Rotações simples

Objetivo:

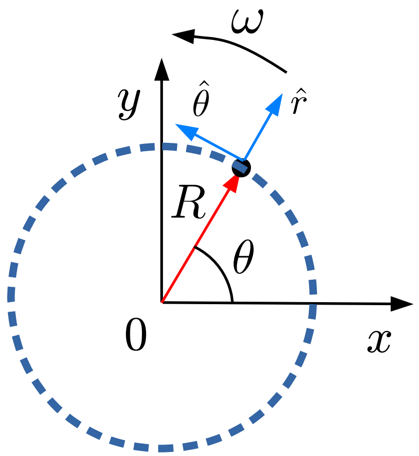
Estudar a cinemática e dinâmica de rotações de corpos rígidos. Vamos nos focar principalmente em rotações simples, ou seja, rotações em torno de um eixo fixo no espaço (como em um carrossel) ou em torno de um eixo que se move no espaço mas com direção fixa (como a roda de um carro se movendo em linha reta).

Iremos estudar de maneira simplificada apenas um caso de um sólido girando em torno de um eixo cuja direção não é fixa: o giroscópio.

Para esse estudo, devemos introduzir os conceito de velocidade angular, aceleração angular, momento de inércia, momento angular e torque. Evidentemente, devemos entender as relações entre esses conceitos e como eles nos auxiliam na descrição das rotações.

Revisão: movimento circular

Definição: Movimento de uma partícul cuja trajetória está contida em um círculo. Alternativamente, é a rotação de uma partícula e torno de um eixo fixo.
Naturalmente, é conveniente escolher um sistema de coordenadas cuja a origem coincide com a do círculo: coordenadas polares. Naturalmente, o movimento pode ser descrito por apenas por uma única variável que é o ângulo entre o vetor posição e o eixo x.



$$\vec{r}(t) = R(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}) = R\hat{r}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\hat{r}) = R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{r}$$

$$= R\omega\left(-\sin(\theta)\,\hat{x} + \cos(\theta)\,\hat{y}\right) = R\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R\omega\hat{\theta}\right) = R\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\theta} + R\omega\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}$$

$$= R\alpha\hat{\theta} - R\omega^2\hat{r} = \vec{a}_t + \vec{a}_{\mathrm{cp}}$$

aceleração tangencial e normal (centrípeta)

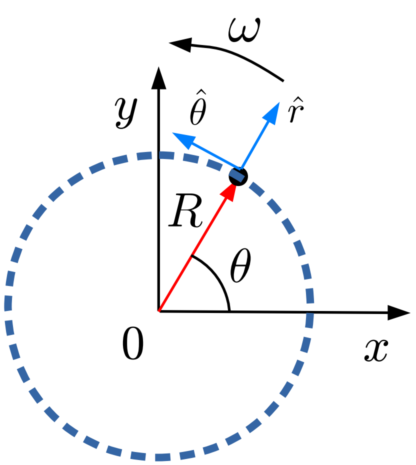
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R = 0 \quad \text{(trajetória circular)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta = \omega \qquad \text{(vel. angular)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega = \alpha \qquad \text{(acel. angular)}$$

Revisão: movimento circular

Analogia com o movimento unidimensional.



Translação:

$$v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x \quad \longleftrightarrow \quad \Delta x = \int v\mathrm{d}t$$

$$a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v \quad \longleftrightarrow \quad \Delta v = \int a\mathrm{d}t$$

Posição	x	(m)
Velocidade	v	$(\mathrm{m/s})$
Aceleração tangencial	a	$(\mathrm{m/s^2})$

Rotação:

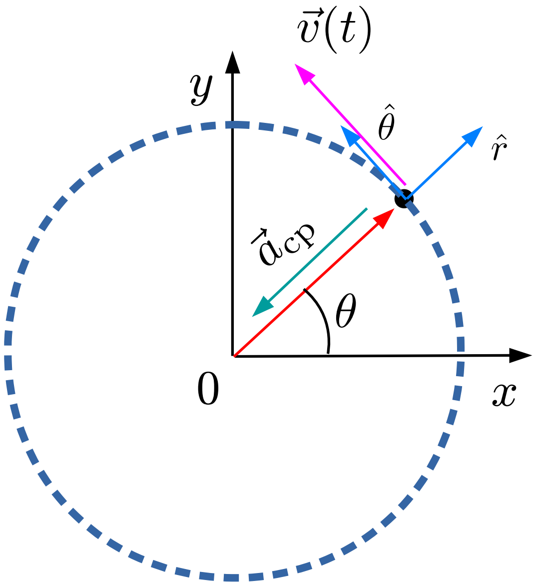
$$\omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta \quad \longleftrightarrow \quad \Delta \theta = \int \omega\mathrm{d}t$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega \quad \longleftrightarrow \quad \Delta \omega = \int \alpha\mathrm{d}t$$

Ângulo	θ	(rad)
Velocidade angular	ω	$(\mathrm{rad/s})$
Aceleração angular	α	$(\mathrm{rad/s^2})$

Revisão: movimento circular uniforme

Definição: Caso particular do movimento circular em que a aceleração angular é nula: α=0.



$$\vec{r}(t) = R(\cos(\theta_0 + \omega t)\hat{x} + \sin(\theta_0 + \omega t)\hat{y}) = R\hat{r}$$

$$\vec{v}(t) = R\omega\hat{\theta} \quad \Rightarrow \quad v(t) = |\vec{v}| = R\omega = \text{const}$$

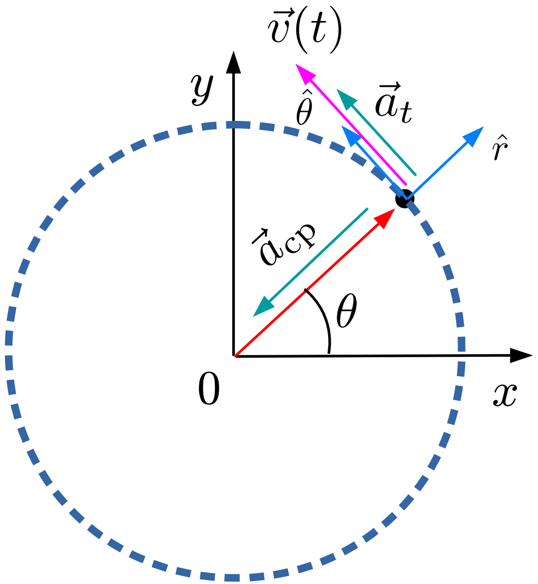
A magnitude da velocidade (rapidez) é constante no tempo. (A direção não é.)

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2\hat{r} = \vec{a}_{\rm cp}$$

A magnitude da aceleração é constante no tempo. A direção não é, e aponta sempre para o centro.

Revisão: movimento circular uniformemente acelerado

Definição: Caso particular do movimento circular em que a aceleração angular é constante: α=cte.



$$\vec{r}(t) = R(\cos(\theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2)\hat{x} + \sin(\theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2)\hat{y}) = R\hat{r}$$

$$\vec{v}(t) = R(\omega_0 + \alpha t)\hat{\theta} = R\omega(t)\hat{\theta} \;\; \Rightarrow \;\; v(t) = |\vec{v}| = R\omega(t)$$

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2\hat{r} + R\alpha\hat{\theta} = \vec{a}_{\text{cp}} + \vec{a}_t$$

Exercício de revisão

É possível que um objeto tenha aceleração não-nula se ele está se movendo com (a) velocidade constante e (b) rapidez constante?

1) Sim, não
2) Sim, sim
3) Não, não
4) Não, sim

Exercício de revisão

Para um objeto em movimento circular uniforme, os vetores posição (adotando a origem como o centro da trajetória), velocidade e aceleração apontam,

1) Todos radialmente para dentro
2) Radialmente para fora, tangencial, radialmente para dentro
3) Radialmente para dentro, tangencial, radialmente para fora
4) Todos tangenciais
5) Nenhuma das alternativas acima

Exercício de revisão

Pode-se afirmar que a soma vetorial das forças sobre um objeto que descreve um movimento circular uniforme (rapidez constante) é

1) Nula
2) É constante dependendo da massa, rapidez e do raio do círculo
3) Nenhuma das alternativas

Exercício de revisão

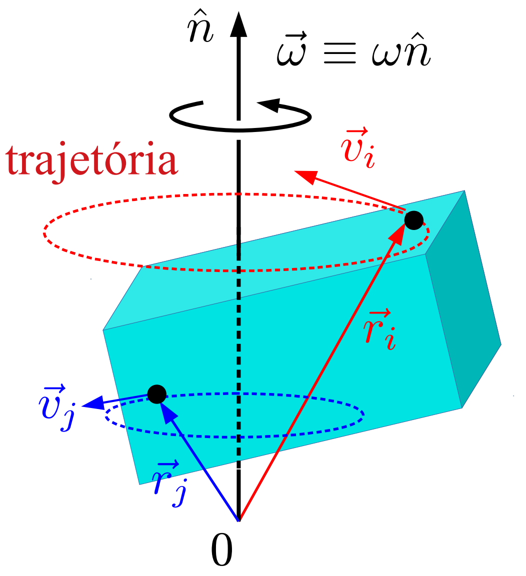
Duas pessoas estão diametralmente opostas em uma carrossel girante. Uma delas joga uma bola em direção à outra. Em que referencial a bola descreve uma linha reta? (Despreze os efeitos da gravidade.)

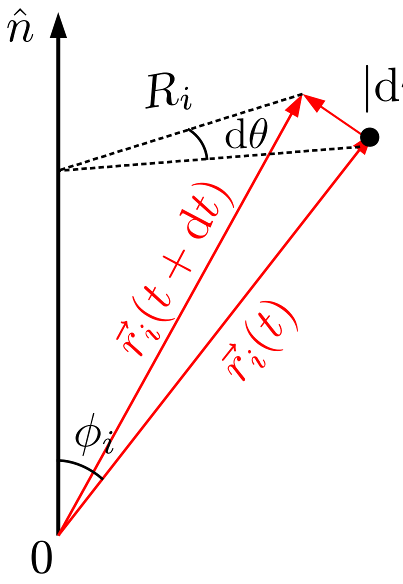
(a) O referencial do carrossel.
(b) O referencial da Terra.

1) Somente no ref. (a)
2) Somente no ref. (b)
3) Em ambos refs. (a) e (b)
4) Em nenhum dos dois já que a bola foi arremessada quando estava num movimento circular.

Rotação por um eixo fixo: cinemática

As partículas descrevem um movimento circular cujo centro é o eixo de rotação.





$$|\mathrm{d}\vec{r}_i| = R_i \mathrm{d}\theta$$
$$= |\vec{r}_i| \sin\phi_i \mathrm{d}\theta$$

Note que

$\mathrm{d}\vec{r} \perp \vec{r}(t)$

$\mathrm{d}\vec{r} \perp \vec{r}(t+\mathrm{d}t)$

(mov. circular)

(origem sobre o eixo)

Definições:

$\mathrm{d}\vec{\theta} \equiv \mathrm{d}\theta \hat{n}$ (regra da mão direita)

$\mathrm{d}\vec{\theta} \equiv \vec{\omega}\mathrm{d}t \quad \mathrm{d}\vec{\omega} \equiv \vec{\alpha}\mathrm{d}t$ (vetor axial ou pseudovetor)

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{d}\vec{r}_i = \mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{r}_i = \mathrm{d}\theta \hat{n} \times \vec{r}_i}$$

Como $\mathrm{d}\vec{r}_i = \vec{v}_i \mathrm{d}t = (\vec{\omega}\mathrm{d}t) \times \vec{r}_i = (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i}$$

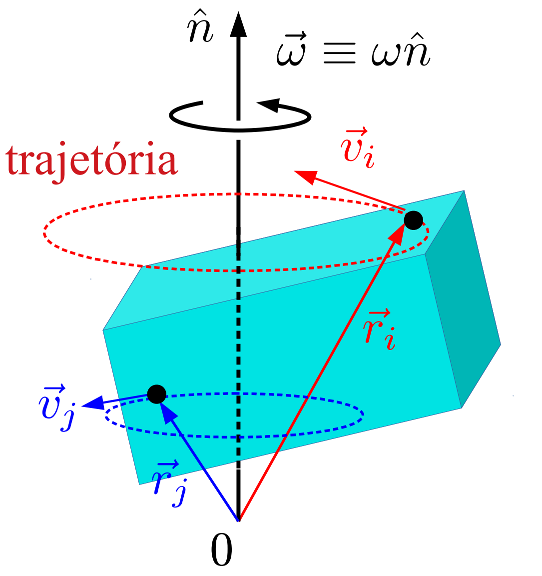
Analogamente, $\boxed{\vec{a}_{t,i} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_i}$

Origem do sistema de coordenadas
está sobre o eixo de rotação

$\hat{n} \equiv$ Versor rotação. A direção é a do eixo de rotação e o sentido é dado pela regra da mão direita.

Rotação por um eixo fixo: cinemática

As partículas descrevem um movimento circular cujo centro é o eixo de rotação.



Origem do sistema de coordenadas
está sobre o eixo de rotação

$\hat{n} \equiv$ Versor rotação. A direção é a do eixo de rotação e o sentido é dado pela regra da mão direita.

Resumindo:

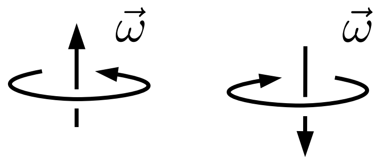
$$d\vec{\theta} \equiv d\theta\hat{n} \qquad d\vec{r}_i = d\vec{\theta} \times \vec{r}_i$$

$$d\vec{\theta} \equiv \vec{\omega}dt \qquad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$d\vec{\omega} \equiv \vec{\alpha}dt \qquad \vec{a}_{t,i} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_i$$

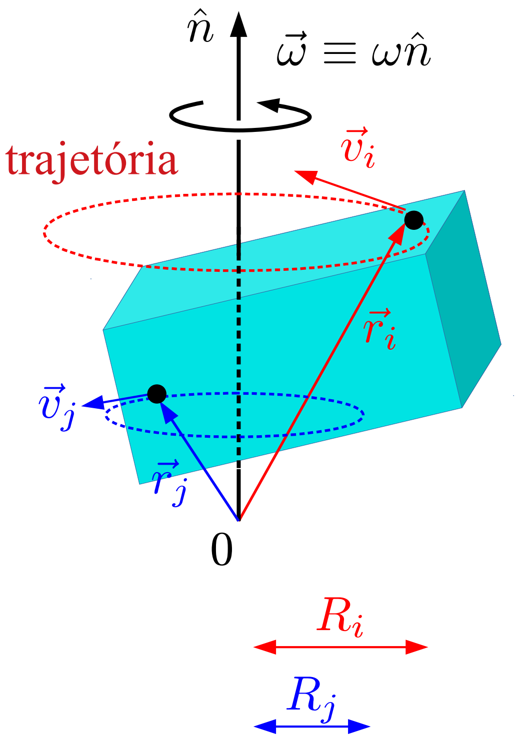
$\vec{v}_i$ se refere ao movimento de um ponto no espaço.

$\vec{\omega}$ se refere ao movimento de um ponto ou uma coleção de pontos (sistema de partículas) relativo a um eixo de rotação.



Rotação por um eixo fixo: dinâmica

As partículas descrevem um movimento circular cujo centro é o eixo de rotação.



Energia cinética:

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Momento de inércia (ou inércia rotacional):

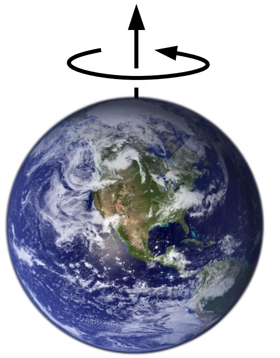
$$I \equiv \sum_i m_i R_i^2 \quad \rightarrow \quad \int R^2 \mathrm{d}m = \int R^2(\vec{r})\rho(\vec{r})\mathrm{dV}$$

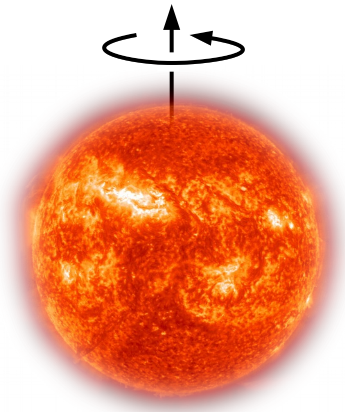
Análogo rotacional da massa (ou inércia)
OBS: Note que depende do eixo de rotação.

$R \equiv$ Distância até o eixo de rotação.

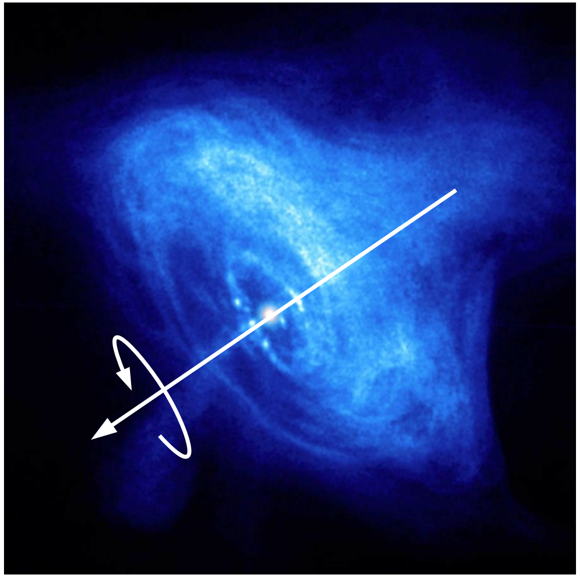
Energia cinética de rotação

Exemplo:





	M (kg)	R (Mm)	T_{rot}	I (kg m^2)	E_c (J)
Terra	$6\ 10^{24}$	6,4	1 d	10^{38}	$2{,}5\ 10^{29}$
Sol	$2\ 10^{30}$	700	26 d	$4\ 10^{47}$	$1{,}5\ 10^{36}$
Crab Pulsar	$3\ 10^{30}$	0,01	33 ms	10^{38}	$2\ 10^{42}$



Energia cinética de rotação

Exemplo:

	M (kg)	R (Mm)	T_{rot}	I (kg m^2)	E_c (J)
Terra	$6\ 10^{24}$	6,4	1 d	10^{38}	$2{,}5\ 10^{29}$
Sol	$2\ 10^{30}$	700	26 d	$4\ 10^{47}$	$1{,}5\ 10^{36}$
Crab Pulsar	$3\ 10^{30}$	0,01	33 ms	10^{38}	$2\ 10^{42}$

Hoje, sabemos que o período de revolução desses objetos não são constantes.
O pulsar do caranguejo, por exemplo, atrasa 36,4 ns por dia. Esse atraso parece inócuo porque em 1 ano o período aumentaria de 0,013 ms. Mas quanto de energia cinética de rotação é perdida?

$$\begin{aligned}
\overline{P}_{\text{crab}} &= \frac{E_{c,\text{hoje}} - E_{c,\text{ontem}}}{24\ \text{horas}} \approx \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}I\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}I\,(2\pi)^2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(T^{-2}\right) = \frac{1}{2}I\,(2\pi)^2\left(\frac{-2}{T^3}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right) = -2E_c\left(\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{-2E_c\delta T}{T \times 24\ \text{horas}} \approx -5\ 10^{31}\ \text{W}
\end{aligned}$$

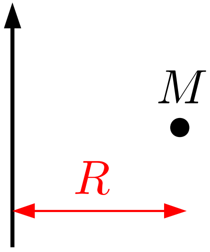
(≈pot. luminosa da nebulosa)

Compare com

$$\overline{P}_{\text{Sol}} \approx 4\ 10^{26}\ W \ll |\overline{P}_{\text{crab}}|$$

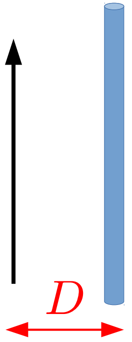
Momento de inércia

1) Uma partícula



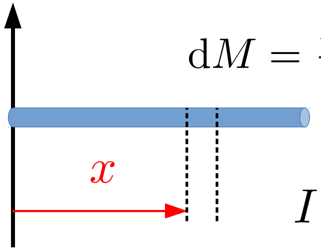
$$I = MR^2$$

2) Barra fina homogênea (eixo paralelo à barra)



$$I = MD^2$$

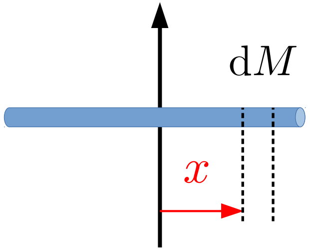
3) Barra fina homogênea (eixo passando pelo extremo)



$$\mathrm{d}M = \frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

$$I = \int R^2 \mathrm{d}M = \int_0^L x^2 \frac{M}{L}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}ML^2$$

4) Barra fina homogênea (eixo passando pelo CM)

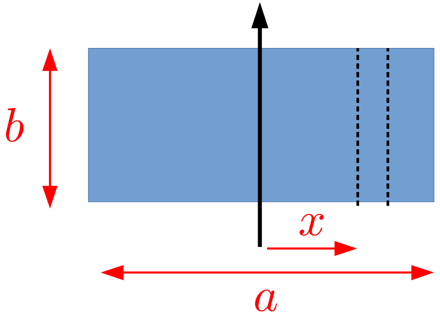


$$\mathrm{d}M = \frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

$$I = \int R^2 \mathrm{d}M = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{M}{L}\mathrm{d}x = \frac{1}{12}ML^2$$

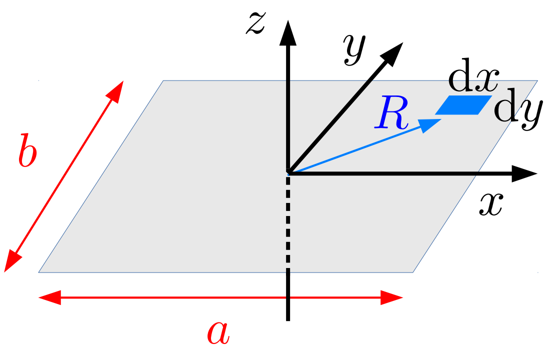
Momento de inércia

5) Placa homogênea (eixo passando pelo CM paralelo a um dos lado e contido no plano da placa)



$$I = \int R^2 \mathrm{d}M = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 M \frac{b\mathrm{d}x}{ab} = \frac{1}{12} M a^2$$

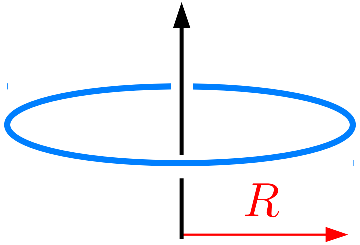
6) Placa homogênea (eixo passando pelo CM e perpendicular ao plano da placa)



$$\begin{aligned}
I &= \int R^2 \mathrm{d}M = \int R^2(x,y)\, M \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{ab} = \frac{M}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{M}{ab} \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right) \\
&= \frac{M}{ab} \left(b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 \mathrm{d}x + a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \mathrm{d}y \right) = \frac{M}{12} \left(a^2 + b^2\right)
\end{aligned}$$

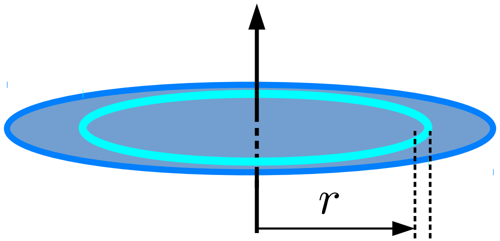
Momento de inércia

7) Aro fino homogêneo (eixo passando pelo CM perpendicular ao plano do aro)



$I = MR^2$ (todas as partículas do aro estão à mesma distância do eixo)

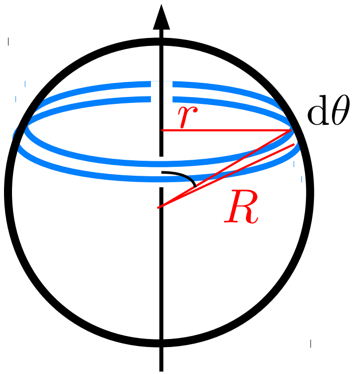
8) Disco homogêneo (eixo passando pelo CM perpendicular ao plano do disco)



$$I = \int \mathrm{d}I_{\text{aro}} = \int r^2 \mathrm{d}M = \int_0^R r^2 M \left(\frac{2\pi r \mathrm{d}r}{\pi R^2} \right) = \frac{1}{2} M R^2$$

Momento de inércia

7) Casca esférica homogênea (eixo passando pelo CM)



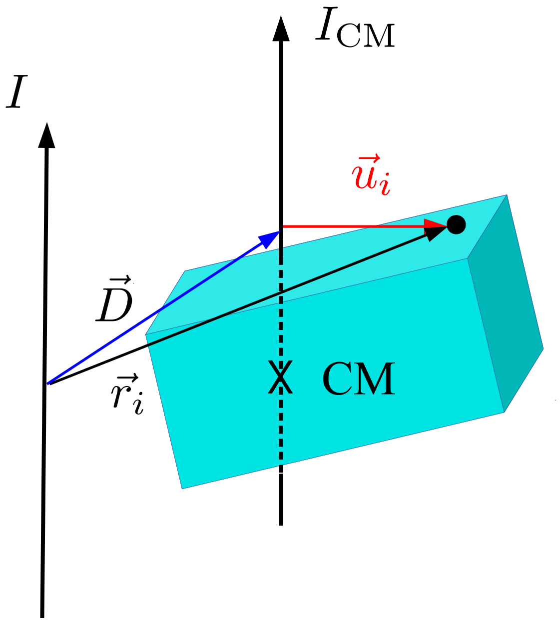
$$\begin{aligned} I &= \int \mathrm{d}I_{\mathrm{aro}} = \int r^2 \mathrm{d}M = \int_0^{\pi} r^2 M \left(\frac{2\pi r R \mathrm{d}\theta}{4\pi R^2}\right) = \frac{M}{2R}\int_0^{\pi} r^3 \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{M}{2R}\int_0^{\pi} (R\sin\theta)^3\, \mathrm{d}\theta = \frac{MR^2}{2}\times\frac{4}{3} = \frac{2}{3}MR^2 \end{aligned}$$

8) Esfera homogênea (eixo passando pelo CM)

$$I = \int \mathrm{d}I_{\mathrm{casca}} = \int \frac{2}{3} r^2 \mathrm{d}M = \int_0^{R} \frac{2}{3} r^2 M \left(\frac{4\pi r^2 \mathrm{d}r}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right) = \frac{2M}{R^3}\int_0^{R} r^4 \mathrm{d}\theta = \frac{2}{5}MR^2$$

Momento de inércia

Teorema dos eixos paralelos: O momento de inércia de um sistema de partículas por um eixo paralelo a um eixo que passa pelo CM do sistema é igual ao momento de inércia pelo eixo que passa pelo CM acrescido de MD^2, onde M é massa do sistema e D é a distância entre os eixos.



Prova:

$$I_{\mathrm{CM}} = \sum_i m_i u_i^2$$

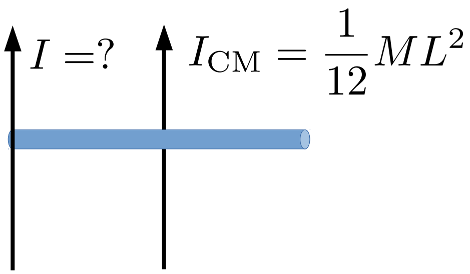
$$\begin{aligned}
I &= \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \left|\vec{u}_i + \vec{D}\right|^2 = \sum_i m_i \left(u_i^2 + 2\vec{D}\cdot\vec{u}_i + D^2\right) \\
&= \sum_i m_i u_i^2 + 2\vec{D}\cdot\left(\sum_i m_i \vec{u}_i\right) + \left(\sum_i m_i\right) D^2 \\
&= I_{\mathrm{CM}} + MD^2
\end{aligned}$$

Consequência: É sempre mais fácil girar um objeto por um eixo que passa pelo CM.

Momento de inércia

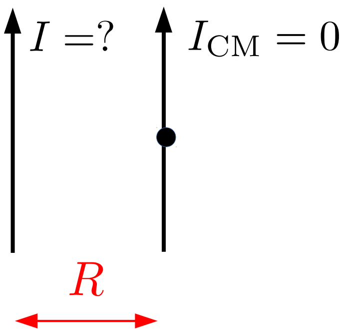
Teorema dos eixos paralelos:

Exemplo 1:



$$I = I_{\mathrm{CM}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M L^2$$

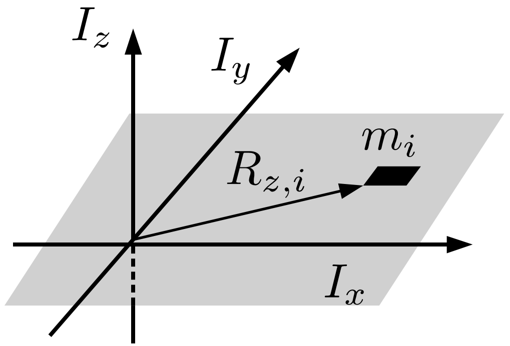
Exemplo 2:



$$I = I_{\mathrm{CM}} + M R^2 = M R^2$$

Momento de inércia

Teorema dos eixos perpendiculares (apenas para sistemas uni- ou bidimensionais): Sejam I_x e I_y os momentos de inércia de um sistema de partículas tais que os eixos correspondentes estão no plano do sistema e os eixos são perpendiculares entre si. Então, o momento de inércia I_z do sistema por um eixo perpendicular a esses dois primeiros que se interceptam num mesmo ponto é simplesmente a soma dos dois primeiros.



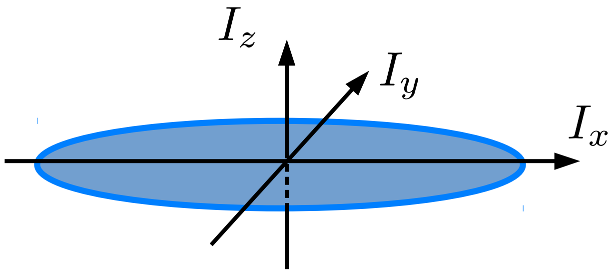
Prova:

$$I_z = \sum_i m_i R_{z,i}^2 = \sum_i m_i \left(R_{x,i}^2 + R_{y,i}^2\right) = I_x + I_y$$

Momento de inércia

Teorema dos eixos perpendiculares

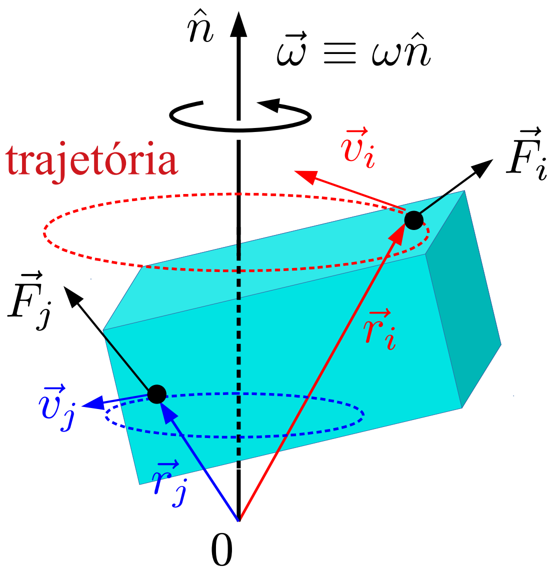
Exemplo: Momento de inércia de um disco homogêneo por um eixo no plano do disco passando pelo CM.

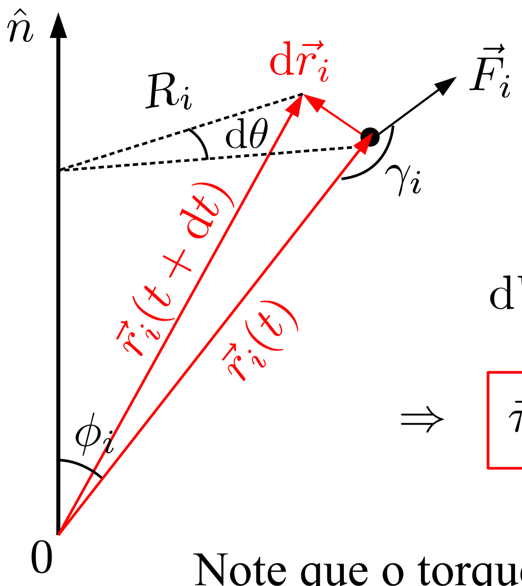


$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 = I_x + I_y = 2I_x, \quad \Rightarrow \quad I_x = \frac{1}{4}MR^2$$

Rotação por um eixo fixo: dinâmica

As partículas descrevem um movimento circular cujo centro é o eixo de rotação.





Trabalho e torque:

$$\mathrm{d}W_i = \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i \equiv \vec{\tau}_i \cdot \mathrm{d}\vec{\theta}$$

Como $\quad \mathrm{d}\vec{r}_i = \mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{r}_i, \quad$ então

$$\mathrm{d}W_i = \vec{F}_i \cdot \left(\mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{r}_i\right) = \mathrm{d}\vec{\theta} \cdot \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i,} \qquad |\vec{\tau}_i| = |\vec{F}_i| \underbrace{|\vec{r}_i| \sin\gamma_i}_{\text{braço da alavanca}}$$

Note que o torque não é necessariamente paralelo ao versor rotação $\hat{n}$.

Origem do sistema de coordenadas está sobre o eixo de rotação

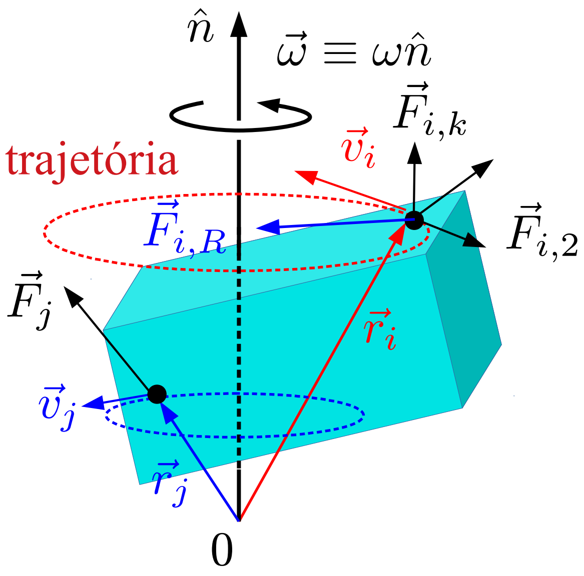
$\hat{n} \equiv$ Versor rotação. A direção é a do eixo de rotação e o sentido é dado pela regra da mão direita.

Lembre-se que

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{C} \times \vec{A}\right) = \vec{C} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)$$

Rotação por um eixo fixo: dinâmica

As partículas descrevem um movimento circular cujo centro é o eixo de rotação.



Origem do sistema de coordenadas
está sobre o eixo de rotação

2ª Lei de Newton para rotação:

$$\vec{\tau}_{i,k} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,k}, \quad \Rightarrow \quad \sum_k \vec{\tau}_{i,k} = \vec{r}_i \times \sum_k \vec{F}_{i,k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{i,R} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,R} = \vec{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_i \times \vec{p}_i\right) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_i$$

Momento angular: $\boxed{\vec{L}_i \equiv \vec{r}_i \times \vec{p}_i}$

Somando todos os torques: $\boxed{\vec{\tau}_R = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}}$

$$\vec{\tau}_R = \sum_i \vec{\tau}_{i,R}$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

Rotação por um eixo fixo: dinâmica

2ª Lei de Newton para rotação: $\vec{\tau}_R = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}$

Esta lei é válida quando o torque for calculado em relação a um ponde de um referencial inercial ou em relação ao CM, mesmo ele não sendo inercial. O motivo é que as forças fictícias atuam sobre o CM e, portanto, o torque fictício se torna nulo neste caso.

Prova:

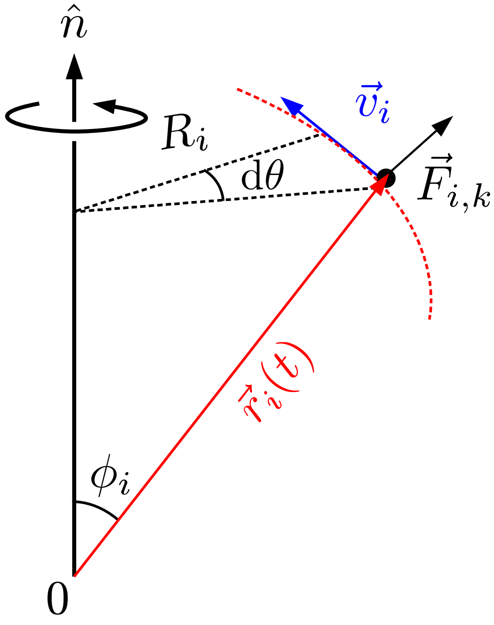
Quando calculado pelo CM acelerado, $\vec{\tau}_{i,R}^{\,\mathrm{CM}} = \vec{u}_i \times \vec{F}_{i,R}^{\,\mathrm{CM}} = m_i \vec{u}_i \times (\vec{a}_{i,R}^{\,\mathrm{inercial}} + \vec{a}_{\mathrm{CM}})$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_R^{\,\mathrm{CM}} = \sum_i \vec{\tau}_{i,R}^{\,\mathrm{CM}} = \sum_i m_i \vec{u}_i \times \vec{a}_{i,R}^{\,\mathrm{inercial}} + \cancelto{0}{\left(\sum_i m_i \vec{u}_i\right)} \times \vec{a}_{\mathrm{CM}}$$

$$= \sum_i \vec{u}_i \times \vec{F}_{i,R}^{\,\mathrm{inercial}} = \sum_i \text{torques externos inerciais}$$

(Independente da aceleração do CM)

Rotação: resumo até agora



Translação:			Rotação:		
Deslocalmento	$\mathrm{d}\vec{r}$	(m)	Deslocamento ângular	$\vec{\theta}$	(rad)
Velocidade	$\vec{v}$	(m/s)	Velocidade angular	$\vec{\omega}$	(rad/s)
Aceleração tangencial	$\vec{a}_t$	(m/s^2)	Aceleração angular	$\vec{\alpha}$	(rad/s^2)
Inércia	m	(kg)	Momento de inércia	I	(kg m^2)
Momento	$\vec{p}$	(N s)	Momento angular	$\vec{L}$	(J s)
Força	$\vec{F}$	(N)	Torque	$\vec{\tau}$	(J)

$$\mathrm{d}\vec{r}_i = \mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{r}_i \qquad I = \sum_i m_i R_i^2$$

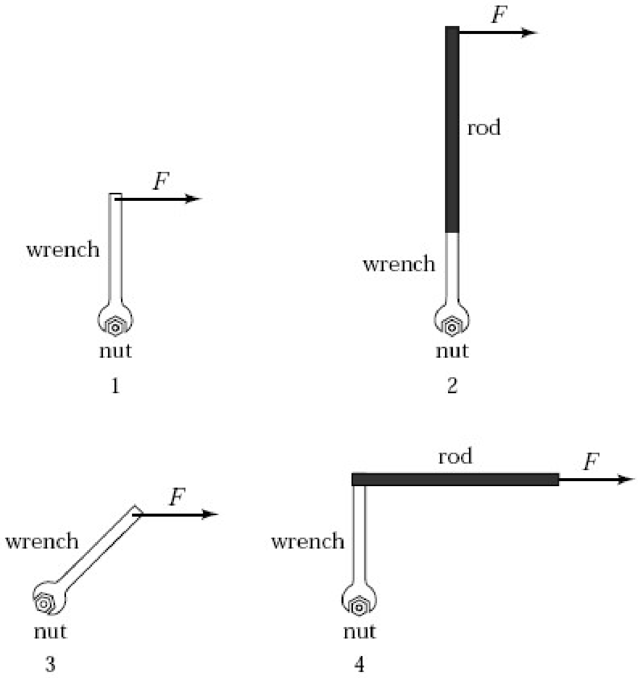
$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \qquad \vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{a}_{t,i} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_i \qquad \vec{\tau}_{i,k} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,k}$$

Exercício de revisão

Em termos de eficiência para girar o parafuso, qual das alternativas abaixo se aplica?

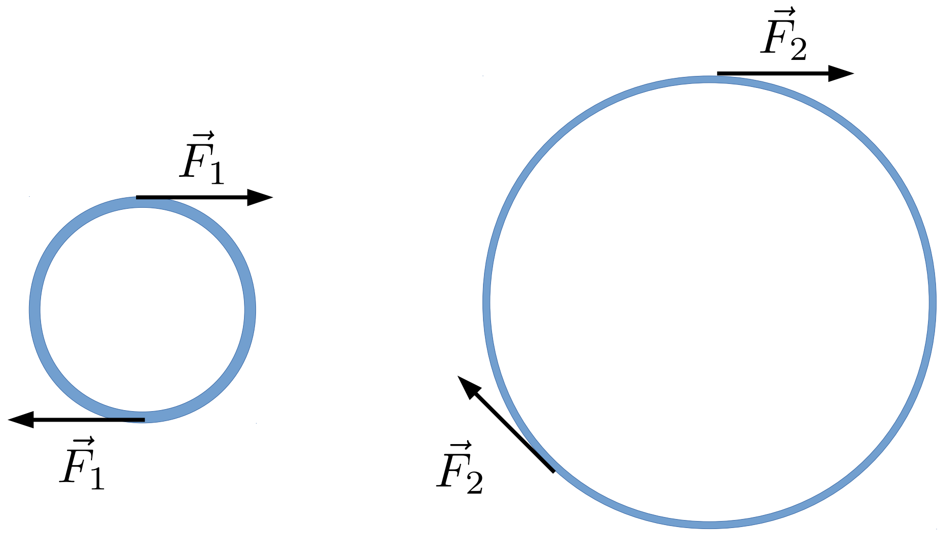
1) 2>1=4>3
2) 2>3>4=1
3) 3>1>4>2
4) Nenhuma das anteriores



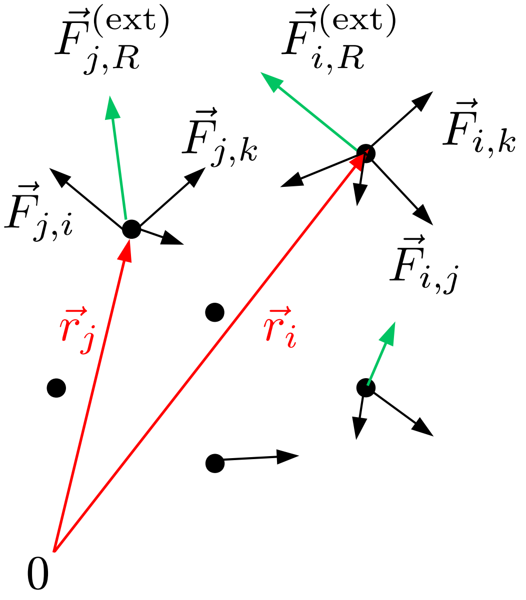
Exercício de revisão

Dois aros de mesma massa e de raios R e 2R estão sob as forças como ilustrado abaixo. Para que as acelerações angulares sejam as mesmas, a magnitude da força sobre o segundo deve ser, em relação à magnitude da força sobre o primeiro,

1) igual
2) o dobro
3) 4 vezes maior
4) 4 vezes menor
5) A metade
6) Nenhuma das anteriores



Torque resultante e torque externo



Torque resultante:

$$\vec{\tau}_R = \vec{\tau}^{(\mathrm{ext})}_R + \vec{\tau}^{(\mathrm{int})}_R$$

Torque resultante externo:

$$\vec{\tau}^{(\mathrm{ext})}_R = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}^{(\mathrm{ext})}_{i,R}$$

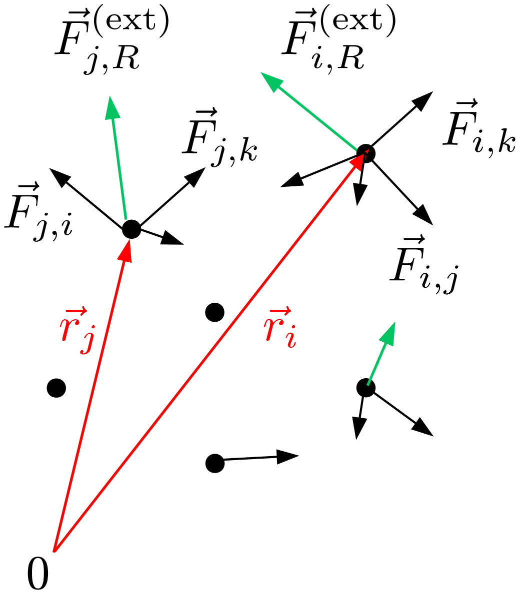
Torque resultante interno:

$$\vec{\tau}^{(\mathrm{int})}_R = \sum_{\mathrm{pares}\{i,j\}} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{j,i}\right) = \sum_{\mathrm{pares}\{i,j\}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{i,j}$$

no caso em que $\vec{F}_{i,j} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$, como em forças centrais (gravitacional ou Coulombiana), o par de torques ação e reação se anulam. Neste caso,

$$\boxed{\vec{\tau}^{(\mathrm{int})}_R = \vec{0}, \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_R = \vec{\tau}^{(\mathrm{ext})}_R = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}}$$

Conservação do momento angular



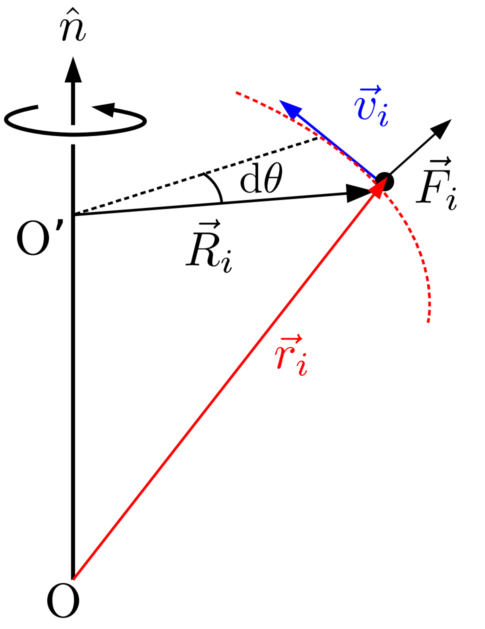
Caso o torque externo resultante sobre um sistema seja nulo, o seu momento angular total é conservado.

$$\vec{\tau}^{(\mathrm{int})}_R = \vec{0}, \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_R = \vec{\tau}^{(\mathrm{ext})}_R = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \vec{0}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{L} = \mathrm{cte}}$$

OBS: Até onde sabemos, as interações fundamentais entre as partículas conhecidas são tais que conservam o momento angular. Portanto, esta é dita uma lei de conservação do universo em mesmo pé de igualdade que as leis de conservação de energia e momento.

Torque, momento angular e o ponto do espaço

Torque e momento angular dependem do ponto do espaço em que são calculados.
Dependendo da escolha do ponto, essas quantidades podem ser matematicamente convenientes.



Momento angular com relação à O:

$$
\begin{aligned}
\vec{L}_O &= m_i\vec{r}_i \times \vec{v}_i = m_i\vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{R}_i\right) = m_i\left(\vec{d}_{OO'} + \vec{R}_i\right) \times \left(\vec{\omega} \times \vec{R}_i\right) \\
&= -m_i d_{OO'}\omega\vec{R}_i + m_i R_i^2\vec{\omega} = -m_i d_{OO'}\omega\vec{R}_i + m_i R_i^2\vec{\omega} \\
&= -m_i d_{OO'}\omega\vec{R}_i + I\vec{\omega} = -m_i d_{OO'}\omega\vec{R}_i + \vec{L}_{O'}
\end{aligned}
$$

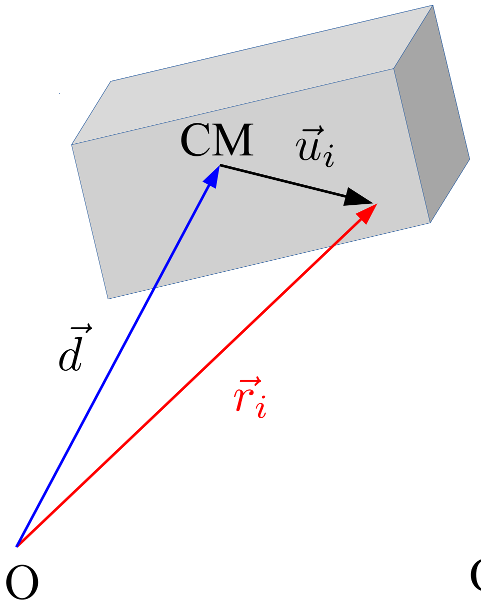
Momento angular com relação à O': $\boxed{\vec{L}_{O'} = I\vec{\omega}}$

O torque resultante em relação à O' também é mais conveniente,
porque a força resultante também está no plano da trajetória:

$$
\begin{aligned}
\boxed{\vec{\tau}_{O',R}} &= \vec{R}_i \times \vec{F}_{i,R} = \vec{R}_i \times m_i\left(\vec{a}_{\mathrm{cp}} + \vec{a}_t\right) = \vec{R}_i \times m_i\left(-\omega^2\vec{R}_i + R_i\alpha\hat{\theta}_i\right) \\
&= \vec{R}_i \times m_i R_i\alpha\hat{\theta}_i = m_i R_i^2\alpha\hat{n} \boxed{= I\vec{\alpha}}
\end{aligned}
$$

Momento angular interno e externo

É conveniente relacionar o momento angular de um sistema calculado por um ponto qualquer do espaço com o momento angular calculado pelo CM do sistema:



Momento angular com relação à O:

$$
\begin{aligned}
\vec{L}_O &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \left(\vec{u}_i + \vec{d}\right) \times \left(\dot{\vec{u}}_i + \dot{\vec{d}}\right) \\
&= \sum_i m_i \vec{u}_i \times \dot{\vec{u}}_i + \left(\sum_i m_i \vec{u}_i\right) \times \dot{\vec{d}} + \vec{d} \times \left(\sum_i m_i \dot{\vec{u}}_i\right) + \left(\sum_i m_i\right) \vec{d} \times \dot{\vec{d}} \\
&= \vec{L}_{\mathrm{CM}} + M\vec{d} \times \vec{V}_{\mathrm{CM}}
\end{aligned}
$$

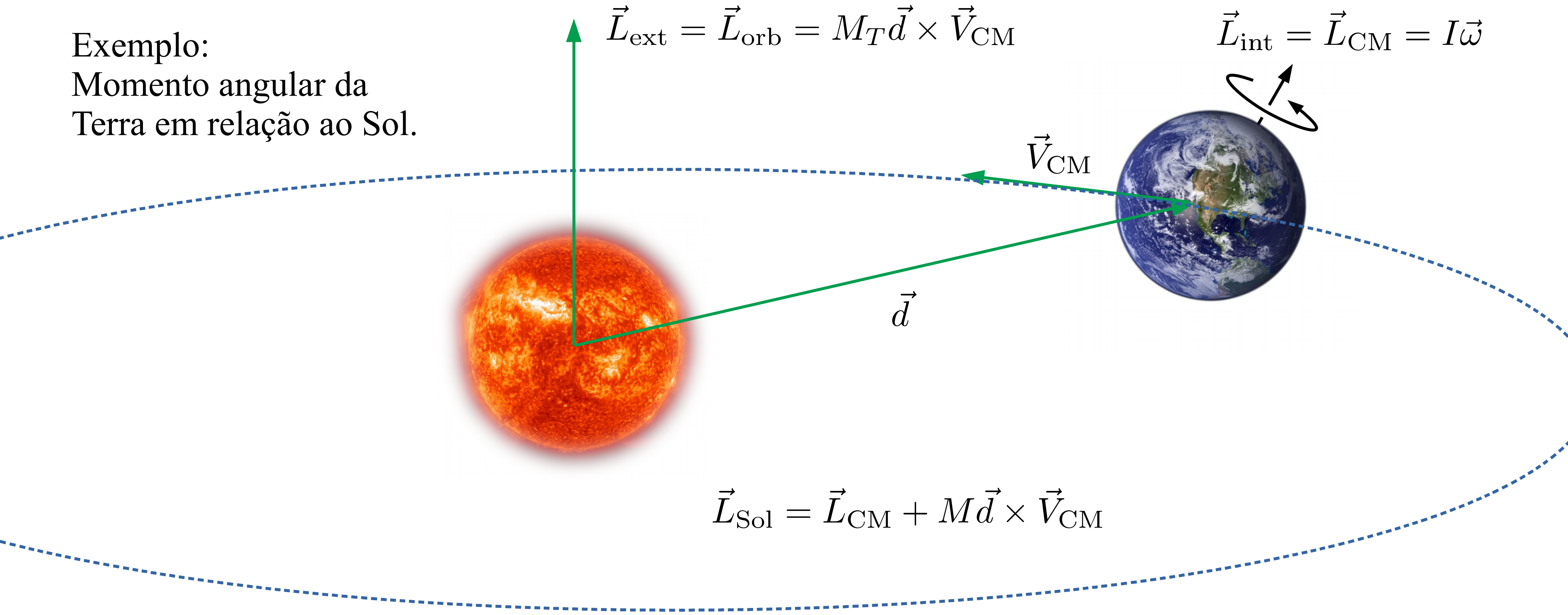
Momento angular interno (de spin)

Momento angular externo (orbital)

O momento angular não depende da origem apenas quando o CM do sistema está em repouso em relação ao referencial.

Momento angular interno e externo

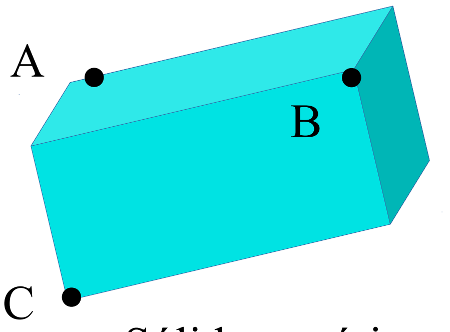
Exemplo:
Momento angular da
Terra em relação ao Sol.



$$\vec{L}_{\text{Sol}} = \vec{L}_{\text{CM}} + M\vec{d} \times \vec{V}_{\text{CM}}$$

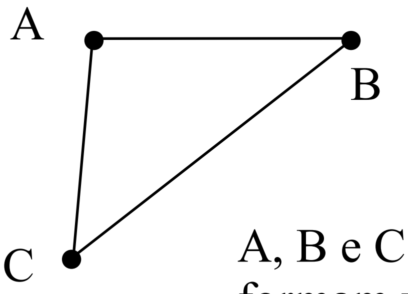
Movimento geral de um corpo rígido

Quantos parâmetros precisamos para descrever completamente a posição (e consequentemente o deslocamento) de um sólido em relação a um referencial? R: 6



Sólido genérico

Pode ser substituído por

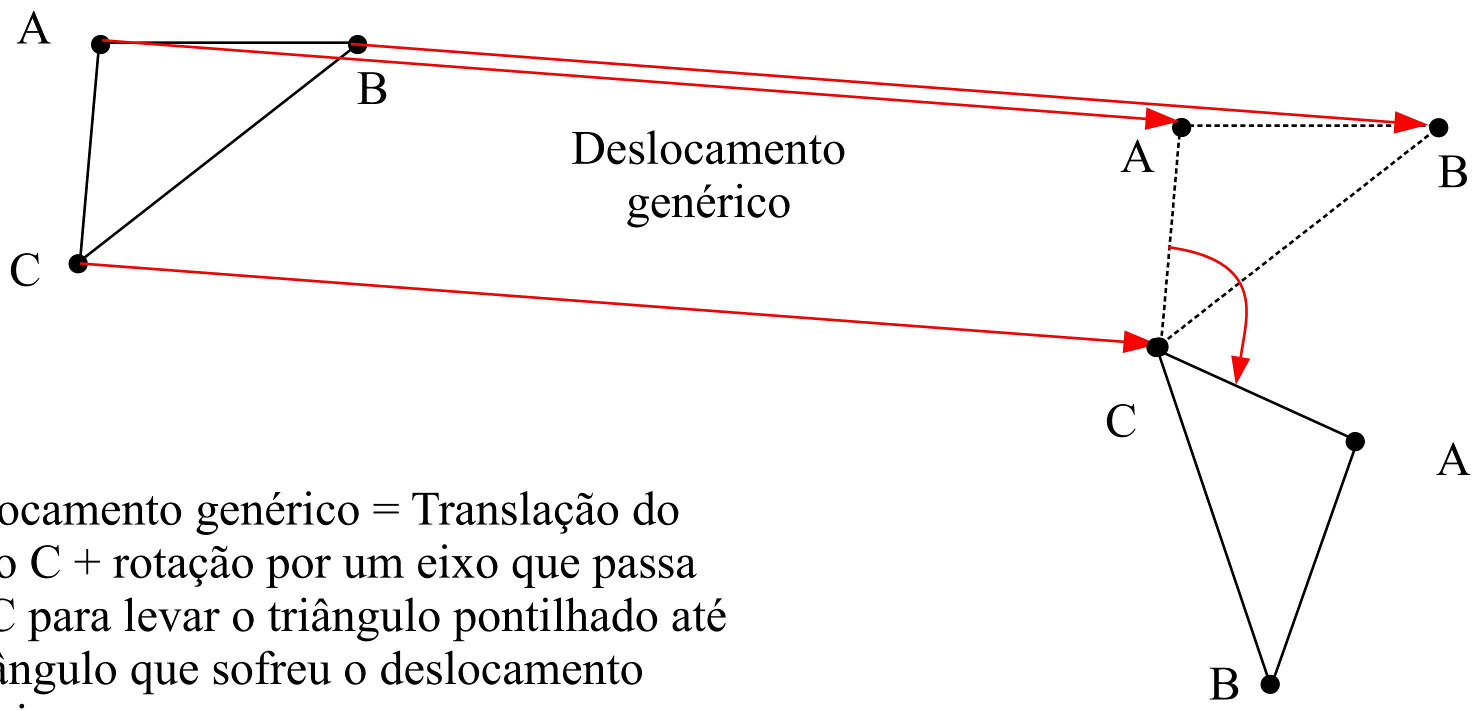


A, B e C não colineares formam um triângulo que representa o sólido.

Precisamos de 3 coordenadas para descrever o deslocamento do ponto A.
Como o ponto B está numa esfera centrada em A de raio AB, então precisamos de mais 2 coordenadas para determinar o deslocamento do ponto B. Finalmente, como ponto C está num círculo em torno de AB, precisamos então de mais 1 variável para determinar sua posição. Com esses 6 parâmetros, descrevemos então qualquer deslocamento de um sólido.

Movimento geral de um corpo rígido

Os 6 parâmetros que representam o deslocamento de um sólido podem ser interpretados como uma translação (3 parâmetros) e uma rotação. A rotação é de um ângulo (1 parâmetro) em torno de um eixo (2 parâmetros fixam a direção do eixo).



Deslocamento genérico = Translação do ponto C + rotação por um eixo que passa por C para levar o triângulo pontilhado até o triângulo que sofreu o deslocamento genérico

Movimento geral de um corpo rígido

Uma possível estratégia para descrever o movimento dos corpos rígidos é:

1) Descrever a translação do CM usando a 2ª Lei de Newton para translação:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_R^{(\mathrm{ext})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}_{\mathrm{CM}}$$

2) Descrever a rotação pelo CM usando a 2ª Lei de Newton para rotação:

$$\vec{\tau}_{R,\mathrm{pelo\ CM}} = \vec{\tau}_{R,\mathrm{pelo\ CM}}^{(\mathrm{ext})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_{\mathrm{pelo\ CM}}$$

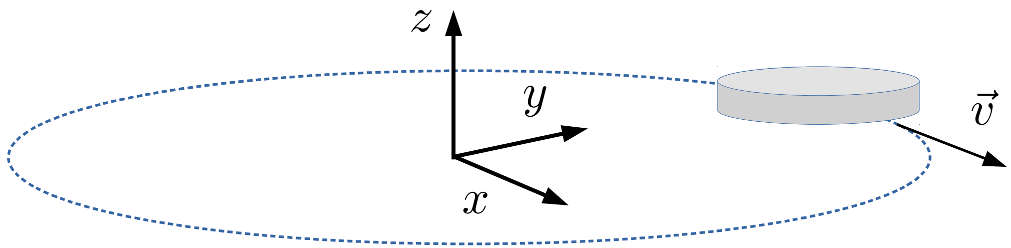
Exercício de revisão

A inércia rotacional (ou momento de inércia) é uma propriedade intrínseca do sistema

1) Verdadeiro
2) Falso

Exercício de revisão

Considere o objeto girante ilustrado abaixo. Sendo a velocidade angular um vetor, deveríamos associar uma direção a ela?



1) Sim, $\pm x$

2) Sim, $\pm y$

3) Sim, $\pm z$

4) Sim, mas nenhuma das acima

5) Não, a escolha é arbitrária porque a velocidade angular é um pseudovetor

Exercício de revisão

Um objeto em um movimento circular sempre tem uma aceleração centrípeta? Sempre tem uma aceleração angular? Sempre tem uma aceleração tangencial?

1) Não, não, não
2) Sim, sim, sim
3) Não, sim, não
4) Sim, não, não
5) Não, não, não
6) Nenhuma das alternativas acima

Exercício de revisão

Se ambas as inércia e rapidez rotacional de um objeto dobram, pode-se afirmar que sua energia cinética rotacional

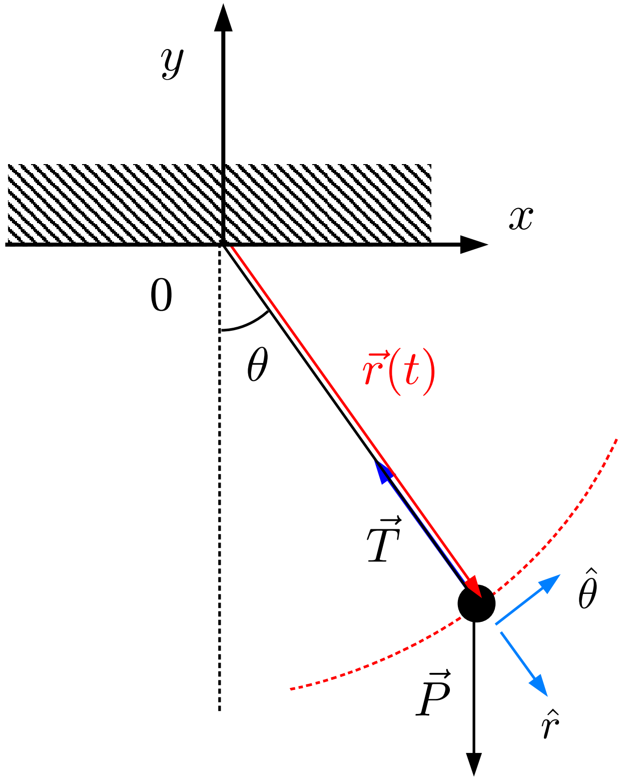
1) Permanece constante
2) Duplica
3) Aumenta por um fator de 4
4) Aumenta por um fator de 8
5) Cai pela metade
6) Cai por um fator de ¼
7) Nenhuma das anteriores

Exercício de revisão

Um paralelepípedo possui 3 eixos de simetria perpendiculares entre si que passam peso seu CM. Por qual dos eixos a inércia rotacional é maior? E menor?

1) Pelo eixo paralelo à maior e menor dimensões, respectivamente
2) Pelo eixo paralelo à menor e maior dimensões, respectivamente
3) Pelo eixo paralelo à maior e intermediária dimensões, respectivamente
4) Pelo eixo paralelo à intermediária e menor dimensões, respectivamente
5) Nenhuma das anteriores

Pêndulo simples (rotação de 1 partícula)



Eixo de rotação: $\hat{n} = \hat{z}, \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = \omega\hat{z}$

Momento de inércia: $I = m\ell^2$

Momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \ell\hat{r} \times (m\vec{v}) = \ell\hat{r} \times \left(m\ell\omega\hat{\theta}\right) = m\ell^2\omega\hat{z} = I\vec{\omega}$$

Note a semelhança com $\vec{p} = m\vec{v}$

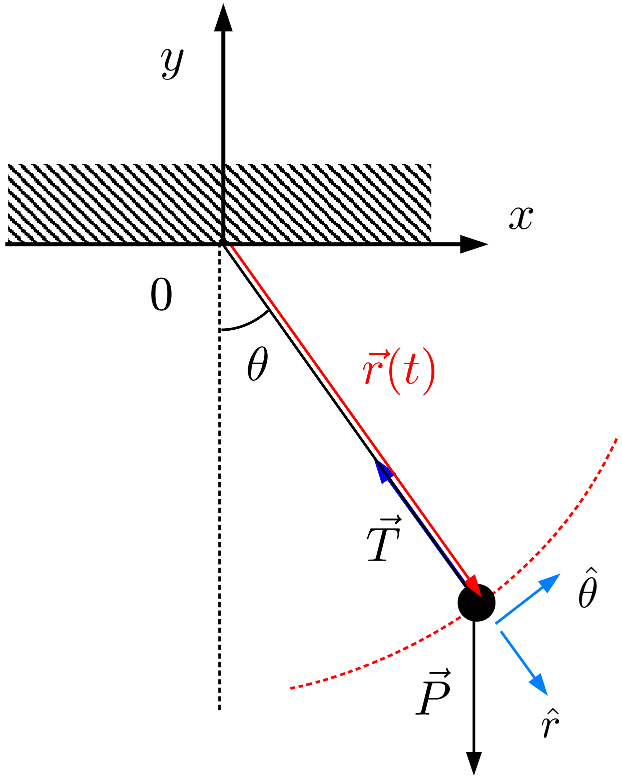
Torque total:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times (\vec{T} + \vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P} = -mg\ell\sin\theta\,\hat{z}$$

2ª lei de Newton:

$$I\vec{\alpha} = -mg\ell\sin\theta\,\hat{z}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta}$$

Pêndulo simples (rotação de 1 partícula)



Energia potencial gravitacional:

$$U = mgy = -mg\ell\cos\theta$$

Força associada: $\vec{F}_g = \vec{P} = -\nabla U = -mg\hat{y}$

Torque associado: $\vec{\tau} = -\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta}\hat{n} = -mg\ell\sin\theta\hat{z}$

Conservação de energia (perspectiva da translação):

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

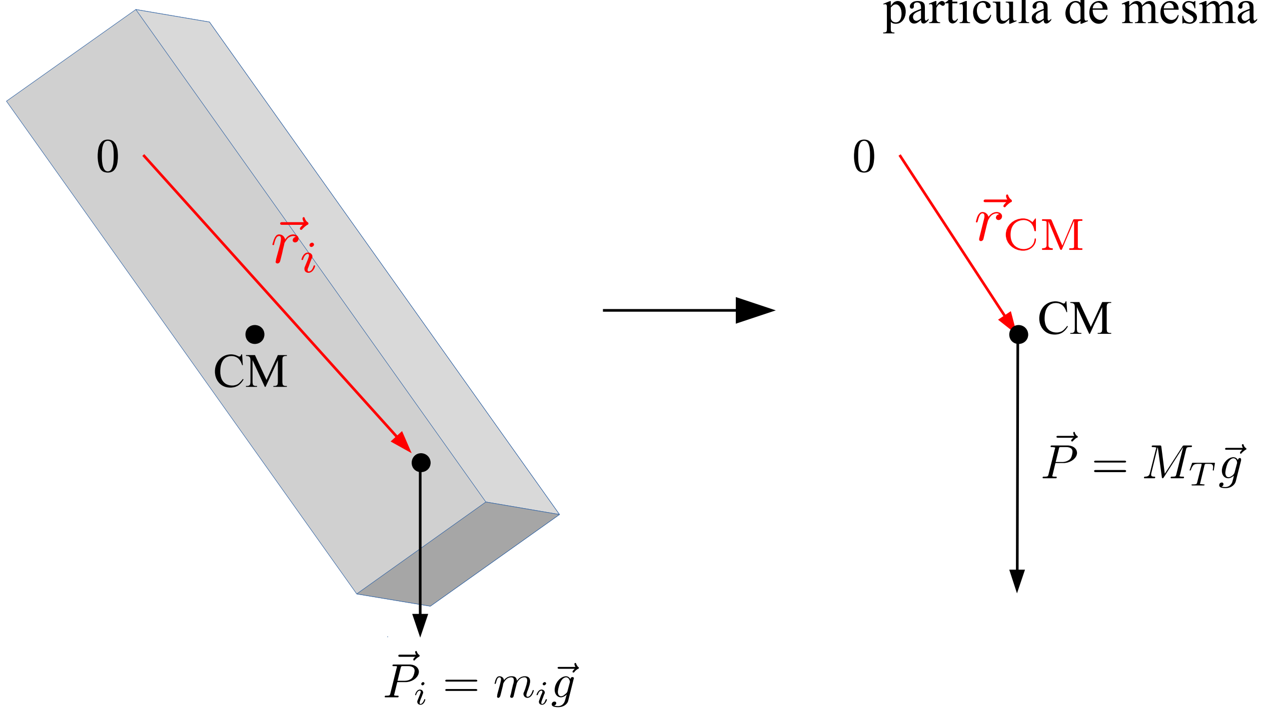
Conservação de energia (perspectiva da rotação):

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 - mg\ell\cos\theta$$

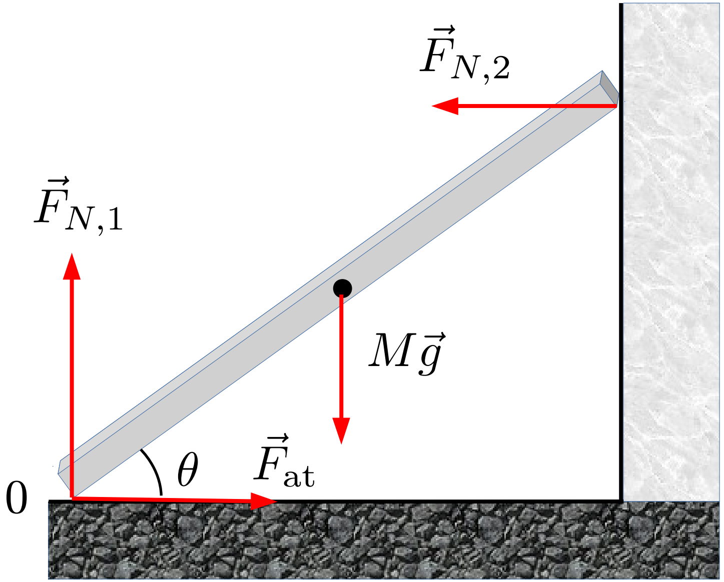
Torque gravitacional

Torque gravitacional total: $$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \sum_i \vec{r}_i \times (m_i\vec{g}) = \left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right) \times \vec{g} = M_T\vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{g} \\ &= \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{P}\end{aligned}$$

Equivalente a substituir todo o sistema por uma partícula de mesma massa concentrada no CM.



Estática de corpos rígidos



Condições necessárias para que um corpo permaneça estático:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_R^{(\text{ext})} = \sum_i \vec{F}_i^{(\text{ext})} = \vec{0} \text{ e } \vec{\tau}_R = \vec{\tau}_R^{(\text{ext})} = \sum_i \vec{\tau}_i^{(\text{ext})} = \vec{0}$$

Ex: Qual a menor inclinação para que a escada permaneça estática quando encostada numa parede perfeitamente lisa?

Força resultante: $F_{N,1} = Mg \qquad F_{N,2} = F_{\text{at}}$

Torque resultante:

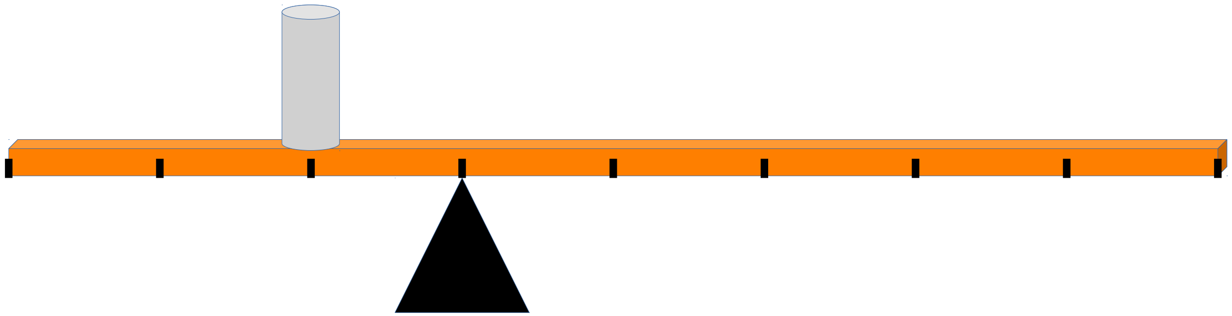
$$Mg\frac{\ell}{2}\cos\theta = F_{N,2}\ell\sin\theta, \quad \Rightarrow \quad F_{N,2} = \frac{1}{2}Mg\cot\theta$$

Como $\quad F_{\text{at}} = \frac{1}{2}Mg\cot\theta \leq \mu F_{N,1} = \mu Mg, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cot\theta \leq 2\mu}$

Exercício de revisão

Sendo que o arranjo abaixo está em equilíbrio, e que o cilindro tem massa M, qual a massa da prancha? (Assuma que os objetos são homogêneos.)

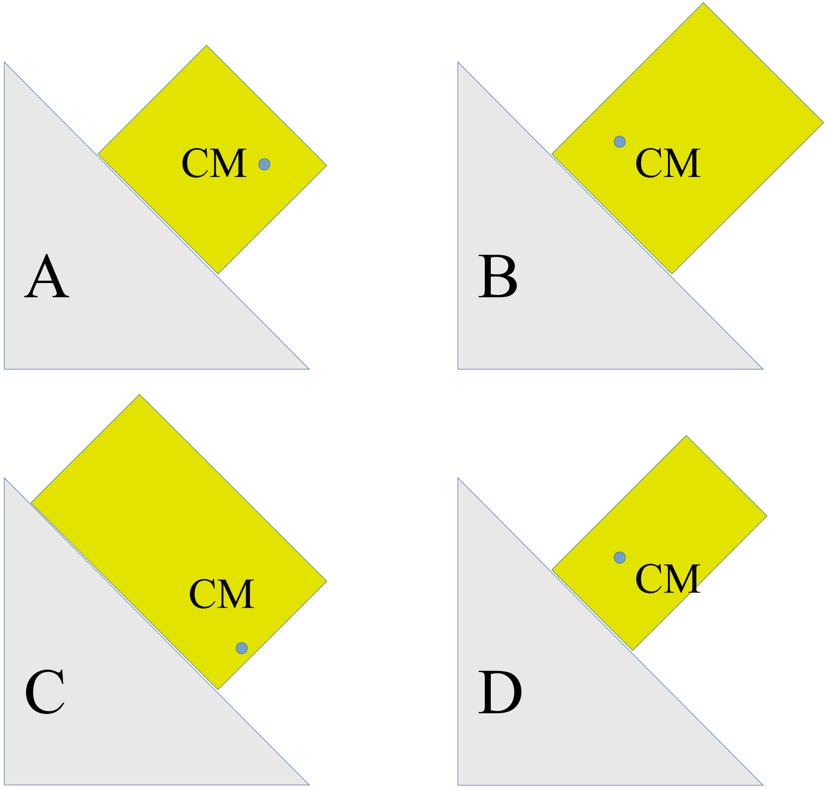
1) M
2) $2M$
3) $3M$
4) $2/3M$



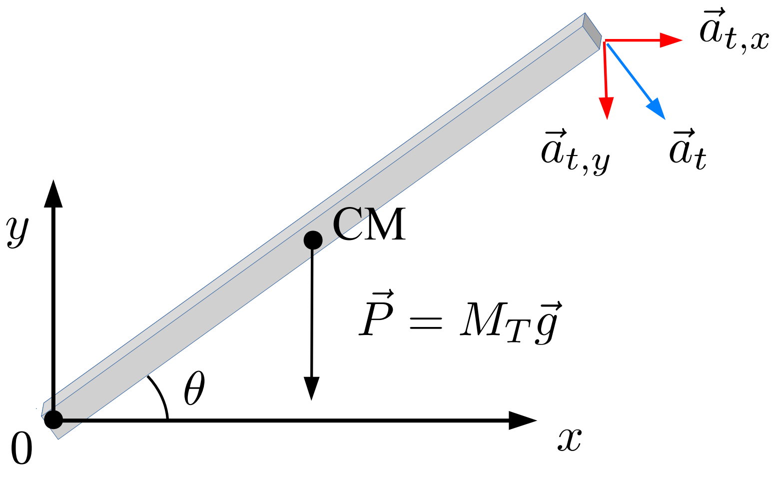
Exercício de revisão

Em quais das situações abaixo o objeto sobre o plano inclinado é instável com certeza?

1) B
2) A e B
3) C e A
4) D e B
5) A, C e D
6) Nenhuma das anteriores



Barra fina homogênea



Uma barra gira livremente por um eixo em sua extremidade. Determine a relação entre a aceleração tangencial da outra extremidade e o ângulo entre a barra e o eixo horizontal.

Momento angular:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \left(\omega r_i \hat{\theta}\right)$$

$$= \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \omega \hat{z} = I\vec{\omega} = \frac{1}{3} M\ell^2 \vec{\omega}$$

2ª lei de Newton para rotação:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{P} = -\frac{1}{2} Mg\ell \cos\theta \hat{z} = I\vec{\alpha}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha} = -\frac{3g}{2\ell}\cos\theta \hat{z}}$$

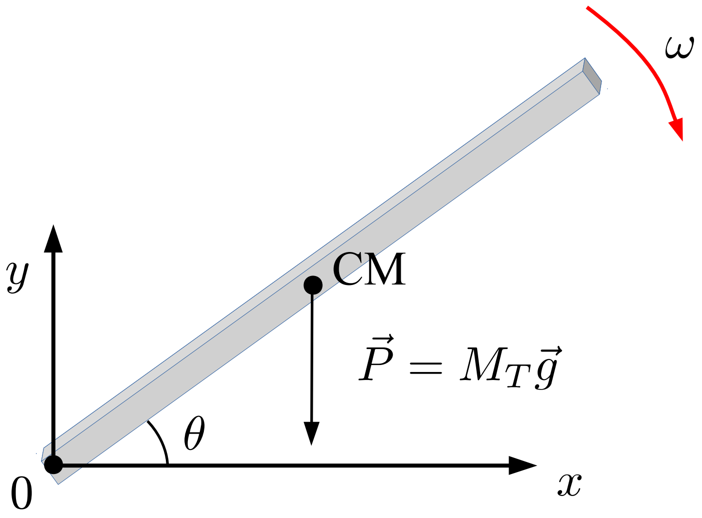
Aceleração tangencial:

$$\vec{a}_t = \vec{\ell} \times \vec{\alpha} = -\frac{3g}{2}\cos\theta \hat{\theta}, \quad \Rightarrow \quad a_{t,y} = -\frac{3g}{2}\cos^2\theta$$

Soltando a barra do repouso com

$$\theta \lesssim 35.2°, \quad \Rightarrow \quad |a_{t,y}| > g$$

Barra fina homogênea



Uma barra gira livremente por um eixo em sua extremidade. Determine a relação entre a velocidade angular e o ângulo entre a barra e o eixo horizontal.

Energia cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{6}M\ell^2\omega^2$$

Energia potencial gravitacional:

$$U = \sum_i mgy_i = \left(\sum_i my_i\right) g = Mgy_{\text{CM}} = \frac{1}{2}Mg\ell\sin\theta$$

Conservação de energia:
(A barra é solta do repouso)

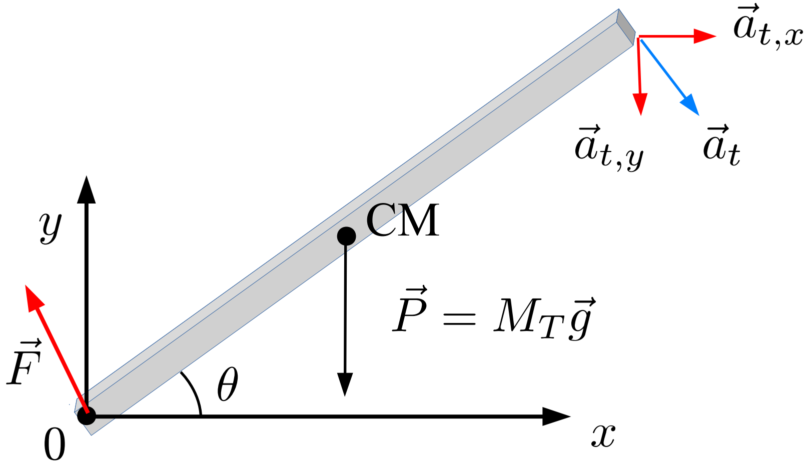
$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mg\ell\sin\theta = \frac{1}{2}Mg\ell\sin\theta_0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\omega\ell)^2 = 3g\ell\left(\sin\theta_0 - \sin\theta\right)}$$

OBS: Torque a partir da energia potencial

$$\vec{\tau} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta}\hat{z} = -\frac{1}{2}Mg\ell\cos\theta\,\hat{z}$$

Barra fina homogênea



Uma barra gira livremente por um eixo em sua extremidade. Calcule a força do eixo sobre a barra.

Força resultante sobre a barra:

$$\vec{F}_R = \vec{F} + \vec{P}$$

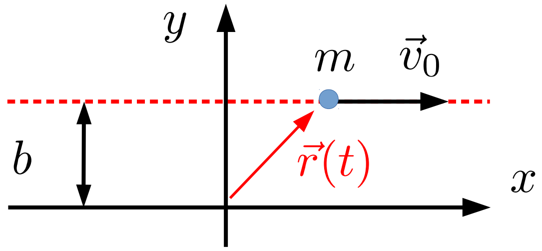
2ª lei de Newton:

$$\begin{aligned}\vec{F}_R &= M\vec{a}_{\mathrm{CM}} = M\left(\vec{a}_{\mathrm{cp}} + \vec{a}_t\right) = M\left(-\frac{1}{2}\ell\omega^2\hat{r} + \frac{1}{2}\ell\alpha\hat{\theta}\right) \\ &= M\left(-\frac{3}{2}g\left(\sin\theta_0 - \sin\theta\right)\hat{r} - \frac{3g}{4}\cos\theta\hat{\theta}\right)\end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F} &= Mg\left(-\frac{3}{2}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta\right)\hat{r} - \frac{3}{4}\cos\theta\hat{\theta} + \hat{y}\right) \\ &= \frac{3}{4}Mg\left[\left(3\sin\theta - 2\sin\theta_0\right)\cos\theta\hat{x} + \left(3\sin^2\theta + \frac{1}{3} - 2\sin\theta_0\sin\theta\right)\hat{y}\right]\end{aligned}}$$

Momento angular de uma partícula livre



Posição: $\vec{r}\,(t) = (x_0 + v_0 t)\,\hat{x} + b\hat{y}$

Velocidade: $\vec{v}\,(t) = v_0\hat{x}$

Momento angular: $\vec{L}\,(t) = \vec{r}\,(t) \times \vec{p}\,(t) = -m v_0 b\hat{z}$

O momento angular é constante no tempo porque a força é nula e, consequentemente, o torque é nulo. Em que outra situações situações o momento angular de uma partícula é conservado?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = 0 = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_R, \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_R = \vec{0} \text{ ou } \vec{F}_R \parallel \vec{r} \quad \text{(força central)}$$

Força central

Relacione o raio da trajetória R com a velocidade angular ω e com a tração T no fio na situação abaixo onde um agente externo é livre para puxar/soltar a corda abaixo do furo. (Desconsidere quaisquer forças de atrito.)

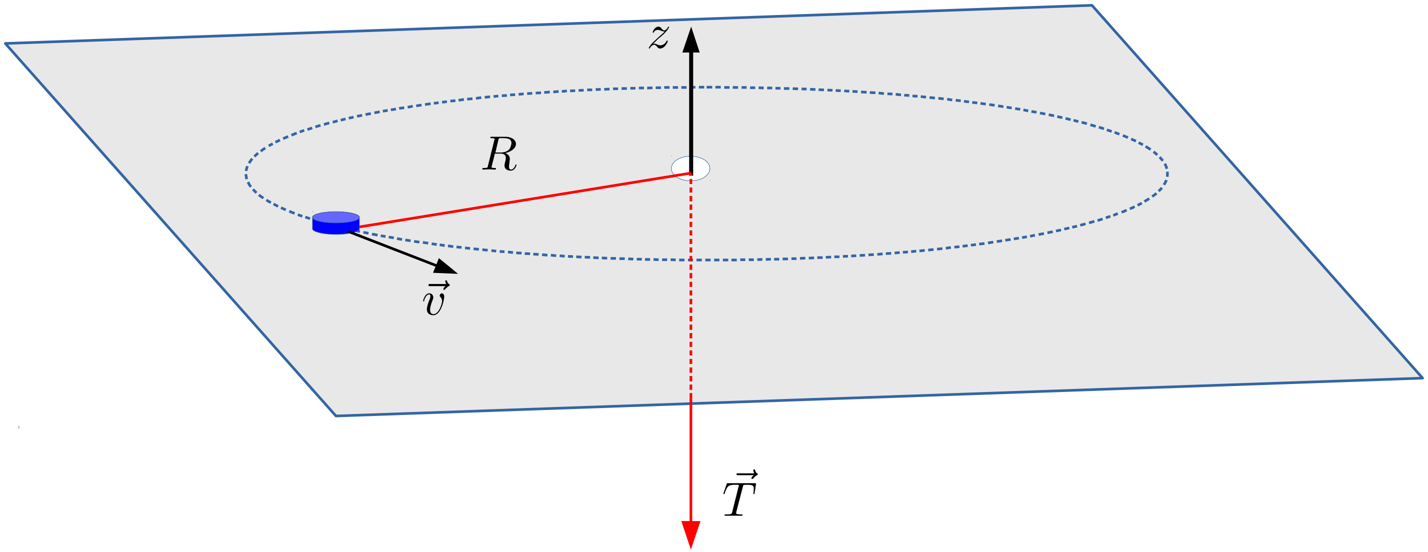
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = I\omega\hat{z} = \text{cte}$$

Como $\quad I = mR^2$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega R^2 = \text{cte}}$$

Como $\quad T = m\omega^2 R$

$$\Rightarrow \quad \boxed{TR^3 = \text{cte}}$$

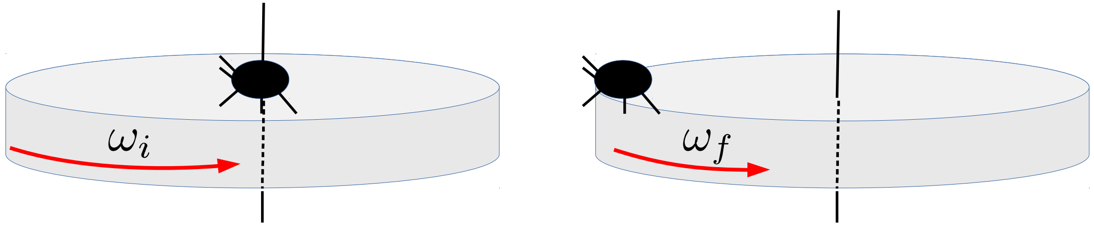


Sistemas na ausência de torques externos

Ex.: Um inseto se desloca sobre um disco homogêneo que gira sem atrito em torno de um eixo fixo que o atravessa pelo centro. Sendo que o inseto estava inicialmente no centro do disco, determine a nova velocidade angular do sistema disco+inseto. Qual a variação da energia cinética? De/pra onde ela foi? Descreva a força que o eixo exerceu sobre o disco.

Torque resultante é nulo.

Momento angular conservado



$$L_A = I_{\text{disco}}\omega_i = L_D = (I_{\text{disco}} + I_{\text{inseto}})\omega_f$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_f = \frac{\omega_i}{1 + I_{\text{inseto}}/I_{\text{disco}}}}$$

Análogo à uma colisão perfeitamente inelástica

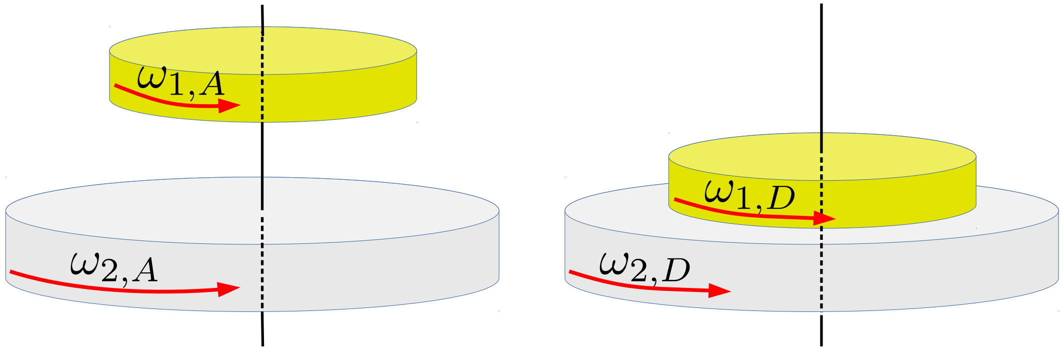
Variação da energia:

$$\boxed{\frac{\Delta E}{E_{c,i}} = \frac{\frac{1}{2}I_f\omega_f^2}{\frac{1}{2}I_i\omega_i^2} - 1 = -\frac{I_{\text{inseto}}}{I_{\text{inseto}} + I_{\text{disco}}}}$$

No início, o CM do sistema está sobre o eixo de rotação. Ao final, o CM gira em torno do de eixo que exerce a força centrípeta correspondente. Durante o processo, a força centrípeta foi variável admitindo que o CM se afastasse do eixo. O que mudaria caso o disco girasse sobre uma superfície sem atrito?

Sistemas na ausência de torques externos

Ex.: Dois discos giram em torno de um mesmo eixo sem atrito como ilustrado abaixo. O disco de cima escorrega sem atrito e colide com o segundo. Por atrito entre suas superfícies, ambos giram com a mesma velocidade angular ao final. Determine a velocidade angular final.



Torque resultante é nulo.

Momento angular conservado

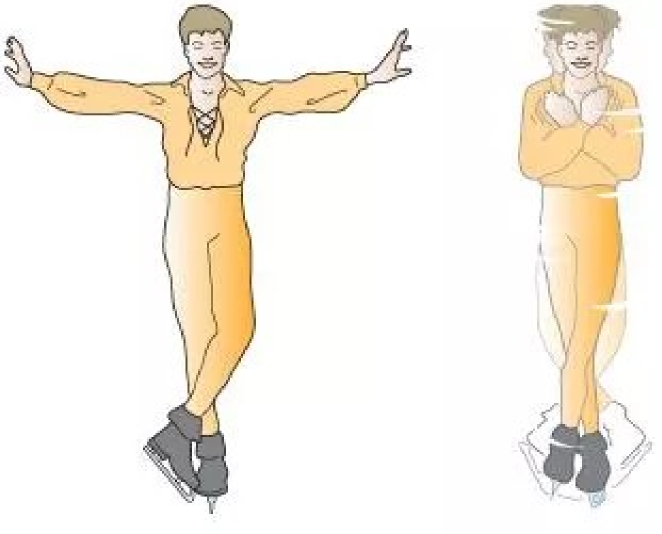
$$L_A = I_1\omega_{1,A} + I_2\omega_{2,A} = L_D = (I_1 + I_2)\omega_D$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_D = \frac{I_1\omega_{1,A} + I_2\omega_{2,A}}{I_1 + I_2}}$$

Análogo à uma colisão perfeitamente inelástica

Exercício de revisão

Um patinador está girando com os braços abertos sobre uma superfície muito lisa. Ele então encolhe seus braços a fim de diminuir o tempo de rotação. Neste processo, a energia cinética

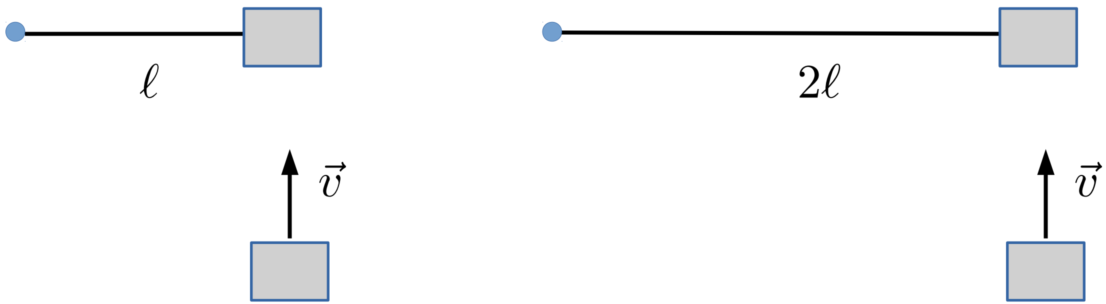


1) Aumenta (de onde veio?)
2) Diminui (para onde foi?)
3) Não muda

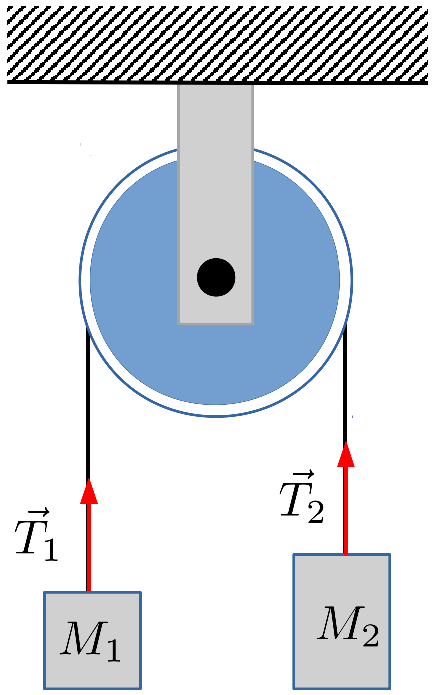
Exercício de revisão

Considere a situação ilustrada na figura da esquerda: sobre uma superfície plana perfeitamente lisa dois pequenos objetos idênticos se chocam sendo que um deles está preso por uma corda (de massa desprezível e inextensível) fixa a um pivô. A situação na outra figura é idêntica exceto pelo fato de que a corda é duas vezes mais longa. A velocidade angular na segunda situação em relação à primeira é

1) A mesma
2) O dobro
3) A metade
4) 4 vezes maior
5) 4 vezes menor
6) Nenhuma das anteriores



Máquina de Atwood



Forças sobre as massas

$$M_1 a = M_1 g - T_1$$

$$M_2 a = T_2 - M_2 g$$

Torque sobre a roldana

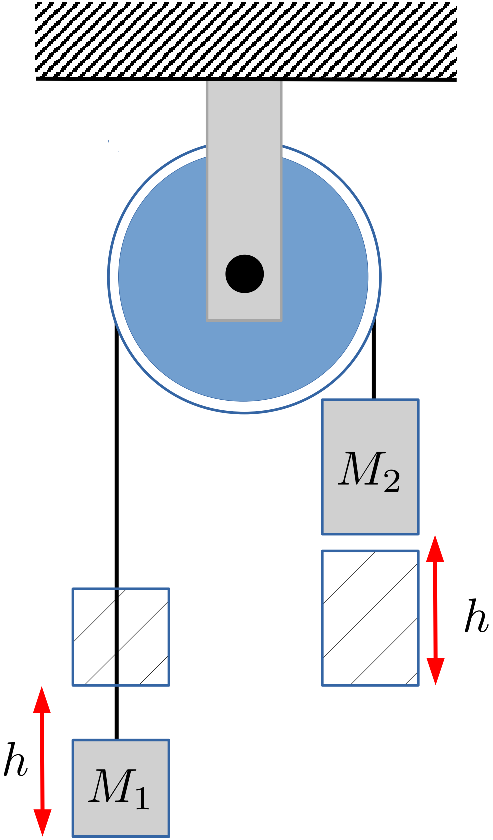
$$I\alpha = (T_1 - T_2)R$$

A corda não desliza
sobre a roldana: $a = \alpha R$

Somando as 3 equações:

$$\Rightarrow \quad a = \frac{(M_1 - M_2)\, g}{M_1 + M_2 + I/R^2} = \frac{\text{fora resultante}}{\text{massa efetiva}}$$

Máquina de Atwood



Variação da energia potencial:

$$\Delta U = M_1 g \Delta h_1 + M_2 g \Delta h_2 = -\left(M_1 - M_2\right) gh$$

Variação da energia cinética:

$$\Delta E_{c,1} = \frac{1}{2} M_1 \left(v_{1,f}^2 - v_{1,i}^2\right) = \frac{1}{2} M_1 \left(2ha\right) = M_1 gh \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + I/R^2}\right)$$

$$\Delta E_{c,2} = \frac{1}{2} M_2 \left(v_{2,f}^2 - v_{2,i}^2\right) = \frac{1}{2} M_2 \left(2ha\right) = M_2 gh \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + I/R^2}\right)$$

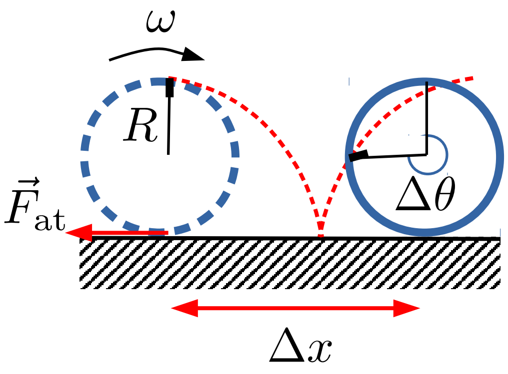
$$\Delta E_{c,\circ} = \frac{1}{2} I \left(\omega_{1,f}^2 - \omega_{1,i}^2\right) = \frac{1}{2} I \left(2\Delta\theta\alpha\right) = \frac{I}{R^2} gh \left(\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2 + I/R^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_c = \left(M_1 - M_2\right) gh$$

Variação da energia mecânica: $\Delta(U + E_c) = 0$

Rolamento sem deslizar

Roda sobre um plano horizontal:



Forças sobre a roda:

$$\vec{F}_R = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_{\mathrm{at}} = \vec{F}_{\mathrm{at}} = m\vec{a}_{\mathrm{CM}}$$

$$\Rightarrow \quad F_{\mathrm{at}} = -ma_{\mathrm{CM}}$$

Condições de não-deslizamento:

$$\Delta x = R\Delta\theta$$

$$v_{\mathrm{CM}} = R\omega$$

$$a_{\mathrm{CM}} = R\alpha$$

Torque sobre a roda
(em relação ao CM):

$$\tau_R = RF_{\mathrm{at}} = I\alpha = Ia_{\mathrm{CM}}/R$$

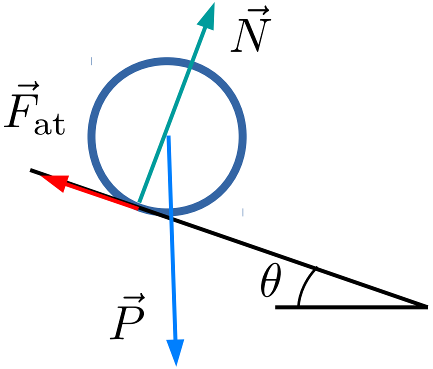
$$\Rightarrow \quad F_{\mathrm{at}} = -ma_{\mathrm{CM}} = -mF_{\mathrm{at}}\frac{R^2}{I}, \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)F_{\mathrm{at}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{\mathrm{at}} = 0, \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{CM}} = \mathrm{cte}$$

Na prática, há deformações da roda e da superfície e outras fontes de dissipação.

Rolamento sem deslizar

Roda sobre um plano inclinado:



Forças sobre a roda:

$$N = P\cos\theta$$

$$ma = P\sin\theta - F_{\rm at}$$

Torque sobre a roda
(em relação ao CM):

$$\tau_R = RF_{\rm at} = I\alpha = Ia/R$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{g\sin\theta}{1 + I/(mR^2)}$$

Condições de não-deslizamento:

$$\Delta x = R\Delta\theta$$

$$v = R\omega$$

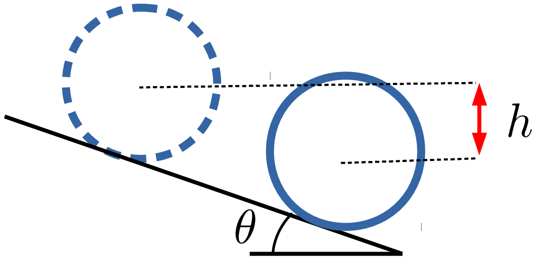
$$a = R\alpha$$

$$F_{\rm at} \leq \mu N$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta \leq \mu\left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)$$

Rolamento sem deslizar

Roda sobre um plano inclinado:



Variação da energia cinética

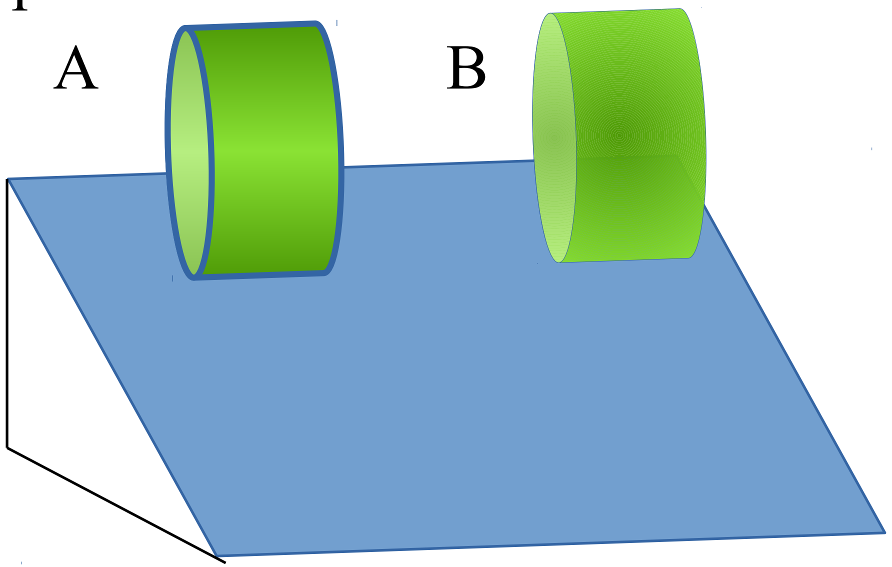
$$
\begin{aligned}
\Delta E_c &= \Delta E_{c,T} + \Delta E_{c,R} = \frac{1}{2} m \left(v_{f,\mathrm{CM}}^2 - v_{i,\mathrm{CM}}^2\right) + \frac{1}{2} I \left(\omega_f^2 - \omega_i^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right)\left(v_{f,\mathrm{CM}}^2 - v_{i,\mathrm{CM}}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right)(2\Delta S a) = mgh
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\left(U + E_c\right) = 0$$

Energia mecânica é conservada

Exercício de revisão

Dois cilindros de massas e dimensões iguais inicialmente parados descem, sem deslizar, um plano inclinado. A massa do cilindro A está mais concentrada nas extremidades enquanto a do cilindro B está mais concentrada no centro. Qual desce mais rápido?

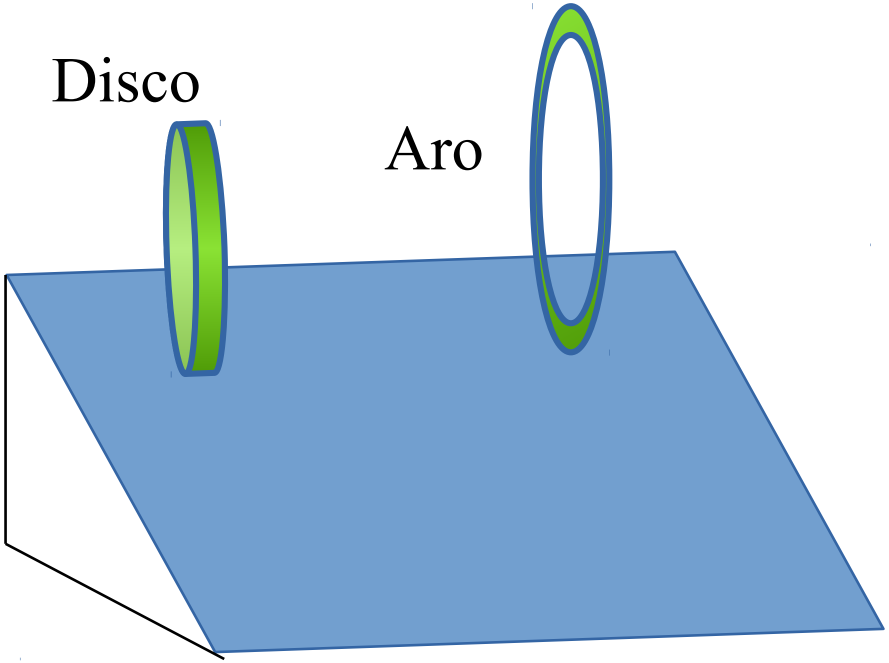


1) A
2) B
3) São igualmente rápidos

Exercício de revisão

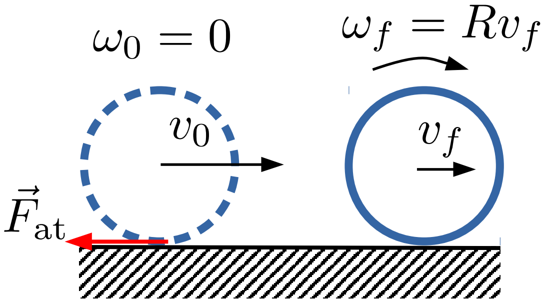
Um disco e um aro homogêneos inicialmente parados descem, sem deslizar, um plano inclinado. O aro é mais lento que o disco quando

1) $M_{disco} = M_{aro}$
2) $R_{disco} = R_{aro}$
3) $M_{disco} = M_{aro}$ e $R_{disco} = R_{aro}$
4) O aro é sempre mais lento



Rolamento com deslizar

Analise o movimento de uma bola de boliche

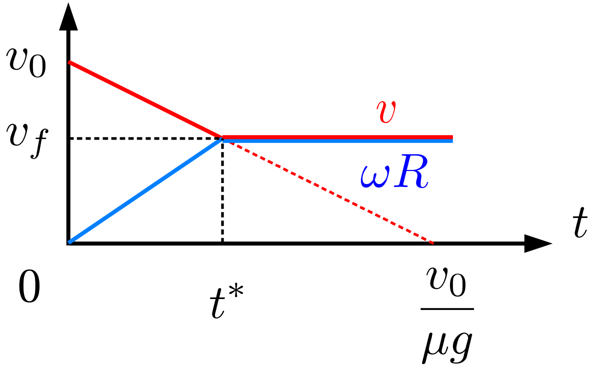


Enquanto deslizando:

$$-F_{\text{at}} = ma = -\mu N, \;\Rightarrow\; a = -\mu g$$

$$I\alpha = RF_{\text{at}}, \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\mu R m g}{I}$$

Logo, $\begin{cases} v(t) = v_0 - \mu g t \\ \omega(t) = \frac{\mu R m g}{I} t \end{cases}$



Tempo até a cessação do deslizamento

$$v(t^*) = R\omega(t^*), \;\Rightarrow\; t^* = \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)\frac{v_0}{\mu g}$$

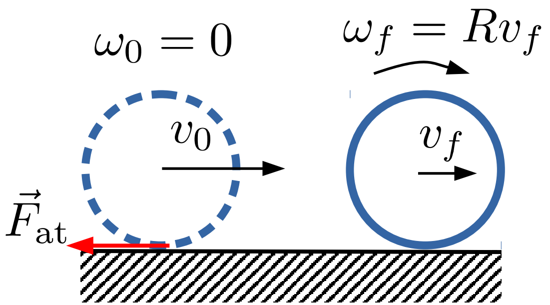
Velocidade final:

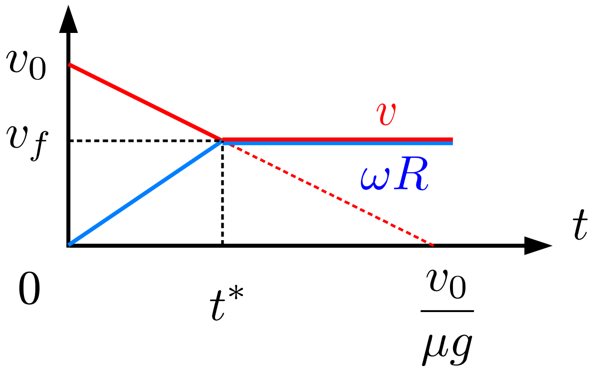
$$v_f = v(t^*) = \left(\frac{1}{1+\gamma}\right) v_0$$

onde $\gamma = \dfrac{I}{mR^2}$

Distância percorrida enquanto deslizando: $\Delta S = \dfrac{v_0^2 - v_f^2}{2a} = \dfrac{\gamma\,(2+\gamma)}{(1+\gamma)^2}\left(\dfrac{v_0^2}{\mu g}\right)$

Rolamento com deslizar





Variação da Energia cinética:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right)v_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)E_{c,0}$$

Trabalho da força de atrito:

onde $\gamma = \dfrac{I}{mR^2}$

$$W_{F_{at}} = -F_{at}\Delta S = -\frac{\gamma\,(2+\gamma)}{(1+\gamma)^2}E_{c,0}$$

Trabalho do torque de atrito:

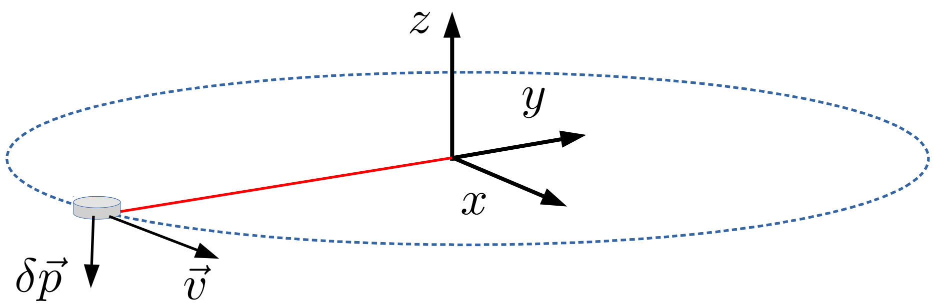
$$W_{\tau_{at}} = \tau_{at}\Delta\theta = RF_{at}\left(\frac{\omega_f^2}{2\alpha}\right) = \frac{Iv_f^2}{2R^2} = \frac{\gamma}{(1+\gamma)^2}E_{c,0}$$

Trabalho total: $W_{\tau_{at}} + W_{F_{at}} = -\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)E_{c,0} = \Delta E_c$

Exercício de revisão

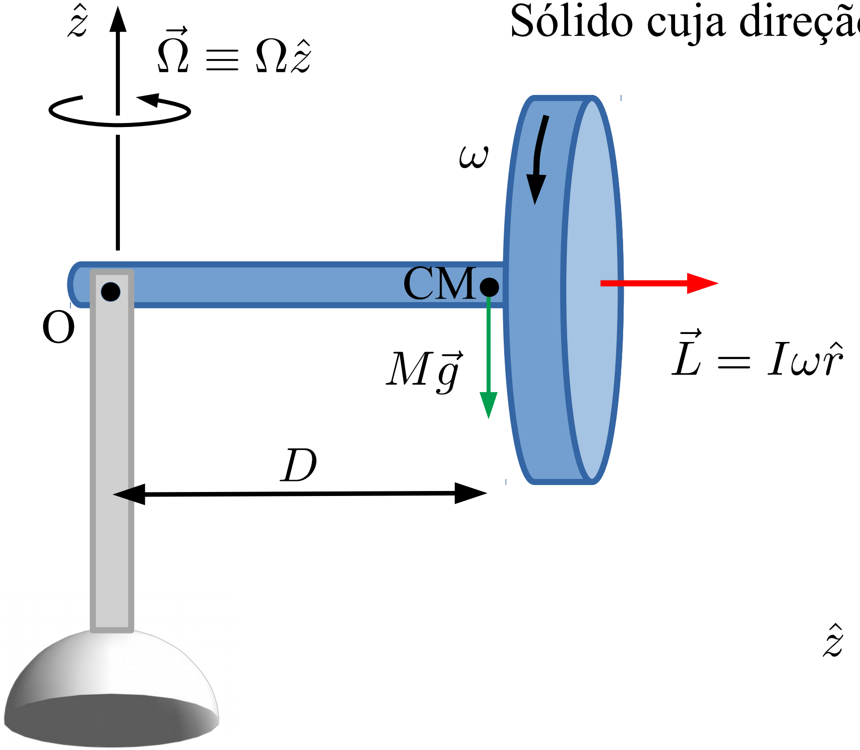
Uma criança rotaciona uma pedrinha amarrada a um barbante como esquematizado abaixo. No instante indicado pela figura, um pequeno impulso para baixo é dado à pedrinha. O momento angular varia em que direção?

1) X
2) -X
3) Y
4) -Y
5) Z
6) -Z
7) Nenhuma das anteirores



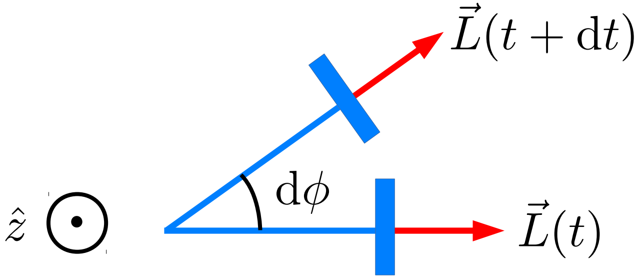
Giroscópio

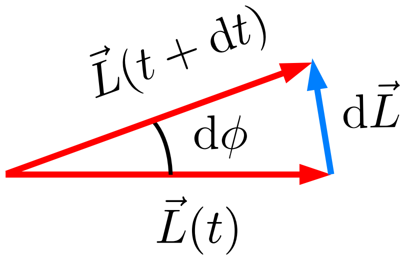
Sólido cuja direção do eixo de rotação não é fixa



Torque em relação à O:

$$\vec{\tau}_R = MgD\hat{\theta} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}, \Rightarrow \mathrm{d}\vec{L} \perp \vec{L}$$

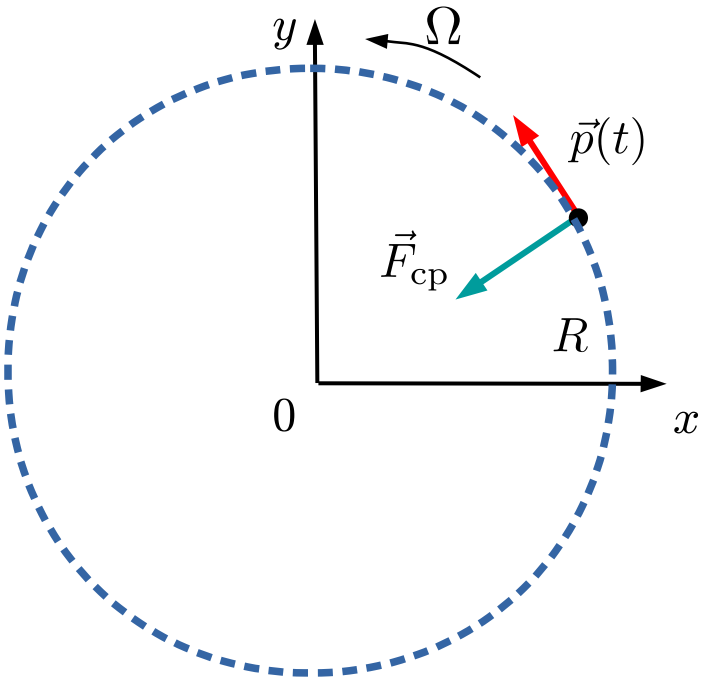


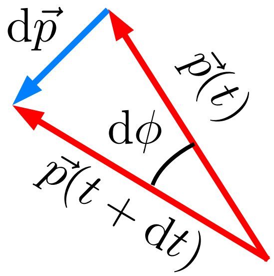


Precessão do eixo: $$\mathrm{d}\phi = \frac{\left|\mathrm{d}\vec{L}\right|}{\left|\vec{L}\right|} = \frac{\left|\vec{\tau}_R\right|\mathrm{d}t}{\left|\vec{L}\right|}, \Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\left|\vec{\tau}_R\right|}{\left|\vec{L}\right|} = \frac{MgD}{I\omega}}$$

Giroscópio

Sólido cuja direção do eixo de rotação não é fixa





Analogia com o movimento circular uniforme

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{\rm cp} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\vec{p} \perp \vec{p}$$

Precessão do momento:

$$\mathrm{d}\phi = \frac{|\mathrm{d}\vec{p}|}{|\vec{p}|} = \frac{\left|\vec{F}_{\rm cp}\right| \mathrm{d}t}{|\vec{p}|}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{mv^2/R}{mv} = \frac{v}{R}}$$

A partícula cai em direção ao centro apenas se o momento inicial for nulo.
Analogamente, o giroscópio só cai apenas se o momento angular inicial for nulo.