Momento Linear ou Quantidade de Movimento

Momento de 1 partícula de massa m:

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}$$

Lembre-se da segunda lei de Newton:

$$\vec{F}_R \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

Equivalentemente

$$\Delta\vec{p} = \int_0^t \vec{F}_R\left(t'\right)\mathrm{d}t'$$

Impulso

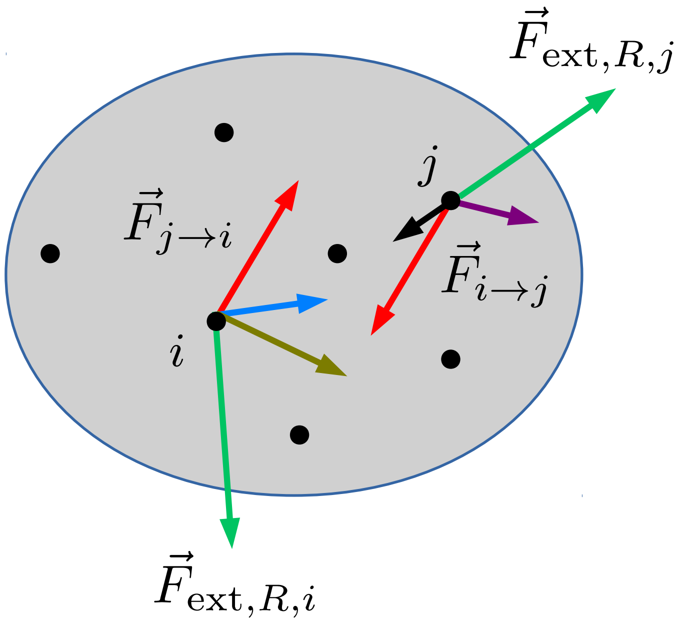
Exercício

Em um referencial, uma partícula tem momento igual a 1,0 N s na direção positiva do eixo x.
Assinale a alternativa correta.

1) Existe um outro referencial em que esse momento é nulo.
2) Existe um outro referencial em que esse momento é de 1,0 N s na direção positiva do eixo y.
3) Todas as anteriores.
4) Como o momento está relacionado à força resultante, então o momento é o mesmo para todos os referenciais inerciais.
5) Nenhuma das anteriores.

Momento total e força resultante total

Sistema de várias partículas:



2ª lei para uma partícula:

$$\vec{F}_{R,i} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext},R,i} + \vec{F}_{\text{int},R,i} = \vec{F}_{\text{ext},R,i} + \sum_{k\neq i} \vec{F}_{k\to i}$$

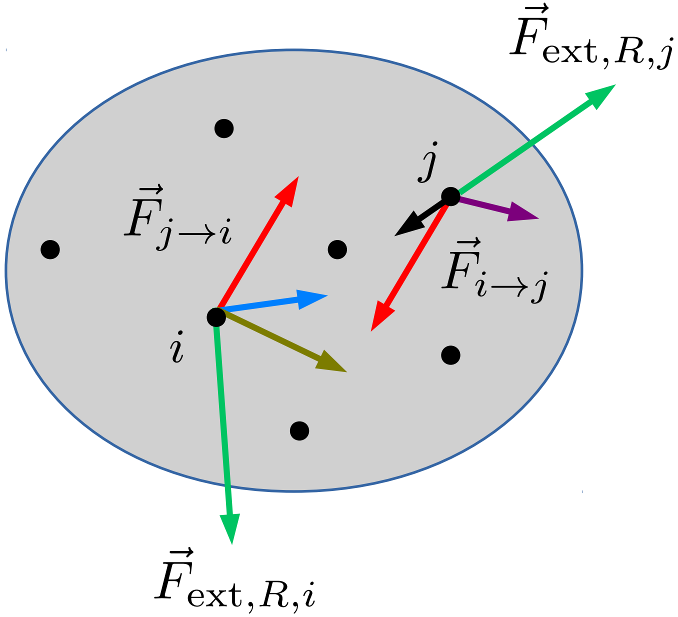
Somando todas as forças:

$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_{R,i} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext},R,i} + \underbrace{\sum_i \vec{F}_{\text{int},R,i}}_{= 0 \text{ (3ª lei, ação-reação)}} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext},R,i} = \vec{F}_{\text{ext},R}$$

$$= \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}_T$$

Conservação do momento linear

Sistema de várias partículas:



Caso a força externa total seja nula, então

$$\vec{F}_R = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_T}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{ext},R} = \vec{0}, \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_T = \text{constante}$$

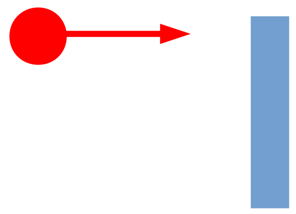
Exercício

Dois objetos colidem em uma superfície plana perfeitamente lisa. Sendo que a inércia do primeiro é o dobro da do segundo, qual a relação entre as variações de suas velocidades?

1) $\Delta\vec{v}_1 = \Delta\vec{v}_2$
2) $\Delta\vec{v}_1 = 2\Delta\vec{v}_2$
3) $\Delta\vec{v}_1 = \Delta\vec{v}_2/2$
4) $\Delta\vec{v}_1 = -\Delta\vec{v}_2$
5) $\Delta\vec{v}_1 = -2\Delta\vec{v}_2$
6) $\Delta\vec{v}_1 = -\Delta\vec{v}_2/2$

Exercício

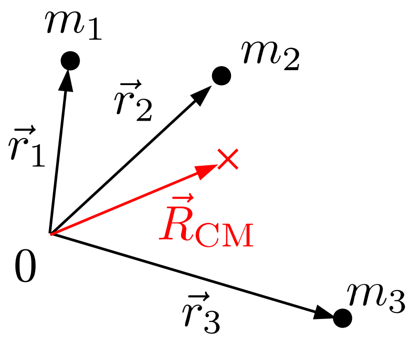
Dois objetos homogêneos e de massas distintas colidem em uma superfície plana perfeitamente lisa como ilustrado abaixo. Sendo que eles permanecem grudados após a colisão, podemos concluir que



1) Eles giram e se propagam p/ direita.
2) Eles apenas giram.
3) Eles apenas se propagam p/ direita.
4) Eles giram e se propagam p/ direita e p/ baixo.
5) Eles giram e se propagam p/ baixo.
6) Eles giram e se propagam p/ direita e p/ cima.
7) Eles giram e se propagam p/ cima.

Centro de massa e o momento linear total

Definição: $$\vec{R}_{\text{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M_T}$$



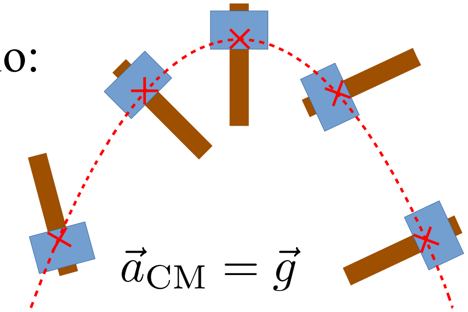
Momento do CM:

$$\vec{p}_{\text{CM}} \equiv M_T \vec{v}_{\text{CM}} = M_T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M_T}\right) = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_i\right) = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{p}_T$$

$m_i = \text{constante}$

$M_T = \text{constante}$

Exemplo:



Logo, as forças internas não afetam o movimento do CM

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}_{\text{CM}} = M_T \vec{a}_{\text{CM}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}_T = \vec{F}_R = \vec{F}_{\text{ext},R}$$

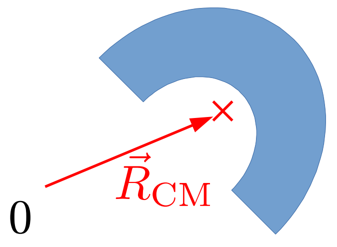
Exercício

Um astronauta em sua nave e parados no espaço “pula” de um lado da nave para o lado oposto como ilustra a figura abaixo. Ao chegar do outro lado, ele segura na parede oposta. Podemos afirmar que

1) Ao final, o sistema está girando e se propagando para direita.
2) A energia cinética é conservada durante todo o processo.
3) Após o pulo, o astronauta vai p/ direita, e a nave p/ esquerda girando. Ao final, tudo está parado.
4) Após o pulo, a energia cinética aumenta e, por conservação de momento, o sistema apenas gira ao final.
5) A nave fica sempre parada. Ao final, o astronauta está do outro lado com tudo parado.

Centro de massa em sistemas contínuos

$$\vec{R}_{\mathrm{CM}} \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \rightarrow \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int \vec{r}\rho\left(\vec{r}\right)\mathrm{d}V}{\int \rho\left(\vec{r}\right)\mathrm{d}V} = \frac{\int \vec{r}\rho\left(\vec{r}\right)\mathrm{d}V}{M_T}$$

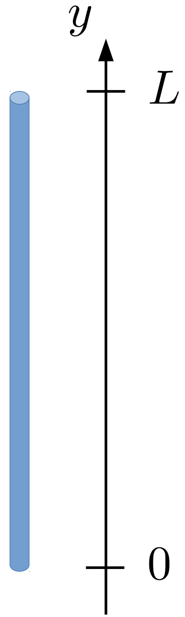


$\rho \equiv$ densidade volumétrica de massa $\qquad [\rho] = \dfrac{\text{massa}}{\text{volume}}$

Para objetos bidimensionais, então usa-se a densidade superficial de massa.
Para objetos unidimensionais, então usa-se a densidade linear de massa.

Centro de massa em sistemas contínuos

Ex: Uma barra homogênea muito fina de densidade linear λ e comprimento L está disposta como ilustra a figura. Qual a massa da barra? Onde se localiza o seu centro de massa?



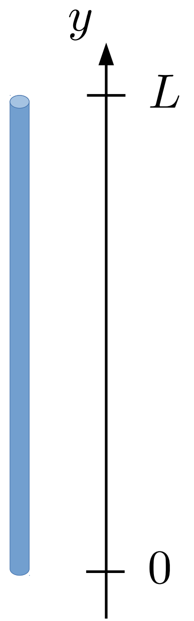
$$M_T = \int_0^L \lambda \mathrm{d}y = \lambda \int_0^L \mathrm{d}y = \lambda L$$

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M_T} \int_0^L y \lambda \mathrm{d}y = \frac{1}{L} \int_0^L y \mathrm{d}y = \frac{1}{2} L$$

Observe que o CM sempre está sobre um eixo de simetria.

Centro de massa em sistemas contínuos

Ex: Uma barra muito fina de densidade linear $\lambda = \alpha y$ (onde y é a distância a partir da extremidade inferior e α é uma constante) e comprimento L está disposta como ilustra a figura.
Qual a massa da barra? Onde se localiza o seu centro de massa?



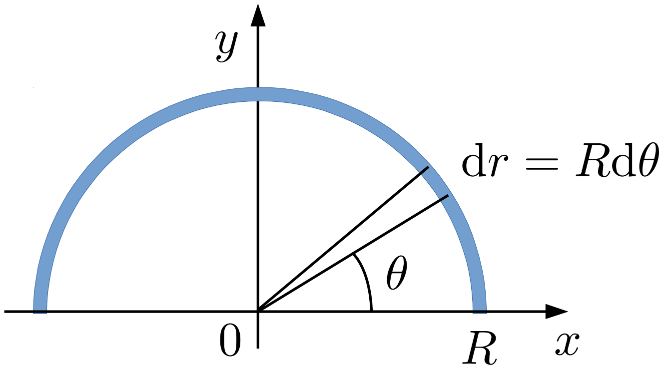
$$M_T = \int \lambda\left(y\right)\mathrm{d}y = \alpha \int_0^L y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\alpha L^2$$

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M_T}\int_0^L y\lambda\left(y\right)\mathrm{d}y = \frac{2}{L^2}\int_0^L y^2\mathrm{d}y = \frac{2}{3}L$$

Observe que o CM sempre está sobre um eixo de simetria.
Neste caso qual é o eixo de simetria?

Centro de massa em sistemas contínuos

Ex: Um aro muito fino de densidade linear constante λ e raio R está disposta como ilustra a figura. Qual a massa do aro? Onde se localiza o seu centro de massa?



$$M_T = \int \lambda \mathrm{d}r = \lambda \int_0^\pi R\mathrm{d}\theta = \lambda\pi R$$

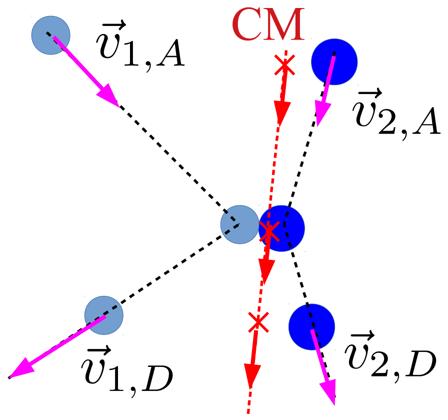
$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M_T}\int y\lambda \mathrm{d}r = \frac{1}{\pi R}\int R\sin\theta \mathrm{d}r = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}R$$

Observe que o CM sempre está sobre um eixo de simetria, $\Rightarrow \quad x_{\mathrm{CM}} = 0$

Colisões

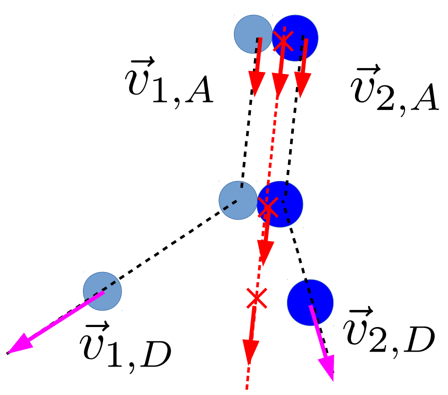
Definição: Eventos onde há troca de momento entre as partículas. Não necessariamente há conservação de energia. Usualmente, as forças externas são nulas (ou desprezíveis quando comparadas com as forças internas no intervalo de tempo da interação) e o fenômeno pode ser analisado utilizando a conservação de momento.

Colisão:



Trajetória do CM

Explosão:



Trajetória do CM

Conservação do momento total:

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = \int_{t_c}^{t_c+\delta t} \vec{F}_{2\to 1} \mathrm{d}t = \vec{F}_m \delta t$$

$$= -\int_{t_c}^{t_c+\delta t} \vec{F}_{1\to 2} \mathrm{d}t = -m_2 \Delta \vec{v}_2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_{1,A} + \vec{p}_{2,A} = \vec{p}_{1,D} + \vec{p}_{2,D}$$

Colisões e energia cinética

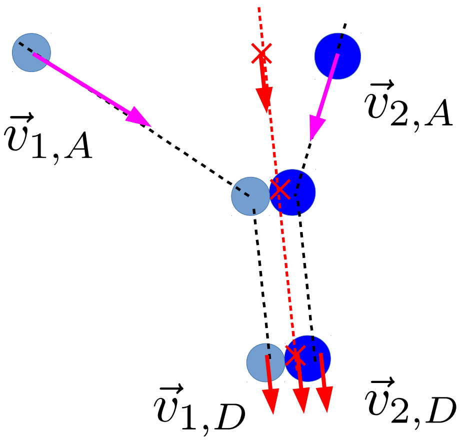
Definições:

Colisão elástica: conservam energia cinética.

Colisão inelástica: não conservam energia cinética.

Colisão perfeitamente inelástica: perda da energia cinética é máxima.

Colisão perfeitamente inelástica:



Conservação do momento total:

$$\vec{p}_{1,A} + \vec{p}_{2,A} = \vec{p}_{1,D} + \vec{p}_{2,D}$$
$$m_1\vec{v}_{1,A} + m_2\vec{v}_{2,A} = (m_1 + m_2)\,\vec{v}_D$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_D = \frac{m_1\vec{v}_{1,A} + m_2\vec{v}_{2,A}}{m_1 + m_2} = \vec{v}_{\mathrm{CM}}$$

REFERENCIAL DO LABORATÓRIO

Colisões e energia cinética

Definições:

Colisão elástica: conservam energia cinética.

Colisão inelástica: não conservam energia cinética.

Colisão perfeitamente inelástica: perda da energia cinética é máxima.

Colisão perfeitamente inelástica:

Antes:

$\vec{u}_{1,A}$ $\vec{u}_{2,A}$

Depois:

$$\vec{u}_{1,D} = \vec{u}_{2,D} = u_{\text{CM}} = 0$$

Conservação do momento total:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{1,A} + \vec{p}_{2,A} &= \vec{p}_{1,D} + \vec{p}_{2,D} \\ m_1\vec{u}_{1,A} + m_2\vec{u}_{2,A} &= 0 \end{aligned}$$

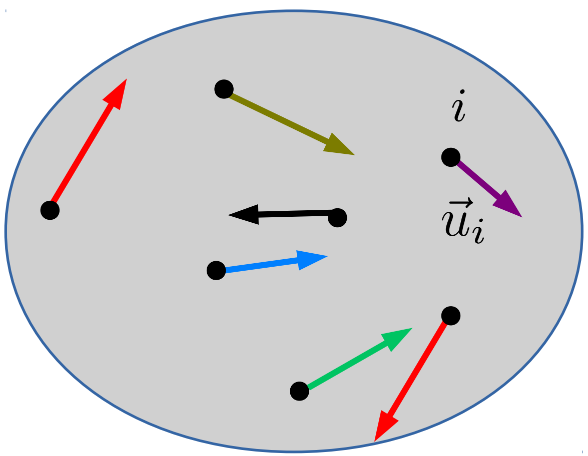
Toda energia cinética é perdida no Ref. Do CM:

$$\Delta E_c = E_{c,D} - E_{c,A} = -\frac{1}{2}m_1u_{1,A}^2 - \frac{1}{2}m_2u_{2,A}^2$$

Essa é a perda de energia em qualquer referencial.

REFERENCIAL DO CM

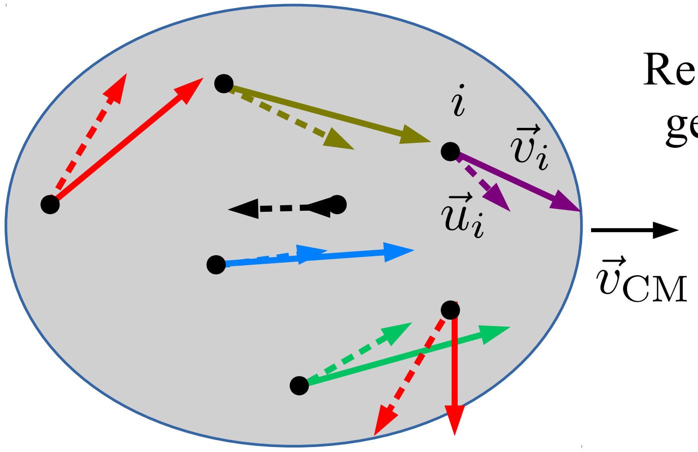
Energia cinética de um sistema de partículas



Referencial do CM:

$$E_c^{(\text{Ref}_{\text{CM}})} = \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2$$

energia cinética "interna"



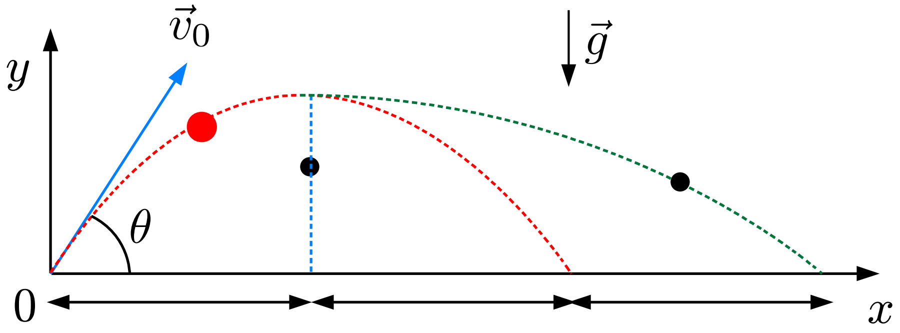
Referencial genérico:

$$\begin{aligned}
E_c &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{u}_i + \vec{v}_{\text{CM}}\right)^2 \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(u_i^2 + 2\vec{u}_i \cdot \vec{v}_{\text{CM}} + v_{\text{CM}}^2\right) \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \left(\sum_i m_i \vec{u}_i\right) \cdot \vec{v}_{\text{CM}} + \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i\right) v_{\text{CM}}^2 \\
&= E_c^{(\text{Ref}_{\text{CM}})} + 0 + \frac{1}{2} M_T v_{\text{CM}}^2 = E_c^{(\text{Ref}_{\text{CM}})} + E_{c,\text{CM}}
\end{aligned}$$

Somente a energia cinética relativa ao centro de massa (energia cinética "interna") pode mudar em um sistema isolado.

Exercício

Um projétil é lançado obliquamente (como ilustrado abaixo) e explode quando alcança o ponto mais alto se dividindo em duas partes de massas iguais. Sendo que, após a explosão, uma delas cai a partir do repouso, onde cai a outra? Quanto de energia é liberada?



Conservação do momento horizontal:

$$2mv_0\cos\theta = 0 + mv_{x,D}$$

$$\Rightarrow \quad v_{x,D} = 2v_{0,x}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Alcance} = \frac{3}{2}A = \frac{3v_0^2}{2g}\sin 2\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}_T = \vec{F}_{\mathrm{ext},R} = -2mg\hat{y}$$

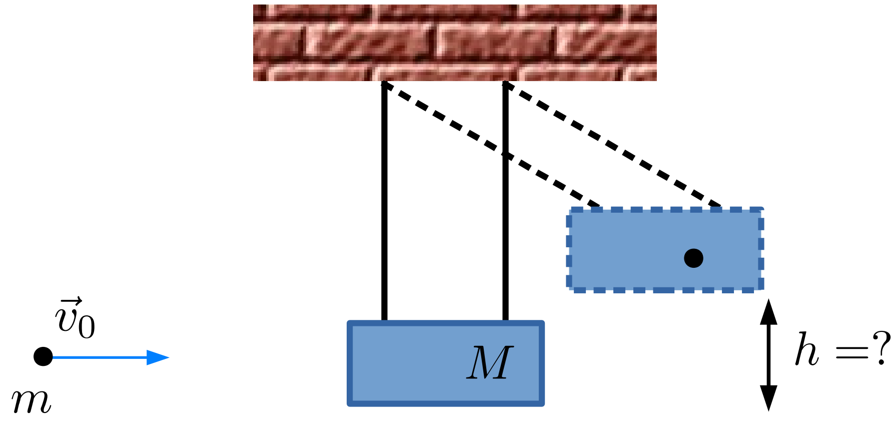
$$\Rightarrow \quad p_{T,x} = \text{constante}$$

Energia liberada:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}m\left(2v_{0,x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(2m\right)v_{0,x}^2 \\ &= mv_{0,x}^2 = mv_0^2\cos^2\theta\end{aligned}$$

Exercício

Pêndulo balístico.



Conservação do momento horizontal:

$$mv_0 = (m+M)v$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{m}{m+M} v_0 = v_{\text{CM}}$$

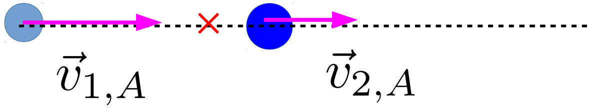
Conservação de energia (na subida):

$$(m+M)\, gh = \frac{1}{2}(m+M)\, v^2$$

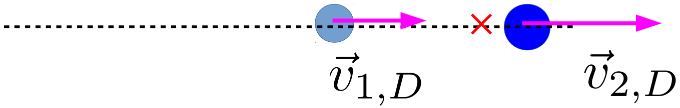
$$\Rightarrow \quad h = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g}$$

Colisões elásticas em 1D

Antes:



Depois:



Conservação do momento total:

$$m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A} = m_1 v_{1,D} + m_2 v_{2,D}$$

Conservação da energia:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,A}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,A}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,D}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,D}^2$$

Manipulando as equações:

$$\begin{aligned} m_1 \left(v_{1,A} - v_{1,D}\right) &= m_2 \left(v_{2,D} - v_{2,A}\right) \\ m_1 \left(v_{1,A} - v_{1,D}\right)\left(v_{1,A} + v_{1,D}\right) &= m_2 \left(v_{2,D} - v_{2,A}\right)\left(v_{2,A} + v_{2,D}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left|v_{1,A} - v_{2,A}\right| = \left|v_{2,D} - v_{1,D}\right|$$

Solução trivial (sem colisão):

$$v_{1,D} = v_{1,A} \text{ e } v_{2,D} = v_{2,A}$$

Solução não-trivial:

$$\boxed{\begin{aligned} v_{1,D} &= \frac{\left(m_1 - m_2\right) v_{1,A} + 2 m_2 v_{2,A}}{m_1 + m_2} \\ v_{2,D} &= \frac{2 m_1 v_{1,A} + \left(m_2 - m_1\right) v_{2,A}}{m_1 + m_2} \end{aligned}}$$

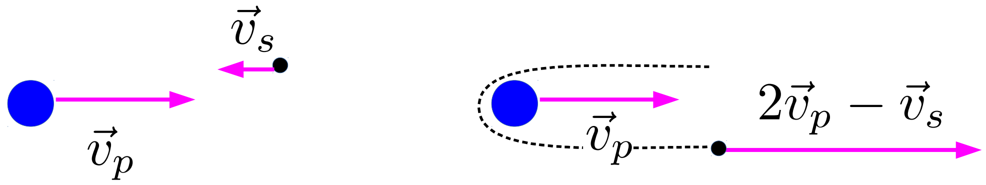
Colisões elásticas em 1D

Casos especiais: $m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad v_{1,D} = v_{2,A}$ e $v_{2,D} = v_{1,A}$ (troca de velocidades)

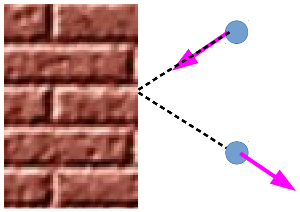
Ex: bola de bilhar

$m_1 \gg m_2 \quad \Rightarrow \quad v_{1,D} \approx v_{1,A}$ e $v_{2,D} = 2v_{1,A} - v_{2,A}$

Ex: Slingshot



Ex: Colisão com uma parede



Colisões inelásticas em 1D: coeficiente de restituição

Conservação do momento total:

$$m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A} = m_1 v_{1,D} + m_2 v_{2,D}$$

1 equação e 2 incógnitas

Equação adicional: o coeficiente de restituição

$$e \equiv \frac{v_{2,D} - v_{1,D}}{v_{1,A} - v_{2,A}}$$

Colisões inelásticas em 1D: fator Q

Conservação do momento total:

$$m_1 v_{1,A} + m_2 v_{2,A} = m_1 v_{1,D} + m_2 v_{2,D}$$

1 equação e 2 incógnitas

Equação adicional: o fator de qualidade

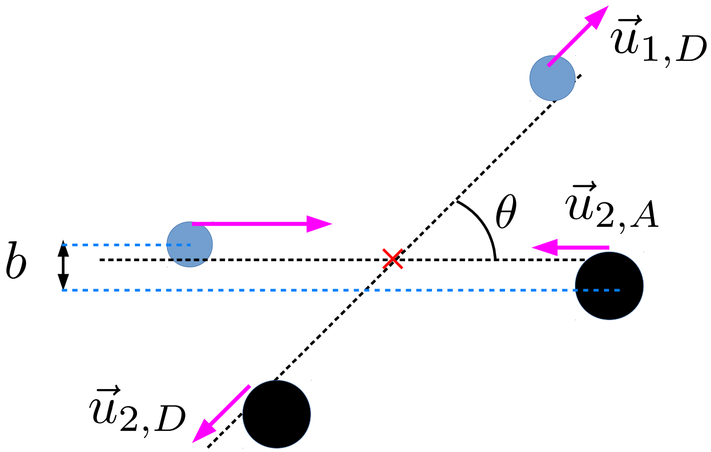
$$Q \equiv E_D - E_A$$

Se

$Q > 0,$ a colisão libera energia,

$Q < 0,$ a colisão aprisiona energia.

Colisões inelásticas em 2D: referencial do CM



Conservação do momento total:

$$\vec{p}_{1,D} + \vec{p}_{2,D} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad m_1 u_{1,D} = m_2 u_{2,D}$$

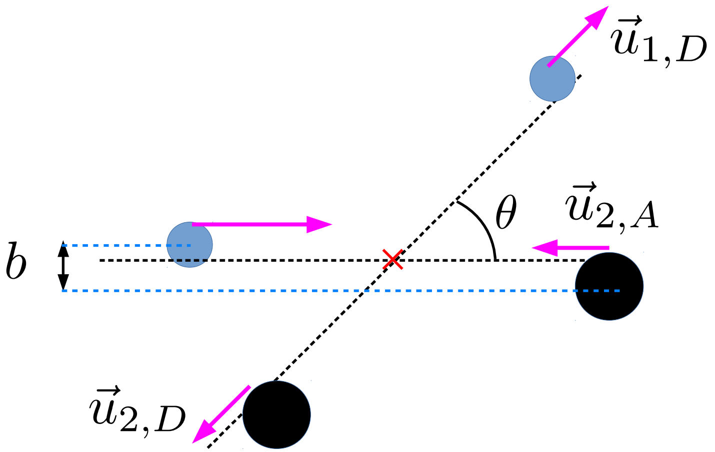
1 equação e 3 incógnitas $(u_{1,D},\ u_{2,D},\ \theta)$

Equação adicional: o fator Q

$$Q \equiv E_D - E_A$$

Equação adicional: o parâmetro de impacto b
e o tipo de interação

Colisões elásticas em 2D: referencial do CM



Conservação do momento total:

$$\vec{p}_{1,D} + \vec{p}_{2,D} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{p}_{1,D} = -p_D\left(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}\right) \\ \vec{p}_{2,D} = p_D\left(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}\right) \end{cases}$$

Conservação da energia:

$$\frac{p_{1,A}^2}{2m_1} + \frac{p_{2,A}^2}{2m_2} = \frac{p_{1,D}^2}{2m_1} + \frac{p_{2,D}^2}{2m_2}$$

$$\Rightarrow \quad p_D = p_A$$

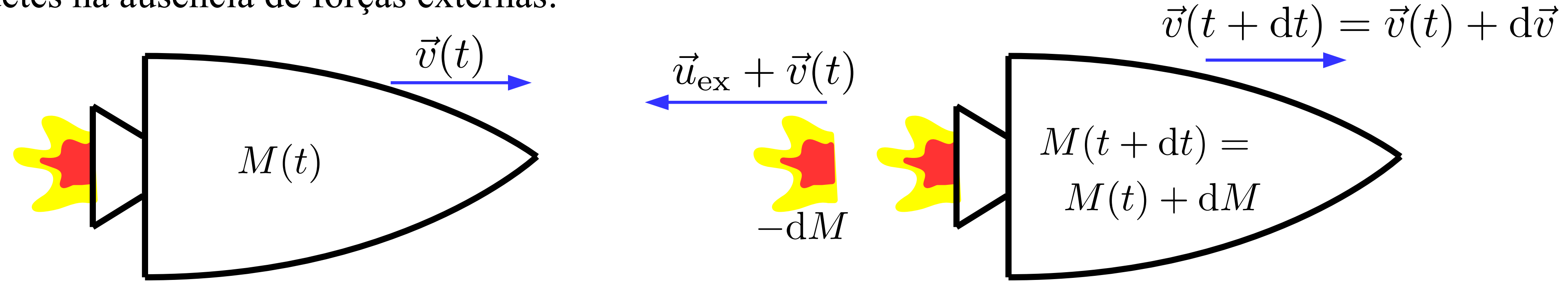
(A magnitude dos momentos das partículas não muda)

O ângulo não é determinado por conservação de momento e energia.

Equação adicional: o parâmetro de impacto b
e os detalhes da interação
entre as partículas.

Sistema de massa variável

Foguetes na ausência de forças externas:



instante t

instante t+dt

$$\vec{p}_A = \vec{p}(t) = M\vec{v}$$

$$\vec{p}_D = \vec{p}(t+\mathrm{d}t) = (M + \mathrm{d}M)\,(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}) + (-\mathrm{d}M)\,(\vec{v} + \vec{u}_{\mathrm{ex}})$$

Conservação do momento total:

$$\Rightarrow \boxed{M\mathrm{d}\vec{v} = \vec{u}_{\mathrm{ex}}\mathrm{d}M}$$

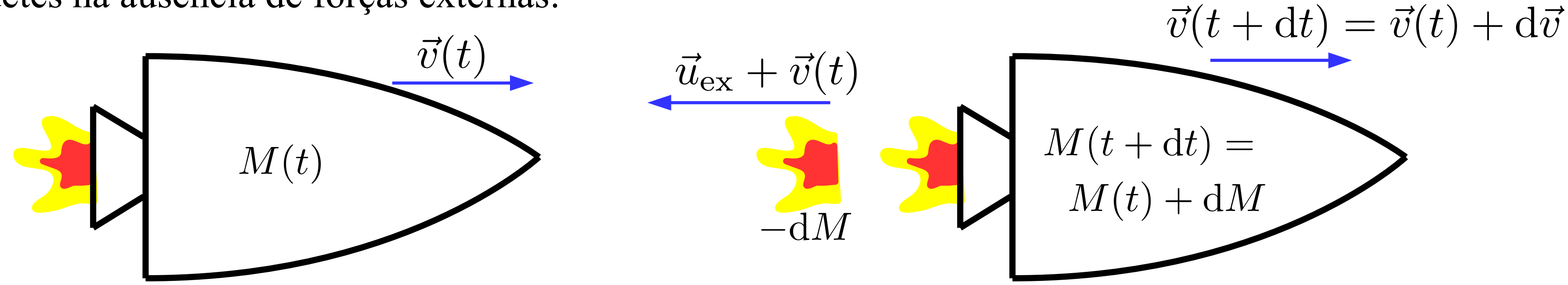
Variação do momento do foguete

Impulso dos gases do foguete

$\vec{u}_{\mathrm{ex}} \equiv$ Velocidade de exaustão dos gases em relação ao motor do foguete

Sistema de massa variável

Foguetes na ausência de forças externas:



instante t

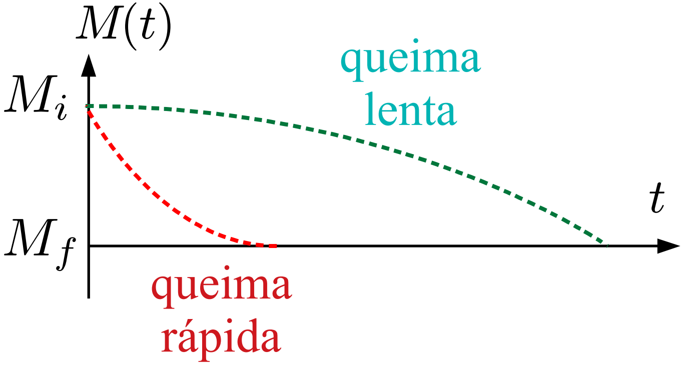
instante t+dt

Equação do foguete

$$M\mathrm{d}\vec{v} = \vec{u}_{\mathrm{ex}}\mathrm{d}M \quad \Rightarrow \quad \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \mathrm{d}\vec{v} = \vec{u}_{\mathrm{ex}} \int_{M_i}^{M_f} \frac{\mathrm{d}M}{M}$$

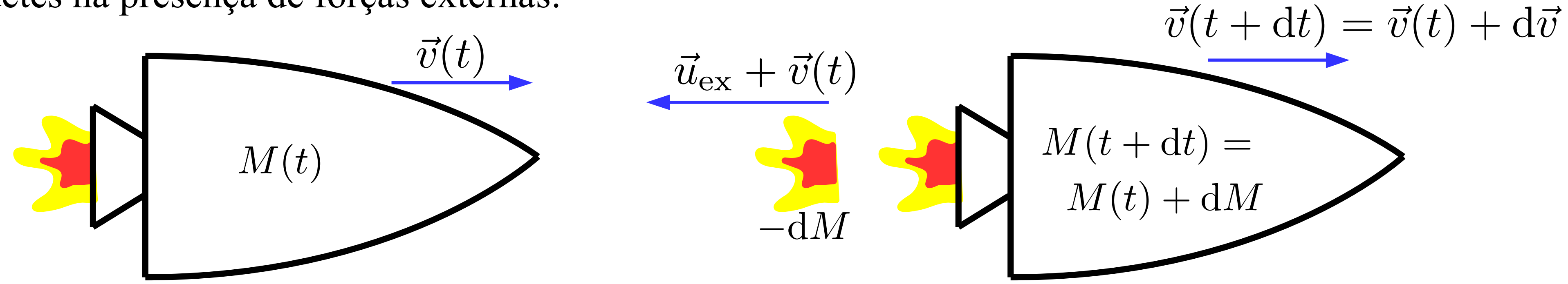
$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{v} = \vec{u}_{\mathrm{ex}} \ln \frac{M_f}{M_i}$$

Independe de quão rápido
o combustível é queimado



Sistema de massa variável

Foguetes na presença de forças externas:



instante t

instante t+dt

$$\vec{p}_A = \vec{p}(t) = M\vec{v}$$

$$\vec{p}_D = \vec{p}(t+\mathrm{d}t) = (M+\mathrm{d}M)\,(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}) + (-\mathrm{d}M)\,(\vec{v}+\vec{u}_{\text{ex}})$$

2a Lei: $\vec{F}_{\text{ext},R} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}_T}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\vec{p}_D - \vec{p}_A}{\mathrm{d}t} = \dfrac{M\mathrm{d}\vec{v} - \vec{u}_{\text{ex}}\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \boxed{M\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{u}_{\text{ex}}\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + \vec{F}_{\text{ext},R}}$

Força sobre o foguete

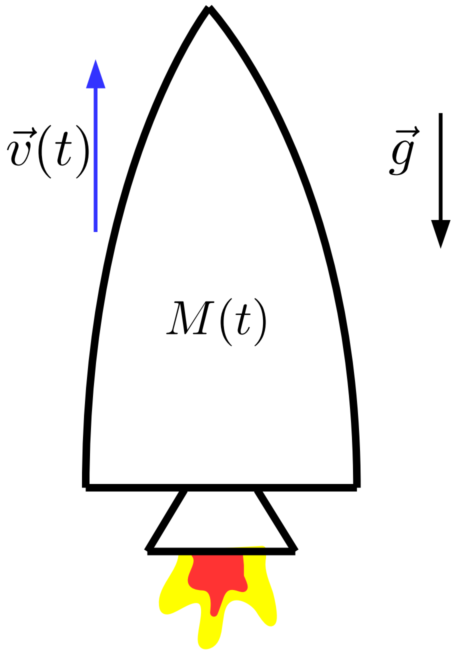
Empuxo do motor

Força externa

Sistema de massa variável

Foguetes na presença de forças externas:

Ex: Foguete num campo gravitacional constante queimando combustível a um taxa constante. (Considere a velocidade de exaustão dos gases constante.)



Eq. do foguete: $$M\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{u}_{\mathrm{ex}}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + \vec{F}_{\mathrm{ext},R}$$

Ou seja,

$$(M_i - Rt)\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\vec{u}_{\mathrm{ex}}R + (M_i - Rt)\,\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{g} - \frac{\vec{u}_{\mathrm{ex}}R}{M_i - Rt}$$

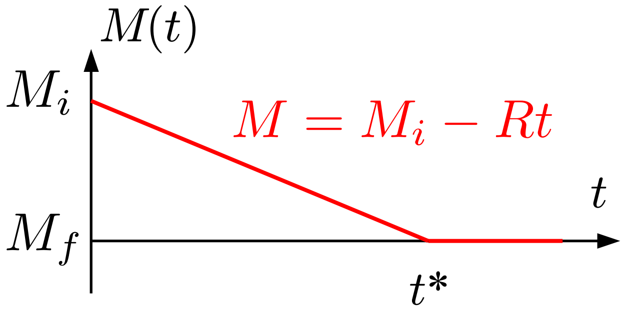
Integrando:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t - \vec{u}_{\mathrm{ex}}\ln\left(\frac{M_i}{M_i - Rt}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{g} - \frac{R\vec{u}_{\mathrm{ex}}}{M_i - Rt}$$

(válida enquanto $t<t^*$)

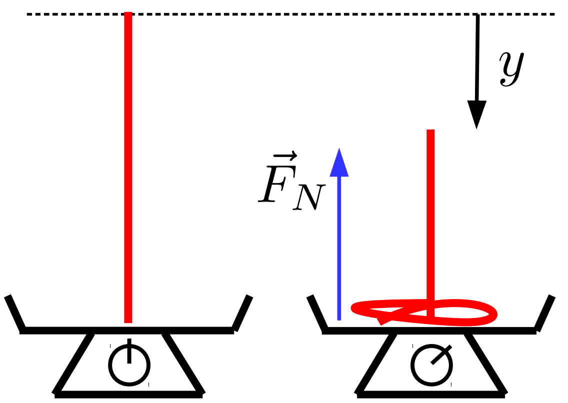
$$\Rightarrow \quad M_i g \leq R u_{\mathrm{ex}}$$

(para que decole já de início)



Exercício

Uma corda homogênea de comprimento L e massa M cai no prato de uma balança como ilustra figura abaixo. Faça o gráfico da força normal como função do tempo.



Queda livre: $y(t) = \frac{1}{2} g t^2, \quad \Rightarrow \quad t_q^2 = \frac{2L}{g}$

Força normal = Peso da corda sobre o prato + força para desacelerar o elemento de corda que cai.

$$F_N = m(t) g + \frac{\delta p}{\delta t}, \quad \Rightarrow \quad F_N = 3Mg \times \left(\frac{gt^2}{2L}\right) = 3Mg \times \left(\frac{t}{t_q}\right)^2$$

$$m(t) = \frac{M}{L} y(t)$$

$$\frac{\delta p}{\delta t} = \frac{\delta m \times v_y(t)}{\delta t} = \frac{\left(\frac{M}{L}\right) \delta y \times gt}{\delta t} = \frac{M}{L} (gt)^2$$