Cinemática

Ramo da Física que estuda/descreve o movimento da matéria.

O nosso objetivo é estudar/compreender os conceitos de posição, velocidade, e aceleração (e outros conceitos correlatos) que nos permitem classificar os diversos tipos de movimento.

Além disso, esses conceitos são fundamentais para entender como forças afetam o movimento da matéria.

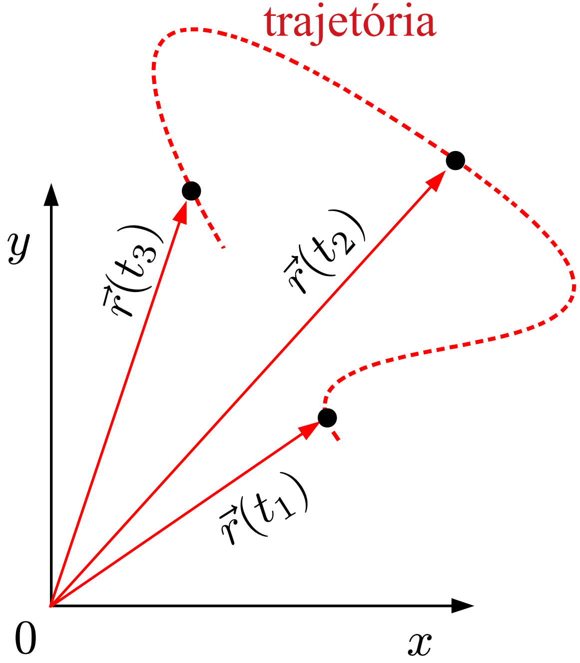
Posição

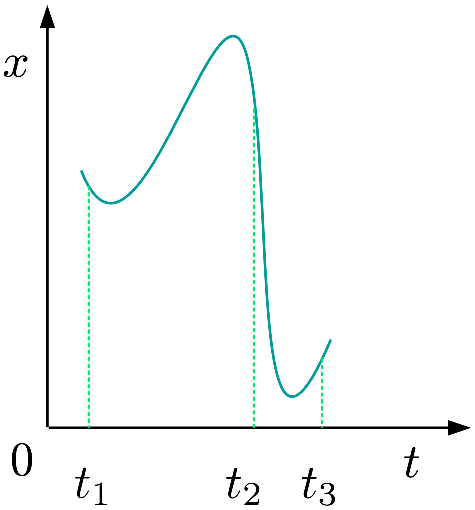
Grandeza vetorial descrevendo a posição no tempo de um ponto (material ou não) em um sistema de coordenadas.

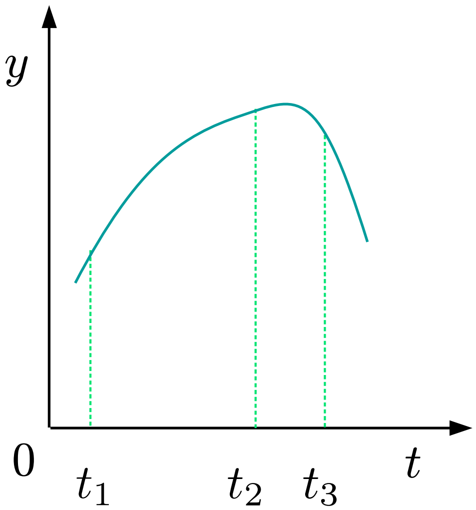
$$\vec{r} \equiv \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$[\vec{r}] = \text{comprimento}$$

Exemplo:





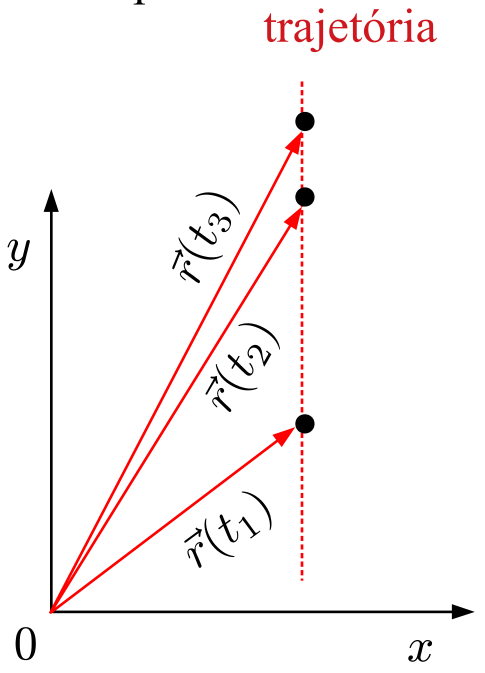


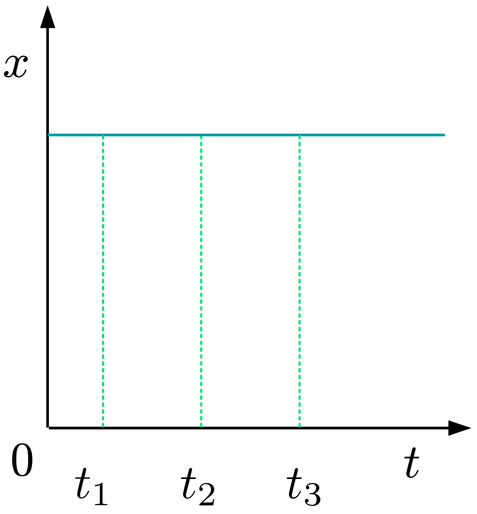
Posição

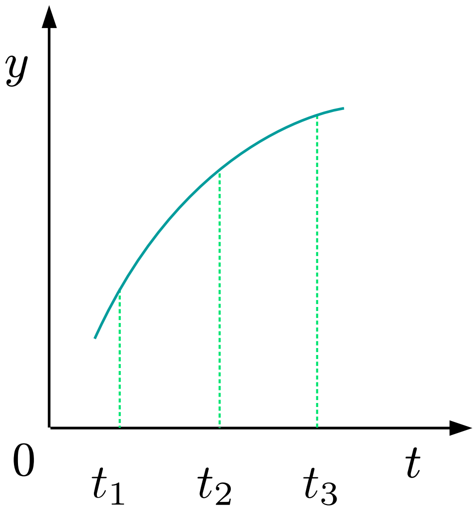
Grandeza vetorial descrevendo a posição no tempo de um ponto (material ou não) em um sistema de coordenadas.

Exemplo:

$$\vec{r} \equiv \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$



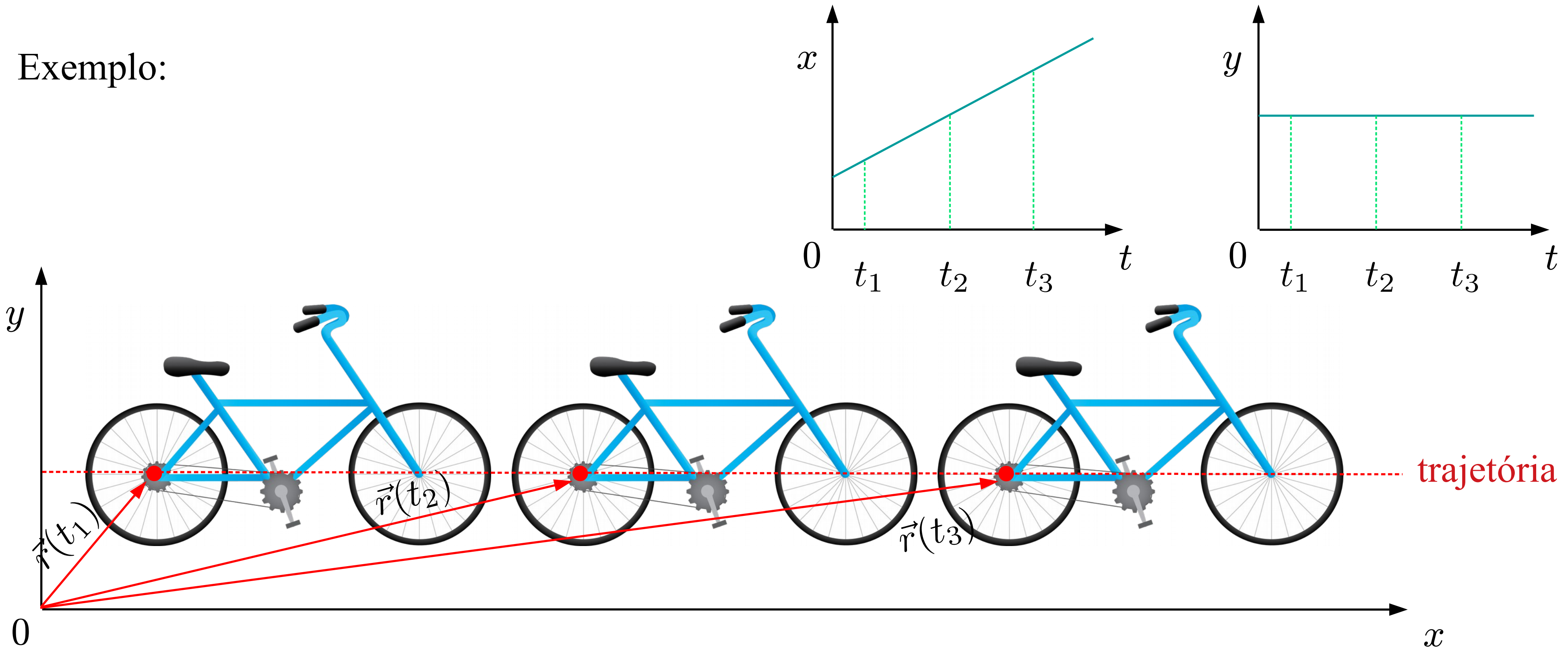




Posição

Grandeza vetorial descrevendo a posição no tempo de um ponto (material ou não) em um sistema de coordenadas.

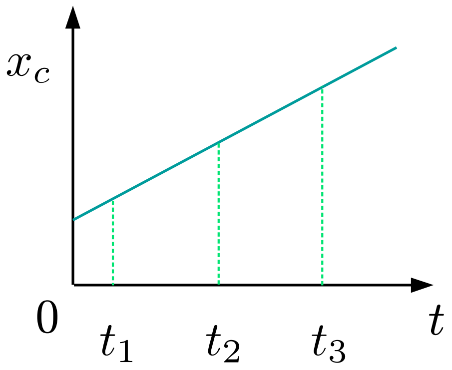
Exemplo:

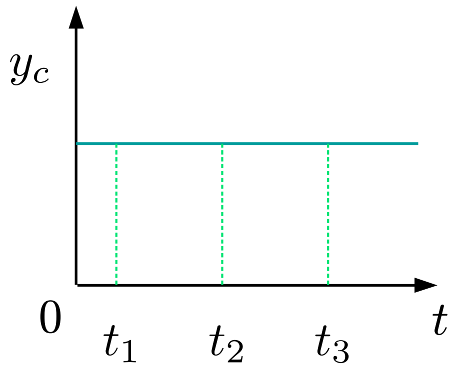


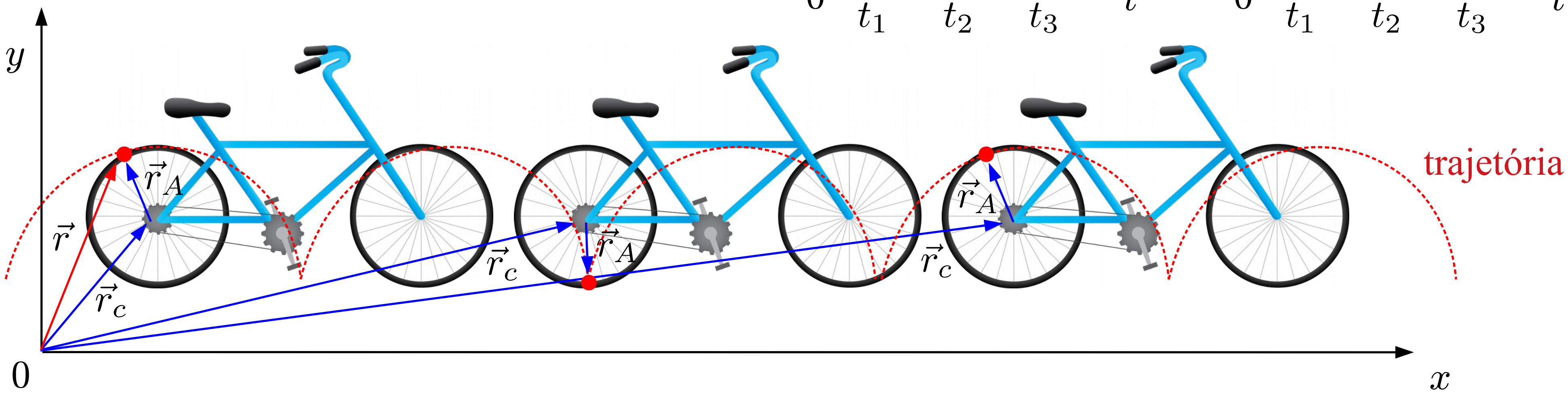
Posição

Grandeza vetorial descrevendo a posição no tempo de um ponto (material ou não) em um sistema de coordenadas.

Exemplo: $\vec{r}(t) = \vec{r}_c(t) + \vec{r}_A(t)$



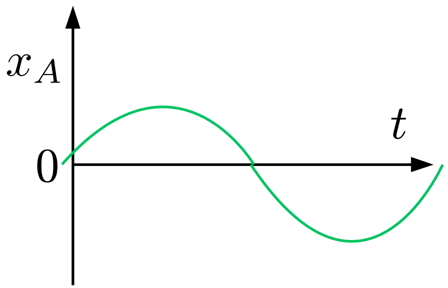


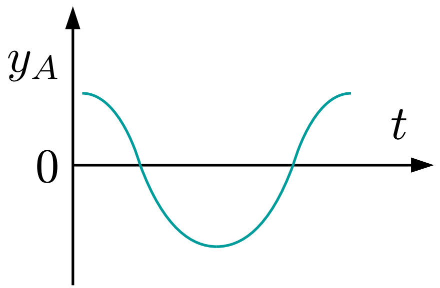


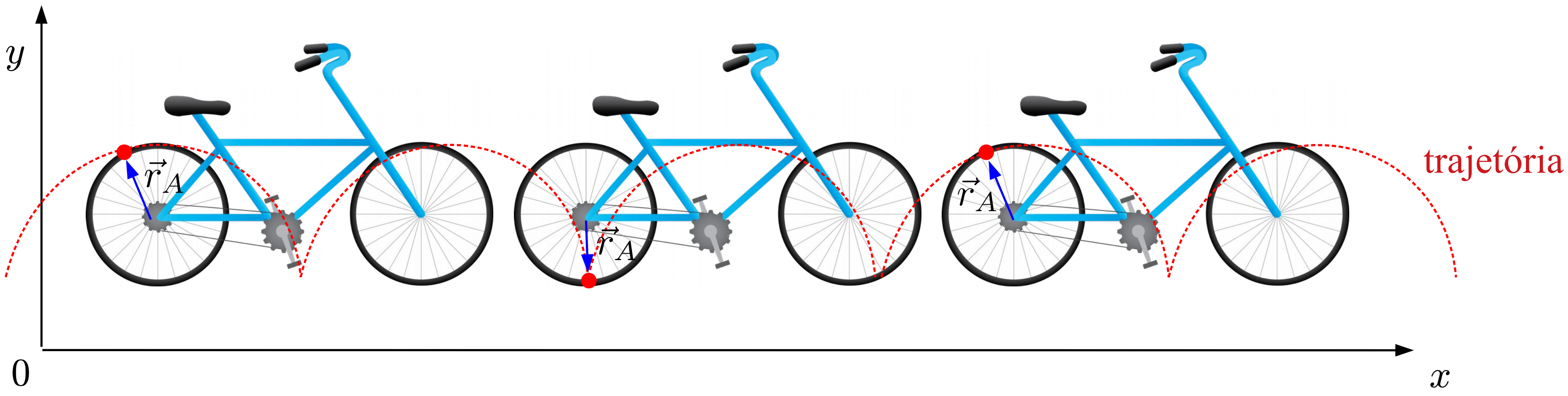
Posição

Grandeza vetorial descrevendo a posição no tempo de um ponto (material ou não) em um sistema de coordenadas.

Exemplo: $\vec{r}(t) = \vec{r}_c(t) + \vec{r}_A(t)$



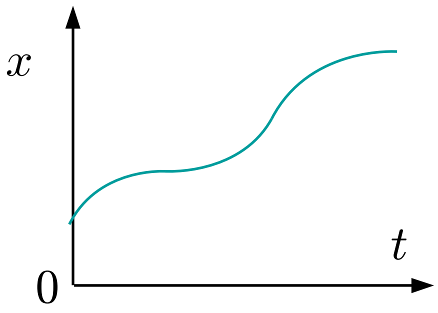


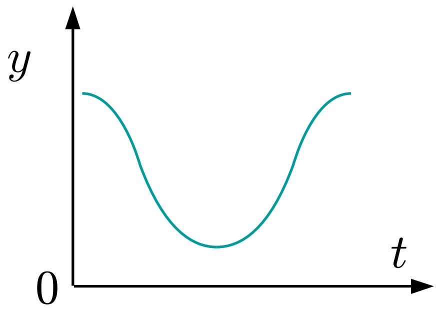


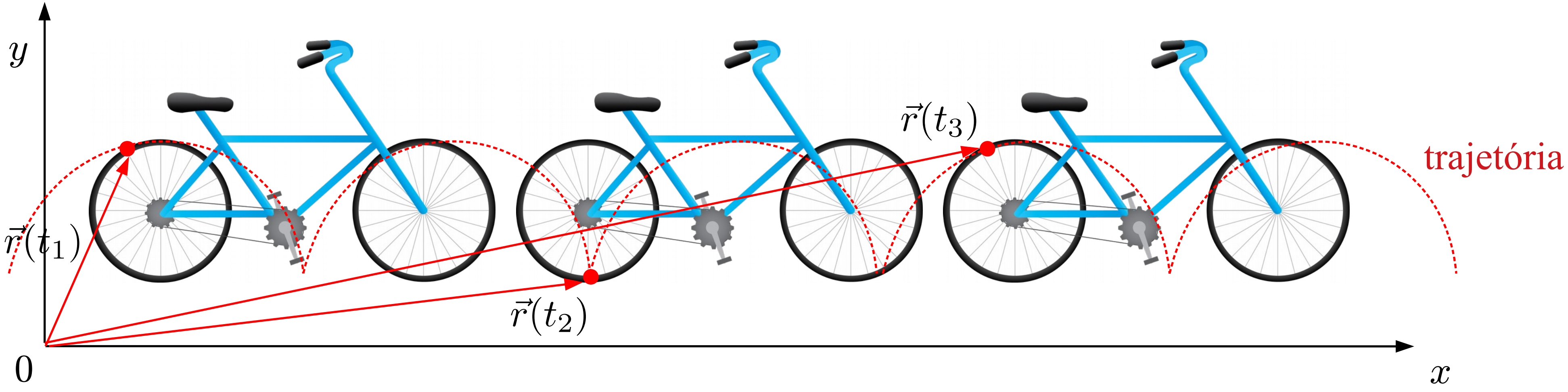
Posição

Grandeza vetorial descrevendo a posição no tempo de um ponto (material ou não) em um sistema de coordenadas.

Exemplo: $\vec{r}(t) = \vec{r}_c(t) + \vec{r}_A(t)$



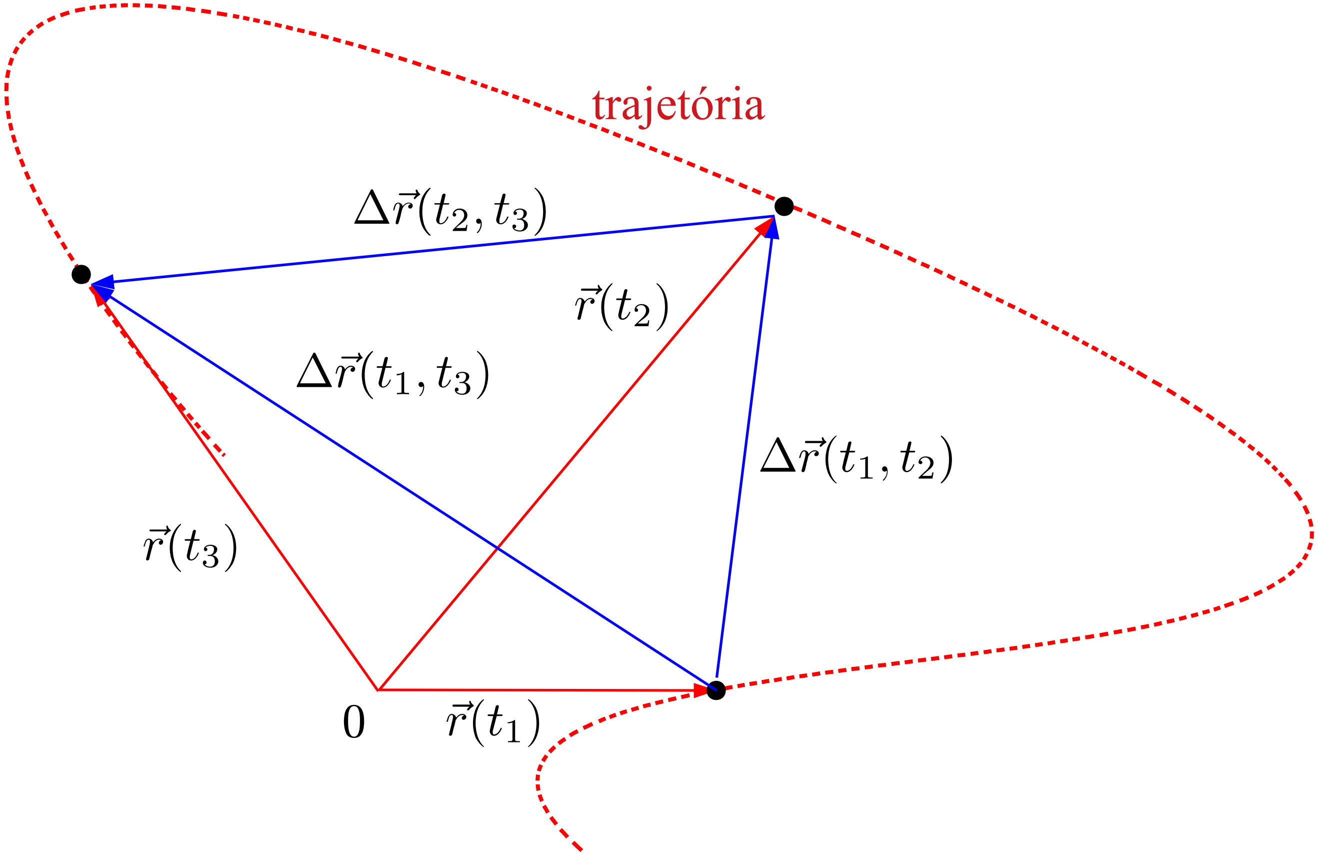




Deslocamento

Diferença do vetor posição entre dois intervalos de tempo: $\Delta\vec{r} \equiv \Delta\vec{r}(t_1, t_2) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$

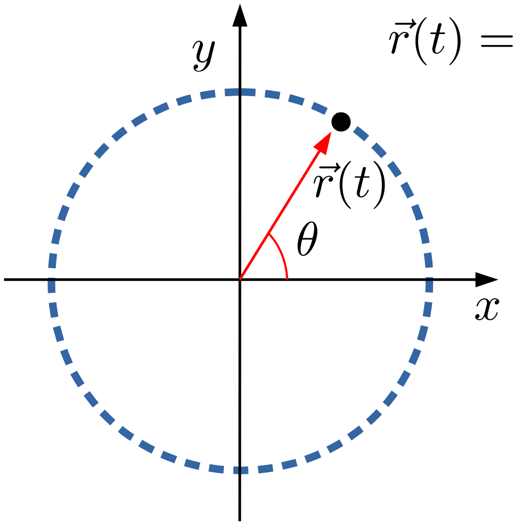
(função vetorial de 2 variáveis)



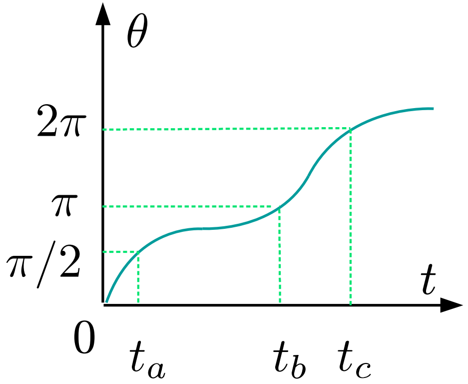
Deslocamento

Diferença do vetor posição entre dois intervalos de tempo: $\Delta\vec{r} \equiv \Delta\vec{r}(t_1, t_2) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$
(função vetorial de 2 variáveis)

Exemplo: Trajetória circular de raio R.



$$\vec{r}(t) = R\cos(\theta(t))\hat{x} + R\sin(\theta(t))\hat{y}$$



$$\vec{r}(0) = R\hat{x} \quad \vec{r}(t_b) = -R\hat{x}$$

$$\vec{r}(t_a) = R\hat{y} \quad \vec{r}(t_c) = R\hat{x}$$

$$\Delta\vec{r}(0, t_a) = R\hat{y} - R\hat{x}$$

$$\Delta\vec{r}(t_a, t_b) = -R\hat{x} - R\hat{y}$$

$$\Delta\vec{r}(0, t_b) = -2R\hat{x}$$

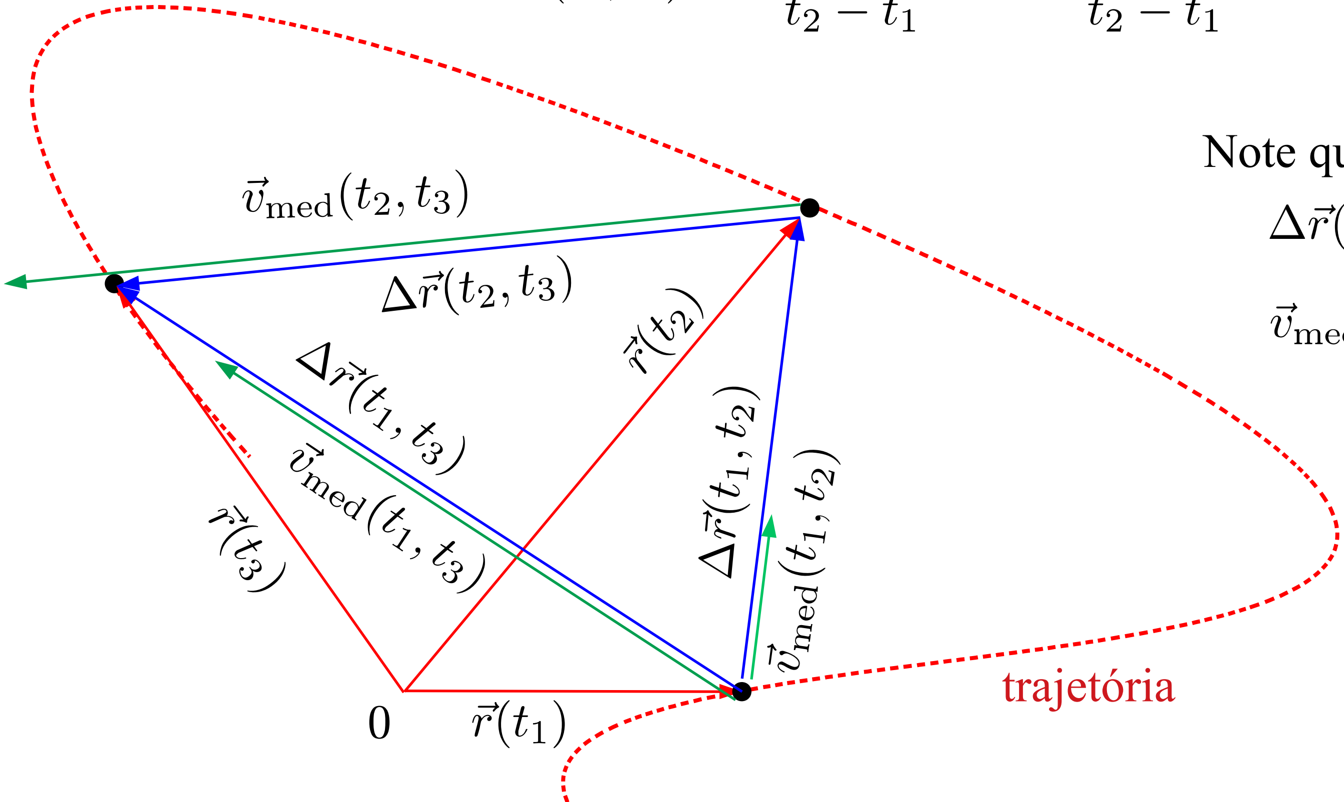
$$\Delta\vec{r}(0, t_c) = \vec{0} = (0, 0)$$

Note que, entre 0 e t_c, o ponto percorreu uma trajetória de $2\pi R$ de comprimento, e o deslocamento é nulo.

Velocidade média

Razão entre o vetor deslocamento e o intervalo de tempo correspondente:

$$\vec{v}_{\text{med}}(t_1, t_2) \equiv \frac{\Delta\vec{r}(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{(função vetorial de 2 variáveis)}$$



Note que

$$\Delta\vec{r}(t_1, t_3) = \Delta\vec{r}(t_1, t_2) + \Delta\vec{r}(t_2, t_3)$$

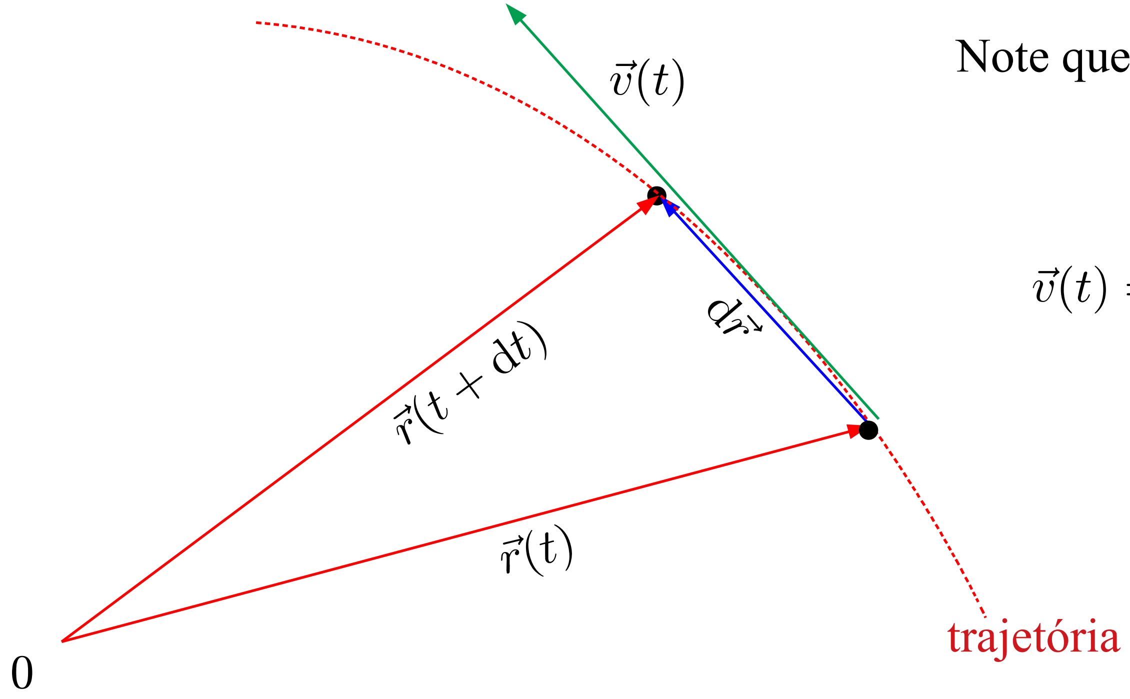
$$\vec{v}_{\text{med}}(t_1, t_3) \neq \vec{v}_{\text{med}}(t_1, t_2) + \vec{v}_{\text{med}}(t_2, t_3)$$

$$[\vec{v}_{\text{med}}] = \frac{\text{comprimento}}{\text{tempo}}$$

Velocidade (ou velocidade instantânea)

Velocidade média no limite de intervalo de tempo infinitesimal.

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \vec{v}_{\mathrm{med}}(t, t+\mathrm{d}t) = \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\mathrm{d}t) - \vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \quad \text{(função vetorial de 1 variável)}$$



Note que o deslocamento infinitesimal é $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}(t)\mathrm{d}t$

$\vec{v}$ é tangente à trajetória

$$\vec{v}(t) = (v_x, v_y, v_z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}\right)$$

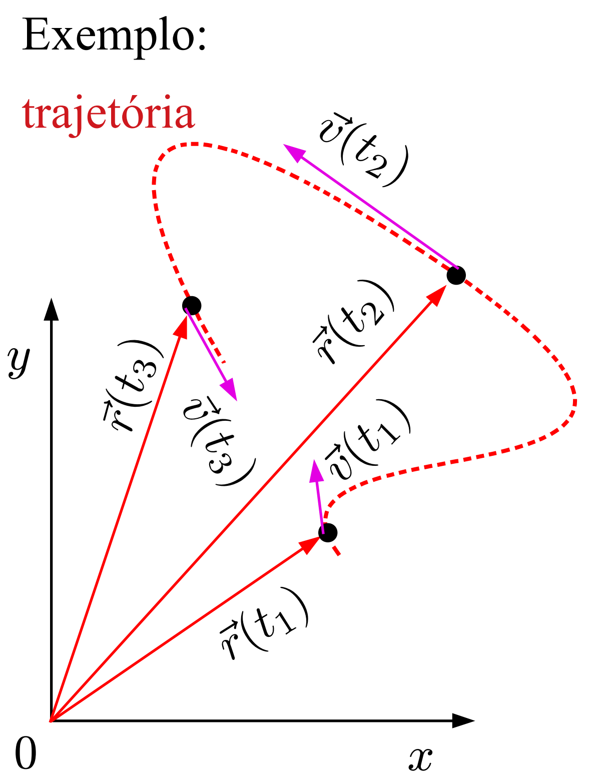
$$= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{z}$$

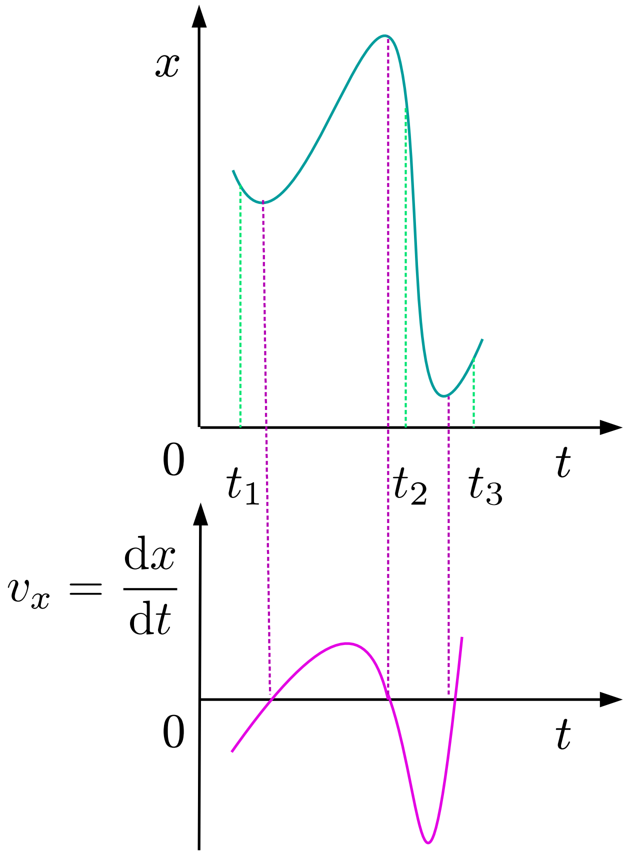
porque $\dfrac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\hat{z}}{\mathrm{d}t} = 0$

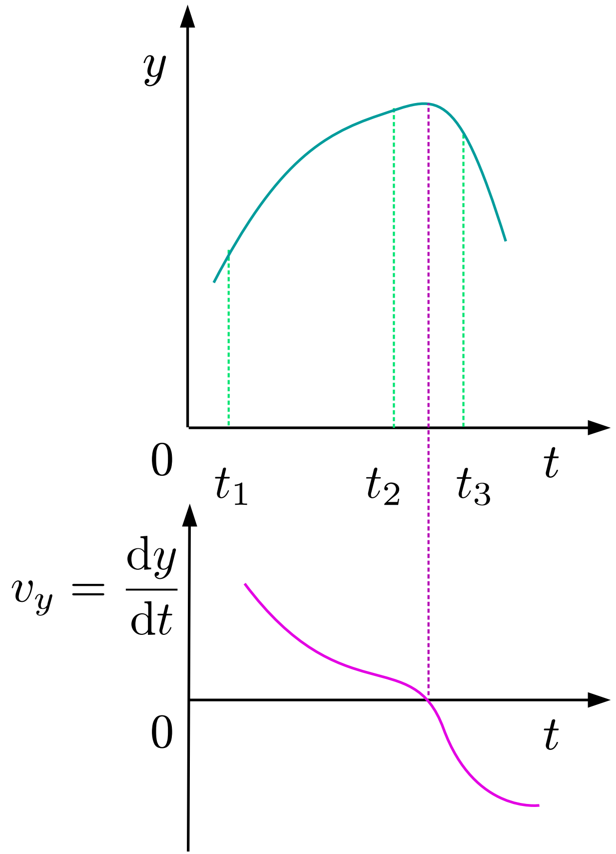
(direções cartesianas fixas no tempo)

Velocidade (ou velocidade instantânea)

Velocidade média no limite de intervalo de tempo infinitesimal.







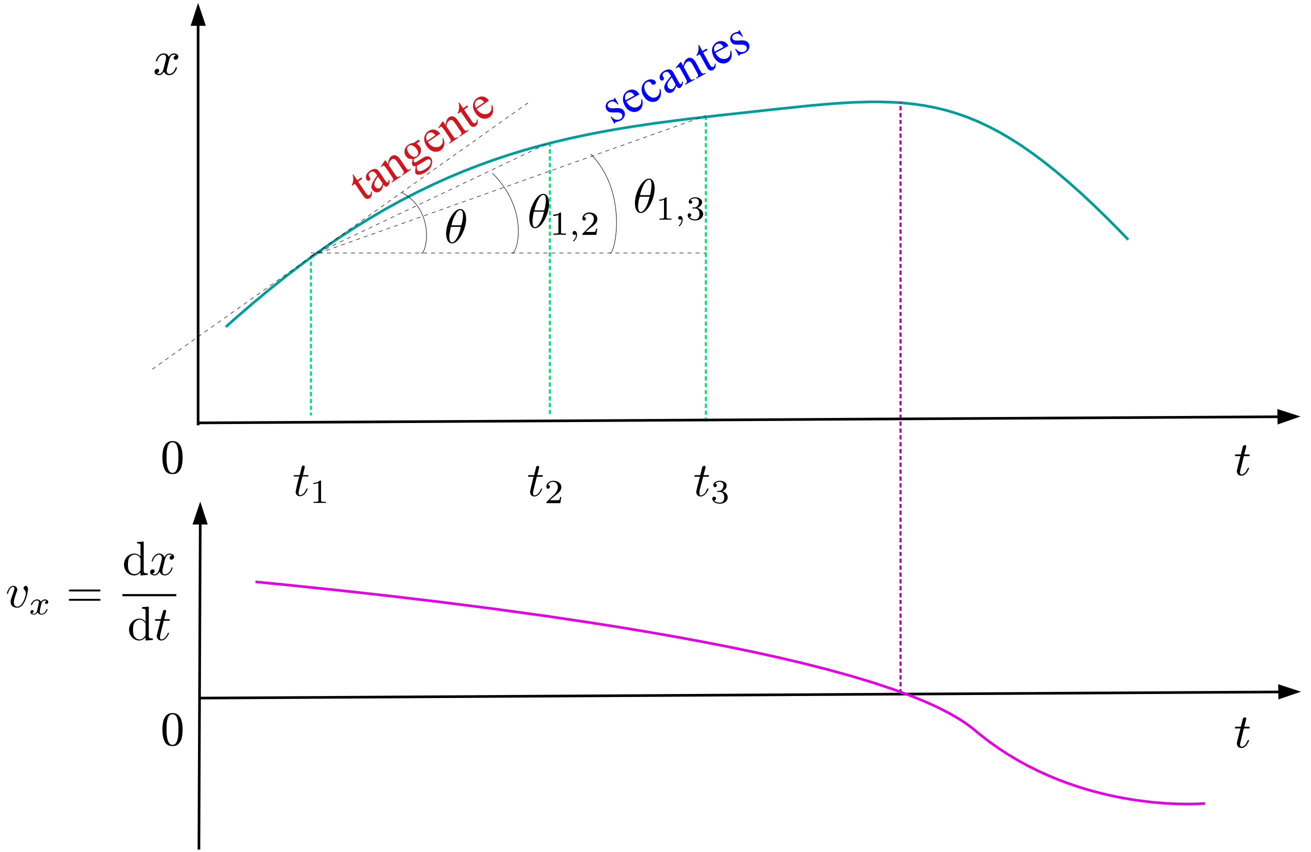
Velocidade e velocidade média

Interpretação gráfica:

$$v_{x,\mathrm{med}}(t_1, t_3) = \tan(\theta_{1,3}) = \frac{\Delta x_{3,1}}{\Delta t_{3,1}}$$

$$v_{x,\mathrm{med}}(t_1, t_2) = \tan(\theta_{1,2}) = \frac{\Delta x_{2,1}}{\Delta t_{2,1}}$$

$$v_x(t_1) = \tan(\theta) = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1}$$



Deslocamento e Velocidade

Conhecendo a posição, facilmente determinamos a velocidade:

$$\vec{v}(t) = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$$

E o problema inverso? Conhecendo a velocidade, como determinamos a posição?
Não podemos.

Exemplo:

Sejam $\vec{r}_1 = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$ e $\vec{r}_2 = \vec{v}_0 t$

ou seja, $\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2$

mas $\vec{v}_1 = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_2 = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_0$

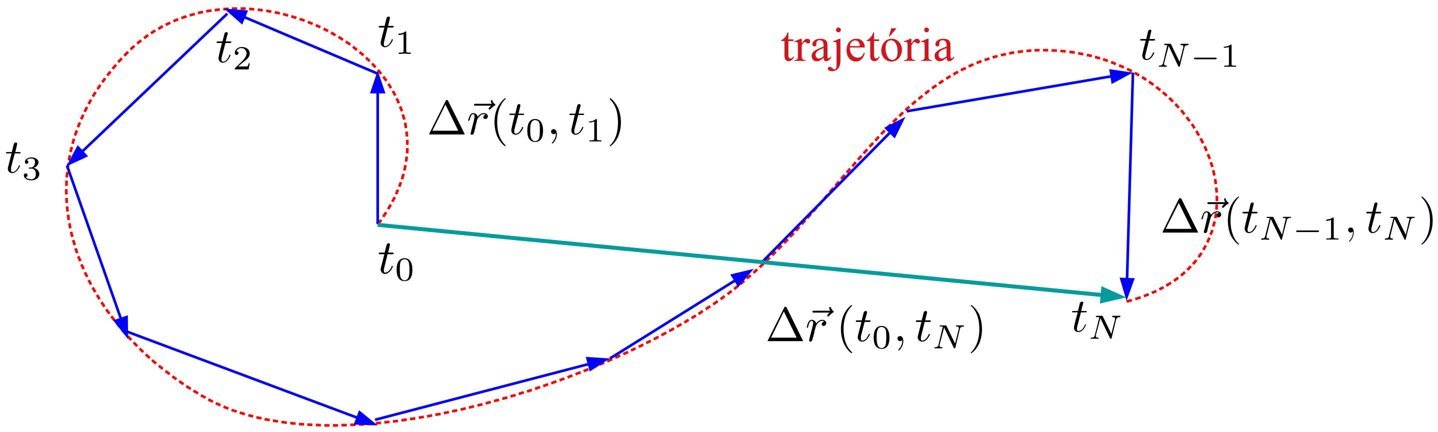
Deslocamento e Velocidade

Conhecendo a posição, facilmente determinamos a velocidade:

$$\vec{v}(t) = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$$

E o problema inverso? Conhecendo a velocidade, como determinamos a posição?
Não podemos. Entretanto, podemos determinar o deslocamento.

$$\Delta\vec{r}(t_0, t_N) = \Delta\vec{r}(t_1, t_2) + \cdots + \Delta\vec{r}(t_{N-1}, t_N) = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta\vec{r}(t_j, t_{j+1})$$



Posição e Velocidade

Conhecendo a posição, facilmente determinamos a velocidade:

$$\vec{v}(t) = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$$

E o problema inverso? Conhecendo a velocidade, como determinamos a posição?
Não podemos. Entretanto, podemos determinar o deslocamento.

$$\Delta\vec{r}(t_0, t_N) = \Delta\vec{r}(t_1, t_2) + \cdots + \Delta\vec{r}(t_{N-1}, t_N) = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta\vec{r}(t_j, t_{j+1})$$

Queremos a velocidade instantânea. Logo, intervalos infinitesimais: $t_{j+1} - t_j = \mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty} \frac{t_N - t_0}{N}$

$$\Delta\vec{r}(t_0, t_N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta\vec{r}(t_j, t_{j+1}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N-1} \vec{v}(t_j)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_N} \vec{v}(t)\mathrm{d}t$$

Ou seja: $\boxed{\vec{r}(t_f) = \vec{r}(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \vec{v}(t)\mathrm{d}t}$

Posição e Velocidade

É importante notar que essa única equação vetorial

$$\vec{r}\,(t_f) = \vec{r}\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \vec{v}(t)\mathrm{d}t = \left(x\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v_x(t)\mathrm{d}t, y\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v_y(t)\mathrm{d}t, z\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v_z(t)\mathrm{d}t\right)$$

correspondente a 3 (caso o problema esteja em 3 dimensões espaciais) equações escalares

$$x\,(t_f) = x\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v_x(t)\mathrm{d}t$$

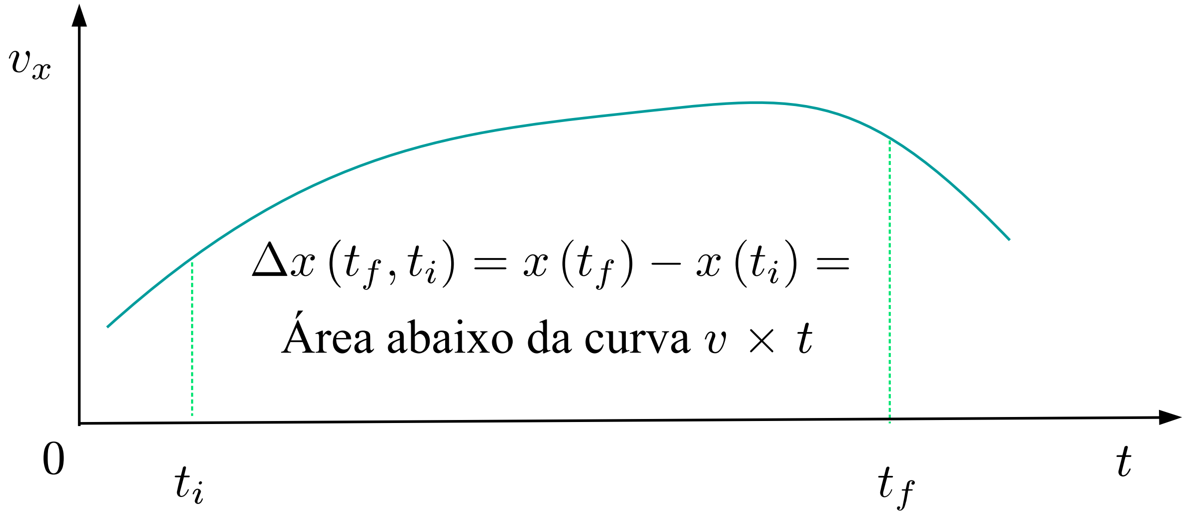
$$y\,(t_f) = y\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v_y(t)\mathrm{d}t$$

$$z\,(t_f) = z\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v_z(t)\mathrm{d}t$$

Posição e Velocidade

Interpretação gráfica:

$$\vec{r}\,(t_f) = \vec{r}\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \vec{v}(t)\mathrm{d}t = \left(x\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v_x(t)\mathrm{d}t, y\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v_y(t)\mathrm{d}t, z\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} v_z(t)\mathrm{d}t\right)$$



OBS: Área negativa (abaixo do eixo horizontal) significa deslocamento negativo simplesmente porque $v<0$.

Aceleração

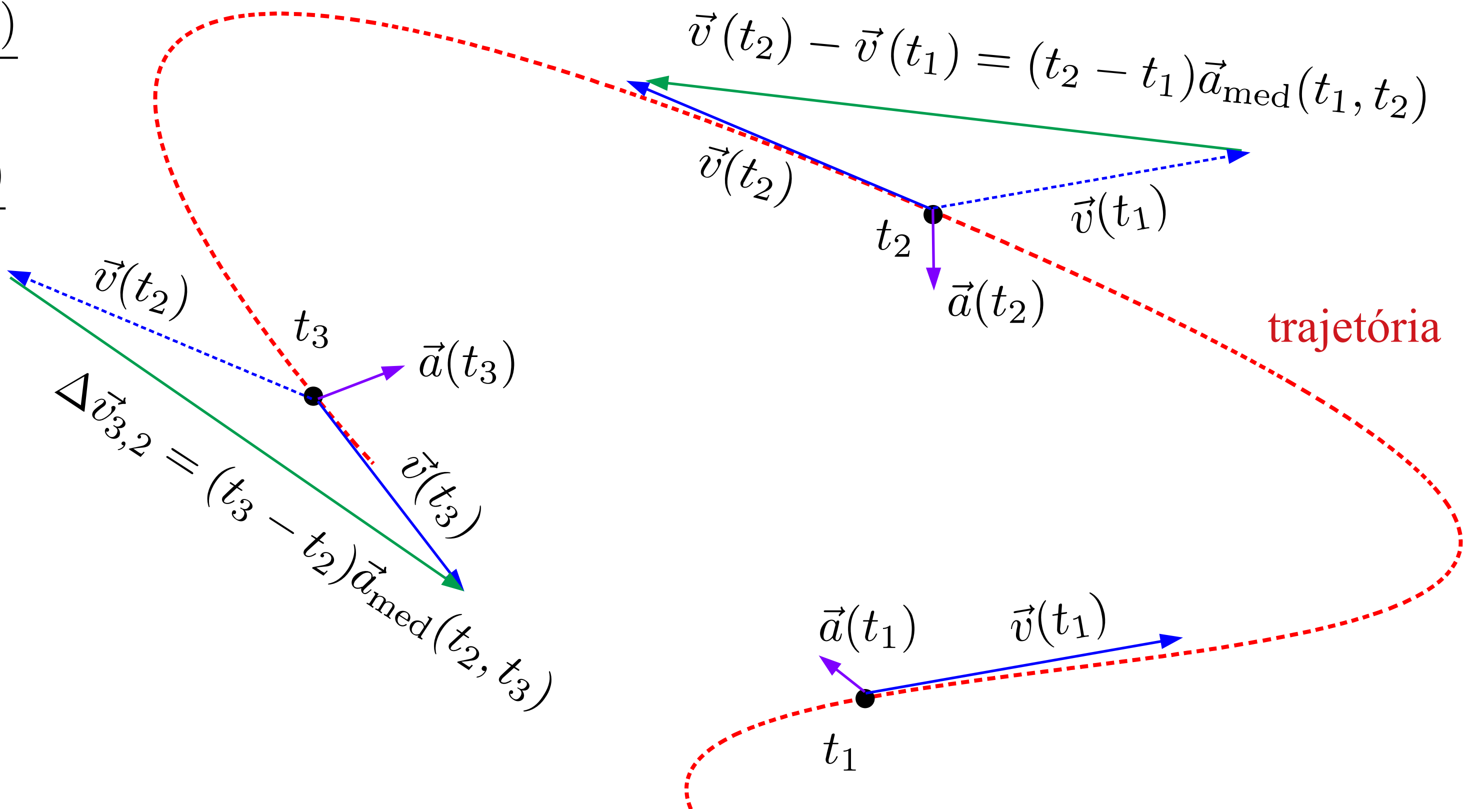
Variação temporal da velocidade

$$\vec{a}_{\text{med}}(t_1, t_2) = \frac{\vec{v}\,(t_2) - \vec{v}\,(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{\vec{v}\,(t + \mathrm{d}t) - \vec{v}\,(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

$$[\vec{a}_{\text{med}}] = [\vec{a}] = \frac{\text{comprimento}}{\text{tempo}^2}$$



Posição, Velocidade e Aceleração

Derivação

$$\vec{r} \xrightarrow{\mathrm{d}/\mathrm{d}t} \vec{v} \xrightarrow{\mathrm{d}/\mathrm{d}t} \vec{a}$$

Velocidade: tangente no gráfico $x \times t$

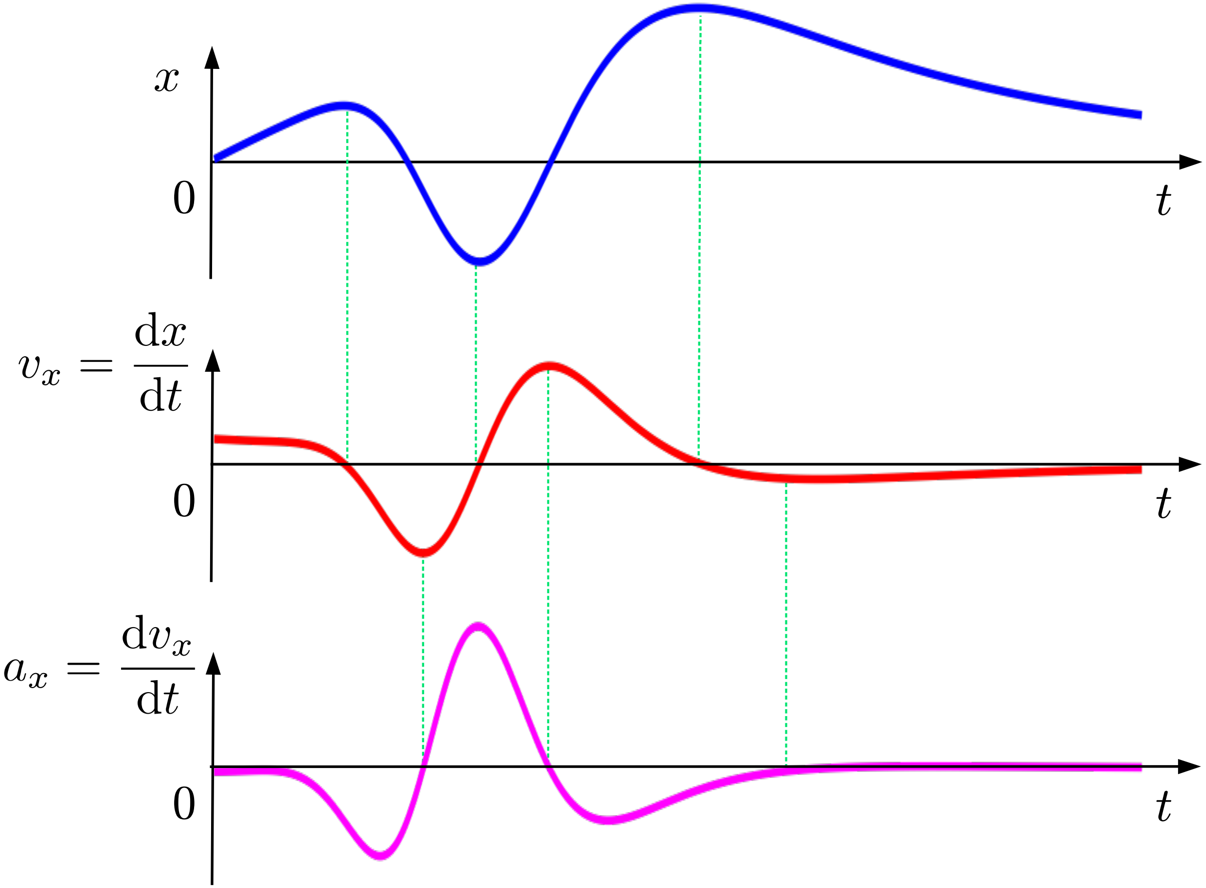
Aceleração: concavidade no gráfico $x \times t$

Integração

$$\vec{a} \xrightarrow{\int \mathrm{d}t} \Delta\vec{v} \xrightarrow{\int \mathrm{d}t} \Delta\vec{r}$$

Deslocamento: área no gráfico $v \times t$

(Analogamente para a variação de velocidade e aceleração)



Rapidez e Velocidade

Velocidade média $=$ Deslocamento total / tempo (vetor)
Rapidez média $=$ Comprimento da trajetória percorrida / tempo (escalar)

Ex: Você chuta uma bola em uma parede que dista L e retorna após um intervalo de tempo Δt. Qual a velocidade média e a rapidez média correspondentes?

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{0} \qquad\qquad c_{\text{med}} = \frac{2L}{\Delta t}$$

DESAFIO: Dois trens que distam de L entre se propagam com a mesma rapidez V mas em sentidos opostos ruma a colisão. Uma pequena ave que se encontra em um dos trens começa a voar com rapidez v>V em direção ao outro trem. Quando o alcança, ela rapidamente volta em direção ao outro e fica repetindo esse padrão até morrer esmagada quando da colisão. Qual é a velocidade média da ave? Qual é o percurso total percorrido pela mesma?

Rapidez e Velocidade

Velocidade instântanea $=$ Deslocamento infinitesimal / intervalo de tempo infinitesimal (vetor)
Rapidez instântanea $=$ Percusso infinitesimal / intervalo de tempo infinitesimal (escalar)

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad c = \frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{|\vec{v}|\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = |\vec{v}|$$