z}$$

Força sobre o tubo interno (imaginário):

$$F_R^{(z)} = 0 = \pi r^2 (P_1 - P_2) + \eta (2\pi r L) \left(\frac{dv}{dr} \right)$$

$$\Rightarrow dv = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r dr \quad \Rightarrow \quad v + \text{const} = -\frac{\Delta P}{4\eta L} r^2$$



Como determinar a constante de integração?

Sabemos que a velocidade do fluido nas paredes do tubo é nula, ou seja,

$$v(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

Lei de Hagen-Poiseuille

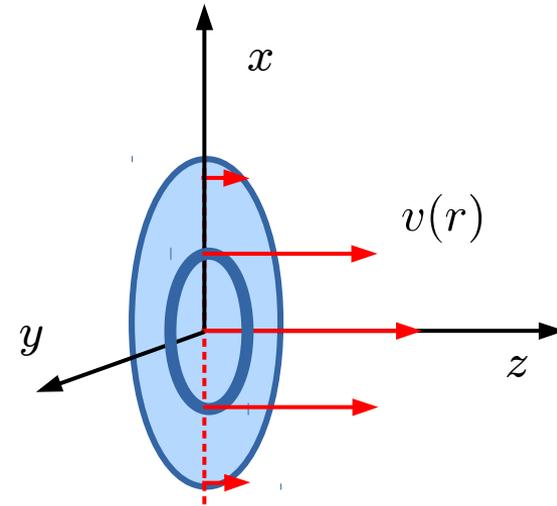
Derivação:

Vazão infinitesimal atravessando o anel:

$$dI = v \times dA = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \times 2\pi r dr$$

Vazão total:

$$I = \int dI = \frac{\pi \Delta P}{2\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \left(\frac{\pi R^4}{8\eta L} \right) \Delta P = \left(\frac{A^2}{8\pi\eta L} \right) \Delta P$$



Número de Reynolds \mathcal{R}

Equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = -\nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{\Omega}$$

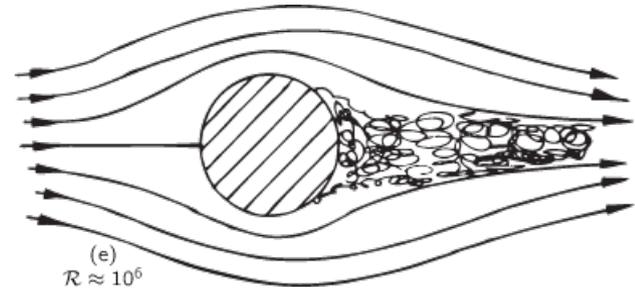
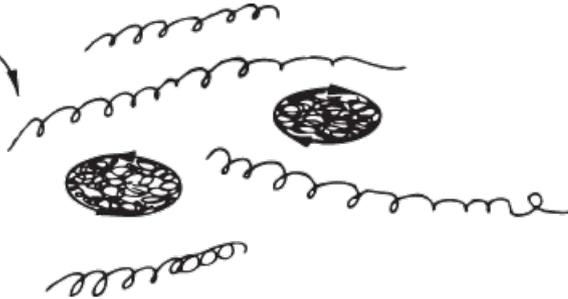
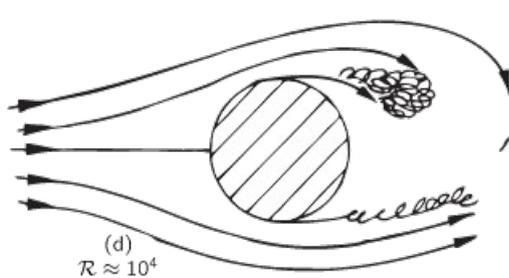
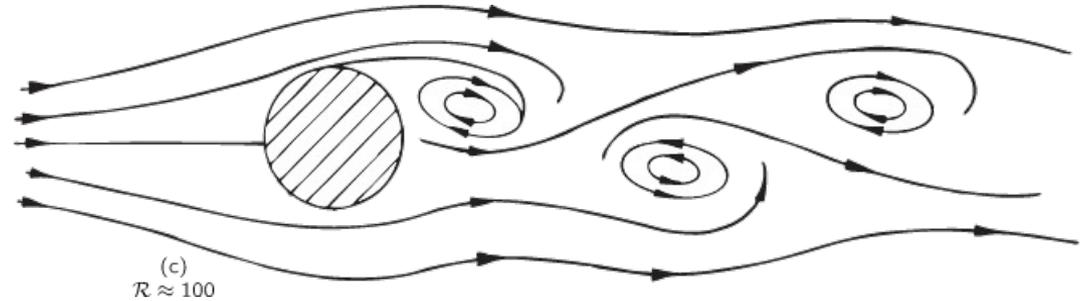
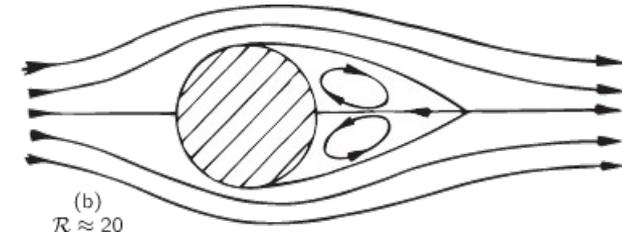
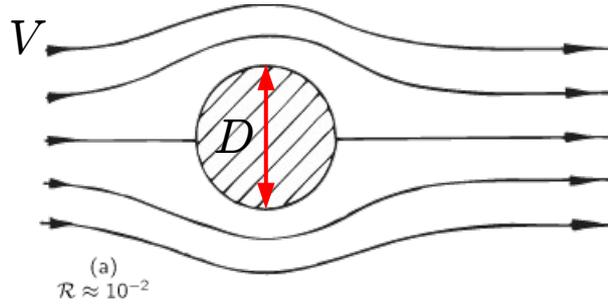
$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}$$

Versão adimensional:

$$\vec{v} = \vec{v}/V, \quad \vec{r} = \vec{r}/D, \quad \tilde{t} = tV/D$$

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) + \frac{1}{\mathcal{R}} \tilde{\nabla}^2 \vec{\Omega}$$

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\rho DV}{\eta}$$



Força de arraste

Arraste de Stokes

(ou viscoso, ou de fricção) ($\mathcal{R} \ll 1$):

$$F = 6\pi\eta Rv \quad (\text{esfera})$$

$$\propto v$$

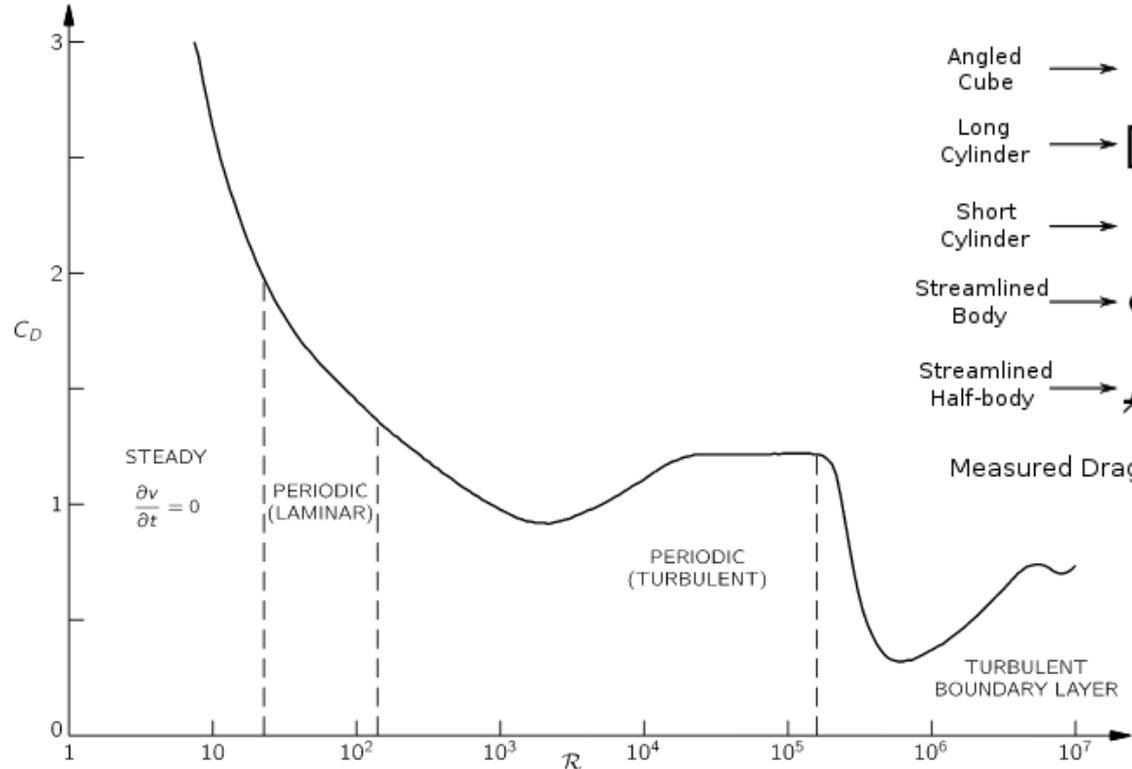
Arraste de Newton

(ou de pressão, ou de forma):

$$F = \frac{1}{2}C_D\rho A_{\perp}v^2 \propto v^2$$

De maneira geral:

$$F = \frac{1}{2}C_D(\mathcal{R})\rho A_{\perp}v^2$$



Shape	Drag Coefficient
Sphere	0.47
Half-sphere	0.42
Cone	0.50
Cube	1.05
Angled Cube	0.80
Long Cylinder	0.82
Short Cylinder	1.15
Streamlined Body	0.04
Streamlined Half-body	0.09

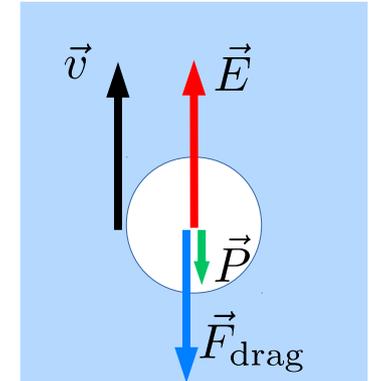
Measured Drag Coefficients

Força de arraste

Qual o regime de escoamento das bolhas na cerveja?

$$\eta_{\text{cerveja}} = 1.8 \text{ mPa}\cdot\text{s}$$

$$\rho_{\text{cerveja}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$$



Arraste viscoso:

$$F_{\text{visc}} = 6\pi\eta Rv \approx E = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 g, \quad \Rightarrow \quad v_{\text{terminal}} = \frac{2\rho R^2 g}{9\eta} = \begin{cases} 1.3 \text{ m/s} & (R = 1.0 \text{ mm}) \\ 31 \text{ m/s} & (R = 0.5 \text{ mm}) \end{cases}$$

Arraste de pressão:

$$F_{\text{forma}} = \frac{1}{2}\rho C A v^2 \approx E = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 g, \quad \Rightarrow \quad v_{\text{terminal}} = \sqrt{\frac{8Rg}{9C}} = \begin{cases} 23 \text{ cm/s} & (R = 1.0 \text{ mm}) \\ 16 \text{ cm/s} & (R = 0.5 \text{ mm}) \end{cases}$$

Arraste de pressão é dominante	$\Rightarrow \mathcal{R} = \frac{\rho D v}{\eta} \approx \frac{10^3 \times 10^{-3} \times 0.2}{2 \times 10^{-3}} = 10^2$	Escoamento periódico laminar/turbulento
--------------------------------	--	---