Aula passada

Posição: $\vec{r} \equiv \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Velocidade: $\vec{v}(t) \equiv \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$

Aceleração: $\vec{a}(t) \equiv \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$

Problema inverso (integração):

$$\vec{v}\,(t_f) = \vec{v}\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \vec{a}(t)\mathrm{d}t \qquad \vec{r}\,(t_f) = \vec{r}\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \vec{v}(t)\mathrm{d}t$$

Exemplo

Dado que a posição de uma partícula é $\vec{r}(t) = (A\sin(\omega t), y_0 e^{-t/\tau}, z_0 + \gamma t)$, responda:

(a) Determine as dimensões das constantes que aparecem no vetor posição.

$$[A] = [y_0] = [z_0] = \text{comprimento}, \ [\tau] = [\omega]^{-1} = \text{tempo}, \ \ [\gamma] = \text{velocidade}$$

(b) A distância da partícula até a origem no instante inicial.

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (0, y_0, z_0), \ \Rightarrow \ r_0 = |\vec{r}_0| = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$$

(c) Determine a velocidade.

$$\vec{v}\,(t) = \left(A\omega \cos\left(\omega t\right), -\frac{y_0}{\tau} e^{-t/\tau}, \gamma\right)$$

(d) Determine velocidade e a rapidez inicial.

$$\vec{v}_0 = \left(A\omega, -\frac{y_0}{\tau}, \gamma\right), \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\left(A\omega\right)^2 + \left(y_0/\tau\right)^2 + \gamma^2}$$

(e) Determine aceleração.

$$\vec{a}\,(t) = \left(-A\omega^2 \sin\left(\omega t\right), \frac{y_0}{\tau^2} e^{-t/\tau}, 0\right)$$

Exemplo

Dado que a aceleração de uma partícula é $\vec{a}(t) = -R\omega^2(\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0)$, e que ela inicialmente se encontra em $\vec{r}_0 = (0, 2R, 0)$ com velocidade $\vec{v}_0 = (2R\omega, 0, 0)$, responda:

(a) Determine as dimensões das constantes que aparecem no problema.

$$[R] = \text{comprimento}, \; [\omega] = 1/\text{tempo}$$

(b) Determine a velocidade da partícula.

$$\vec{v}\,(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = R\omega\,(1 + \cos(\omega t)\,, -\sin(\omega t)\,, 0)$$

(c) Determine a posição da partícula.

$$\vec{r}\,(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = R\,(\omega t + \sin(\omega t)\,, 1 + \cos(\omega t)\,, 0)$$

(d) Esboce o gráfico de de $x(t)$, $y(t)$ e da trajetória.

(vide animações)

Movimento retilíneo (1D)

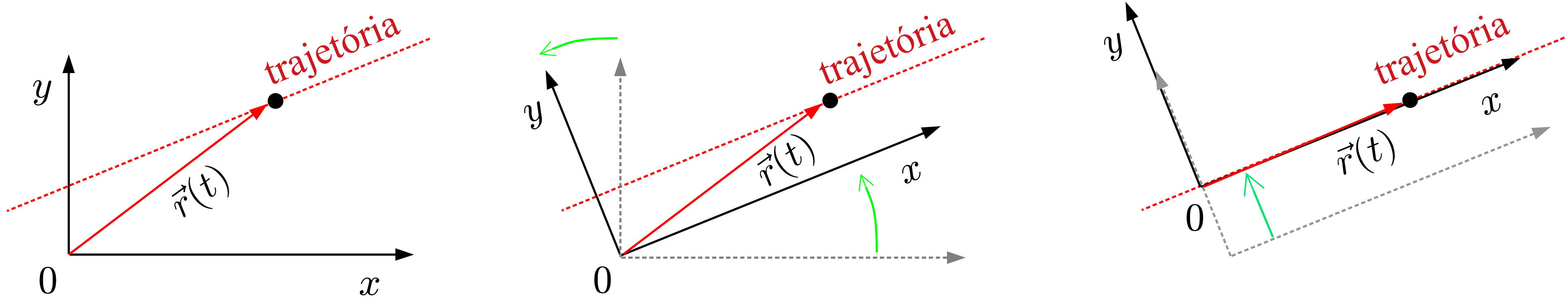
Definição: A trajetória descrita pelo vetor posição $\vec{r}(t)$ está sobre uma linha reta.

Consequência: A velocidade (quando não nula) aponta apenas para uma única direção, ou seja, a direção $\hat{n}$ da velocidade $\vec{v}(t)$ é constante no tempo.

$$\vec{v}\,(t) = v(t)\hat{n}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{v} = 0$$

OBS.: Sempre pode-se rotacionar e transladar um sistema de coordenadas e tornar

$$\vec{r}\,(t) \to \vec{r}\,(t) = \boxed{r\,(t)\,\hat{x}} \text{ e } \vec{v}\,(t) \to \vec{v}\,(t) = \boxed{v\,(t)\,\hat{x}}$$



Movimento uniforme

Definição: A velocidade é constante no tempo. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = 0$

OBS.: A direção e a magnitude (rapidez) da velocidade são constantes no tempo.

Consequências:

$$\vec{r}\,(t_f) = \vec{r}\,(t_i) + \int_{t_i}^{t_f} \vec{v}(t)\mathrm{d}t = \vec{r}\,(t_i) + \vec{v}\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\,(t_f) = \vec{r}\,(t_i) + \vec{v}(t_f - t_i)$$

ou ainda $\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

Note ainda que a velocidade média é igual a velocidade instantânea.
Como discutido no slide anterior, este é um caso particular de movimento retilíneo (1D).

Movimento uniformemente variado

Definição: A aceleração (ou variação da velocidade) é constante no tempo: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} = 0$

OBS.: A direção e a magnitude da aceleração são constantes no tempo.

Consequências: $\vec{v}\,(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$

$$\vec{r}\,(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t')\mathrm{d}t' = \vec{r}_0 + \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t)\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\,(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

ou ainda $\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

Note que, de maneira geral, o movimento é bidimensional (2D) porque $\Delta\vec{r}$ está no plano definido por $\vec{v}_0$ e $\vec{a}$ para todos os instantes de tempo. A trajetória é uma parábola e é uma aproximação para descrever o movimento de projéteis.

No caso especial em que $\vec{v}_0 \parallel \vec{a}$, então o movimento é retilíneo (1D) porque $\hat{v}$ é constante no tempo.

Movimento uniformemente variado

Definição: A aceleração (ou variação da velocidade) é constante no tempo: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} = 0$

Em suma,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ v_y &= v_{0y} + a_y t \\ v_z &= v_{0z} + a_z t \end{aligned}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ z &= z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2}a_z t^2 \end{aligned}$$

Movimento uniformemente variado

Demonstração da trajetória parabólica.

Sem perda de generalidade, vamos considerar que

$$\vec{a} = a\hat{y}$$
$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{x} + v_{0y}\hat{y}$$
$$\vec{r}_0 = x_0\hat{x} + y_0\hat{y}$$

Logo,

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \qquad (v_{0x} \neq 0)$$

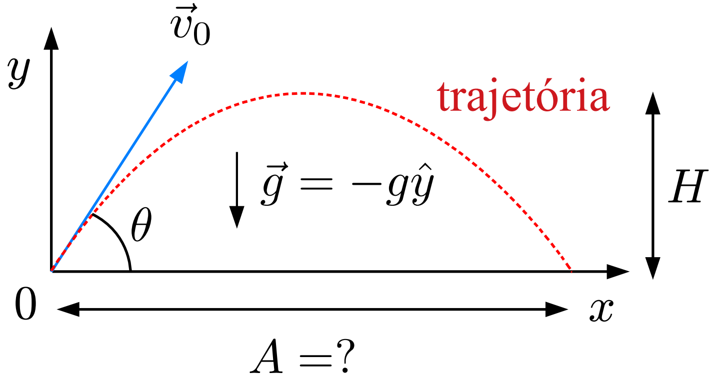
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + v_{0x}t$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \quad = \quad y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) + \frac{a}{2v_{0x}^2}(x - x_0)^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma} \qquad \alpha = \frac{a}{2v_{0x}^2}, \quad \beta = \frac{v_{0x}v_{0y} - ax_0}{v_{0x}^2}, \quad \gamma = y_0 - \left(v_{0y} - \frac{ax_0}{2v_{0x}}\right)\frac{x_0}{v_{0x}}.$$

Movimento uniformemente variado

Alcance de um projétil (desprezando a resistência do ar e a rotação da Terra).



$$v_x = v_{0x}$$

$$v_y = v_{0y} - gt \quad \Rightarrow \quad t_s = v_{0y}/g \quad \text{(tempo de subida)}$$

$$x(t) = v_{0x}t \quad \Rightarrow \quad A = x(2t_s) = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$

Ângulo ótimo (de máximo alcance) $= \pi/4$

Altura máxima atingida:

$$H = y(t_s) = v_{0y}t_s - \frac{1}{2}gt_s^2 = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta$$

Movimento uniformemente variado

Calcule a distância percorrida por um carro após um aviso ser dado ao motorista, considerando o seu tempo de reação.

Dados: rapidez inicial $= \; v_0 = 150\,\mathrm{km/h}$

tempo de reação $= \delta t = 0.14$ s (caso ideal)

desaceleração constante de magnitude $= a = 9.0$ m/s² (caso ideal)

Antes de pisar nos freios (tempo de reação), o movimento é uniforme e o veículo percorre

$$\Delta x_1 = v_0 \delta t$$

Após os freios serem acionados, o movimento torna-se uniformemente variado. Logo,

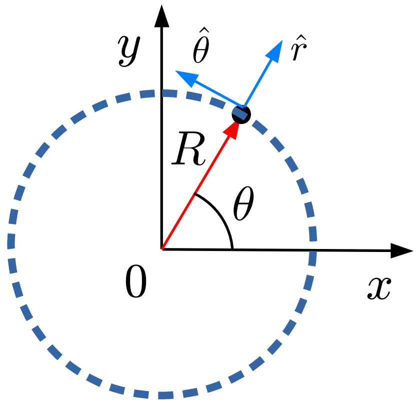
$$\begin{aligned} v &= v_0 - at \\ \Delta x &= v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 - 2a\Delta x, \quad \Rightarrow \quad \Delta x_2 = \frac{v_0^2}{2a}$$

Distância de frenagem $= \; \Delta x_1 + \Delta x_2 = v_0 \left(\delta t + \dfrac{v_0}{2a} \right) = 1.0 \times 10^2$ m.

Movimento circular

Definição: A trajetória está contida em um círculo.

Naturalmente, é conveniente escolher um sistema de coordenadas cuja a origem coincide com a do círculo: coordenadas polares. Dessa maneira, o movimento se torna descrito apenas por uma única variável que é o ângulo com o eixo x.



$$\vec{r}(t) = R(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}) = R\hat{r}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\hat{r}) = R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{r}$$
$$= R\omega\left(-\sin(\theta)\,\hat{x} + \cos(\theta)\,\hat{y}\right) = R\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R\omega\hat{\theta}\right) = R\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\theta} + R\omega\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}$$
$$= R\gamma\hat{\theta} - R\omega^2\hat{r}$$

aceleração tangencial e normal

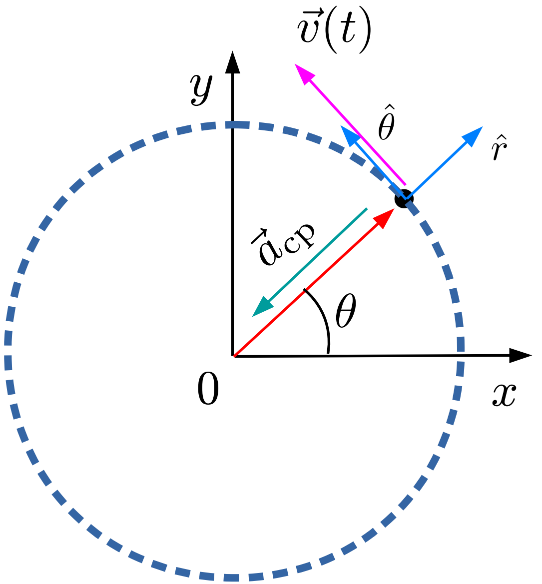
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R = 0 \quad \text{(trajetória circular)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta = \dot{\theta} = \omega \quad \text{(vel. angular)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\theta = \ddot{\theta} = \gamma \quad \text{(acel. angular)}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega = \dot{\omega}$$

Movimento circular uniforme

Definição: Caso particular do movimento circular em que a aceleração angular é nula: γ=0.



$$\vec{r}(t) = R(\cos(\theta_0 + \omega t)\hat{x} + \sin(\theta_0 + \omega t)\hat{y}) = R\hat{r}$$

$$\vec{v}(t) = R\omega\hat{\theta} \quad \Rightarrow \quad v(t) = |\vec{v}| = R\omega = \text{const}$$

A magnitude da velocidade (rapidez) é constante no tempo. (A direção não é.)

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2\hat{r} = \vec{a}_{\rm cp}$$

A magnitude da aceleração é constante no tempo. A direção não é, e aponta sempre para o centro.