

# Teorias clássicas sobre a luz

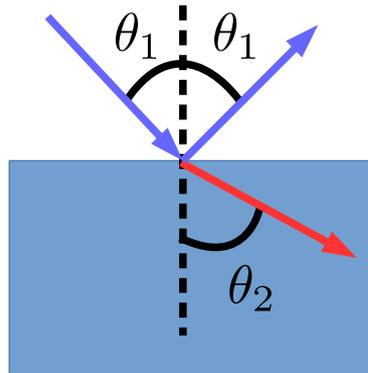
- Óptica geométrica (óptica da propagação de raios luminosos)
  - Entendimento de espelhos e lentes (aberração geométrica)
    - Galileo, Kepler
  - Reflexão e refração (Lei de Snell-Descartes, Princípio de Fermat)

OBS: Essa teoria já era conhecida pelos antigos (árabes, persas, gregos).

Teoria Ondulatória

Huygens

Euler, Young, Fresnel



$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Teoria Corpuscular

Descartes  
Newton

# Teorias clássicas sobre a luz

- Óptica ondulatória
  - Entendimento mais profundo dos fenômenos eletromagnéticos  
Orsted, Ampère, Faraday, Maxwell, e muitos outros
  - Difração/interferência e Polarização

Equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$



G. Marconi



K. F. Braun

Physics Nobel Prize 1909

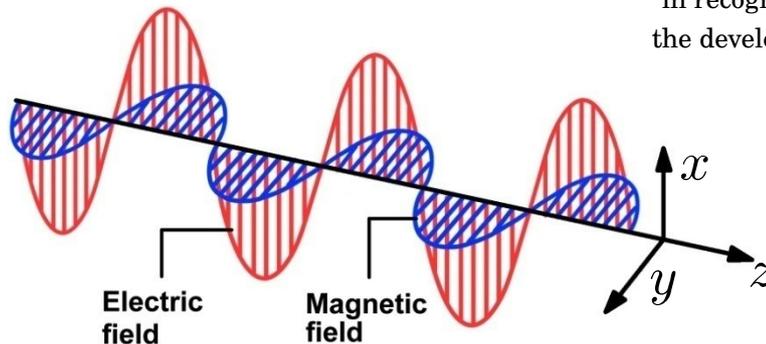
“in recognition of their contributions to the development of wireless telegraphy”

No vácuo, os campos EM seguem uma **equação de onda**:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

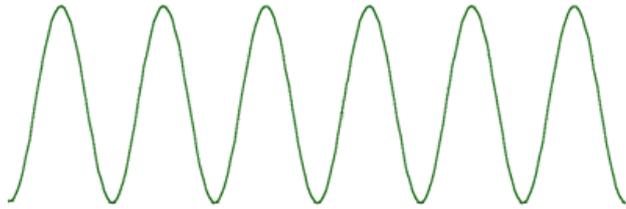
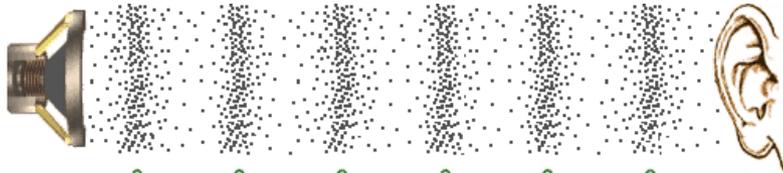
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \equiv 299.792.458 \text{ m/s}$$



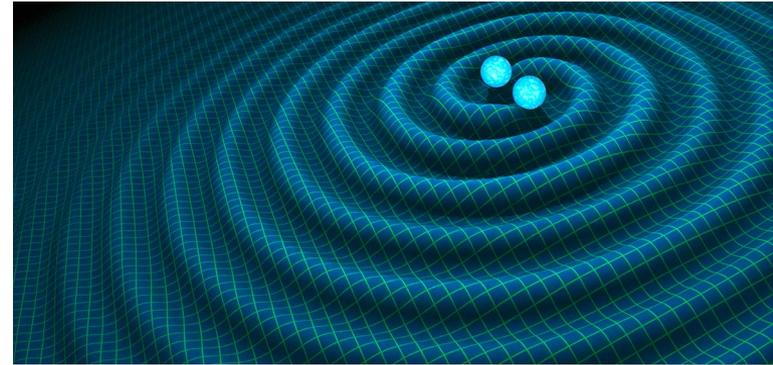
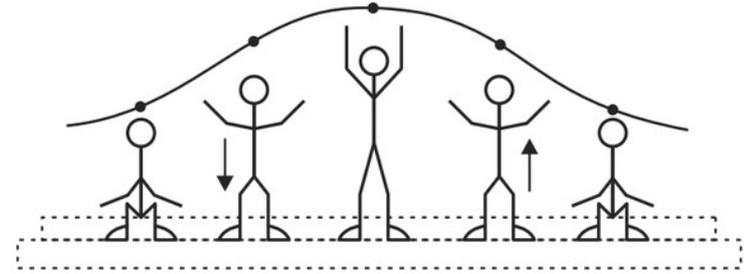
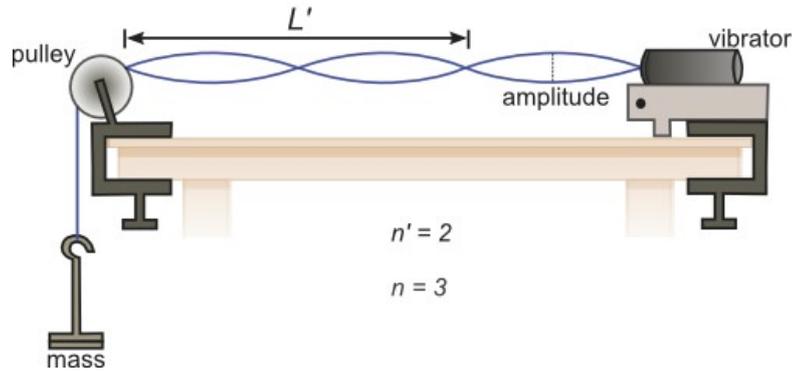
# “Queda da teoria clássica da luz”

Luz = Onda electromagnética

Onda = movimento coletivo de um meio

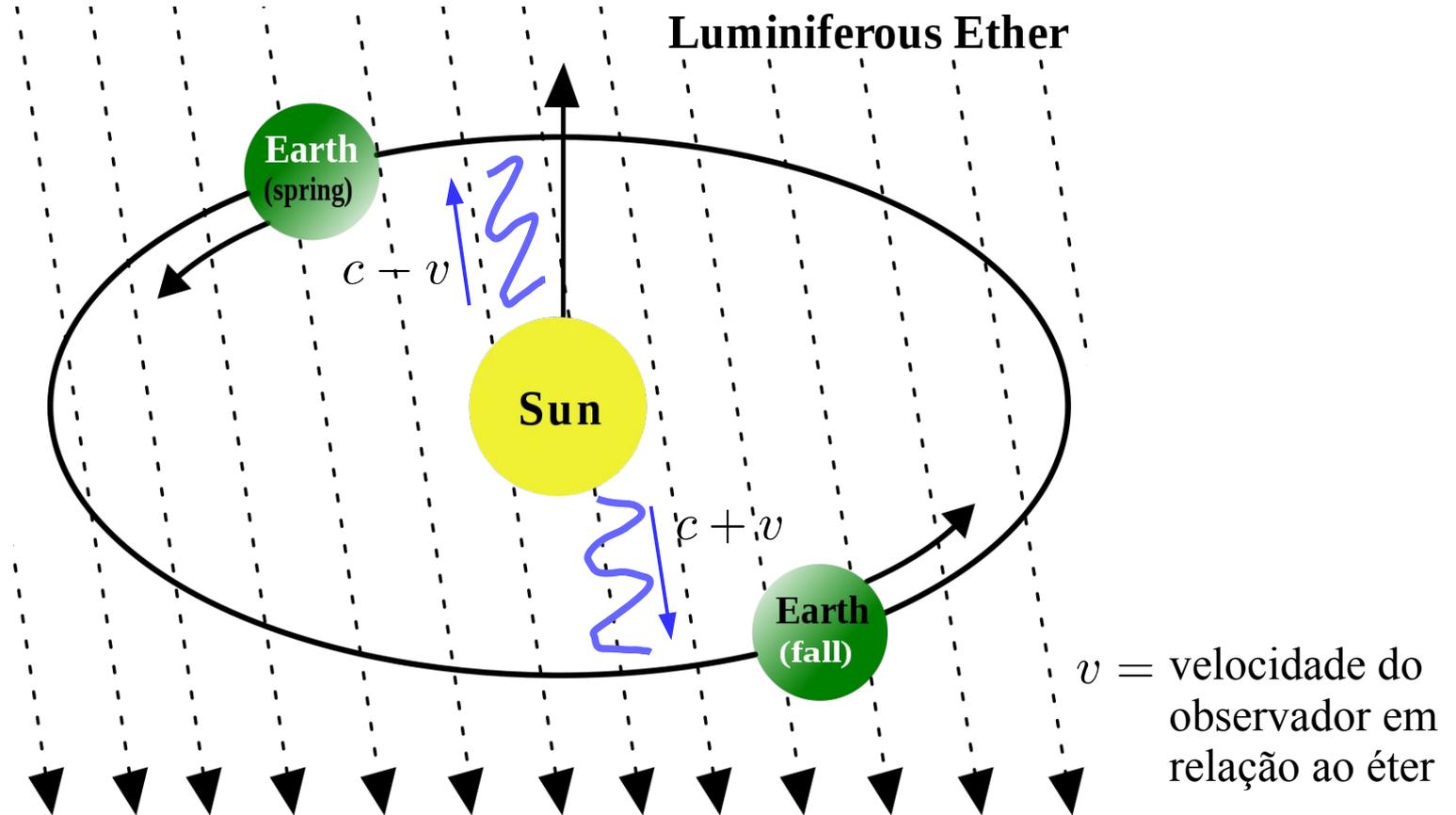


$L$



# “Queda da teoria clássica da luz

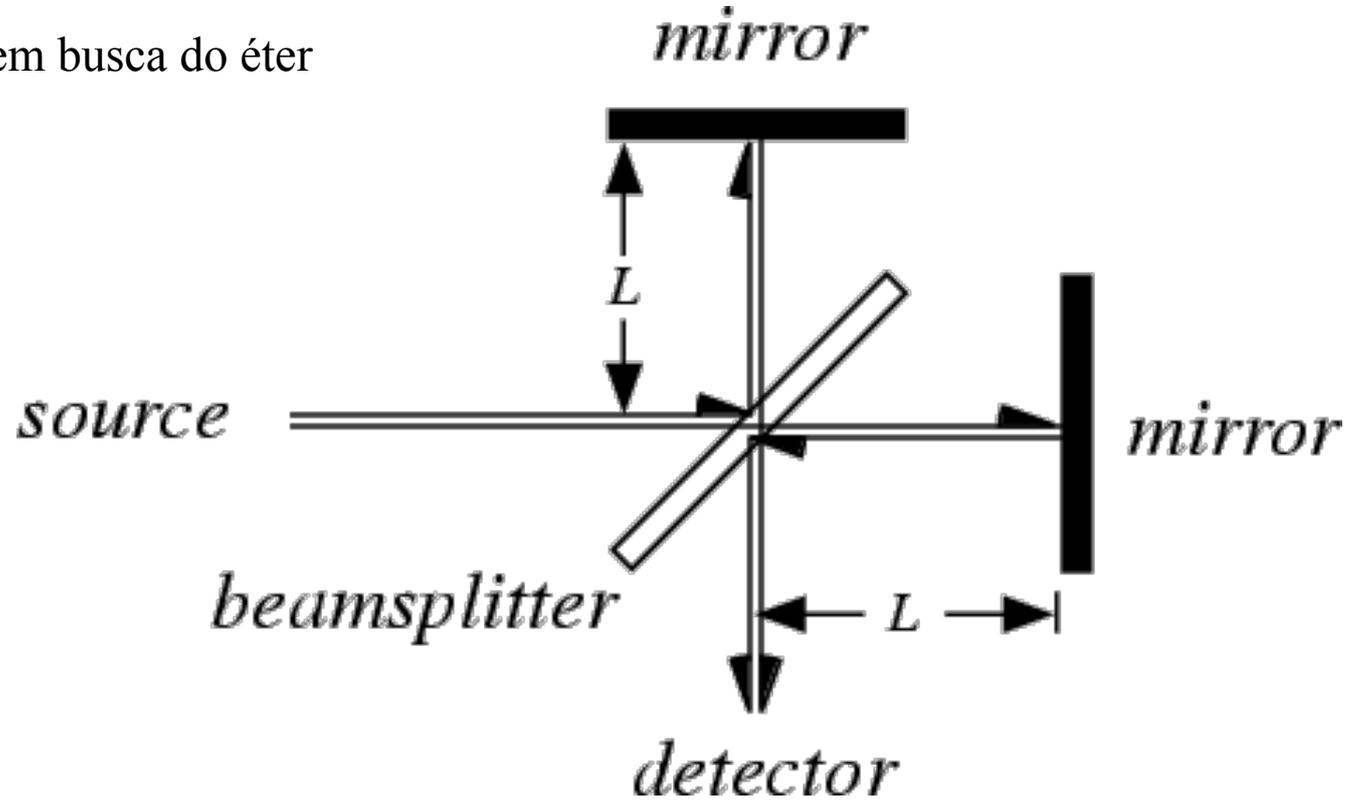
Luz = Onda de éter



# “Queda da teoria clássica da luz

Michelson-Morley – em busca do éter

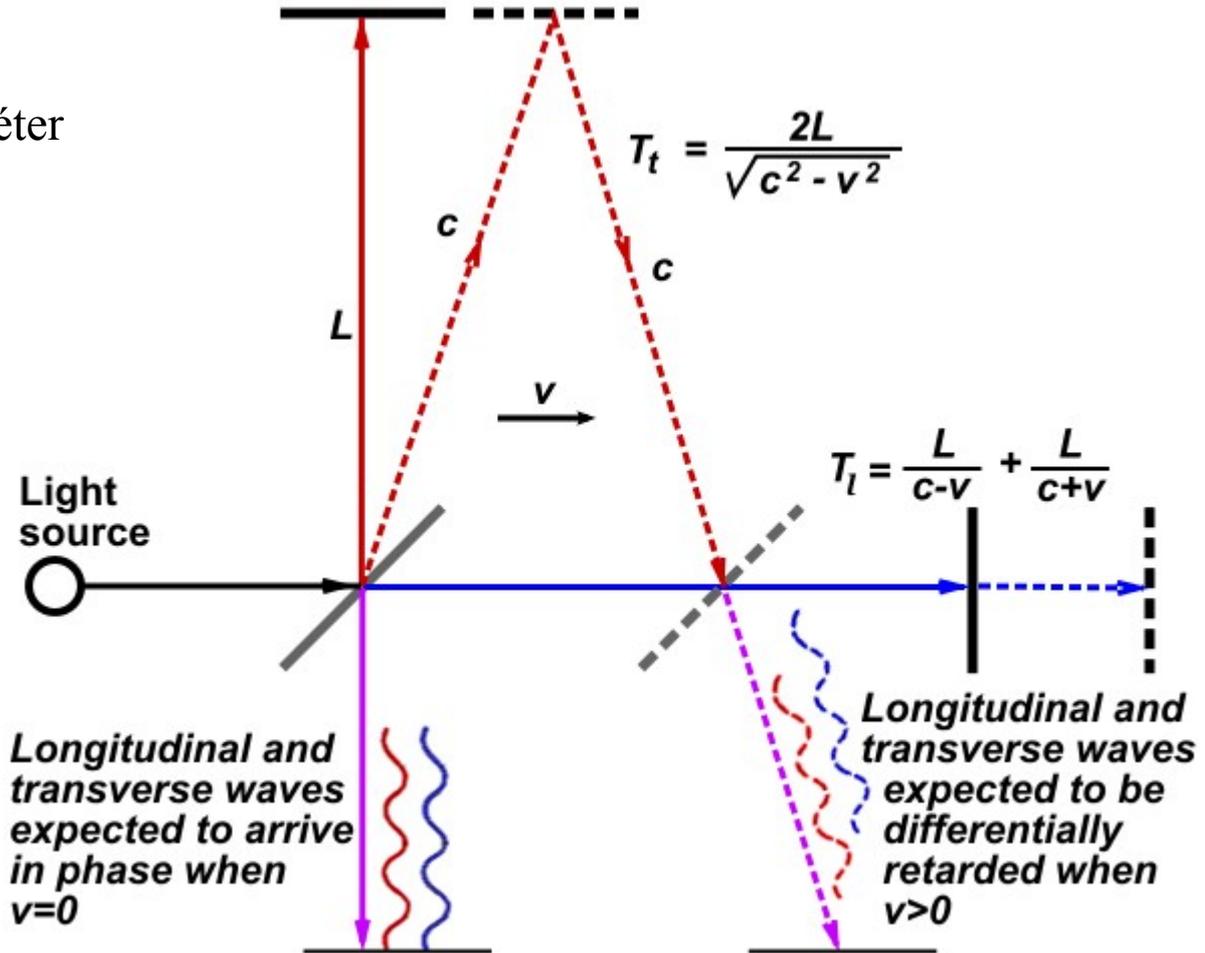
O interferômetro:



# “Queda da teoria clássica da luz

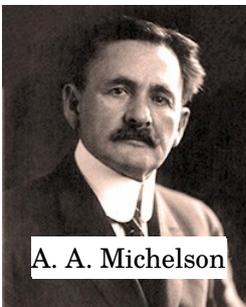
Michelson-Morley – em busca do éter

O interferômetro:

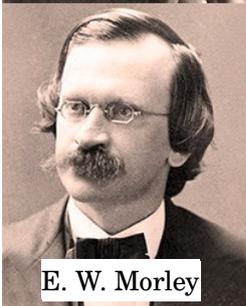


(mostrar Michelson-Morley.gif)

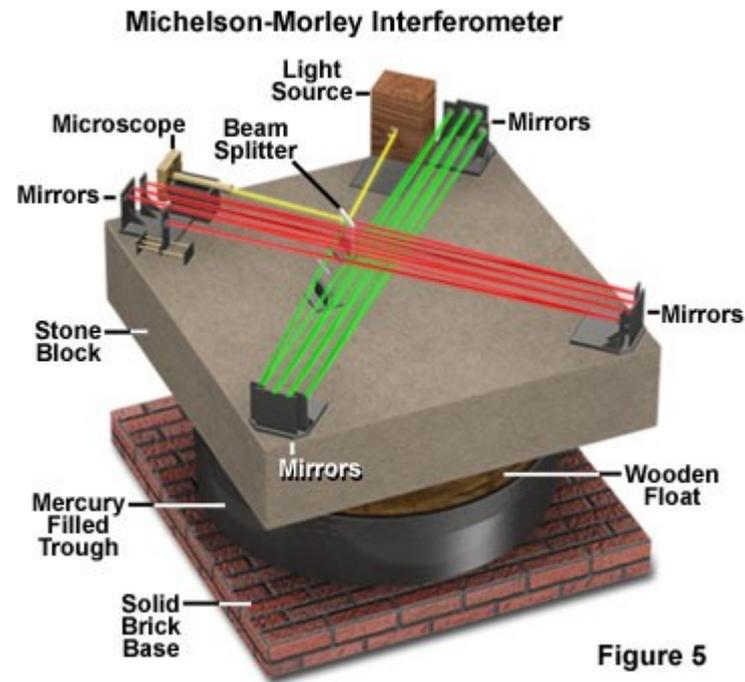
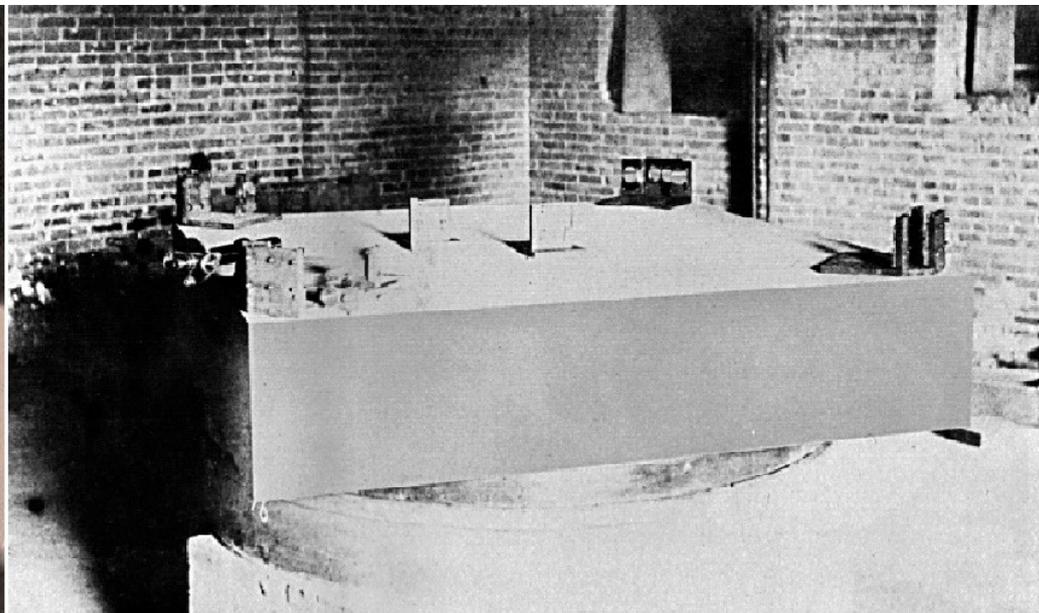
# “Queda da teoria clássica da luz



A. A. Michelson



E. W. Morley



O resultado:

The Experiments on the relative motion of the earth and ether have been completed and the result is decidedly **negative**. The expected deviation of the interference fringes from the zero should have been 0.40 of a fringe – the maximum displacement was 0.02 and the average much less than 0.01 – and then not in the right place.

As displacement is proportional to squares of the relative velocities it follows that if the ether does slip past [the earth] the relative velocity is **less than one sixth of the earth's velocity**.

— carta de Michelson para Rayleigh, 1887

Fonte: The Master of Light: A Biography of Albert A. Michelson



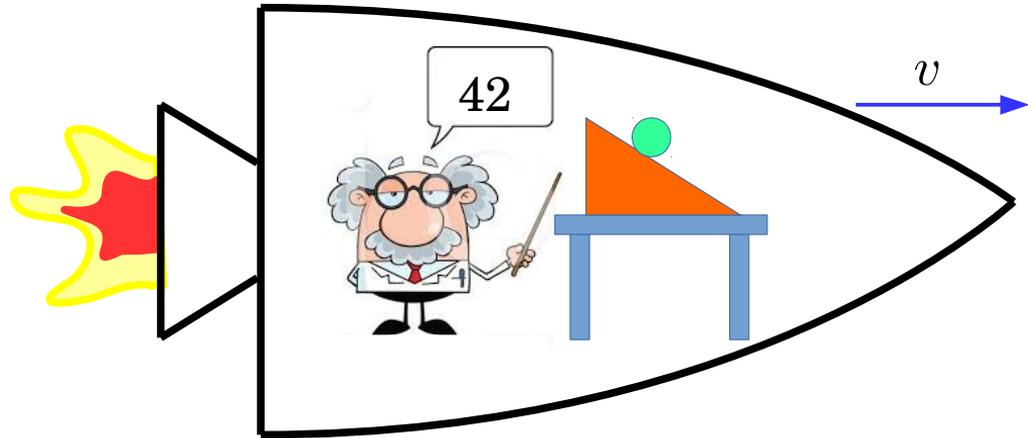
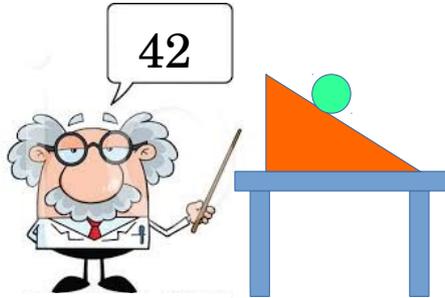
A.A. Michelson  
Physics Nobel Prize 1907

“for his optical precision instruments and the spectroscopic and metrological investigations carried out with their aid”.

# Relatividade especial

**Postulado 1** (o **princípio da Relatividade**): As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais

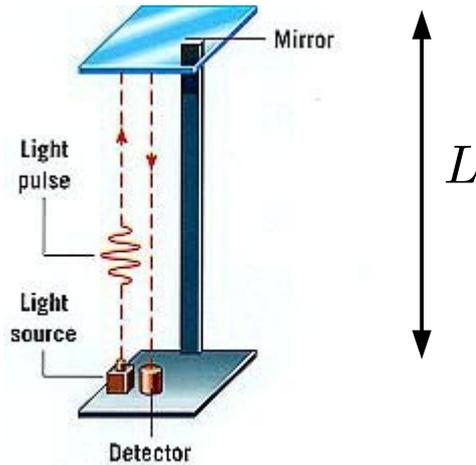
- a) Nenhum experimento pode revelar o movimento absoluto do observador
- b) Um experimento dá o mesmo resultado em qualquer referencial inercial



**Postulado 2** (a **constância da velocidade de luz**): A velocidade da luz no vácuo,  $c$ , é a mesma em todas as direções e em todos os referenciais, e é independente do movimento da fonte

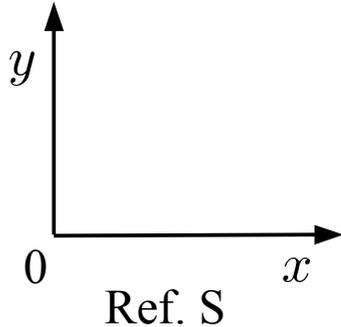
# Relatividade especial: dilatação do tempo

Relógio de luz:



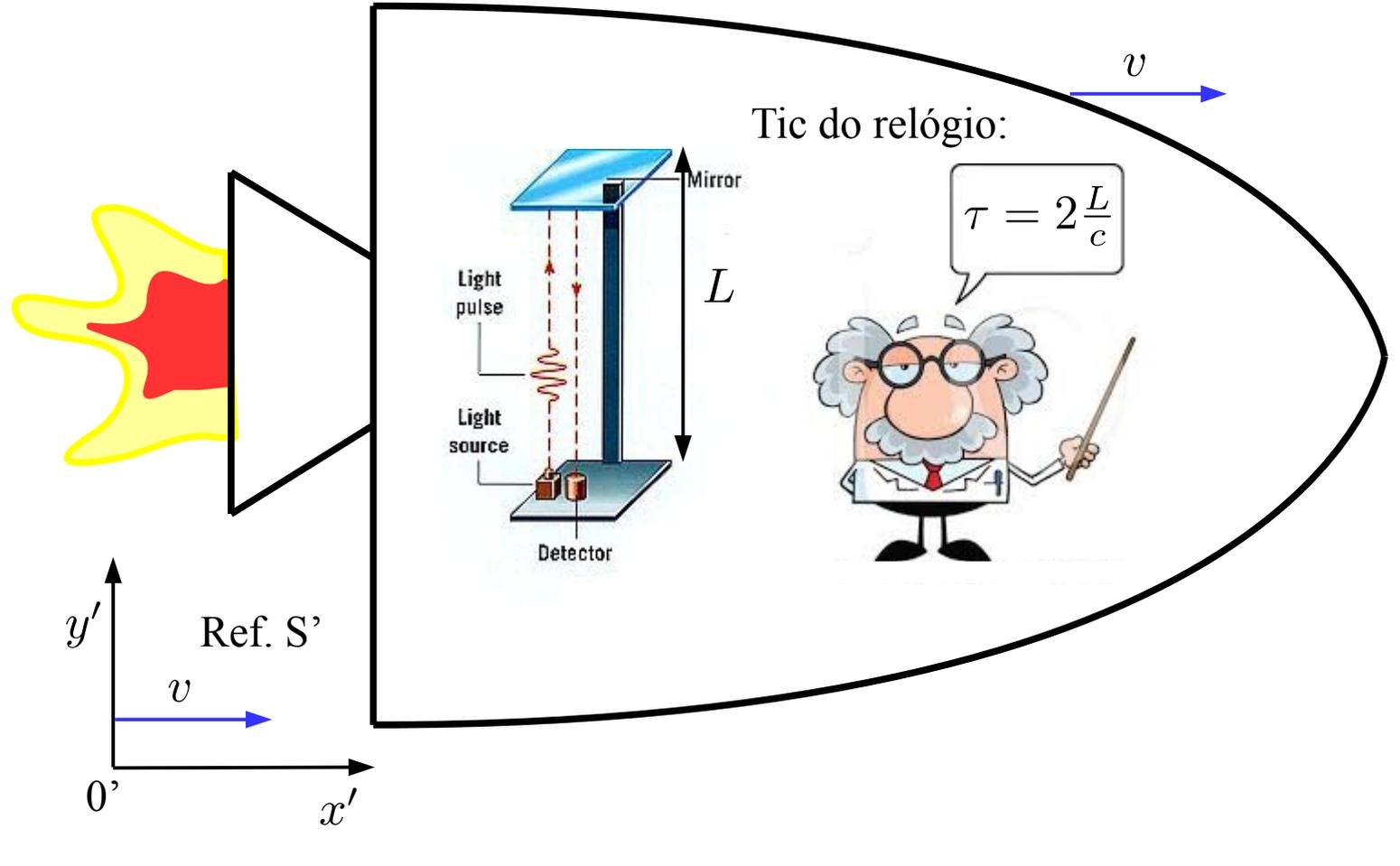
Tic do relógio:

$$\tau = 2 \frac{L}{c}$$



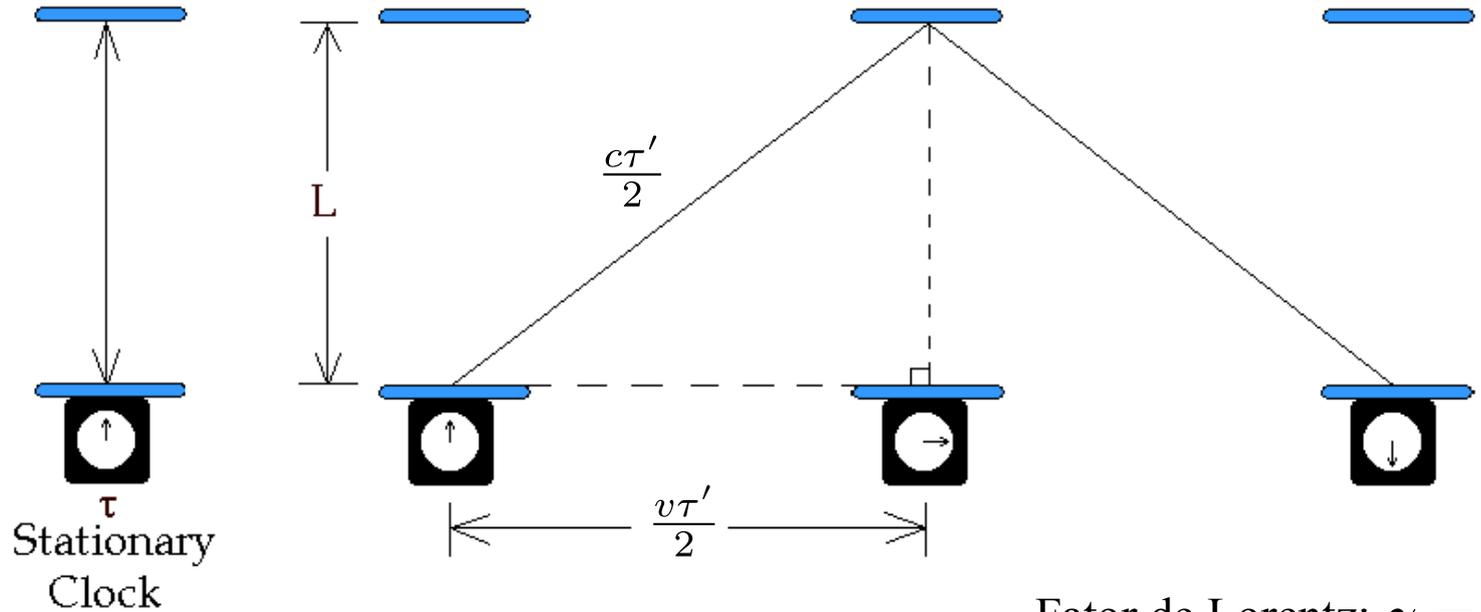
# Relatividade especial: dilatação do tempo

Relógio de luz:



# Relatividade especial: dilatação do tempo

Tics dos relógios visto pelo Ref. S:

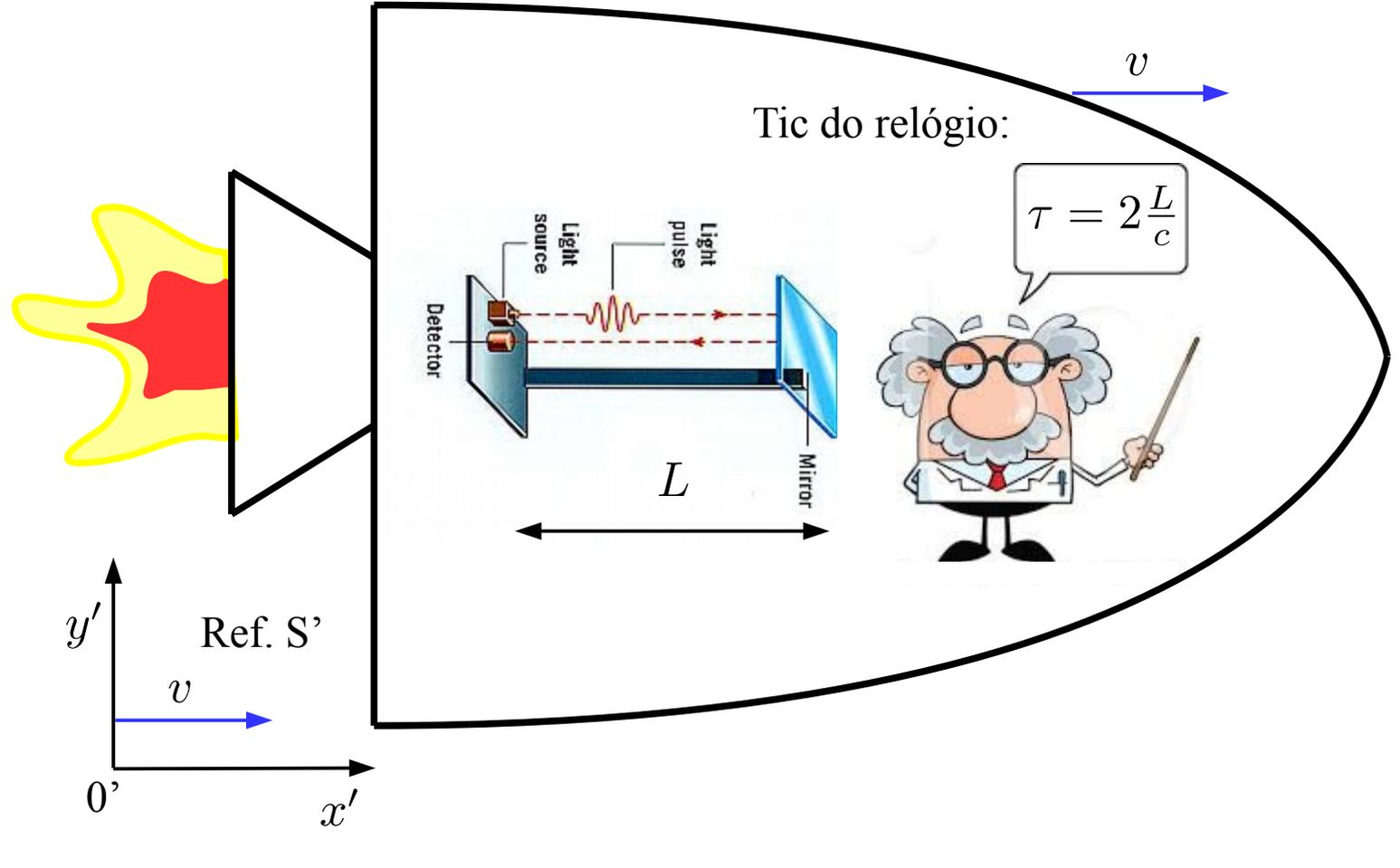


$$\frac{c^2 \tau'^2}{4} = \frac{v^2 \tau'^2}{4} + L^2, \Rightarrow \left( \frac{c^2 - v^2}{c^2} \right) \tau'^2 = \frac{4L^2}{c^2} = \tau^2, \Rightarrow \boxed{\tau' = \gamma \tau} \text{ onde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} > 1$$

Ref. S conclui que o tempo passa mais devagar no Ref. S', e vice-versa

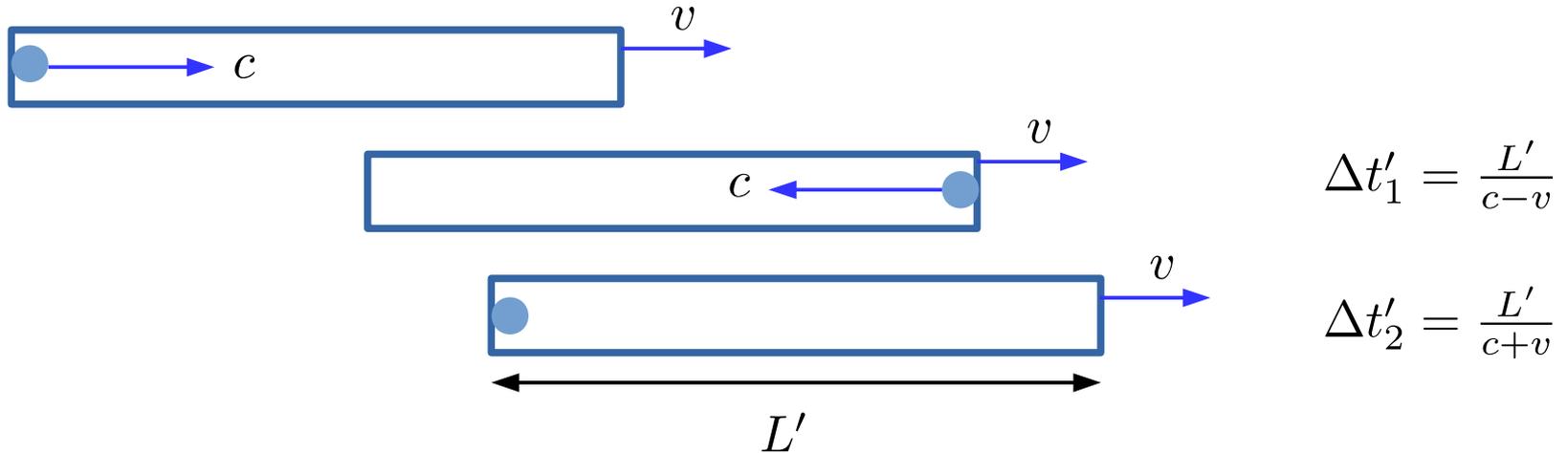
# Relatividade especial: contração do espaço

Relógio de luz:



# Relatividade especial: contração do espaço

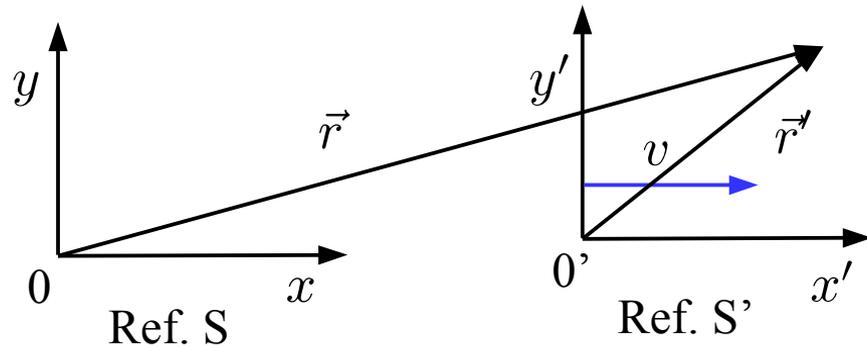
Tic dos relógio S' visto pelo Ref. S:



$$\tau' = \gamma\tau = \gamma \frac{2L}{c} = \frac{L'}{c-v} + \frac{L'}{c+v} = \frac{2cL'}{c^2-v^2}, \Rightarrow \gamma L = \gamma^2 L', \Rightarrow \boxed{L' = \frac{1}{\gamma} L}$$

Ref. S conclui que as régua (horizontais) no Ref. S' contraem, e vice-versa

# Transformações de Galileu e Lorentz



OBS.: inicia-se os cronômetros quando as origens coincidem

Galileu:

$$x = x' + vt'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

(tempo absoluto dissociado do espaço)

Lorentz:

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)$$

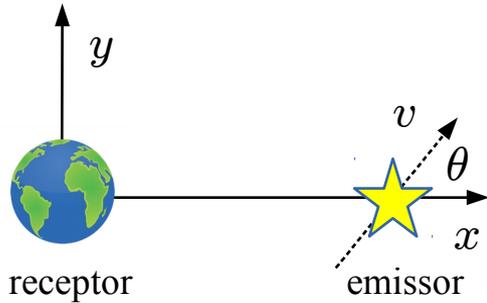
(espaço-tempo absoluto) →

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

**Constância da velocidade da luz**

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = ds'^2$$

# Efeito Doppler relativístico



Frequência da luz emitida pelo emissor no referencial próprio:  $f_{\text{fonte}}$

Frequência da luz observada pelo receptor no referencial próprio:  $f_{\text{obs}}$

Efeito Doppler clássico para um receptor longe da fonte e parado em relação ao meio em que a onda se propaga:

$$f_{\text{obs}} = f_{\text{fonte}} \frac{1}{1 + \beta \cos \theta} \xrightarrow[\text{dilatação do tempo}]{f_{\text{fonte}} \rightarrow \frac{f_{\text{fonte}}}{\gamma}}$$

$$f_{\text{obs}} = f_{\text{fonte}} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta}, \text{ onde } \beta = \frac{v}{c}$$

Um pouco da história do efeito Doppler:

<https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/PT.3.4429>

# Relatividade e simultaneidade

Game of thrones paradox:



Filha do príncipe herdeiro (S')



Prince  
(filho mais velho do rei)



Pistoleiro intergaláctico  
(não o subestime – são pistolas lasers)



King



Pequeno príncipe (S'')  
(filho mais novo do rei)



Espectador no referencial do crime (S)

# Relatividade e simultaneidade

Game of thrones paradox: O que S' diz?



Filha do príncipe herdeiro (S')



King morre primeiro → Prince vira rei



Prince  
(filho mais velho do rei)



Pistoleiro intergaláctico  
(não o subestime – são pistolas lasers)



King



Pequeno príncipe (S'')  
(filho mais novo do rei)



Espectador no referencial do crime (S)

# Relatividade e simultaneidade

Game of thrones paradox: O que S' diz?



King morre primeiro → Prince vira rei  
Em seguida, Prince morre → Eu sou rainha



Pequeno príncipe (S'')  
(filho mais novo do rei)

Filha do príncipe herdeiro (S')



Prince  
(filho mais velho do rei)



Pistoleiro intergaláctico  
(não o subestime – são pistolas lasers)



King



Espectador no referencial do crime (S)

# Relatividade e simultaneidade

Game of thrones paradox: O que S'' diz?



Filha do príncipe herdeiro (S')



Prince morre primeiro → Eu viro herdeiro



Pequeno príncipe (S'')  
(filho mais novo do rei)



Prince  
(filho mais velho do rei)



Pistoleiro intergaláctico  
(não o subestime – são pistolas lasers)



King



Espectador no referencial do crime (S)

# Relatividade e simultaneidade

Game of thrones paradox: O que S'' diz?



Filha do príncipe herdeiro (S')

Prince morre primeiro → Eu viro herdeiro  
Em seguida, King morre → Eu sou rei



Pequeno príncipe (S'')  
(filho mais novo do rei)



Prince  
(filho mais velho do rei)



Pistoleiro intergaláctico  
(não o subestime – são pistolas lasers)



King



Espectador no referencial do crime (S)

# Relatividade e simultaneidade

Game of thrones paradox: O que S diz?



Filha do príncipe herdeiro (S')



Pequeno príncipe (S'')  
(filho mais novo do rei)



Prince  
(filho mais velho do rei)



Pistoleiro intergaláctico  
(não o subestime – são pistolas lasers)



King



King e Prince morrem simultaneamente  
Winter is coming

Espectador no referencial do crime (S)

Quem está dizendo a verdade?  
Todos.

# Relatividade e simultaneidade

Eventos no Ref. S:



$$E_K : \quad x_K = L; \quad t_K = L/c$$

$$E_P : \quad x_P = -L; \quad t_P = L/c$$

(eventos simultâneos)

Eventos no Ref. S':



$$E'_K : \quad x'_K = \gamma L (1 - \beta); \quad t'_K = \gamma L (1 - \beta) / c$$

$$E'_P : \quad x'_P = -\gamma L (1 + \beta); \quad t'_P = \gamma L (1 + \beta) / c$$

(King morre antes)

Eventos no Ref. S'':

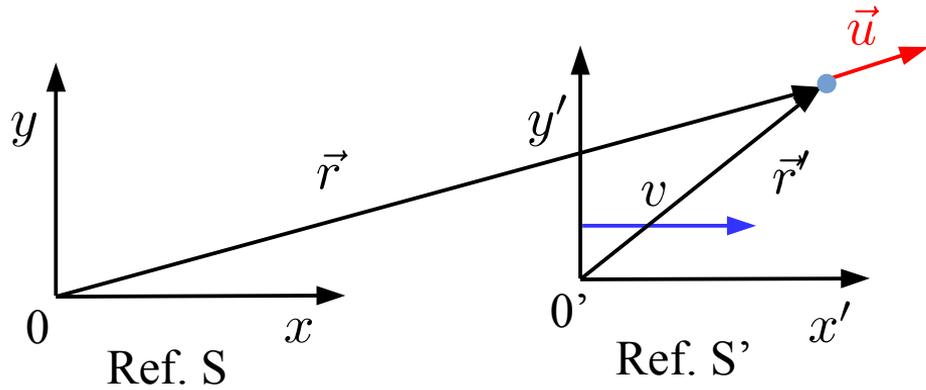


$$E''_K : \quad x''_K = \gamma L (1 + \beta); \quad t''_K = \gamma L (1 + \beta) / c$$

$$E''_P : \quad x''_P = -\gamma L (1 - \beta); \quad t''_P = \gamma L (1 - \beta) / c$$

(Prince morre antes)

# Transformação de velocidades



Velocidade no Ref. S':

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = (u'_x, u'_y, u'_z)$$

Velocidade no Ref. S:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + vdt')}{\gamma\left(dt' + \frac{\beta}{c}dx'\right)} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{\beta}{c}u'_x}$$

$$u_{y,z} = \frac{dy, z}{dt} = \frac{dy', z'}{\gamma\left(dt' + \frac{\beta}{c}dx'\right)} = \frac{u'_{x,y}}{\gamma\left(1 + \frac{\beta}{c}u'_x\right)}$$

Lorentz:

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

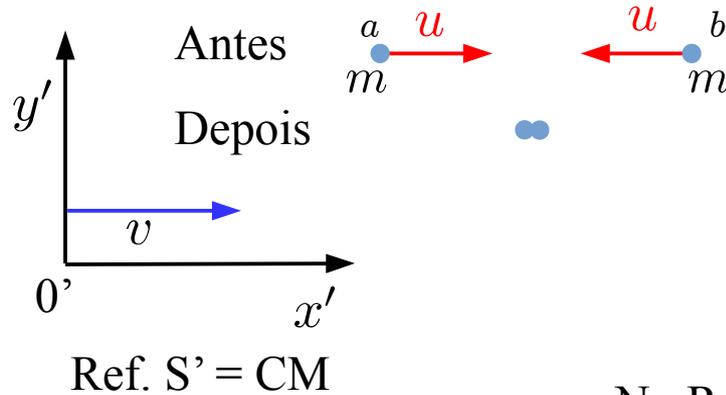
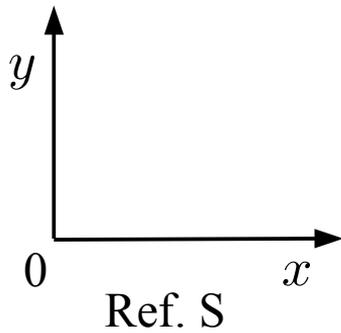
$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)$$

Exemplo:  $v = 0.9c$      $\vec{u}' = 0.9c\hat{x}$      $\vec{u} = ?$

$$u_x = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + (0.9)^2} = \frac{1.8c}{1.81} < c$$

Se  $v$  e  $u'$  são menores que  $c$ , então  $u < c$

# Colisão totalmente inelástica



No Ref. S':

$$p'_A = mu - mu = 0 = p'_D$$

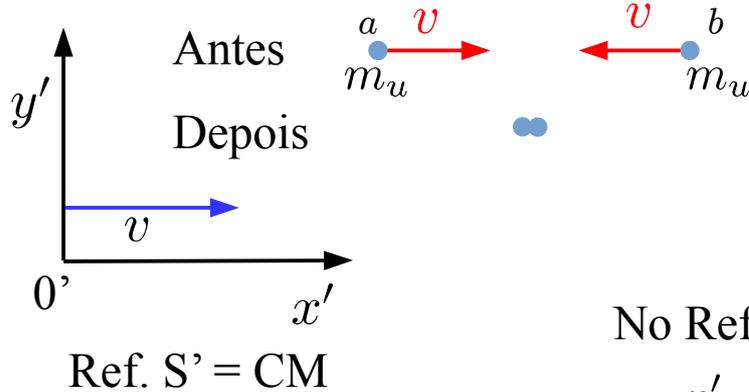
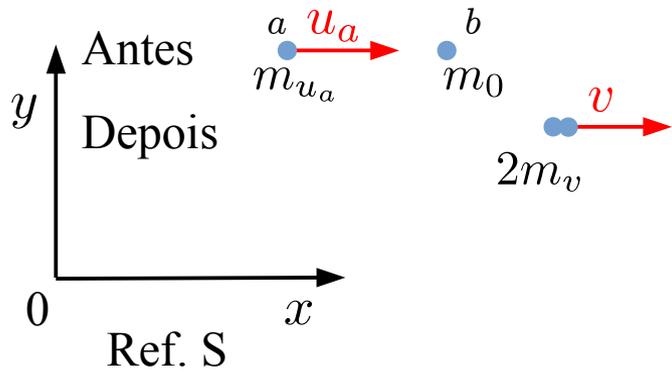
No Ref. S:

$$p_A = m \left( \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} + \frac{-u + v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \right) = 2mv \left( \frac{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{uv}{c^2}\right)^2} \right)$$

$$p_D = 2mv$$

Momento não é conservado no Ref. S?  
→ Massa deve depender do Referencial

# Transformação de massa



No Ref. S':

$$p'_A = m_v v - m_v v = 0 = p'_D$$

Por simplicidade, vamos escolher o Ref. S tal que  $b$  está inicialmente parada

$$p_A = m_{u_a} \left( \frac{2v}{1 + \beta^2} \right)$$

$$p_D = 2m_v v$$

Impondo conservação do momento no Ref. S

$$p_A = p_D \Rightarrow \frac{m_{u_a}}{m_v} = 1 + \beta^2 = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_a}{c}\right)^2}} = \frac{\gamma_{u_a}}{\gamma_v}$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \gamma m_0} \quad m_0 \equiv \text{massa de repouso}$$

Pode-se mostrar que esta transformação de massa conserva momento em qualquer referencial.

# Energia

Teorema trabalho–energia cinética:

$$dK \equiv \vec{F}_R \cdot d\vec{r} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} dt = d\vec{p} \cdot \vec{v} = d(\gamma m_0 c^2) \Rightarrow K = \gamma m_0 c^2 + \text{const} = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2$$

energia de repouso ou  
de ligação ou  
armazenada no objeto em repouso

Para velocidades  $v \ll c$

$$\Rightarrow K \approx \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right) m_0 c^2 - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Prova:  $d\vec{p} \cdot \vec{v} = d(\gamma m_0 \vec{v}) \cdot \vec{v} = d(\gamma) m_0 \vec{v} \cdot \vec{v} + \gamma m_0 d(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \gamma^3 d\left(\frac{v^2}{2c^2}\right) m_0 v^2 + \gamma m_0 d\left(\frac{v^2}{2}\right)$

$$= \gamma^3 d\left(\frac{v^2}{2}\right) m_0 \frac{v^2}{c^2} + \gamma m_0 d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \left(\gamma^2 \frac{v^2}{c^2} + 1\right) \gamma m_0 d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \gamma^3 m_0 d\left(\frac{v^2}{2}\right)$$
$$= \gamma^3 m_0 c^2 d\left(\frac{v^2}{2c^2}\right) = m_0 c^2 d(\gamma) = d(\gamma m_0 c^2)$$

# Energia

Teorema trabalho–energia cinética:

$$dK \equiv \vec{F}_R \cdot d\vec{r} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} dt = d\vec{p} \cdot \vec{v} = d(\gamma m_0 c^2) \Rightarrow K = \gamma m_0 c^2 + \text{const} = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2$$

energia de repouso ou  
de ligação ou  
armazenada no objeto em repouso

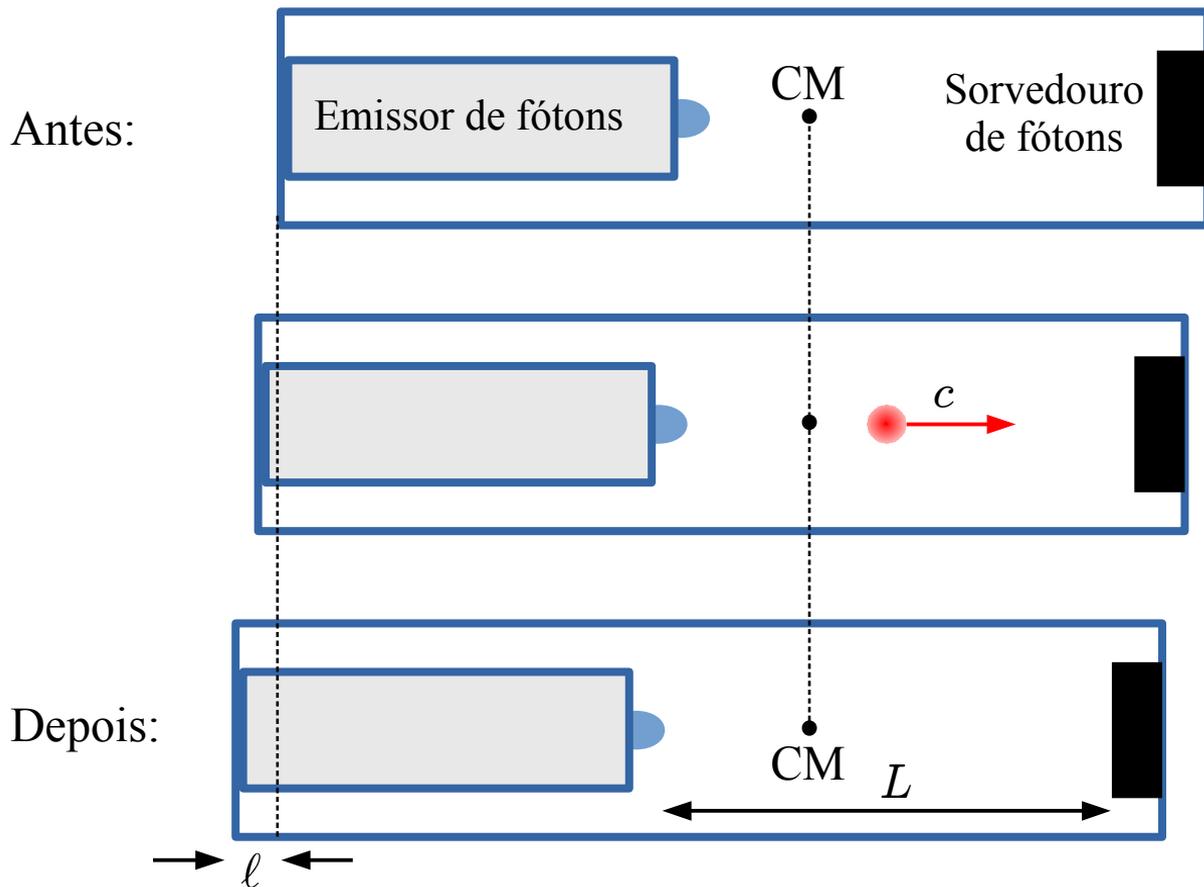
Definição: **Energia total de uma partícula** = energia cinética + energia de repouso

$$E = K + m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 = m c^2$$

Relação energia-momento:

$$p^2 = (mv)^2 = m^2 c^2 - m^2 (c^2 - v^2) = \frac{E^2}{c^2} - m_0^2 c^2 \Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

# Inércia da energia



Após disparo, conjunto adquire momento

$$-\Delta\vec{p} = -\frac{\Delta E}{c}\hat{x}$$

e desloca-se

$$\Delta\vec{r} = -\ell\hat{x}, \quad \ell = \frac{\Delta p\Delta t}{M} = \frac{\Delta E}{Mc^2}L$$

A inércia (massa) transferida foi de

$$\Delta mL = M\ell, \Rightarrow \Delta E = \Delta mc^2$$

A bateria do emissor ficou menos massiva:  $\Delta E =$  energia de ligação química

# Força constante

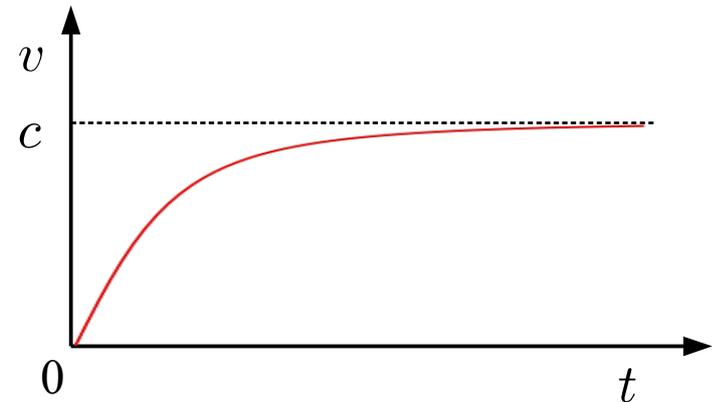
Considere uma partícula inicialmente em repouso de massa de repouso  $m_0$  sob a ação de uma força constante  $F_0$ . Calcule sua velocidade em função do tempo.

$$F_0 = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} (\gamma m_0 v) = m_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \Rightarrow \int_0^t \frac{F_0}{m_0} dt = \int_0^v d \left( \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{F_0}{m_0} t = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{v = \frac{\frac{F_0 t}{m_0}}{\sqrt{1 + \left( \frac{F_0 t}{m_0 c} \right)^2}}}$$

Tempos curtos:  $\Rightarrow \frac{F_0}{m_0} t \ll c \Rightarrow v \approx \frac{F_0}{m_0} t$

Tempos longos:  $\Rightarrow \frac{F_0}{m_0} t \gg c \Rightarrow v \approx c \left( 1 - \left( \frac{m_0 c}{F_0 t} \right)^2 \right)$



# Relatividade Geral

Como relacionar espaço-tempo e matéria?

## **Princípio da equivalência**

Em cada ponto de espaço-tempo em um campo gravitacional arbitrário é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial tal que, dentro de uma região suficientemente pequena em volta deste ponto, as leis da natureza são aquelas de um sistema desacelerado na ausência de gravitação.

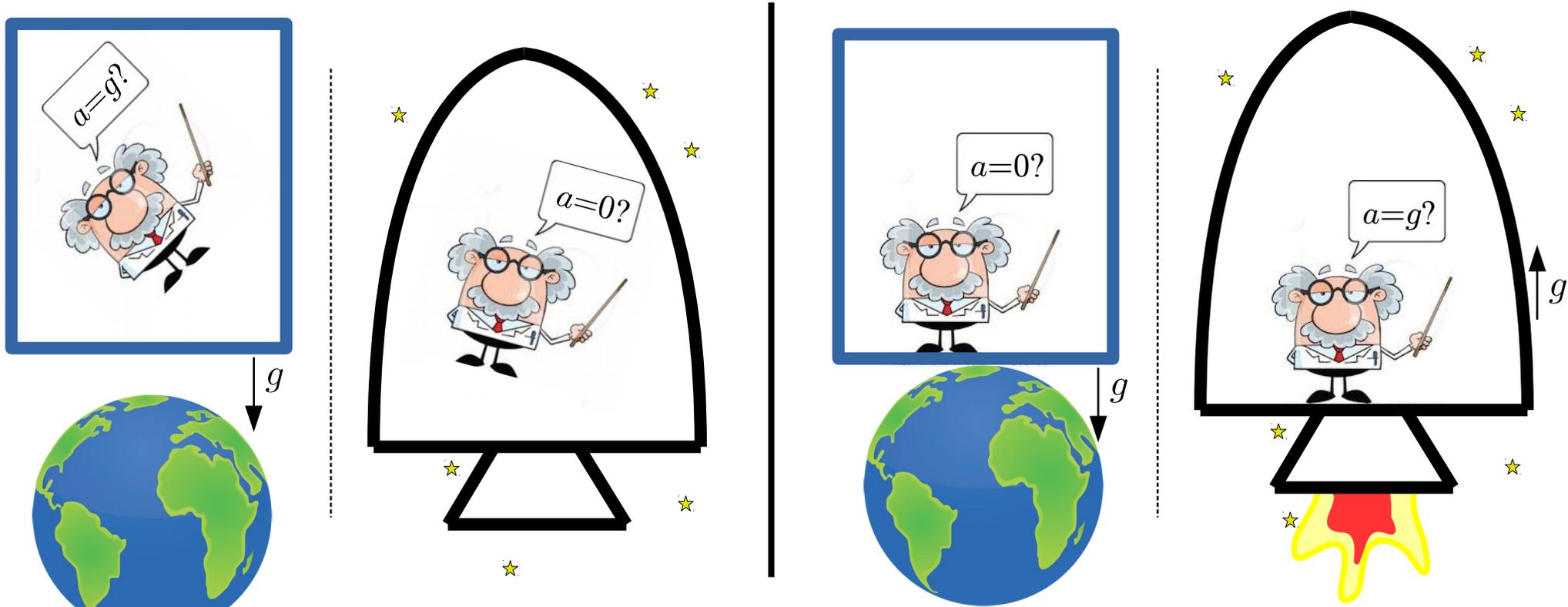
Equivalentemente, o princípio pode ser reescrito como

Há uma completa equivalência entre um campo gravitacional e a correspondente aceleração do sistema de coordenadas.

# Elevador de Einstein

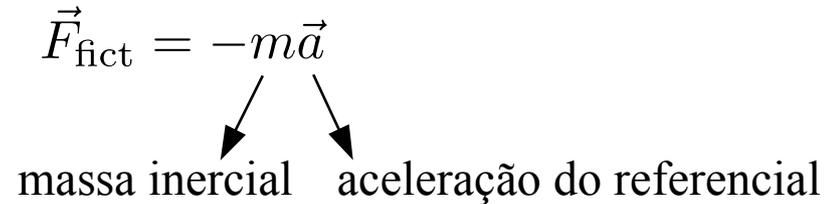
Um observador caindo dentro de um elevador num campo gravitacional uniforme não consegue dizer que está acelerado através de experimentos locais.

Essa afirmação é análoga ao princípio da relatividade: nenhum experimento pode revelar o movimento do observador.



# Força gravitacional e fictícia

Em um referencial uniformemente acelerado, a força fictícia correspondente é

$$\vec{F}_{\text{fict}} = -m\vec{a}$$


massa inercial    aceleração do referencial

Por causa dessa força fictícia, todas as partículas ganham a mesma aceleração neste referencial não-inercial.

Em um campo gravitacional uniforme, todas as partículas ganham a mesma aceleração.

Por que?

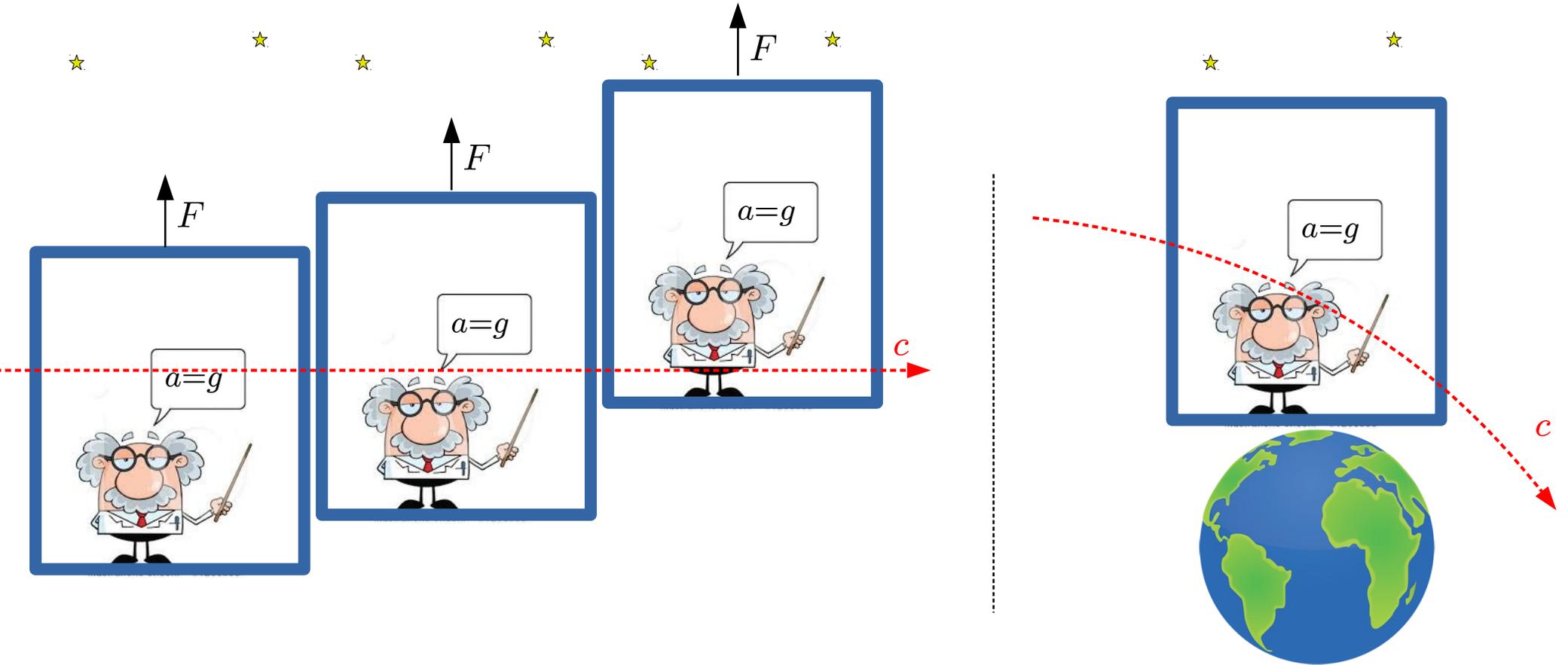
Na Mecânica Newtoniana, porque a massa inercial é experimentalmente igual à massa gravitacional.

Na Relatividade Geral, porque a força gravitacional é fictícia, ou seja, não há força inercial alguma.

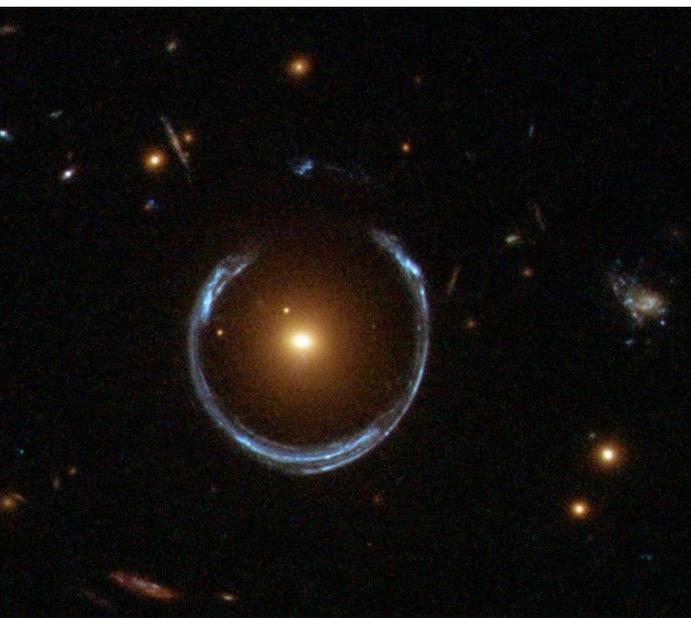
Consequentemente, na Relatividade Geral a massa inercial = massa gravitacional.

# Energia também gravita

Foguete acelerado é equivalente à um observador parado ao redor de um corpo massivo.



# Lentes gravitacionais



## LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

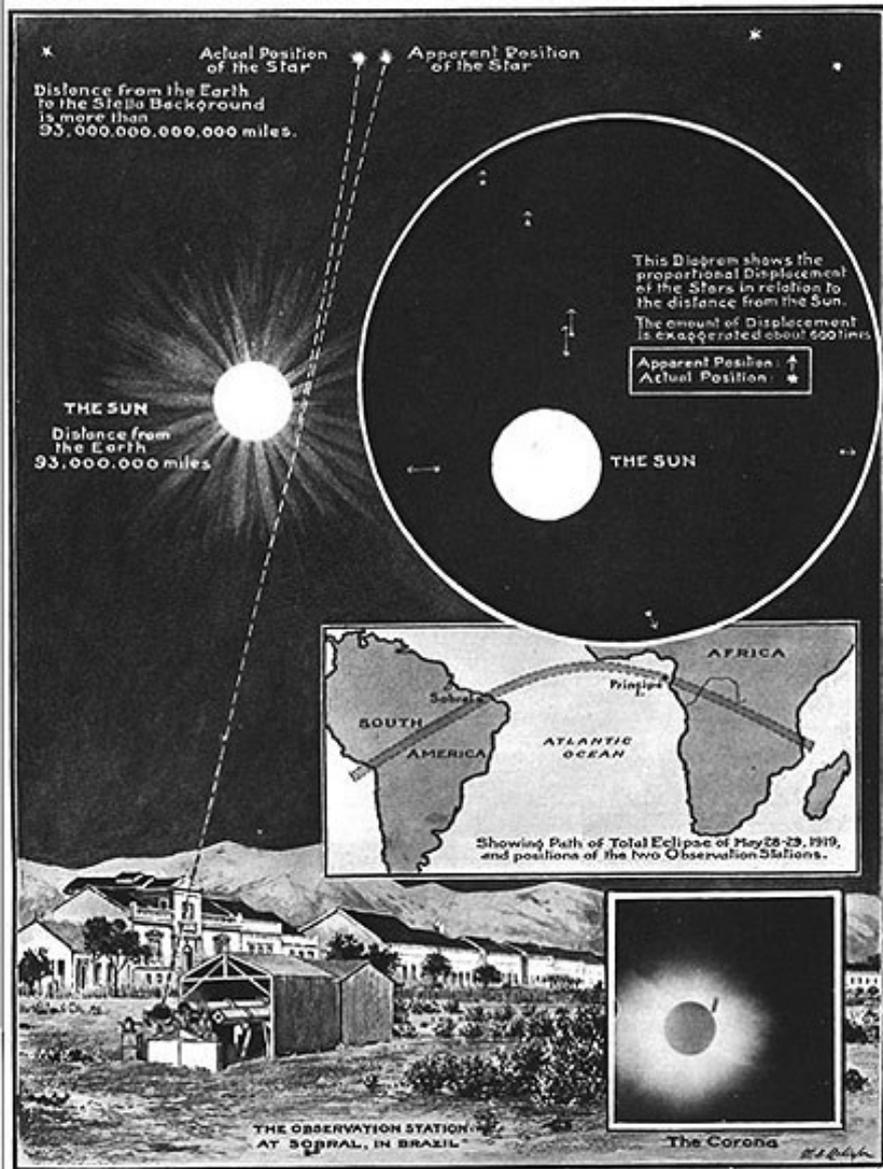
Men of Science More or Less  
Agog Over Results of Eclipse  
Observations.

EINSTEIN THEORY TRIUMPHS

Stars Not Where They Seemed  
or Were Calculated to be,  
but Nobody Need Worry.

A BOOK FOR 12 WISE MEN

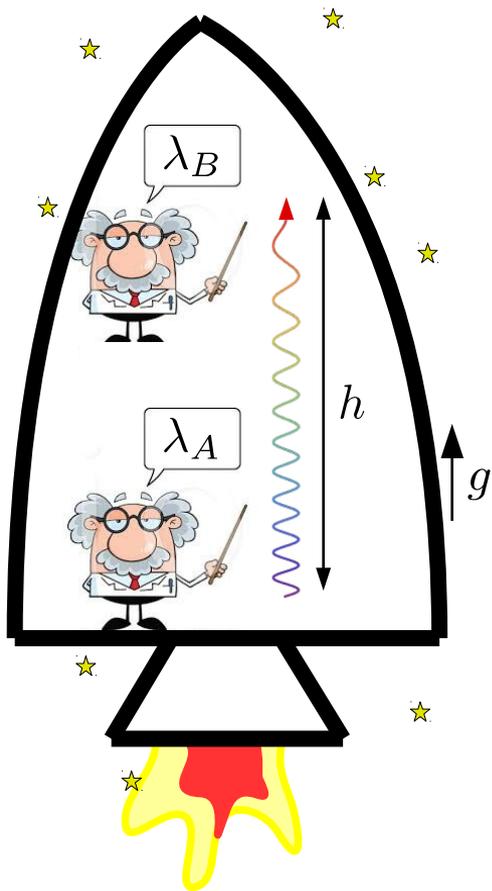
No More in All the World Could  
Comprehend It, Said Einstein When  
His Daring Publishers Accepted It.



Veja palestra no programa Ciência às 19h:  
<http://ciencia19h.ifsc.usp.br/ciencia19hwp/todas-as-luzes-se-curve-no-firmamento-100-anos-do-eclipse-que-transformou-einstein-numa-celebridade/>

# “Redshift” gravitacional

Pelo princípio da equivalência, fótons gravitam. Por conservação de energia, então também se deslocam para o vermelho ao “subirem” no campo gravitacional.

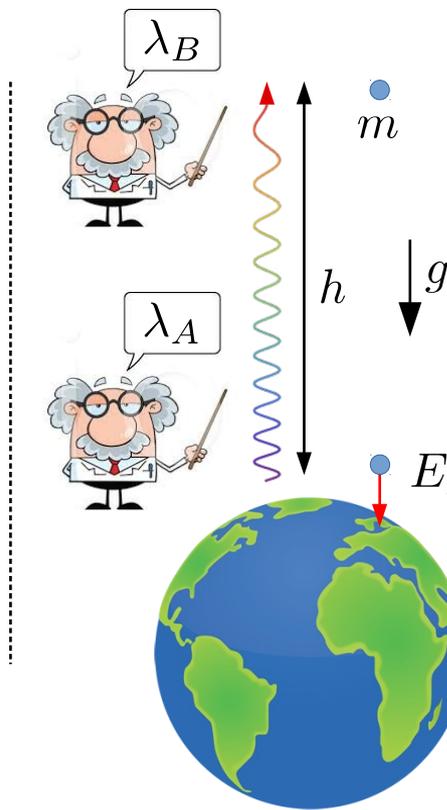


Efeito Doppler não-relativístico:

$$z = \frac{\lambda_B - \lambda_A}{\lambda_A}$$

$$\approx \frac{(1 + \frac{v}{c}) \lambda_A - \lambda_A}{\lambda_A}$$

$$= \frac{v}{c} = \frac{gt}{c} = \frac{gh}{c^2}$$



Imagine que o fóton é convertido numa partícula de massa  $m$  que depois cai no campo gravitacional:

$$z = \frac{E_B^{-1} - E_A^{-1}}{E_A^{-1}} = \frac{E_A}{E_B} - 1$$

$$= \frac{gh}{c^2}$$

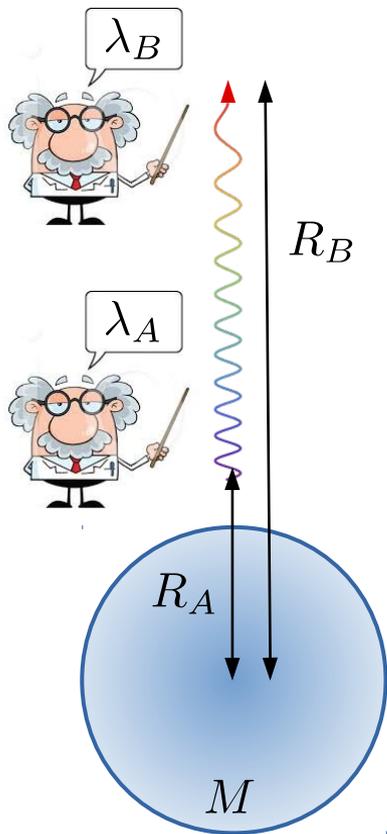
$$E_A = E_B + mgh$$

$$\approx m_0 c^2 + m_0 gh$$

$$= E_B \left( 1 + \frac{gh}{c^2} \right)$$

# “Redshift” gravitacional

Para campos gravitacionais fortes, necessita-se resolver as equações de Einstein. Para o caso de uma massa não-girante esfericamente simétrica → métrica de Schwarzschild.



$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2$$

“Redshift”:

$$z + 1 = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_s}{R_B}}{1 - \frac{r_s}{R_A}}}$$

Raio de Schwarzschild

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

$\tau$ : tempo próprio de uma partícula teste (geodésica).

$t$ : coordenada tempo medida por um observador no infinito.

$r$ : coordenada radial.

$\theta$ : ângulo polar (em radianos).

$\phi$ : ângulo azimutal (em radianos).

OBS: No limite  $R_B - R_A = h \ll R_A$  e  $R_A \gg r_s$ , recupera-se o resultado aproximado do slide anterior.

# Dilatação temporal gravitacional

O tempo para observadores parados em relação à superfície de um corpo massivo é mais lento. (Pelo princípio da equivalência, esses observadores estão acelerados em relação à referenciais inerciais.)

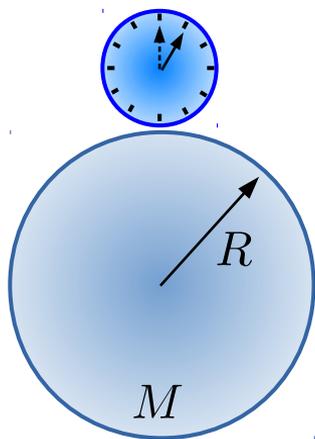


Dilatação gravitacional:

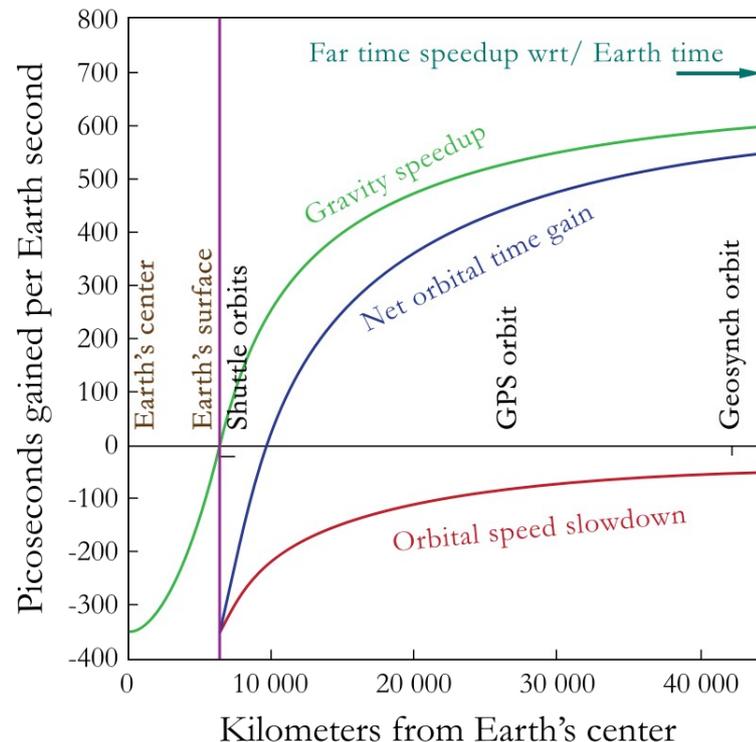
$$\frac{t_R}{t} = \sqrt{1 - \frac{r_s}{R}}$$

$t_R$ : tic do relógio de um observador sobre um corpo massivo de raio  $R$ .  
 $t$ : tempo correspondente para um observador no infinito.

Tempo “acumulado” em 1 ano:  
 $1 \text{ ano}_{\text{infinito}} - 1 \text{ ano}_{\text{sup. da Terra}} = 0,02 \text{ s}$   
 $1 \text{ ano}_{\text{infinito}} - 1 \text{ ano}_{\text{sup. do Sol}} = 67 \text{ s}$



Time Dilation Effects on Earth



# Modificação da 1ª lei de Kepler

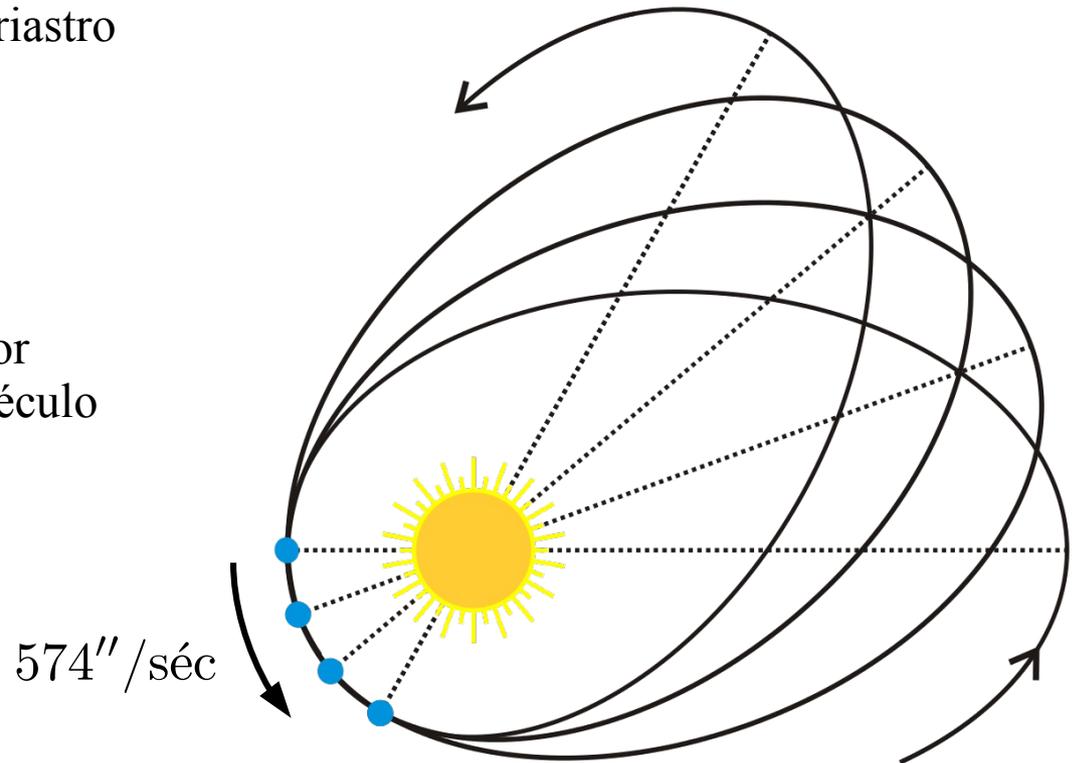
As órbitas não são elipses → precessão do periastro

Precessão do periélio de Mercúrio.

Observado:  $574.10 \pm 0.65$  arcsec/século

Predição Newtoniana (planetas externos, maior contribuição vem de Júpiter): 532.30 arcsec/século

Predição relativística: 42.98 arcsec/século

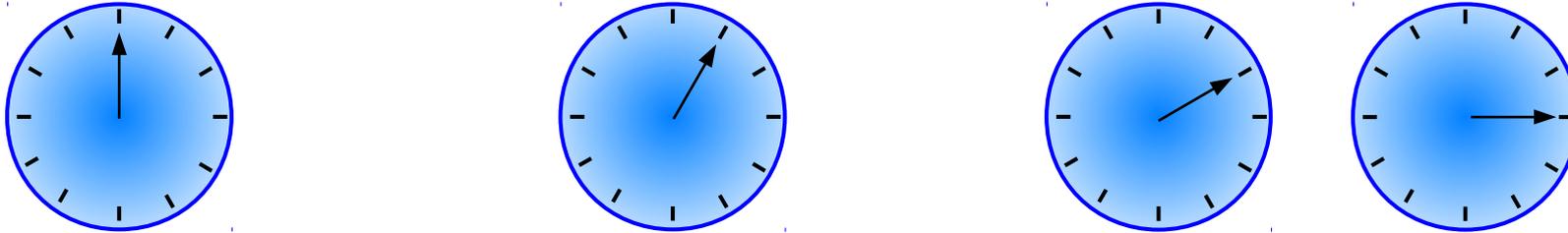


# Caindo num buraco negro

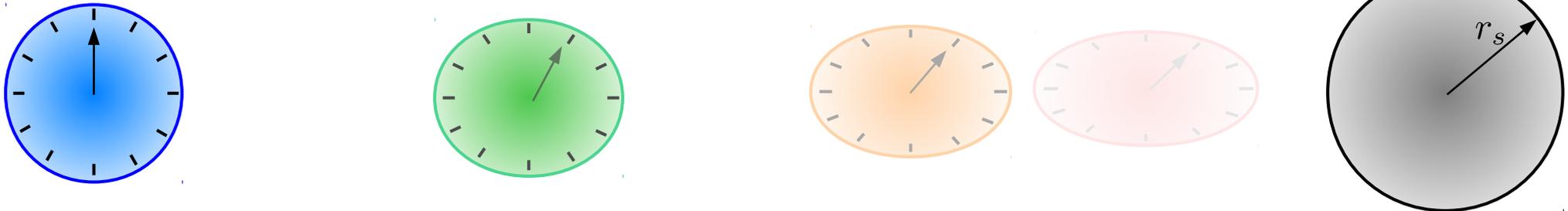
Métrica de Schwarzschild  $\rightarrow$  horizonte de eventos

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2$$

Relógio no infinito



Relógio em queda livre como visto pelo referencial no infinito: “redshift” e espaguetificação (sem cruzar o horizonte)



# Termodinâmica de um buraco negro

Entropia:

$$S = \frac{k_B A}{4\ell_P^2}, \quad \ell_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-35} \text{ m} \equiv \text{comprimento de Planck}$$

Buracos negros emitem radiação (Hawking) que, vista do infinito, tem espectro de **corpo negro com temperatura**

$$k_B T = \frac{\hbar \kappa}{2\pi c}, \quad \kappa = \frac{c^4}{4GM} \equiv \text{gravidade no horizonte}$$

$$\Rightarrow T \approx 6 \times 10^{-8} \text{ K} \left( \frac{M_\odot}{M} \right)$$

Pares virtuais partícula/anti-partícula se tornam reais pelas forças de maré do buraco negro → radiação Hawking

