

Oscilações simples

Objetivo:

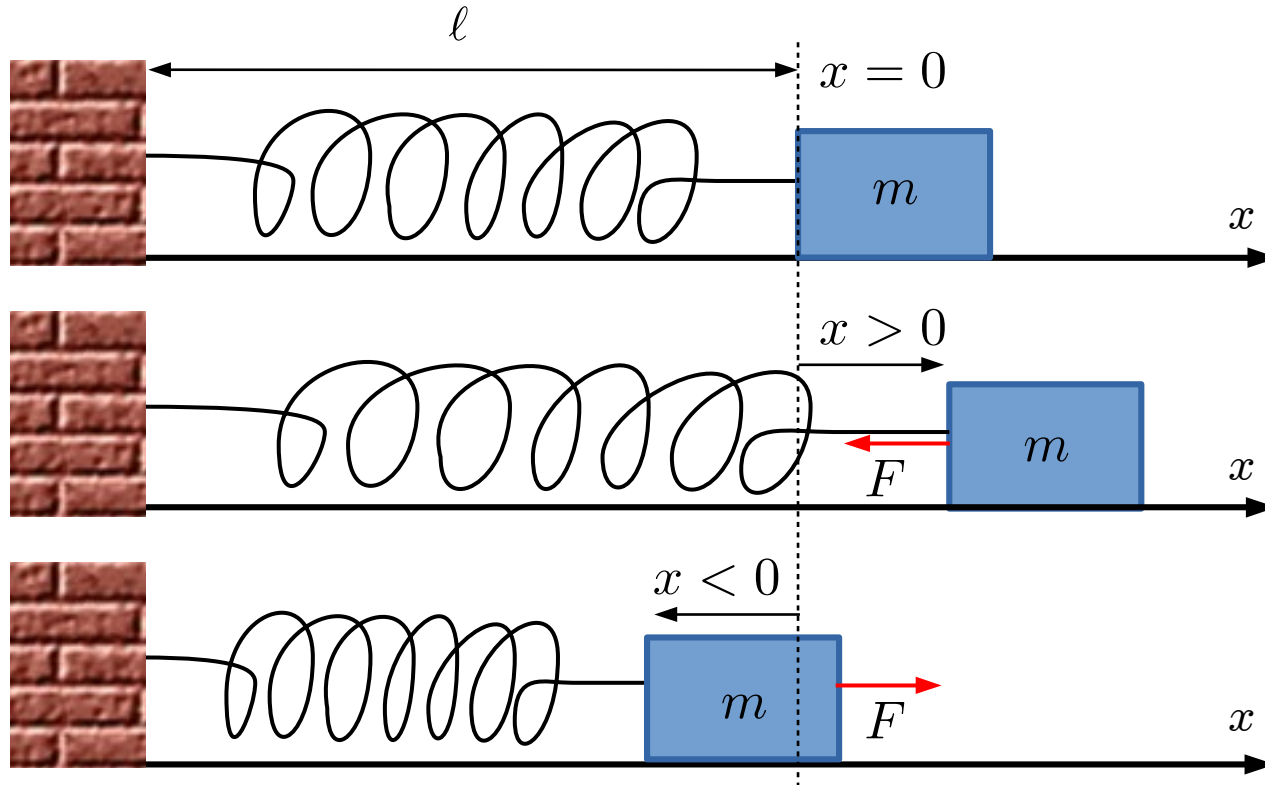
Estudar o sistema mais simples que apresenta movimento oscilatório: o **oscilador harmônico**. Inicialmente consideraremos o caso ideal conservativo para estudar os conceitos de **período**, **frequência** e **frequência angular**, e determinar a posição, velocidade e aceleração do oscilador. Estudaremos também a relação entre energia cinética e a **energia potencial elástica** correspondente. Por fim, consideraremos a onipresença do oscilador harmônico simples em diversos casos de sistemas cujas **amplitudes de oscilações** são pequenas.

Em seguida, estudaremos os efeitos de **dissipação viscosa**. Neste caso, a energia mecânica é dissipada e as oscilações se tornam amortecidas. Há 3 tipos de movimentos amortecidos: **sub-amortecido**, **criticamente amortecido** e **super-amortecido**.

Finalmente, estudaremos os efeitos de uma força periódica externa sobre o oscilador harmônico onde introduziremos o conceito de **ressonância**.

Oscilador harmônico simples

Lei de Hooke: $F = -kx$



Força restauradora
Movimento oscilatório em
torno da posição de equilíbrio

Para molas,
a lei é válida quando

$$m_{\text{mola}} \ll m_{\text{objeto}}$$
$$x \ll \ell$$

Constante de mola:
(dureza da mola)

$$[k] = \frac{\text{força}}{\text{comprimento}}$$

Oscilador harmônico simples

Solução da 2ª lei de Newton:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \equiv m \ddot{x} = -kx, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{onde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \begin{array}{l} \text{frequência angular} \\ [\omega] = \frac{1}{\text{tempo}} \end{array}$$

Equação diferencial ordinária homogênea de 2ª ordem:

Há 2 soluções independentes e a solução geral é uma combinação linear dessas 2 soluções.

Solução 1: $x_1(t) = \cos(\omega t)$

Solução 2: $x_2(t) = \sin(\omega t)$

Solução geral: $x(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t)$

$$= A \cos(\omega t + \phi)$$

 amplitude fase

Prova:

$$\dot{x}_1(t) = -\omega \sin(\omega t)$$

$$\ddot{x}_1(t) = -\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 x_1(t)$$

Oscilador harmônico simples

Solução da 2ª lei de Newton:

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t) \\ &= A \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned}a_1 &= A \cos \phi \\ a_2 &= -A \sin \phi\end{aligned}$$

As constantes de integração a_1 e a_2 (ou A e ϕ) podem ser determinadas pelas **condições iniciais**.

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0, \\ v(t=0) = v_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = A \cos \phi, \\ v_0 = -\omega A \sin \phi, \end{cases} \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} \text{ e } \tan \phi = -\frac{v_0}{x_0 \omega}$$

$$\text{ou } a_1 = x_0 \text{ e } a_2 = v_0/\omega$$

Oscilador harmônico simples

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\omega t + \phi) \\v &= -\omega A \sin(\omega t + \phi) \\a &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

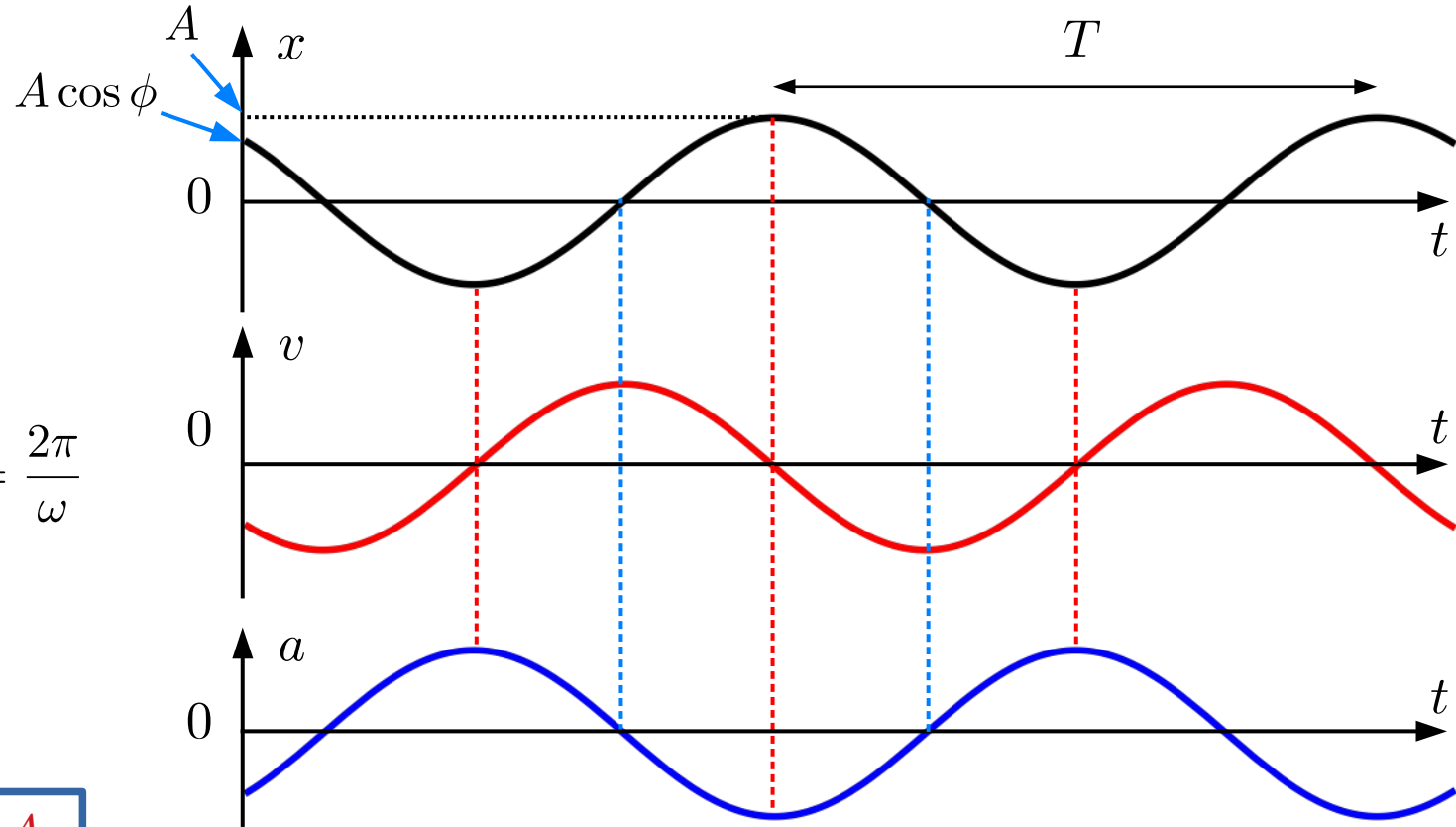
Período T

$$x(t + T) = x(t), \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frequência f

$$f \equiv \frac{1}{T}, \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi f$$

T , f e ω não dependem de A



Analogia com o movimento circular uniforme

Definição: Movimento de uma partícula cuja trajetória é um círculo e a magnitude da velocidade é constante.

$$v = \omega R = \text{const}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

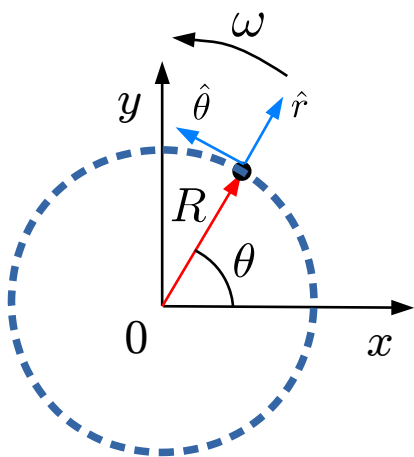
Projeção no eixo x

$$\vec{r}(t) = R(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) = R\hat{r} \quad \rightarrow \quad x(t) = R \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d}{dt} (R\hat{r}) = R \frac{d}{dt} \hat{r} \\ &= R\omega (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}) = R\omega \hat{\theta} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad v_x = -R\omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d}{dt} (R\omega \hat{\theta}) = R\omega \frac{d\hat{\theta}}{dt} \\ &= -R\omega^2 \hat{r} = -\omega^2 \vec{r} = \vec{a}_{\text{cp}} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad a_x = -R\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_{\text{cp}} = -m\omega^2 \vec{r} \quad \rightarrow \quad F_x = -m\omega^2 x(t)$$



Oscilador harmônico simples

Solução **alternativa** da EDO: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Qual a função cuja primeira, segunda, n-ésima derivada é proporcional a ela mesma?

$x(t) = e^{rt}$, onde r é uma constante a ser determinada.

$$\Rightarrow \dot{x} = rx, \quad \Rightarrow \ddot{x} = r^2 x, \quad \Rightarrow (r^2 + \omega^2) x(t) = 0, \quad \Rightarrow \boxed{r = \pm i\omega} \quad (2 \text{ soluções})$$

$$\begin{aligned} \text{Solução geral: } x(t) &= b_1 e^{i\omega t} + b_2 e^{-i\omega t} = b_1 (\cos \omega t + i \sin \omega t) + b_2 (\cos \omega t - i \sin \omega t) \\ &= (b_1 + b_2) \cos \omega t + i(b_1 - b_2) \sin \omega t = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\text{Soluções físicas: } a_{1,2} \in \mathbb{R} \quad b_1 + b_2 \in \mathbb{R} \quad i(b_1 - b_2) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2^*$$

Energia elástica

Força elástica: $F = -kx$

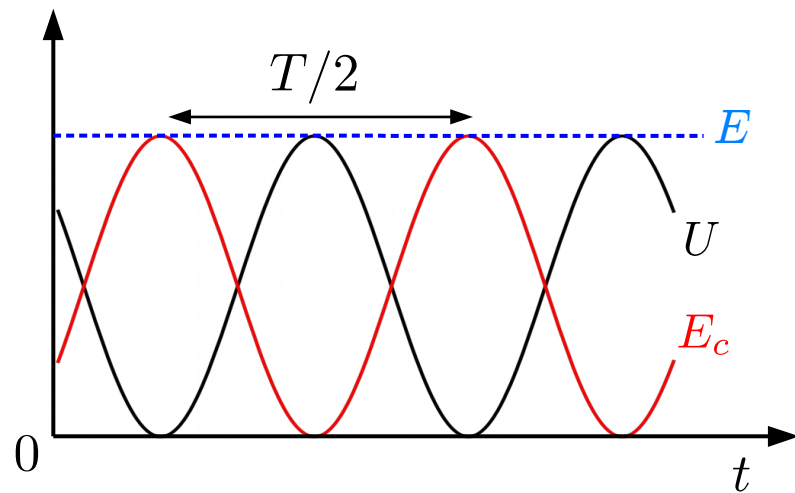
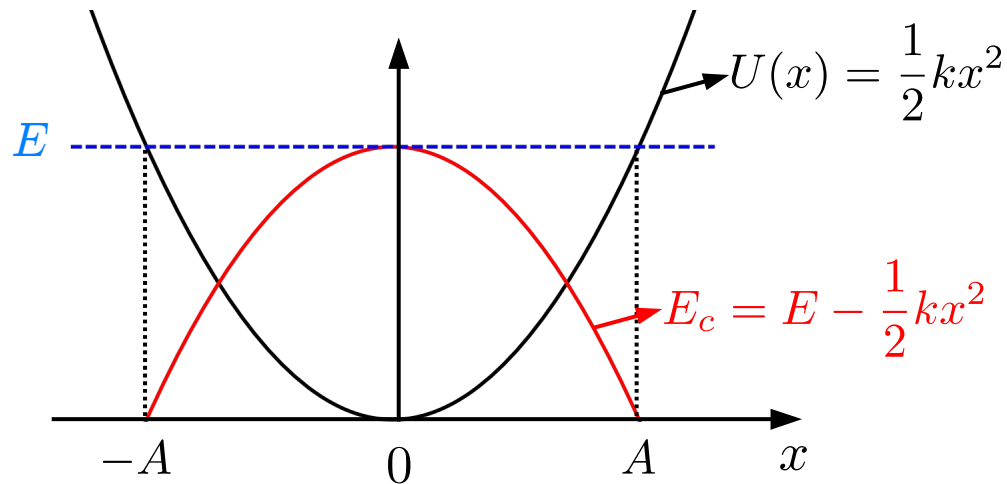
Trabalho e Energia potencial:

$$dW = Fdx = -kx dx \equiv -dU = -d\left(\frac{1}{2}kx^2 + \text{const}\right)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

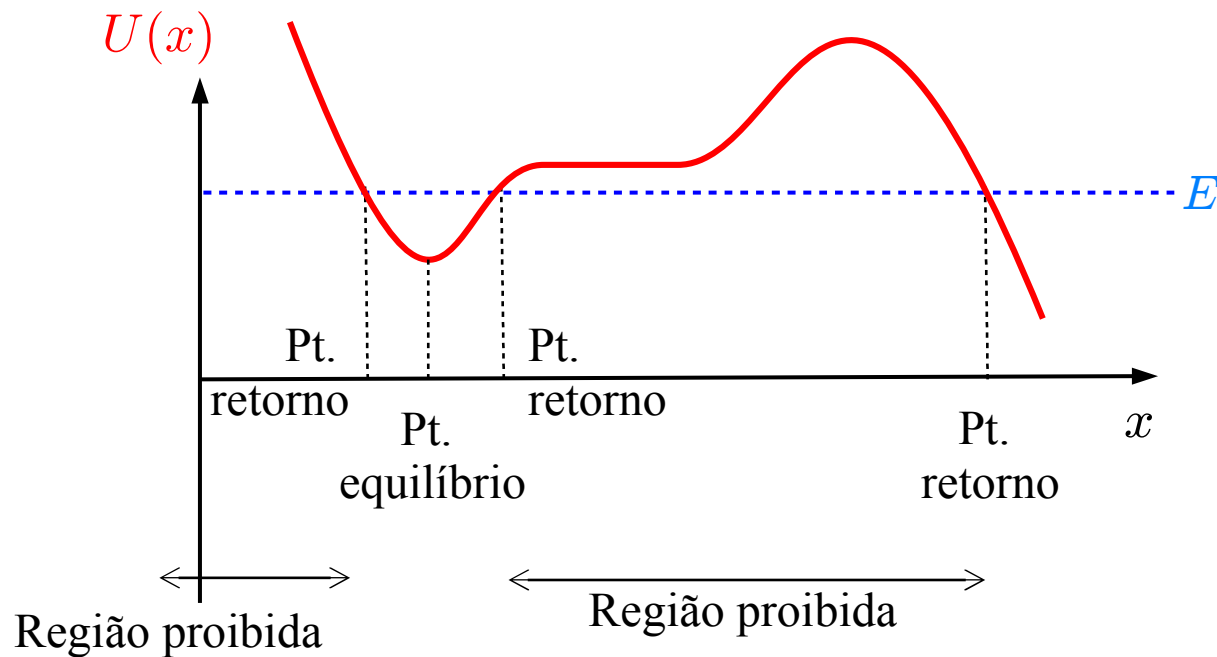
$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}kA^2$$



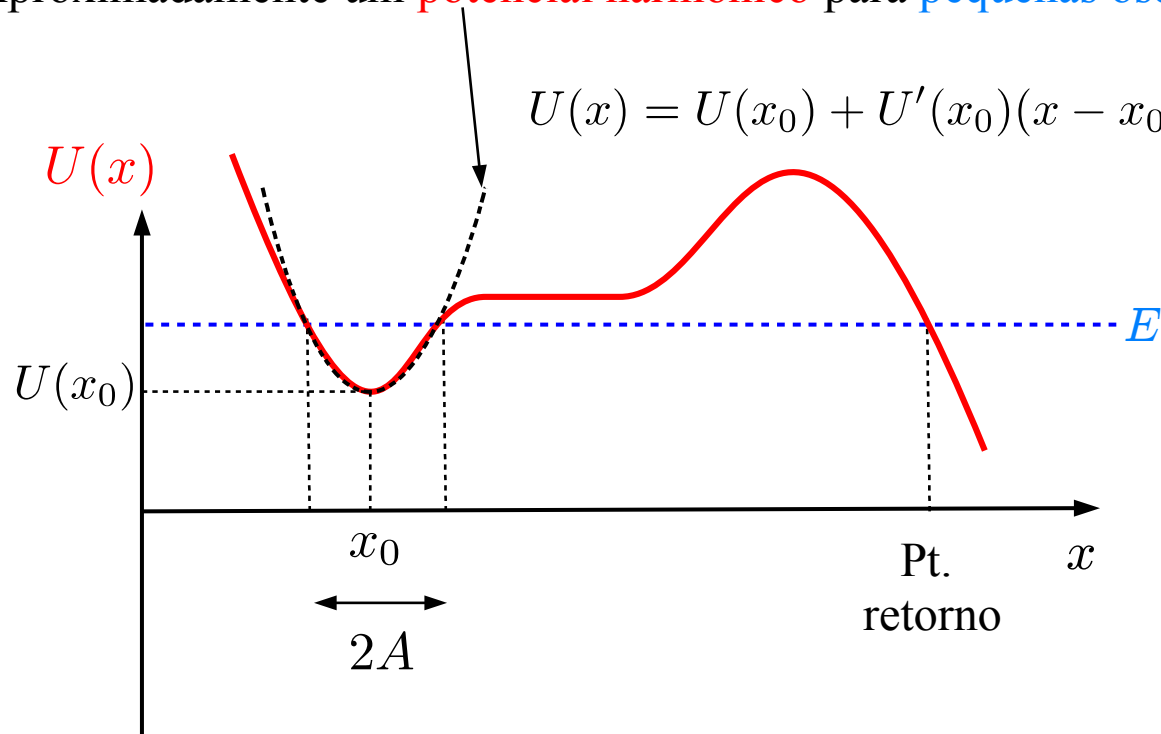
Pequenas oscilações: onipresença do OHS

Movimento 1D sob a ação de uma força conservativas



Pequenas oscilações: onipresença do OHS

Aproximadamente um **potencial harmônico** para **pequenas oscilações**



$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

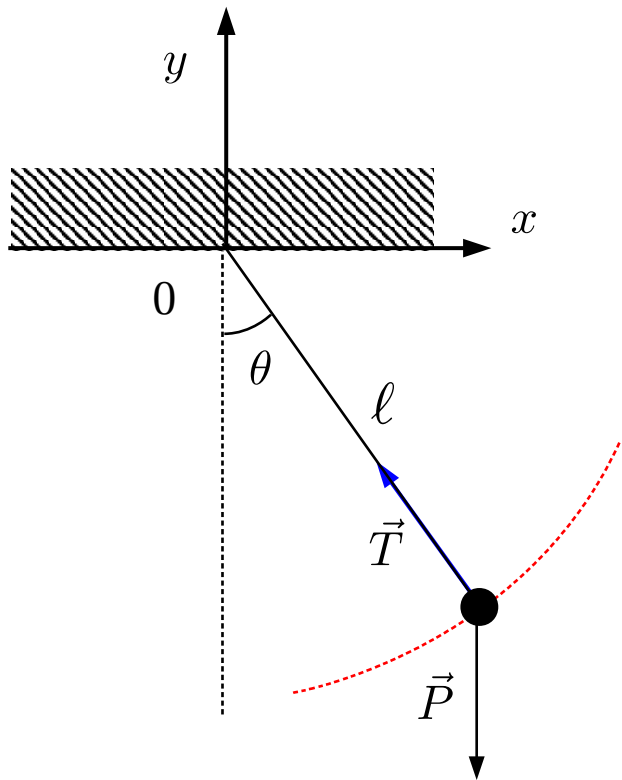
Como $U'(x_0) = 0$
(pt. de equilíbrio)

$$\Rightarrow U(x) \approx \text{const} + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

onde $k = U''(x_0)$

Validade de aproximação: a mesma da série de Taylor.

Exemplo: pêndulo simples



Energia mecânica:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + U(\theta) \\ &= \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + m g \ell (1 - \cos \theta) \\ &\approx \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m g \ell \theta^2 + \text{const} \\ &= \frac{1}{2} m \ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \theta^2 \right) + \text{const} \end{aligned}$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

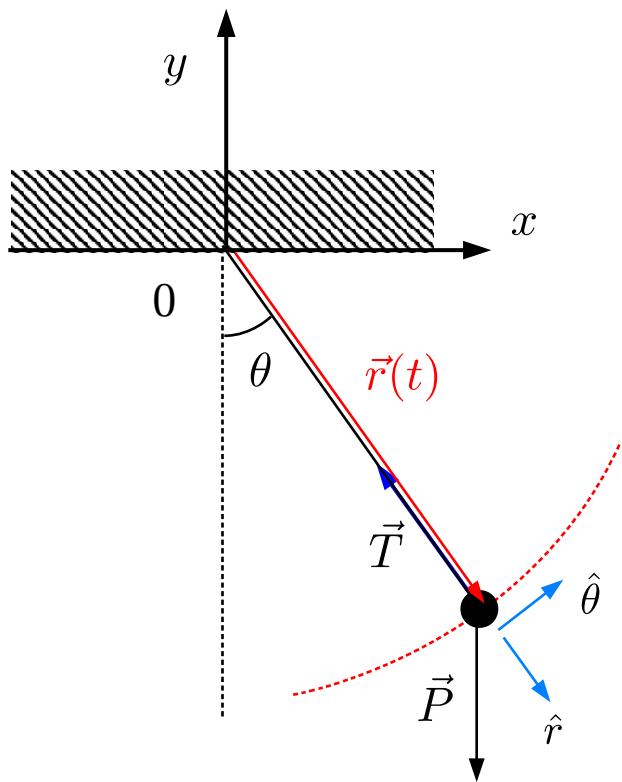
Momento de inércia:

$$I = m \ell^2$$

Movimento harmônico:

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi)$$

Exemplo: pêndulo simples



2ª lei de Newton para rotação:

$$I\vec{\alpha} = -mgl \sin \theta \hat{z}, \quad \Rightarrow \quad \alpha = \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$$

Pequenas oscilações: $\theta \ll 1$, $\Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} \approx -\frac{g}{\ell} \theta = -\omega^2 \theta$$

Movimento harmônico:

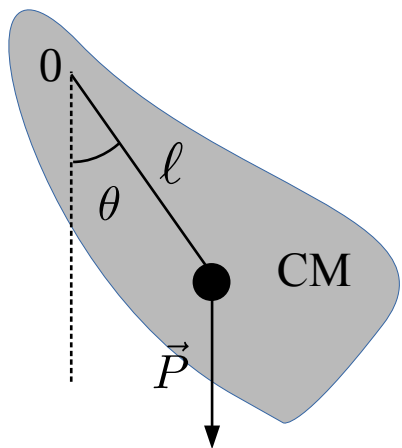
$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi)$$

Curiosidade:

correções anarmônicas para o período são

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta_{\max}}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^2 \sin^4 \left(\frac{\theta_{\max}}{2} \right) + \dots \right)$$

Exemplo: pêndulo físico



2ª lei de Newton para rotação:

$$I\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta, \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{mgl}{I} \sin \theta$$

Pequenas oscilações: $\theta \ll 1$, $\Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} \approx -\frac{mgl}{I} \theta = -\omega^2 \theta \quad \text{onde}$$

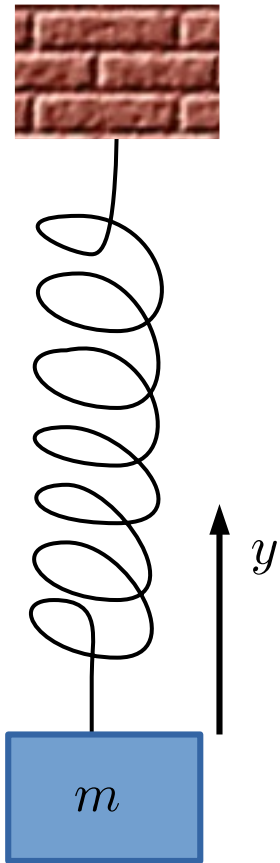
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{I/(m\ell)}}$$

$$\begin{aligned} \text{Energia mecânica: } E &= \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + U(\theta) = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) \\ &\approx \frac{1}{2} I (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \theta^2) + \text{const} \end{aligned}$$

Movimento harmônico:

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi)$$

Exemplo: pêndulo vertical



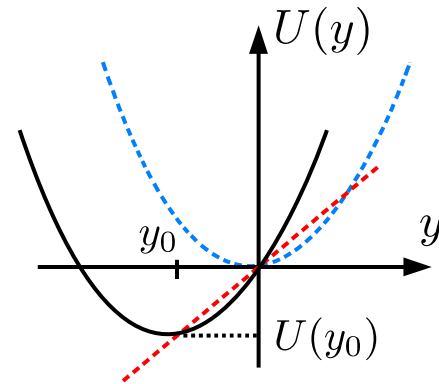
2ª lei de Newton: $m\ddot{y} = -mg - ky$, $\Rightarrow \ddot{y} + \omega^2 y + g = 0$

Solução: $y = y_0 + A \cos(\omega t + \phi)$ onde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ e } y_0 = -\frac{mg}{k}$$

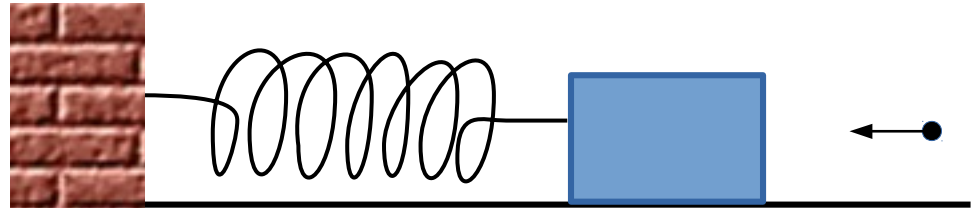
Energia mecânica:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2 + mgy = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k\left(y^2 + 2\frac{mg}{k}y\right) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k(y - y_0)^2 - \frac{1}{2}ky_0^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + \omega^2(y - y_0)^2\right) + U(y_0) \end{aligned}$$



Exercício de revisão

Na figura ilustrada abaixo, o projétil fica incrustado após o choque. As massas do bloco e do projétil, e a constante de mola são conhecidas, e não há atrito entre o bloco e a superfície.



- 1) Medindo a frequência de oscilação, conhecemos a velocidade do projétil.
- 2) Precisamos conjuntamente da frequência de oscilação e da amplitude do movimento para deduzir a velocidade do projétil.
- 3) Não é possível deduzir a velocidade do projétil porque energia é dissipada na colisão.
- 4) Medindo apenas a amplitude do movimento, conhecemos a velocidade de projétil

Exercício de revisão

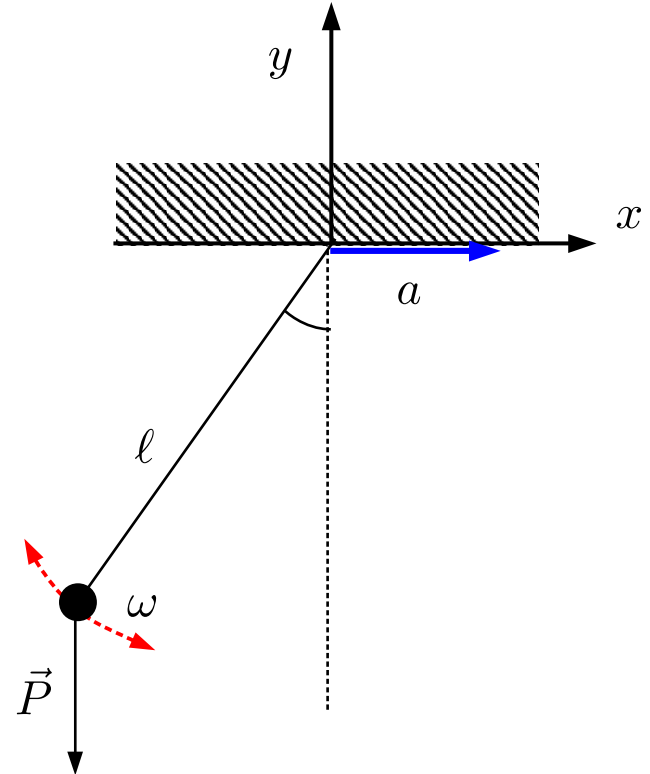
Qual a frequência angular de pequenas oscilações de um pêndulo horizontalmente acelerado?

1) $\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{\ell}}$

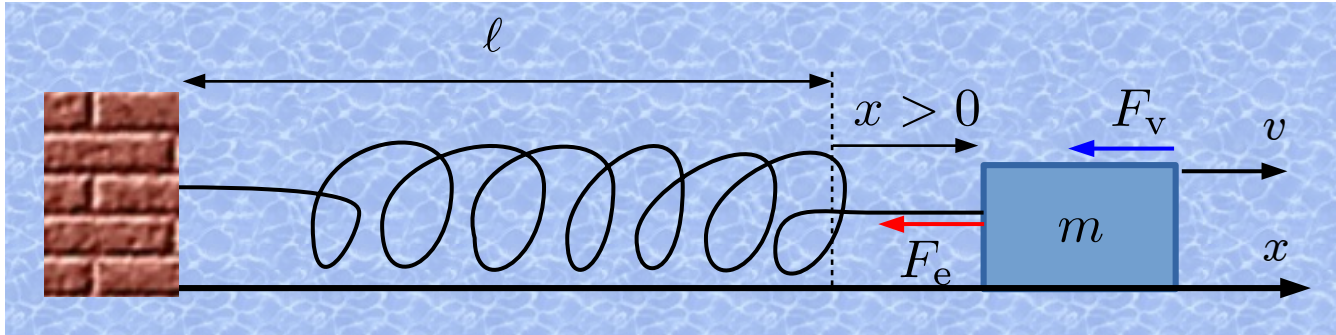
2) $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

3) $\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{ga}}{\ell}}$

4) $\omega = \sqrt{\frac{g + a}{2\ell}}$



Oscilador harmônico amortecido



Oscilações amortecidas por uma força viscosa

2a lei de Newton:

$$F_R = m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

frequência natural
do sistema

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

Equação diferencial ordinária de 2ª ordem:

Há 2 soluções independentes e a solução geral é uma combinação linear dessas 2 soluções.

Oscilador harmônico amortecido

Solução da EDO $\ddot{x} + 2\gamma x + \omega_0^2 x = 0$

Qual a função cuja primeira, segunda, n-ésima derivada é proporcional a ela mesma?

$x(t) = e^{rt}$, onde r é uma constante a ser determinada.

$$\Rightarrow \dot{x} = rx, \quad \Rightarrow \ddot{x} = r^2 x, \quad \Rightarrow (r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2) x(t) = 0, \quad \Rightarrow \boxed{r = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$

(2 soluções)

Solução geral: $x(t) = b_1 e^{r_+ t} + b_2 e^{r_- t} = e^{-\gamma t} \left(b_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + b_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right)$

As condições iniciais determinam as constantes $b_{1,2}$

$\gamma > \omega_0$ (super-amortecido)

3 regimes distintos: $\gamma = \omega_0$ (criticamente amortecido)

$\gamma < \omega_0$ (sub-amortecido)

Oscilador harmônico amortecido

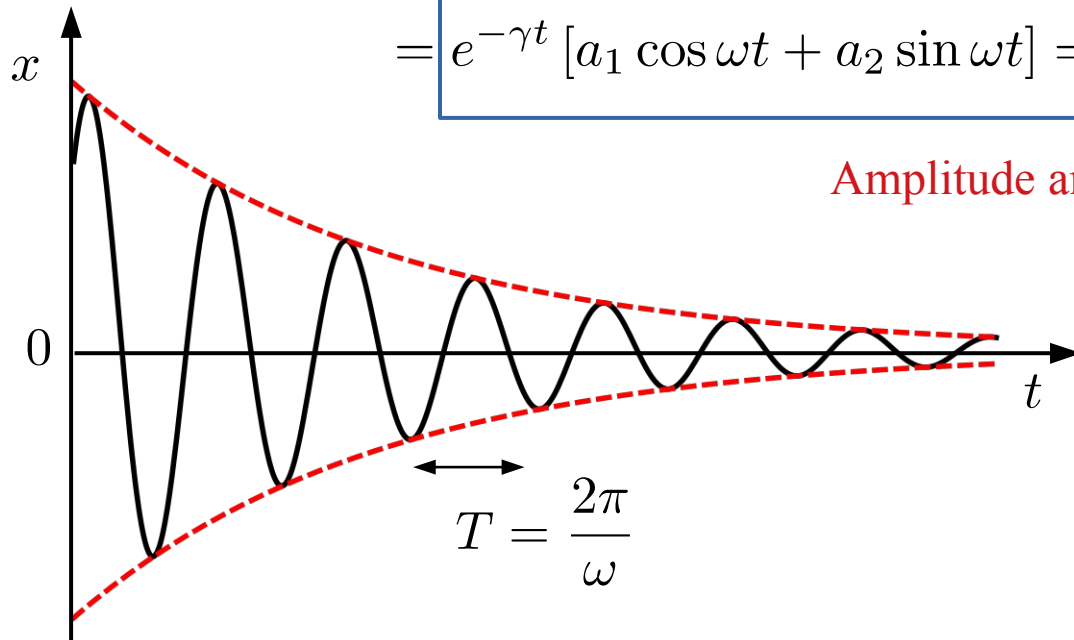
Regime sub-amortecido: $\gamma < \omega_0$

Definindo $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t} (b_1 e^{i\omega t} + b_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\gamma t} [(b_1 + b_2) \cos \omega t + i(b_1 - b_2) \sin \omega t]$$
$$= e^{-\gamma t} [a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t] = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

Amplitude amortecida

fase



Vida-média da oscilação:

$$\tau \equiv \gamma^{-1}$$

Oscilador harmônico amortecido

Regime super-amortecido: $\gamma > \omega_0$

$$\Rightarrow x(t) = b_1 e^{r_+ t} + b_2 e^{r_- t} = e^{-\gamma t} \left(b_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + b_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} b_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) t}$$

Sem oscilações, apenas amortecimento

$$\begin{array}{l} \text{Condições iniciais:} \\ x_0 = b_1 + b_2 \\ v_0 = r_+ b_1 + r_- b_2 \end{array} \Rightarrow b_1 = \frac{v_0 - x_0 r_-}{r_+ - r_-} \text{ e } b_2 = \frac{x_0 r_+ - v_0}{r_+ - r_-}$$

Oscilador harmônico amortecido

Regime criticamente amortecido: $\gamma = \omega_0, \Rightarrow r_+ = r_-$ (1 solução)

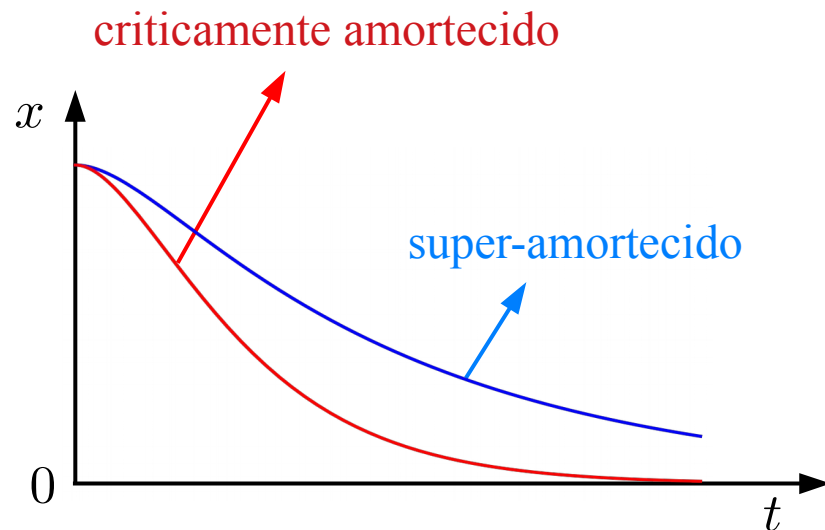
Truque: $r_+ = -\gamma + \epsilon, r_- = -\gamma - \epsilon$, com $\epsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x(t) &= e^{-\gamma t} (b_1 e^{\epsilon t} + b_2 e^{-\epsilon t}) \approx e^{-\gamma t} (b_1 + b_2 + (b_1 - b_2) \epsilon t) \\ &= e^{-\gamma t} (x_0 + (v_0 + x_0 \gamma) t)\end{aligned}$$

Ou seja, Solução 1: $x_1(t) = e^{-\gamma t}$

Solução 2: $x_2(t) = t e^{-\gamma t}$

Sem oscilações, apenas amortecimento



Oscilador harmônico **sub**-amortecido

Energia nos instantes de retorno ($v=0$): $E(t) = U(t) + E_c(t) = U(t) = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\gamma t}$

Perda de energia por ciclo no regime de **baixo amortecimento**: ($\omega_0 \gg \gamma, \Rightarrow \omega_0\tau \gg 1$)

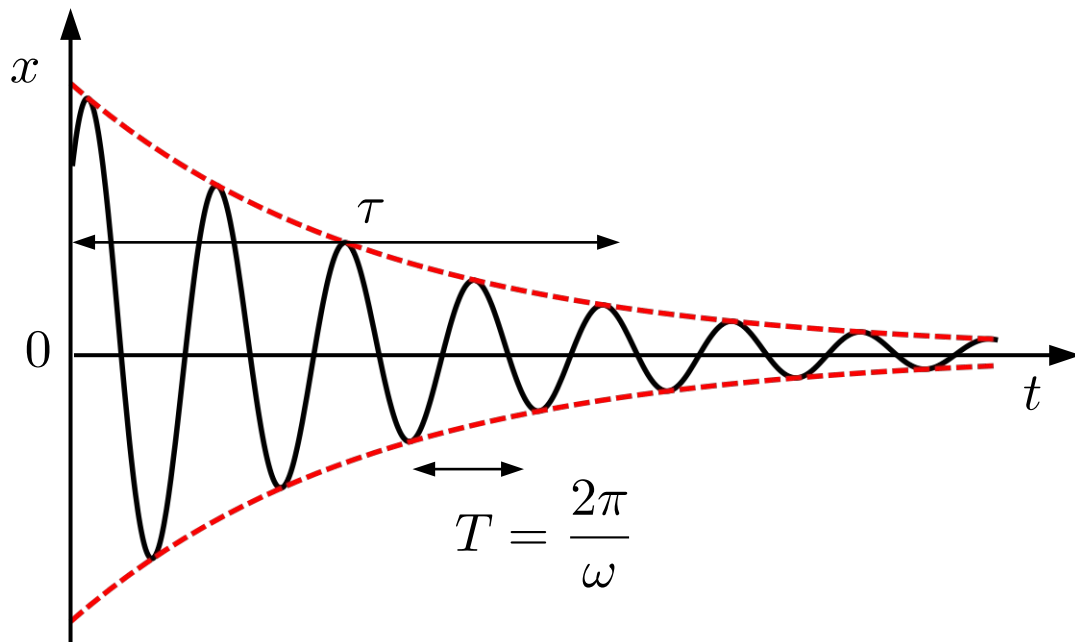
$$\frac{\Delta E}{T} \approx \frac{dE}{dt} = \frac{E(t+T) - E(t)}{T} = -\frac{E(t)}{T} (1 - e^{-2\gamma T}) \approx -\frac{E(t)}{T} (2\gamma T) = -2\gamma E(t)$$

$$\Rightarrow \frac{E}{-\Delta E} \approx \frac{1}{2\gamma T} \approx \frac{\omega_0\tau}{4\pi} = \frac{\tau/2}{T}$$

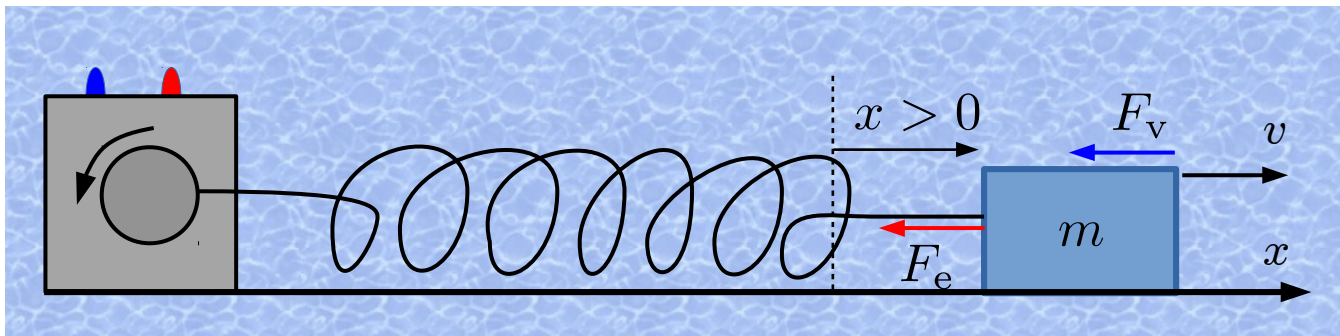
Definição: **Fator de qualidade**

$$Q \equiv \frac{2\pi E}{|\Delta E|} \approx \frac{\omega_0\tau}{2}$$

Perda relativa de energia por ciclo



Oscilador harmônico **forçado**



Oscilações amortecidas por uma força **viscosa e forçadas por uma força externa**

2a lei de Newton:

$$F_R = m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_{\text{ext}}(t), \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{ext}}(t)}{m},$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{b}{2m}$$

Equação diferencial ordinária de 2ª ordem não-homogênea:

A solução geral é a soma da solução da equação homogênea com uma solução particular.

A solução particular é qualquer solução da equação não-homogênea.

Oscilador harmônico **forçado**

Solução da EDO $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F_{\text{ext}}(t)/m$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

Solução da equação **homogênea**: $\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$

Para tempos longos, $x_h \rightarrow 0$ (apenas um **transiente**)

Exemplo: caso sub-amortecido

$$x_h = Ae^{-\gamma t} \cos(t + \phi)$$

Solução **particular**: $\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = F_{\text{ext}}(t)/m$

Vamos considerar uma **força externa harmônica**: $F_{\text{ext}} = F_0 \cos \Omega t$

A solução deve ser do tipo $x_p = c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t$

Oscilador harmônico **forçado**

Solução **particular**: $\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = (F_0/m) \cos \Omega t$

A solução deve ser do tipo $x_p = c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t$

Substituindo o “chute” na EDO,

$$\begin{aligned} -\Omega^2 (c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t) + 2\gamma\Omega (-c_1 \sin \Omega t + c_2 \cos \Omega t) + \omega_0^2 (c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t) &= \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \\ \Rightarrow [(\omega_0^2 - \Omega^2) c_1 + 2\gamma\Omega c_2] \cos \Omega t + [(\omega_0^2 - \Omega^2) c_2 - 2\gamma\Omega c_1] \sin \Omega t &= \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{F_0/m (\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} \text{ e } c_2 = \frac{F_0/m (2\gamma\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}$$

(Note que as constantes não dependem das condições iniciais)

Oscilador harmônico **forçado**

Solução particular: $\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = (F_0/m) \cos \Omega t$

$$\Rightarrow x_p = c_1 \cos \Omega t + c_2 \sin \Omega t = \mathcal{A} \cos (\Omega t + \Phi)$$



onde

$$c_1 = \frac{F_0/m (\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} \text{ e } c_2 = \frac{F_0/m (2\gamma\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}$$

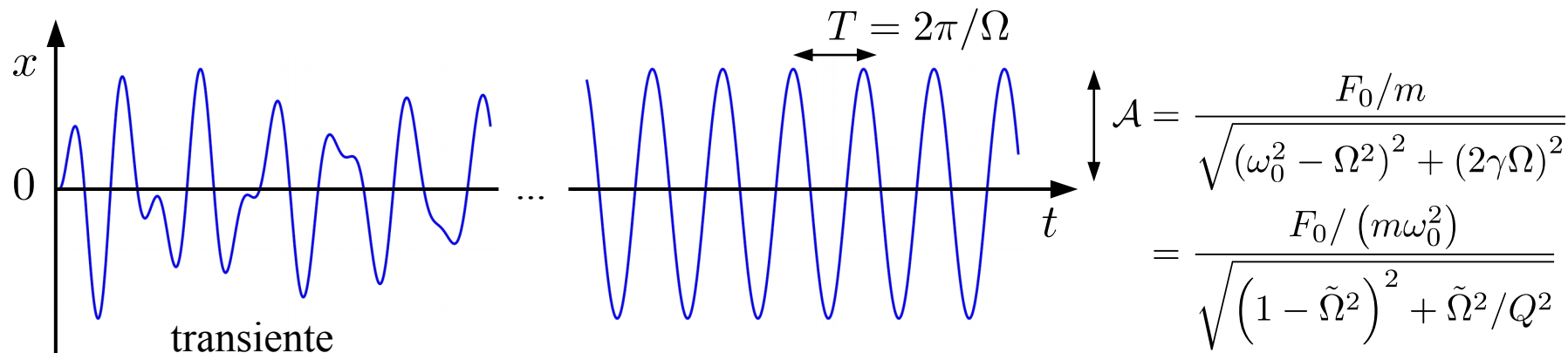
e

$$\mathcal{A} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \text{ e } \tan \Phi = \frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

Essas amplitude e fase não dependem das condições iniciais.

Oscilador harmônico **forçado: ressonância**

Solução geral: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_p(t) = \mathcal{A} \cos(\Omega t + \Phi)$



Amplitude e frequência externa:

onde

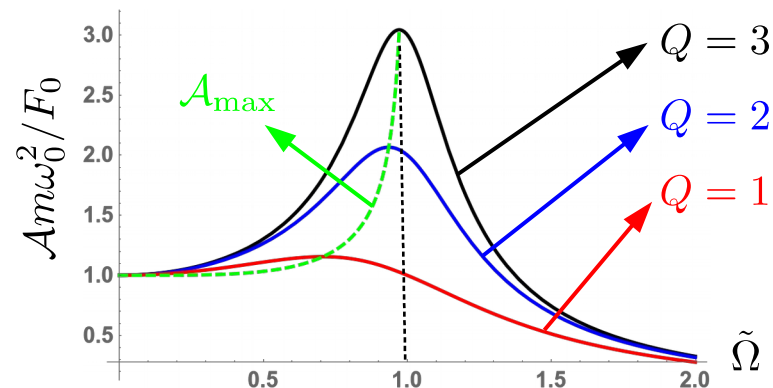
$$Q \equiv \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{m\omega_0}{b}$$

$$\tilde{\Omega} \equiv \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$\frac{d\mathcal{A}}{d\Omega} = 0, \Rightarrow$$

$$\Omega^* = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

frequência de amplitude máxima

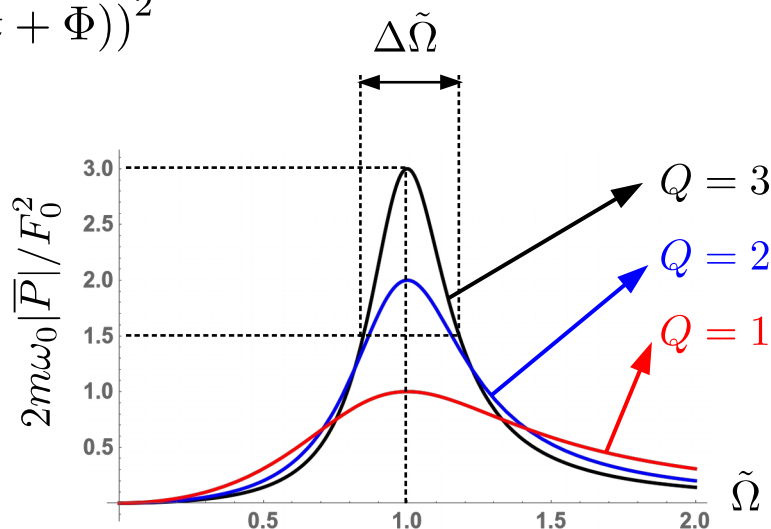


Oscilador harmônico **forçado: ressonância**

Potência dissipada: $P = \vec{F}_v \cdot \vec{v} = -b\dot{x}^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -b(\mathcal{A}\Omega \sin(\Omega t + \Phi))^2$

Potência média dissipada (suprida pela força externa):

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P(t) dt = -b\mathcal{A}^2\Omega^2 \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sin^2(\Omega t + \Phi) dt \\ &= -\frac{b\mathcal{A}^2\Omega^2}{2} = -\frac{bF_0^2\Omega^2}{2m^2\omega_0^4 \left[(1 - \tilde{\Omega}^2)^2 + \tilde{\Omega}^2/Q^2 \right]} \\ &= -\frac{F_0^2Q}{2m\omega_0 \left[1 + Q^2 (\tilde{\Omega}^{-1} - \tilde{\Omega})^2 \right]}\end{aligned}$$



Largura a meia altura:

Ressonância se dá na **frequência natural** do oscilador:

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = 0, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega^* = \omega_0}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\gamma}{\omega_0} = \frac{2}{\omega_0\tau} \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$