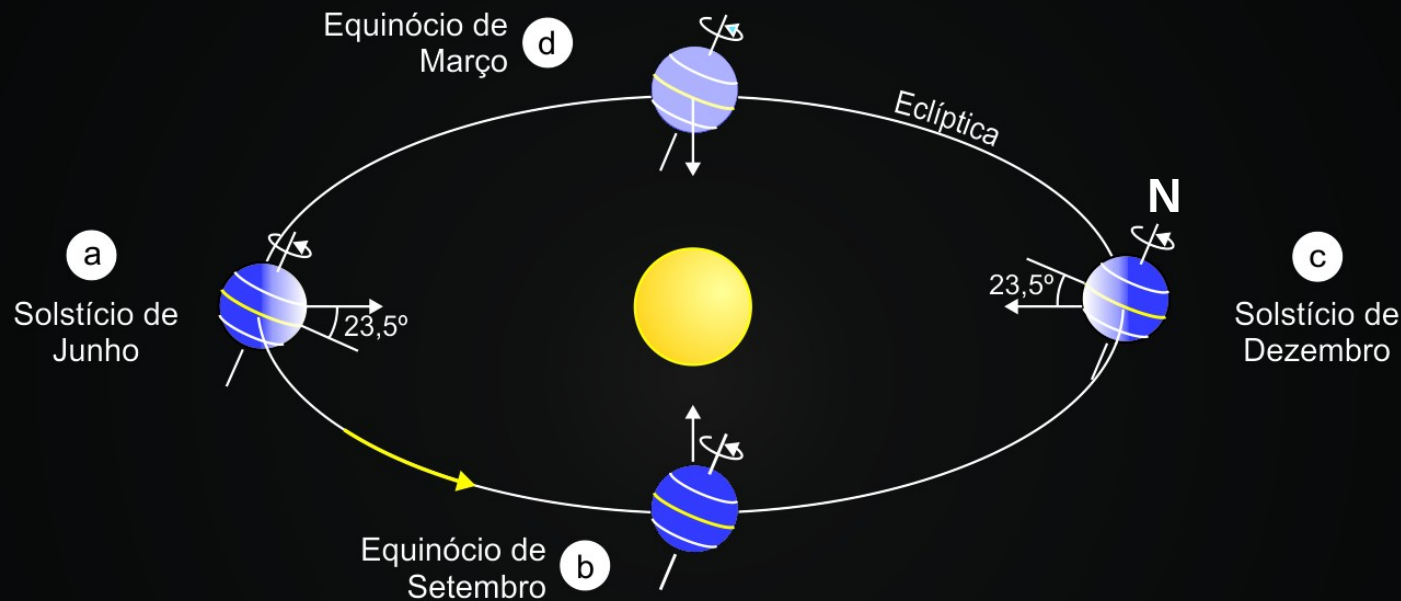


Movimento anual do Sol

Além do movimento de rotação da Terra (causadora do movimento diurno dos astros) há ainda o movimento de **translação** da Terra em volta o Sol.



Eclíptica: plano da órbita terrestre.

Ângulo entre a eclíptica e o eixo de rotação da Terra

$$\theta_c \approx 23^\circ 27' \approx 23.5^\circ$$

Semi-eixo maior:

$$\begin{aligned} a &= 149\,598\,261 \text{ Km} \\ &= 1.000\,002\,61 \text{ UA} \end{aligned}$$

Excentricidade:

$$e = 0.01671123$$

a
Trópico de Câncer
voltado para o Sol

b
Equador voltado
para o Sol.

c
Trópico de Capricórnio
voltado para o Sol.

d
Equador voltado
para o Sol.

Movimento do Sol por causa da translação

γ ~ 21/março: Sol cruza o equador HS→HN
equinócio de primavera (outono) no HN (HS)

$$\alpha_{\odot} = \delta_{\odot} = 0^{\circ}$$

~ 22/junho: Sol na máxima inclinação Norte
solstício de verão (inverno) no HN (HS)

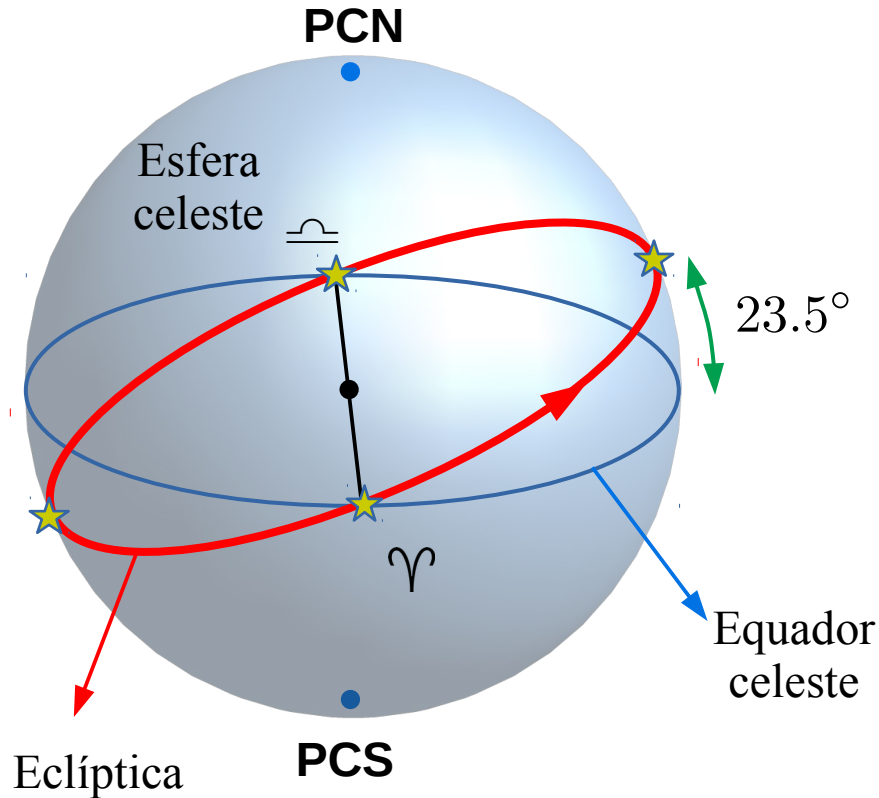
$$\alpha_{\odot} = 90^{\circ}, \quad \delta_{\odot} = 23.5^{\circ}$$

$\cap$ ~ 23/setembro: Sol cruza o equador HN→HS
equinócio de outono (primavera) no HN (HS)

$$\alpha_{\odot} - 180^{\circ} = \delta_{\odot} = 0^{\circ}$$

~ 22/dezembro: Sol na máxima inclinação Sul
solstício de inverno (verão) no HN (HS)

$$\alpha_{\odot} = -90^{\circ}, \quad \delta_{\odot} = -23.5^{\circ}$$



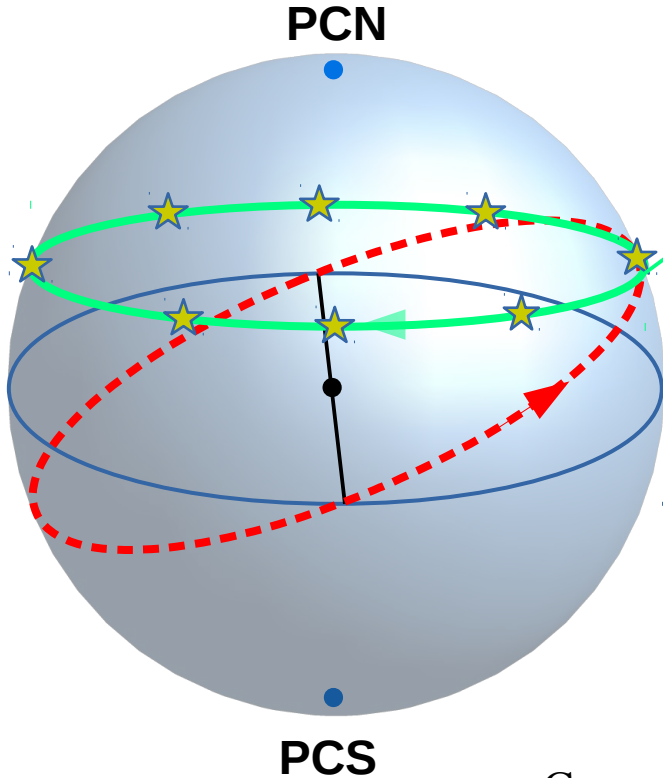
O Sol percorre a eclíptica de **Oeste→Leste** com velocidade $\approx$ constante.

Movimento do Sol (translação+rotação)

Movimento do diurno do Sol é sobre o
Trópico de Câncer

~ 22/junho: Sol na máxima inclinação Norte
solstício de verão (inverno) no HN (HS)

$$\alpha_{\odot} = 90^{\circ}, \quad \delta_{\odot} = 23.5^{\circ}$$

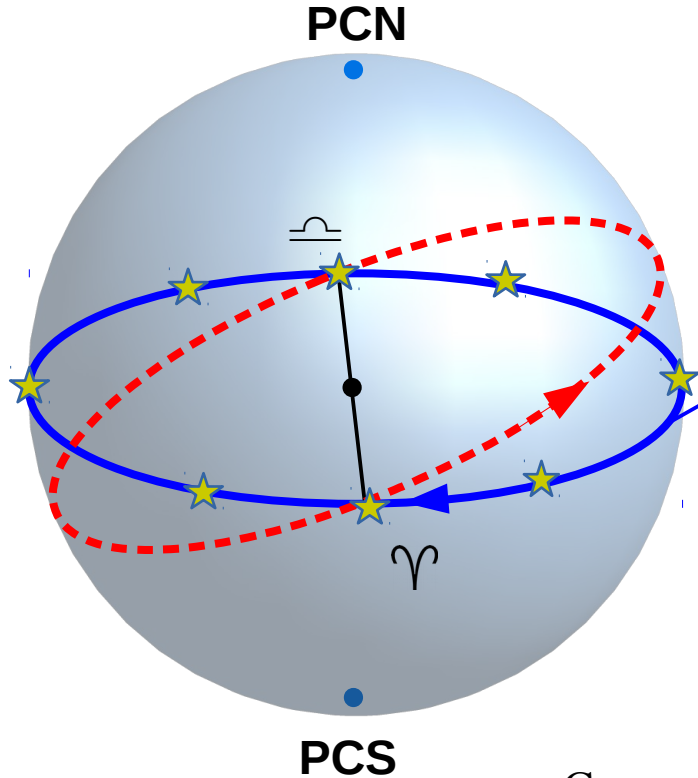


Como os outros astros, o movimento diurno do Sol é um círculo paralelo na esfera celeste percorrido de **Leste→Oeste**.

Movimento do Sol (translação+rotação)

γ ~ 21/março: Sol cruza o equador HS→HN
equinócio de primavera (outono) no HN (HS)

$$\alpha_{\odot} = \delta_{\odot} = 0^{\circ}$$



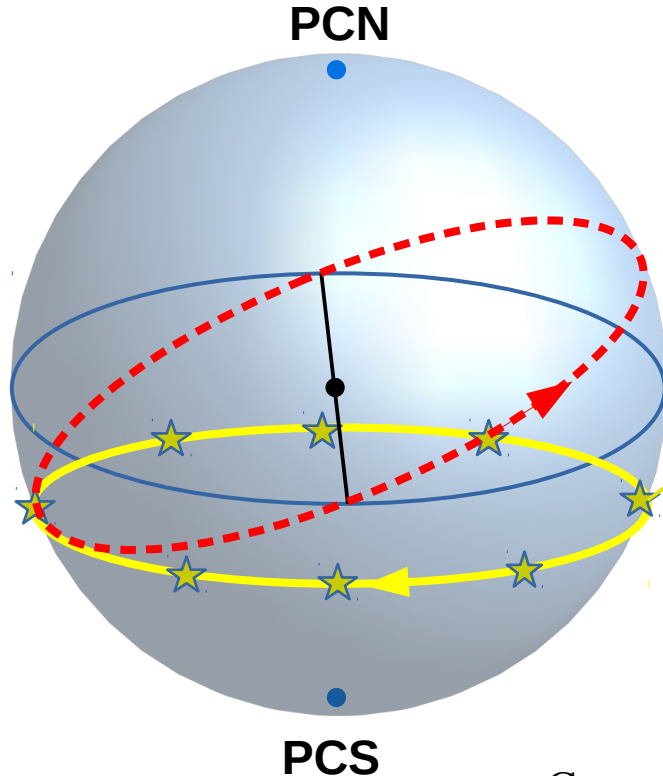
Movimento do diurno do Sol é sobre o
Equador

$\equiv$ ~ 23/setembro: Sol cruza o equador HN→HS
equinócio de outono (primavera) no HN (HS)

$$\alpha_{\odot} - 180^{\circ} = \delta_{\odot} = 0^{\circ}$$

Como os outros astros, o movimento diurno do Sol é um círculo paralelo na esfera celeste percorrido de **Leste→Oeste**.

Movimento do Sol (translação+rotação)



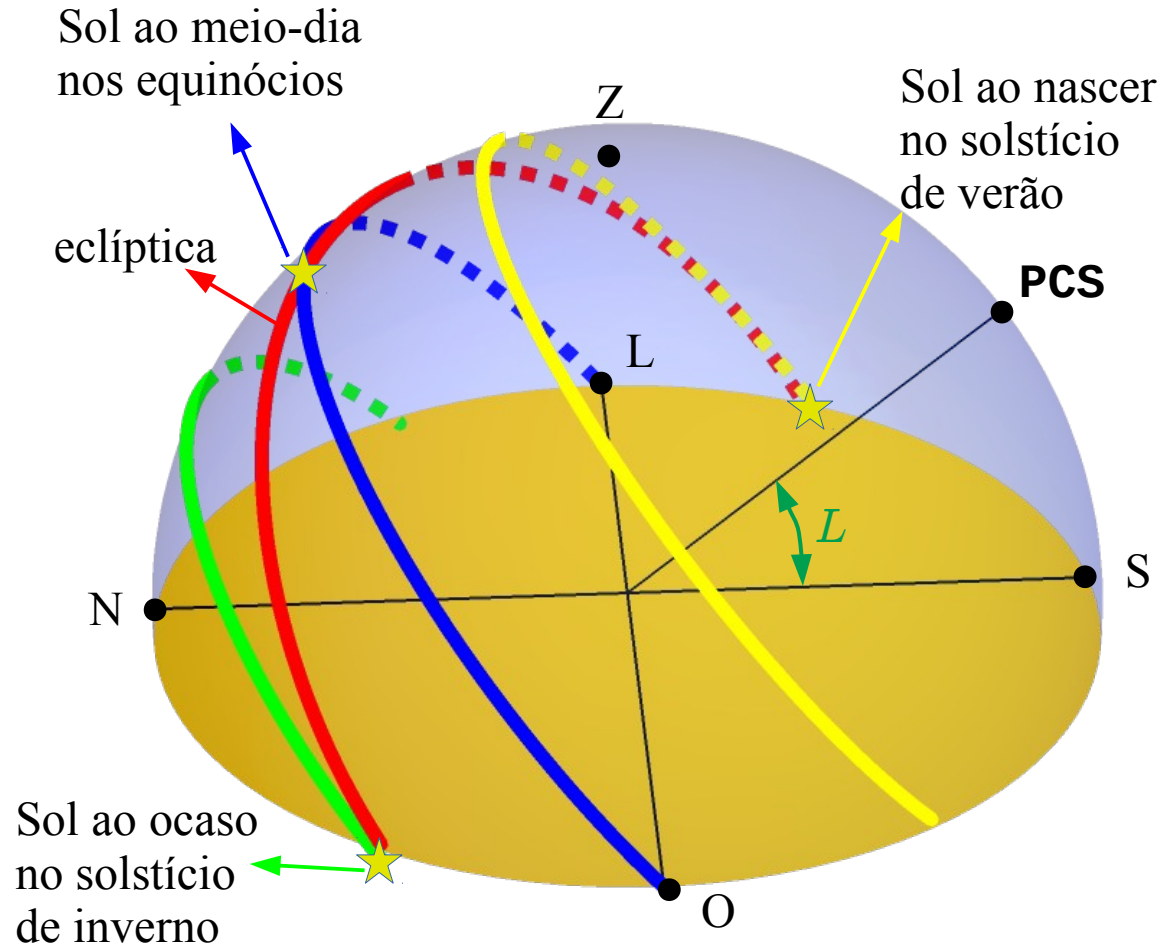
Movimento do diurno do Sol é sobre o
Trópico de Capricórnio

~ 22/junho: Sol na máxima inclinação Sul
solstício de inverno (verão) no HN (HS)

$$\alpha_{\odot} = -90^{\circ}, \quad \delta_{\odot} = -23.5^{\circ}$$

Como os outros astros, o movimento diurno do Sol é um círculo paralelo na esfera celeste percorrido de **Leste→Oeste**.

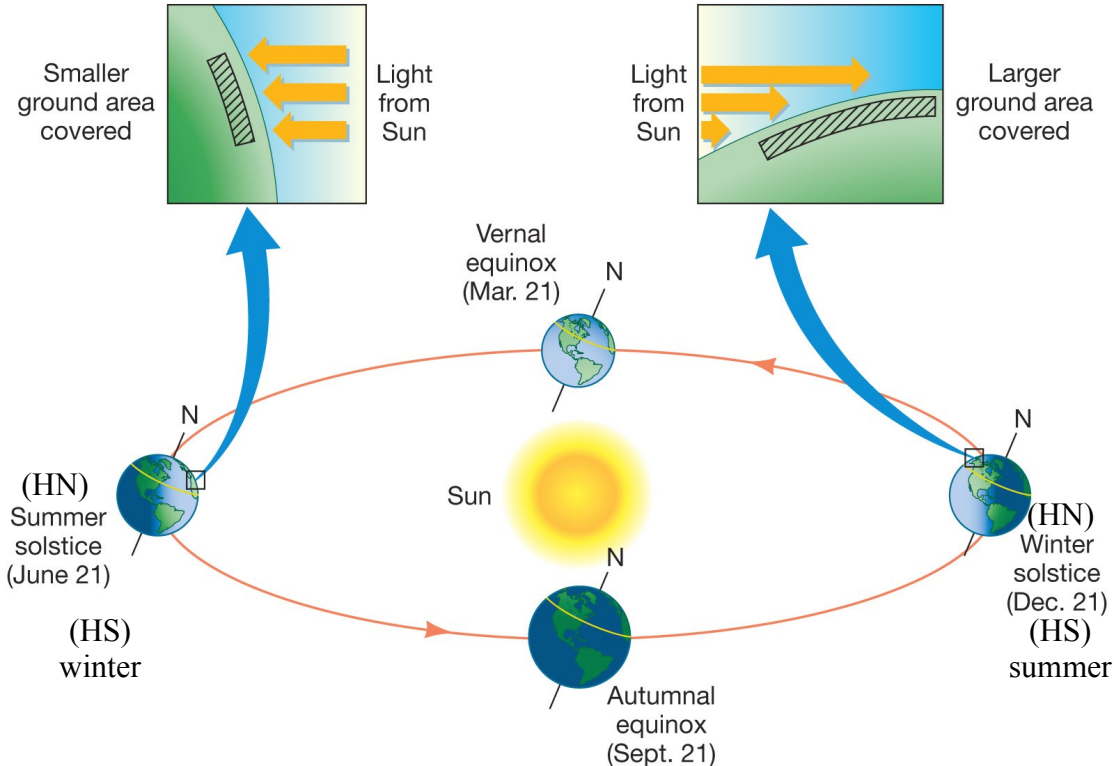
Movimento do Sol (translação+rotação)



O movimento do Sol sobre a esfera celeste é a combinação do movimento de rotação sobreposto ao movimento anual de translação. Em outras palavras, o Sol “percorre” a eclíptica com velocidade angular aproximadamente constante de 360° por ano (Oeste→Leste) enquanto a eclíptica gira em torno do eixo celeste com velocidade angular de 360° por dia (Leste→Oeste).

Mostrar simulador [sunmotions.swf](#)

Movimento anual do Sol: estações do ano



Copyright © 2007 Pearson Prentice Hall, Inc.

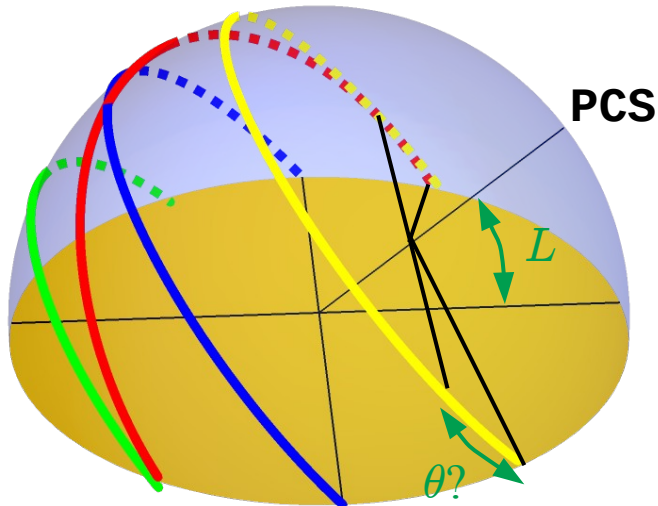
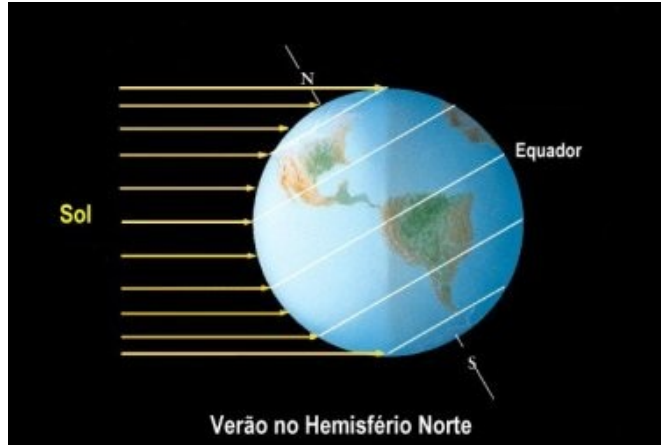
Dois fatores contribuem para as estações:

- 1) Dias mais longos/curtos.
- 2) Maior/menor intensidade da energia luminosa solar incidente.

Esses dois fatores estão interligados. Eles possuem a mesma origem: a inclinação do eixo de rotação em relação à eclíptica.

Note que esses dois fatores dependem da latitude. Portanto, as estações do ano dependem da região da Terra em questão.

Estações do ano: dias mais longos/curtos

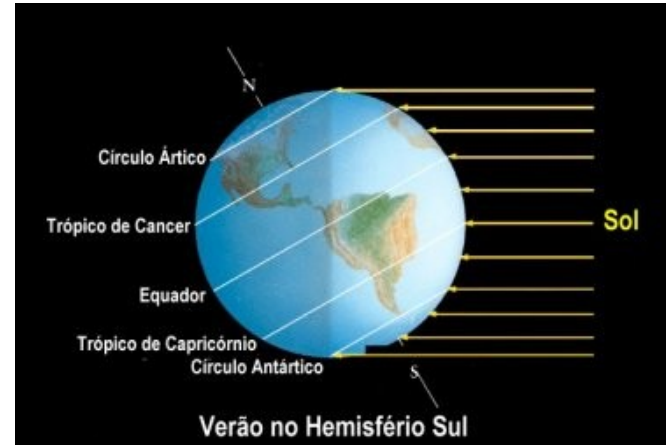
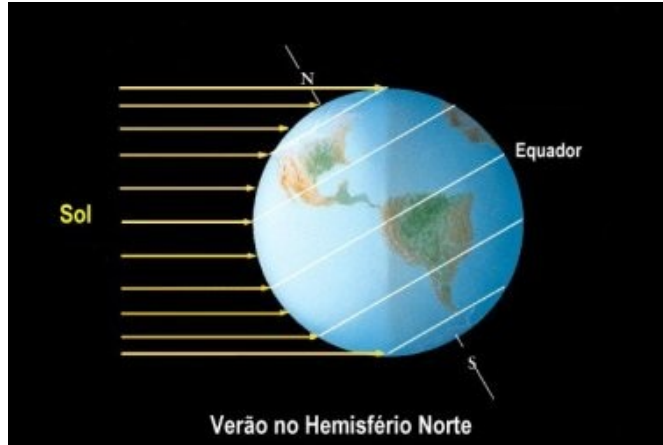


Desafio: A figura ao lado mostra o movimento diurno do Sol em uma região de latitude (SUL) L durante o dia de solstício de verão do HS (em amarelo). Mostre que o ângulo $\theta = \arcsin(\tan(L) \tan(23.5^\circ))$.

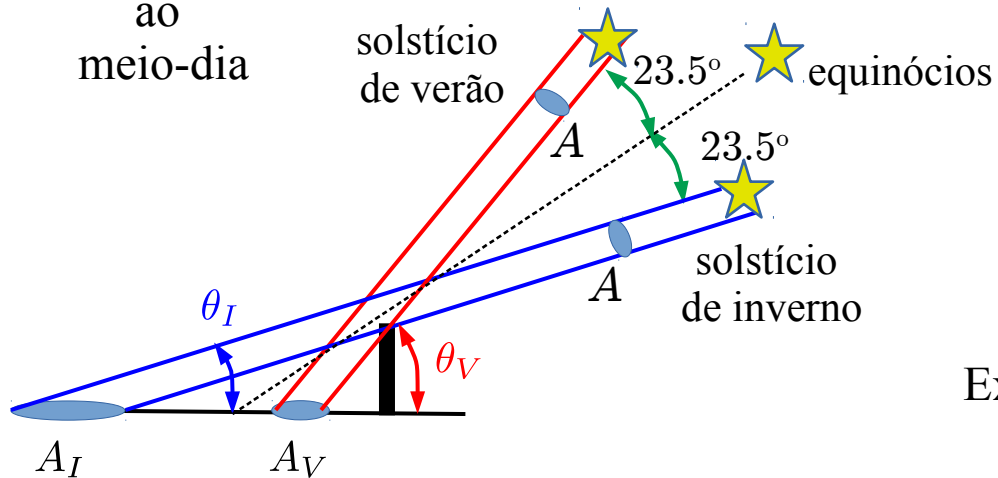
Neste dia, o (centro do) Sol ficará acima do horizonte por um período equivalente a 2θ .

(Ex.: se $\theta = 15^\circ \rightarrow 1\text{h}$, então o centro do Sol ficará acima do horizonte por $12\text{h} + 2\text{h} = 14\text{h}$.)

Estações do ano: maior/menor incidência de luz



Insolação
ao
meio-dia



$$\frac{I_V}{I_I} = \frac{P/A_V}{P/A_I} = \frac{A_I}{A_V} = \frac{\sin \theta_V}{\sin \theta_I}$$

$$= \left| \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - |L| + 23.5^\circ \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - |L| - 23.5^\circ \right)} \right|$$

Ex: $L = 22^\circ$, $\frac{I_V}{I_I} \approx 1.43$

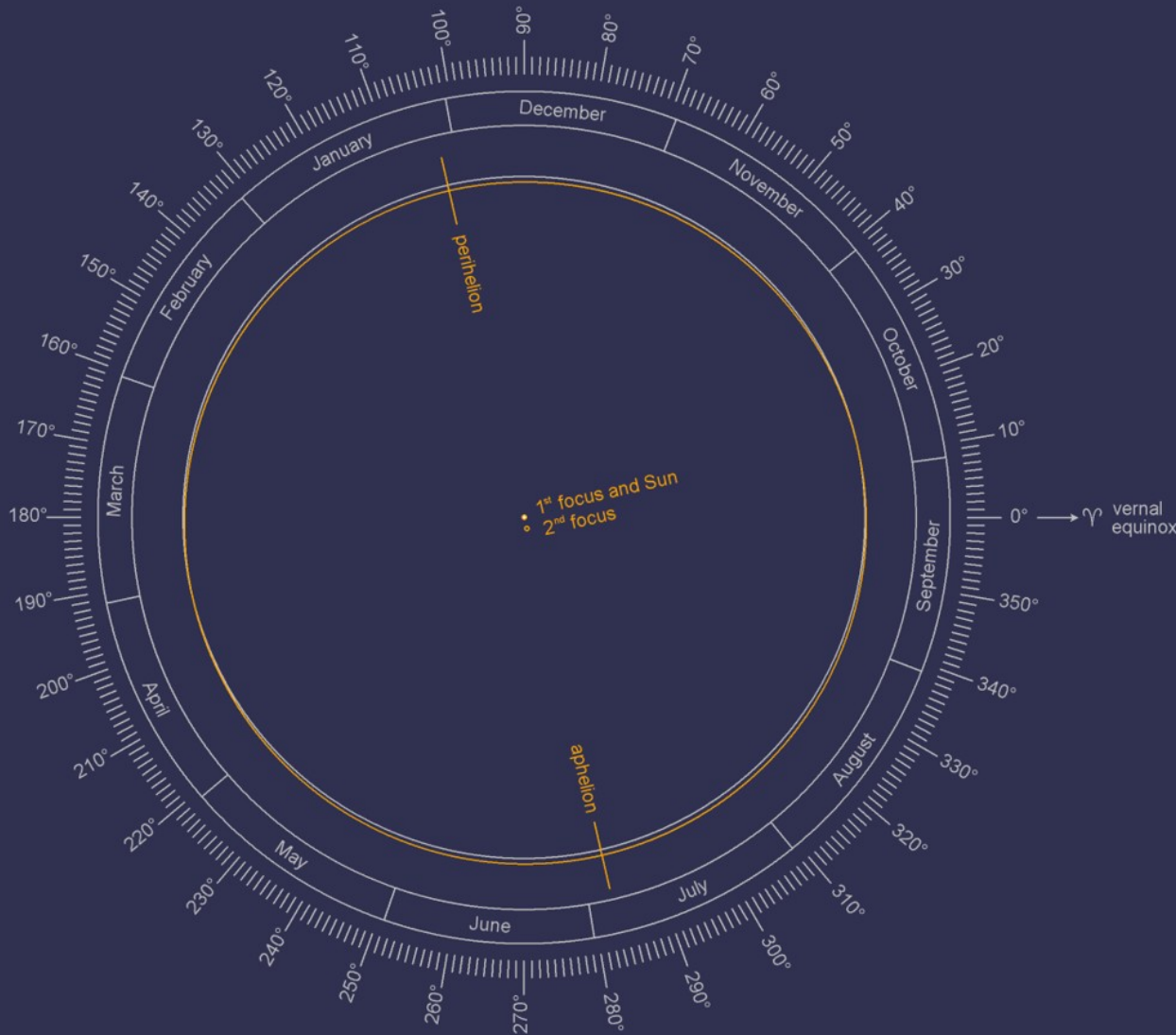
$L = 41^\circ$, $\frac{I_V}{I_I} \approx 2.22$

Estações do ano: excentricidade da órbita?

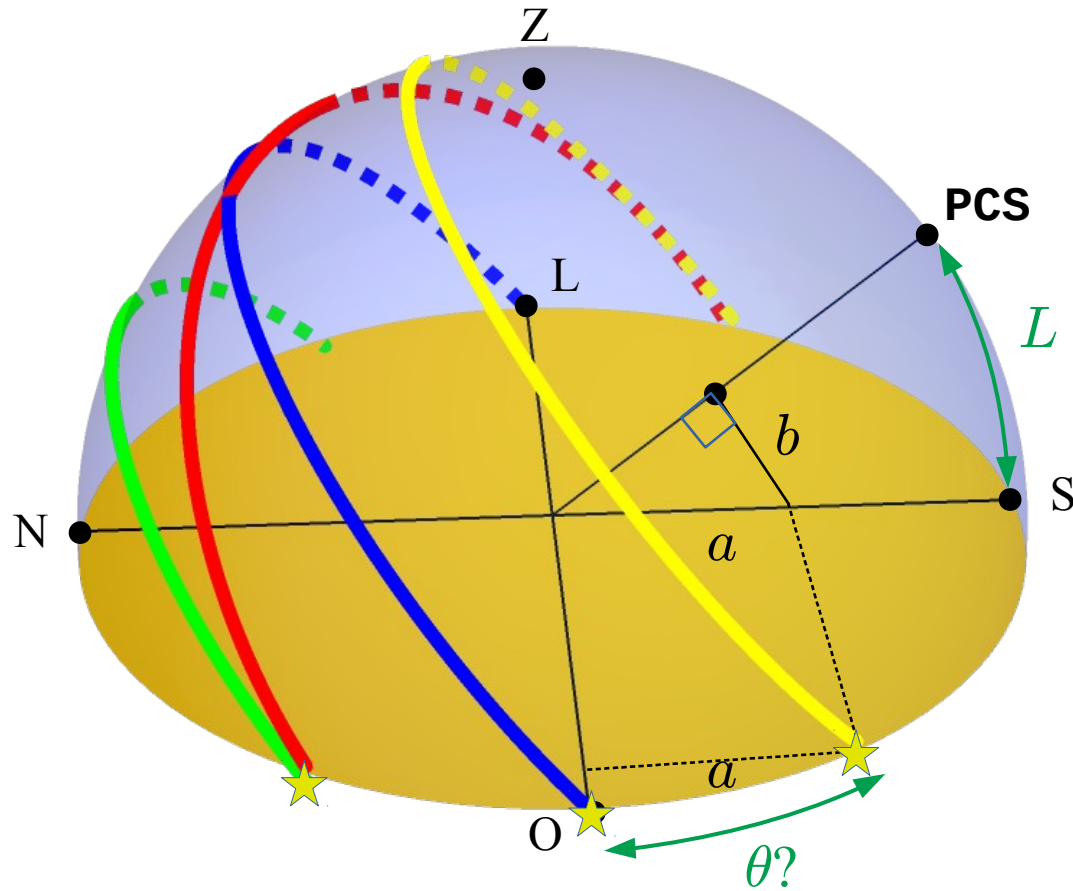
$$e \approx 0.0167086$$

$$\begin{aligned}\frac{I_P}{I_A} &= \frac{P/4\pi d_P^2}{P/4\pi d_A^2} = \left(\frac{d_A}{d_P}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 \approx 0.97^2 \approx 0.94\end{aligned}$$

As distâncias Sol-Terra no afélio e no periélio diferem de apenas 3% (órbita quase circular). Na constante solar, isso provoca uma diferença de apenas 6%.



Movimento “pendular” do Sol



O Sol não nasce e se põe exatamente no Leste ao longo do ano. Ele descreve um movimento “pendular” cuja amplitude θ é:

$$\sin \theta = \frac{a}{R}, \quad a = \frac{b}{\sin L},$$

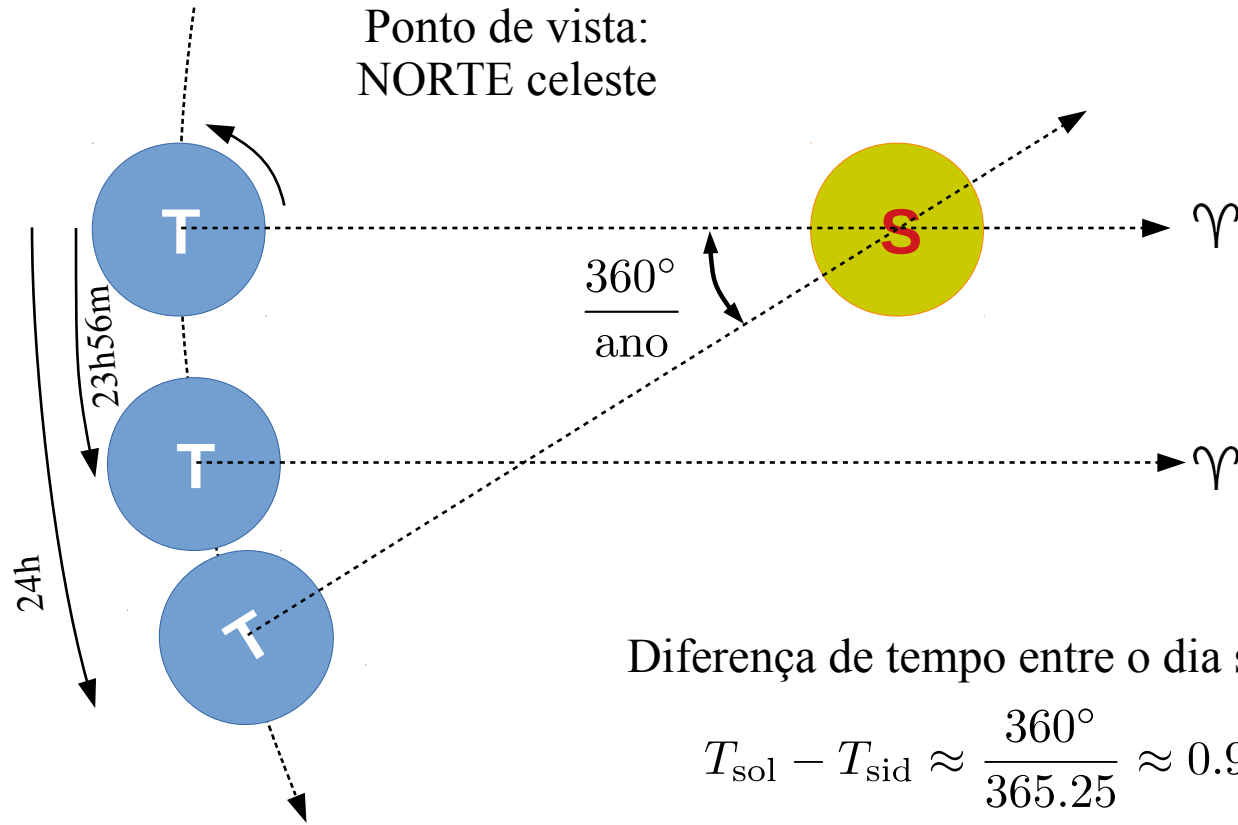
$$b = R \sin (23.5^\circ) \tan L$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{\sin (23.5^\circ)}{\cos L}$$

Discussão

- 1) Como são as estações nas latitudes equatoriais (zona tropical)?
- 2) Como seriam as estações se o eixo de rotação da Terra estivesse contido na eclíptica?

Dia sideral e dia solar



Dia sideral: é o intervalo de tempo entre duas passagens sucessivas do ponto Vernal pelo meridiano local, isto é, duas **culminações** consecutivas do ponto Vernal (23h 56m 4,0905s ou 23,9344696 h).

Dia solar: é o intervalo de tempo decorrido entre duas **culminações** consecutivas do Sol (24h).

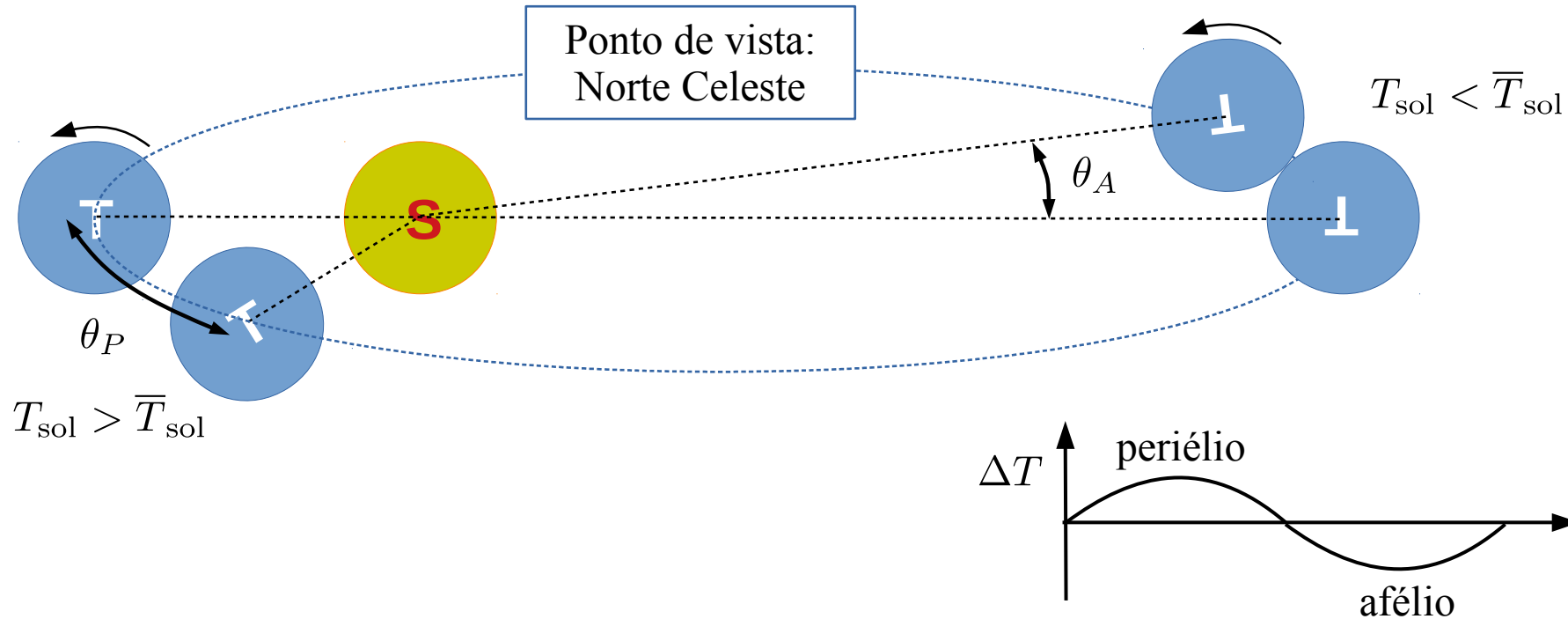
Diferença de tempo entre o dia solar e o dia sideral:

$$T_{\text{sol}} - T_{\text{sid}} \approx \frac{360^\circ}{365.25} \approx 0.9856^\circ \leftrightarrow 3\text{m}57\text{s}$$

OBS. 1: Os dias solares não são isócronos porque (i) a velocidade da Terra em torno do Sol não é constante e (ii) o eixo de rotação da Terra está inclinado com a eclíptica. (**Analema**)

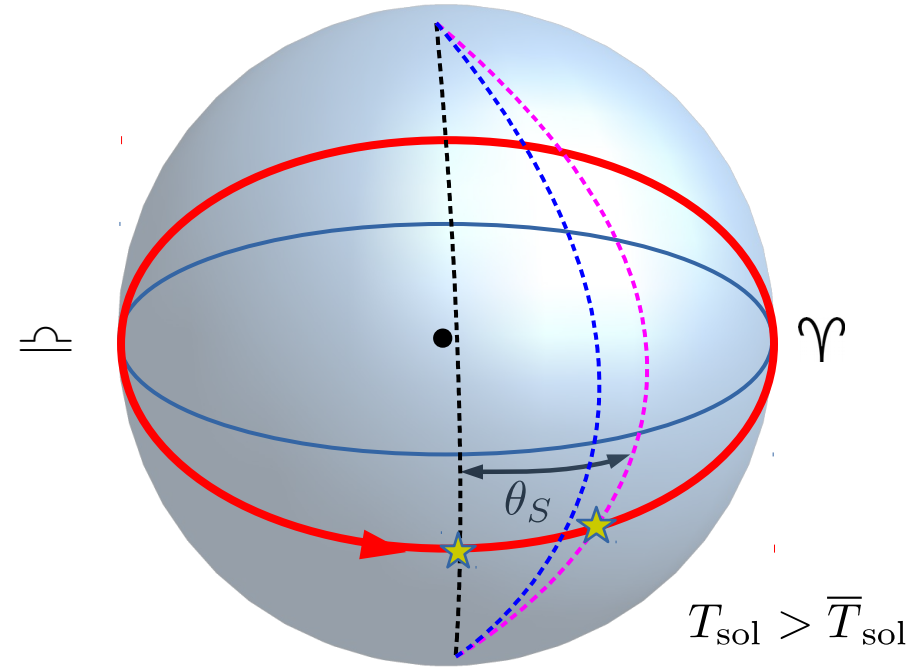
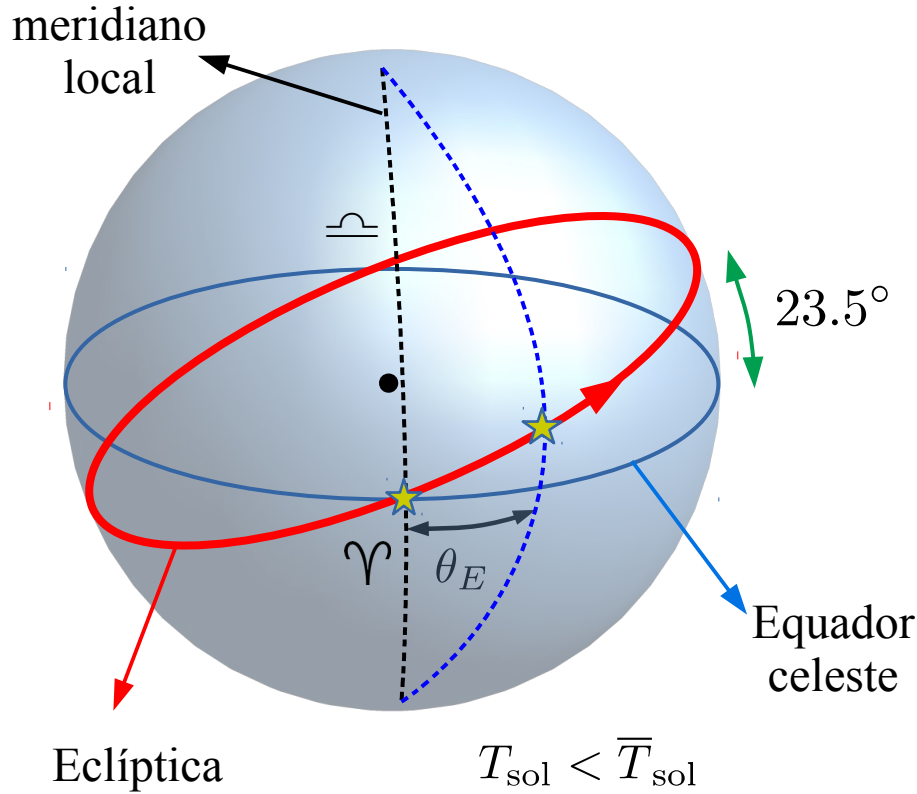
OBS. 2: Os dias siderais não são isócronos porque a velocidade angular de rotação da Terra não é constante. (**Marés**)

Dia solar e a excentricidade

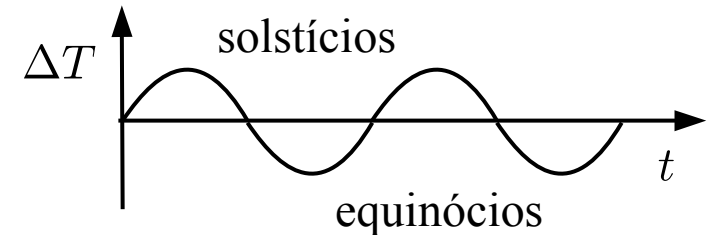


Pela **lei das áreas** (Kepler), o dia solar é **mais curto no afélio** do que no periélio. ($\theta_A < \theta_P$)

Dia solar e a obliquidade

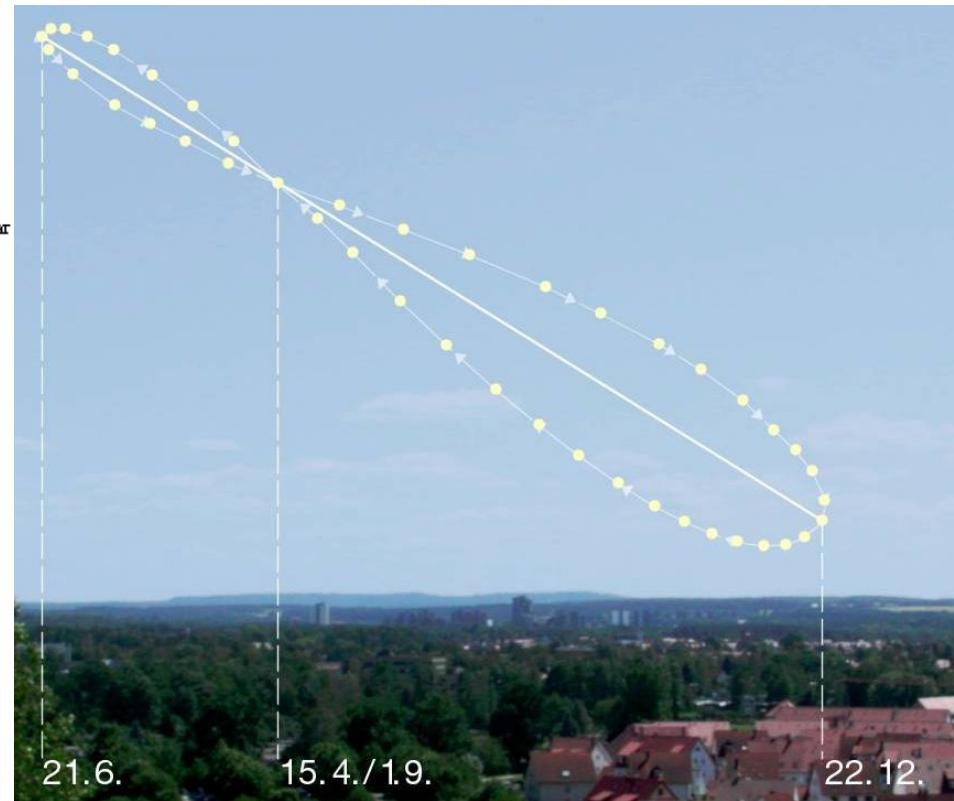
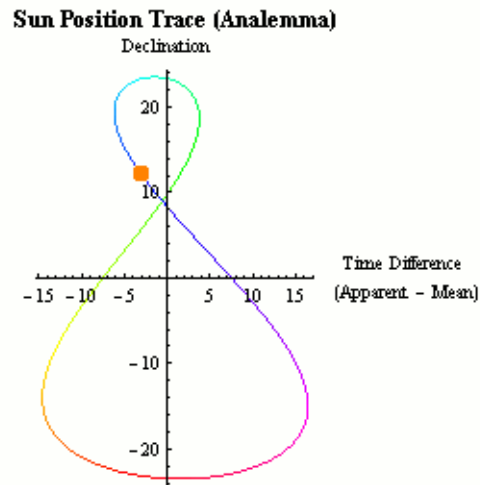
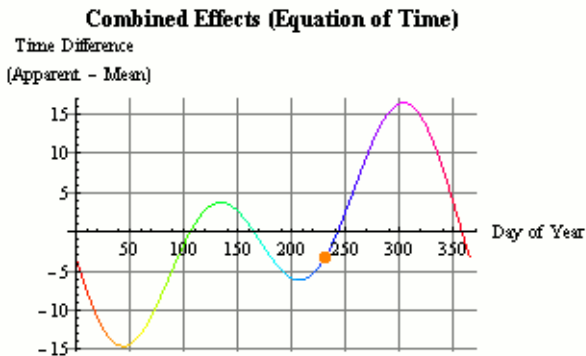
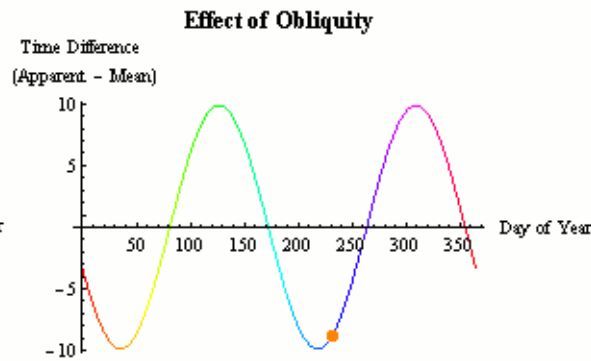
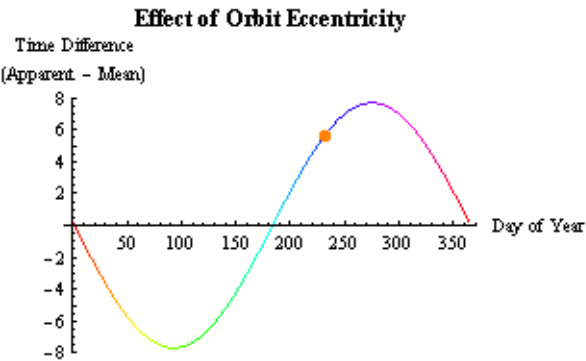


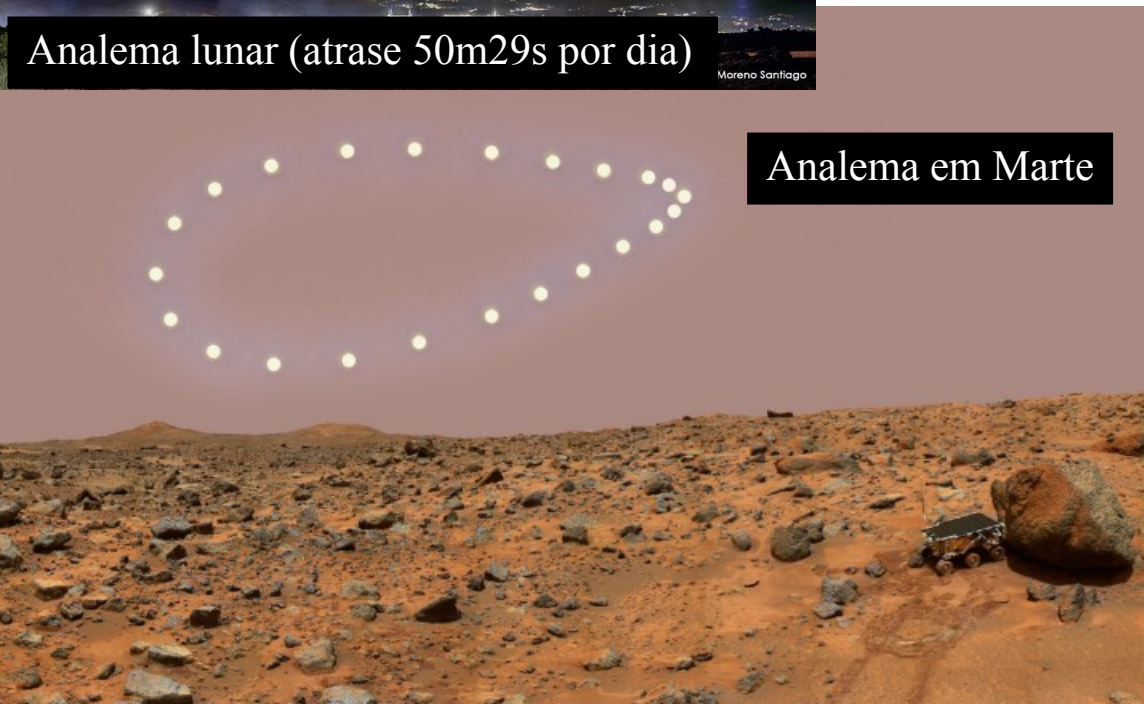
Por causa da obliquidade entre o eixo de rotação e a eclíptica, o dia solar é **mais curto nos equinócios** ($\theta_E < \theta_S$)



Analema

Figura em forma de “8” da posição do Sol ao longo do ano no mesmo horário solar médio.





<https://apod.nasa.gov/apod/ap161221.html>

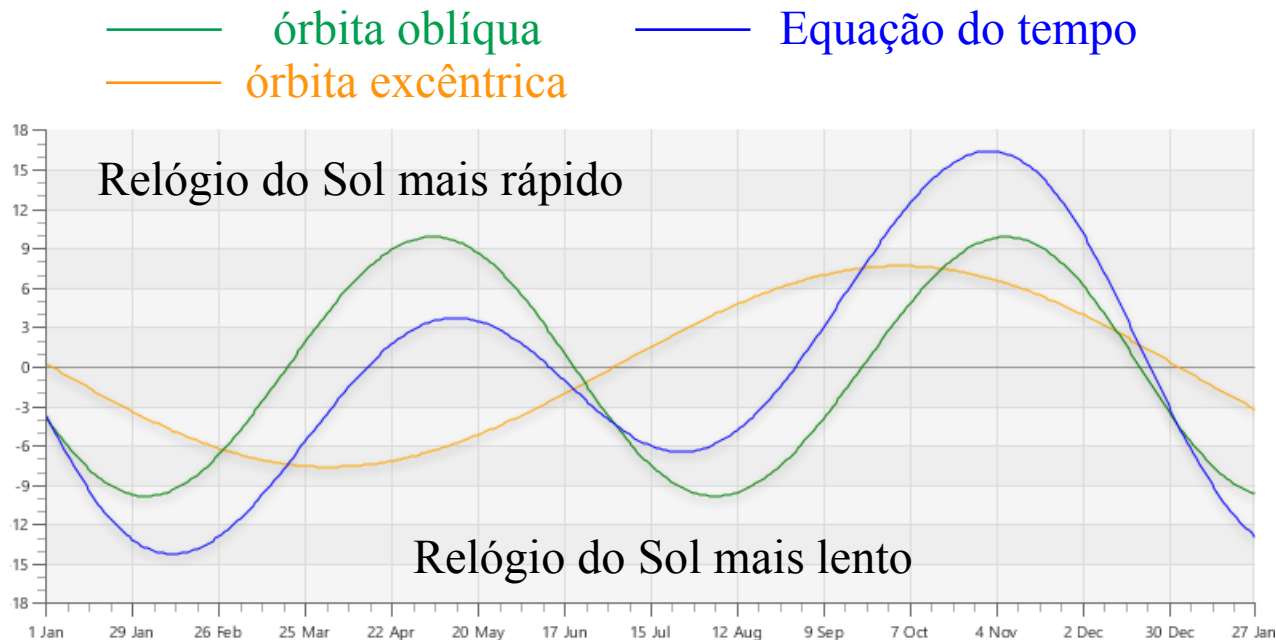
Tempo solar verdadeiro e médio

Tempo solar verdadeiro: é o ângulo horário (H , vide coordenadas horizontais) do **centro** do Sol.

Tempo solar médio: é o ângulo horário do centro do **Sol médio**. O Sol médio (fictício) é aquele que se move ao longo do Equador celeste com velocidade angular constante. Logo, os dias solares médios são todos iguais.

Equação do Tempo: é a diferença entre o Tempo Solar Verdadeiro e o Tempo Solar Médio.

$$ET = H_{\text{sol}} - H_{\text{sol}}^{\text{m}} \quad \text{onde } H_{\text{sol}}^{\text{m}} \text{ é o horário médio do Sol médio}$$



Exercício

A analema da figura abaixo é de que hemisfério e de que período do dia?

- 1) HN, manhã
- 2) HN, tarde
- 3) HS, manhã
- 4) HS, tarde
- 5) Compatível com 1) e 4)
- 6) Compatível com 2) e 3)

Podemos descobrir a latitude e hora?

- 7) Sim
- 8) Não



Calendários

Ano sideral: é o período de revolução da Terra em torno do Sol com relação às estrelas, igual à 365,2564 dias solares médios, ou 365d 6h 9m 10s.

Ano tropical: é o período de revolução da Terra em torno do Sol com relação ao Equinócio Vernal, isto é, com relação ao início da estações, e é igual a 365,2422 dias solares médios, ou 365d 5h 48m 46s.

Por que são diferentes? Devido ao movimento de **precessão** do eixo de rotação da Terra, isto é, do deslocamento lento dos polos em relação às estrelas, o ano tropical é levemente menor do que o ano sideral.

O **calendário** atual (Gregoriano) se baseia no ano tropical.

$$365.2422 = 365.2425 - 0.0003 = 365 + 0.25 - 0.01 + 0.0025 - 0.0003$$

$$\approx 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} - \frac{1}{3333}$$

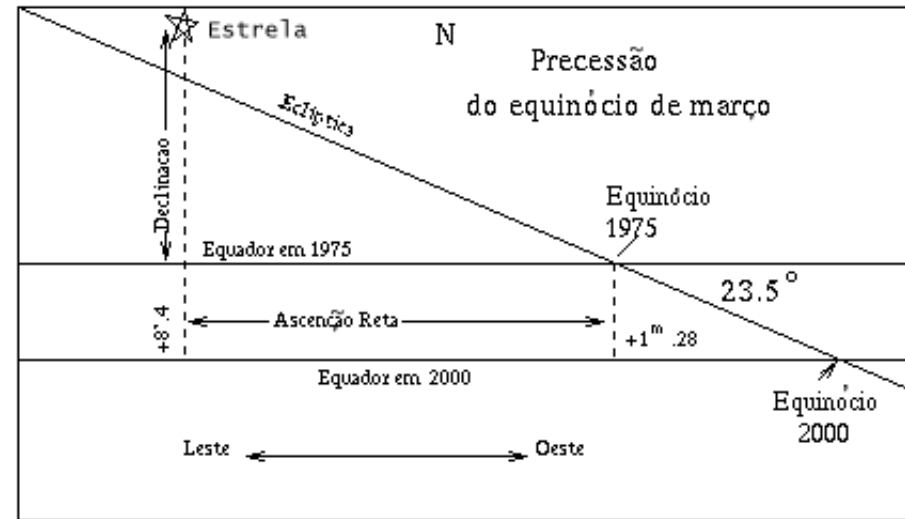
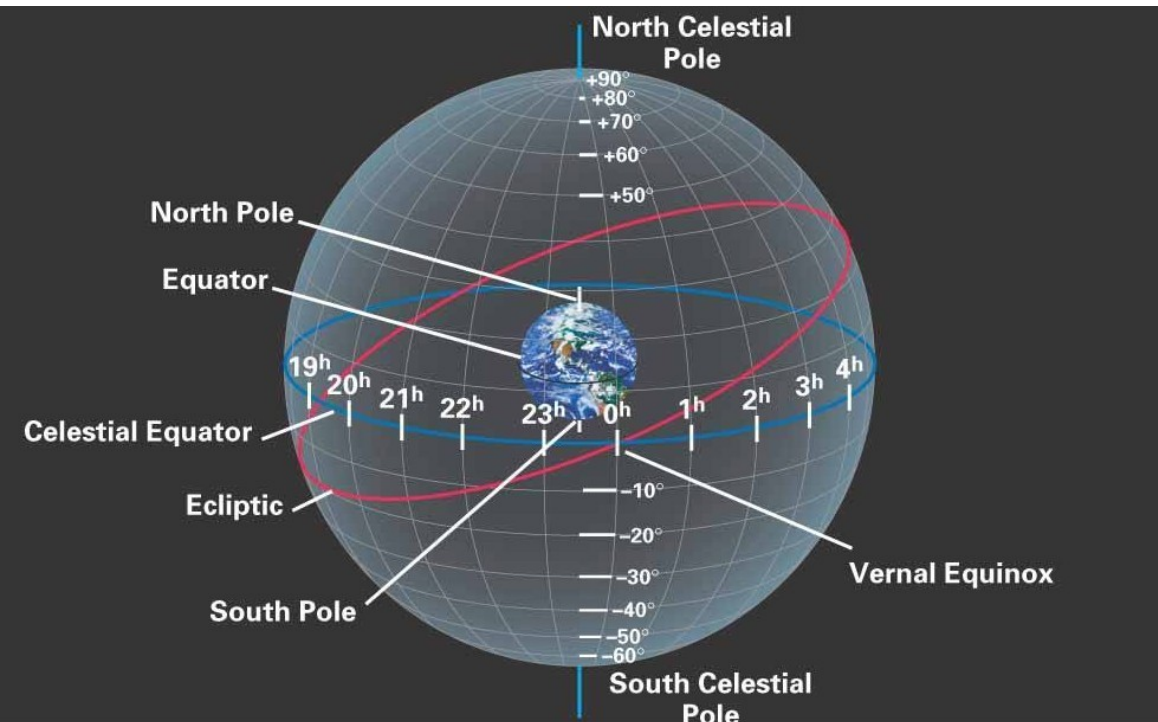
Erro de 1 dia a cada ~ 3 mil anos

anos bissextos
(2000, 2004, ...)

anos múltiplos de 100 não são
bissextos exceto se múltiplos de 400

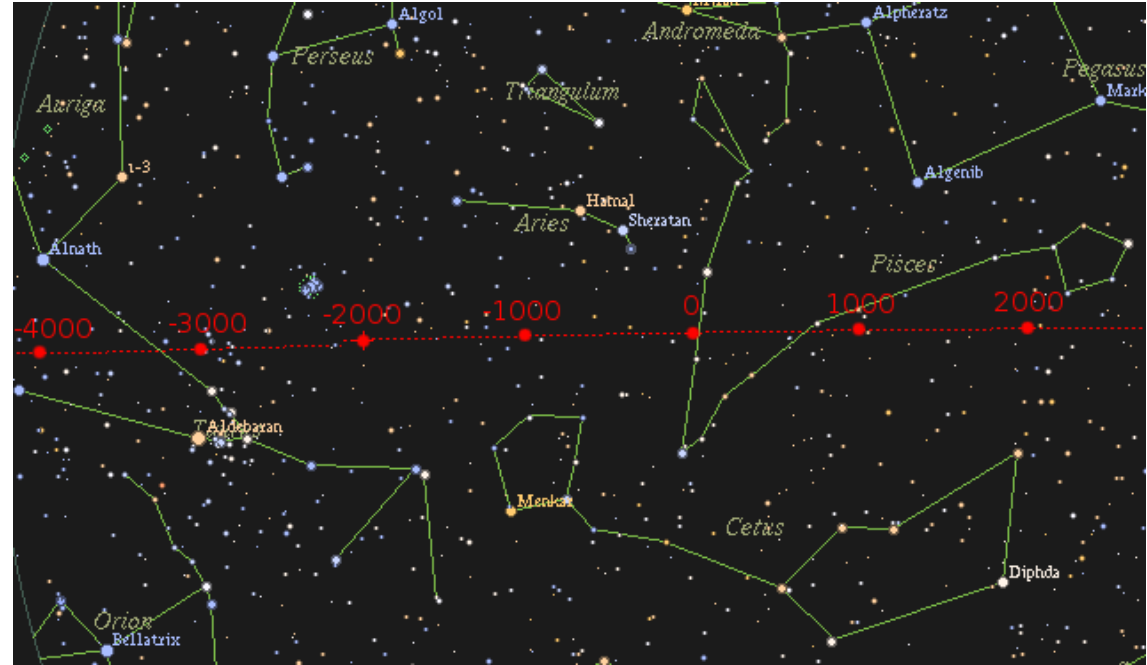
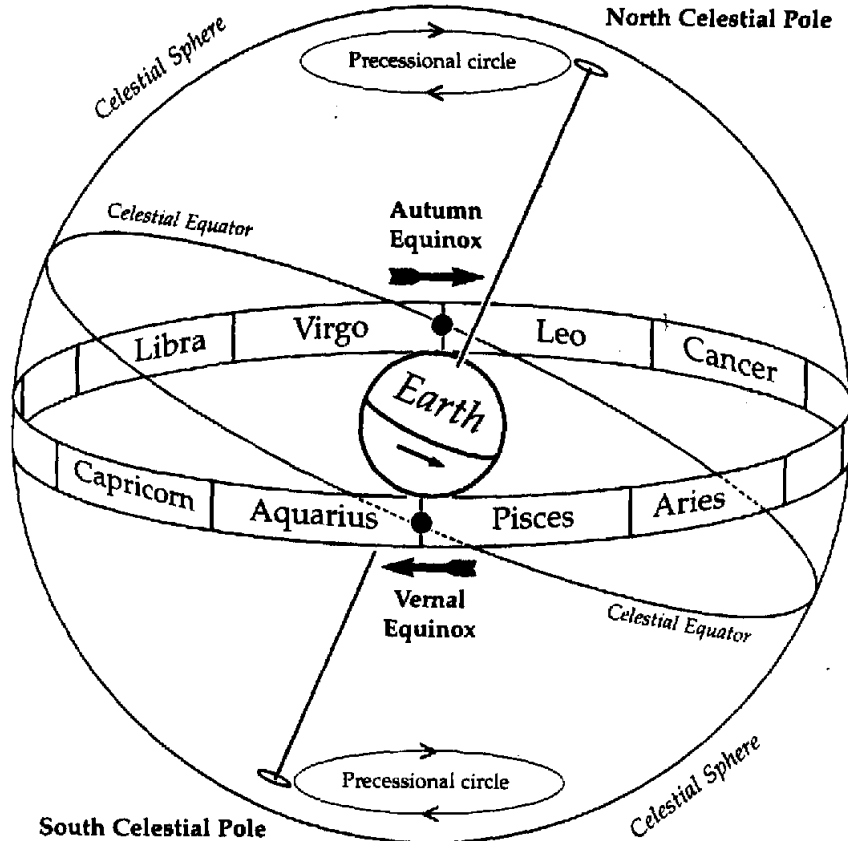
Precessão dos equinócios

Ponto vernal: interseção da esfera celeste com o Equador celestial. Atualmente, aponta para a constelação de **Peixes**. (estamos na ERA de Peixes). Antigamente, para **Áries**. A razão para tal é porque há um outro movimento: a **precessão** do eixo de rotação da Terra.



Declinação e ascensão reta das estrelas distantes **mudam** por causa da precessão.

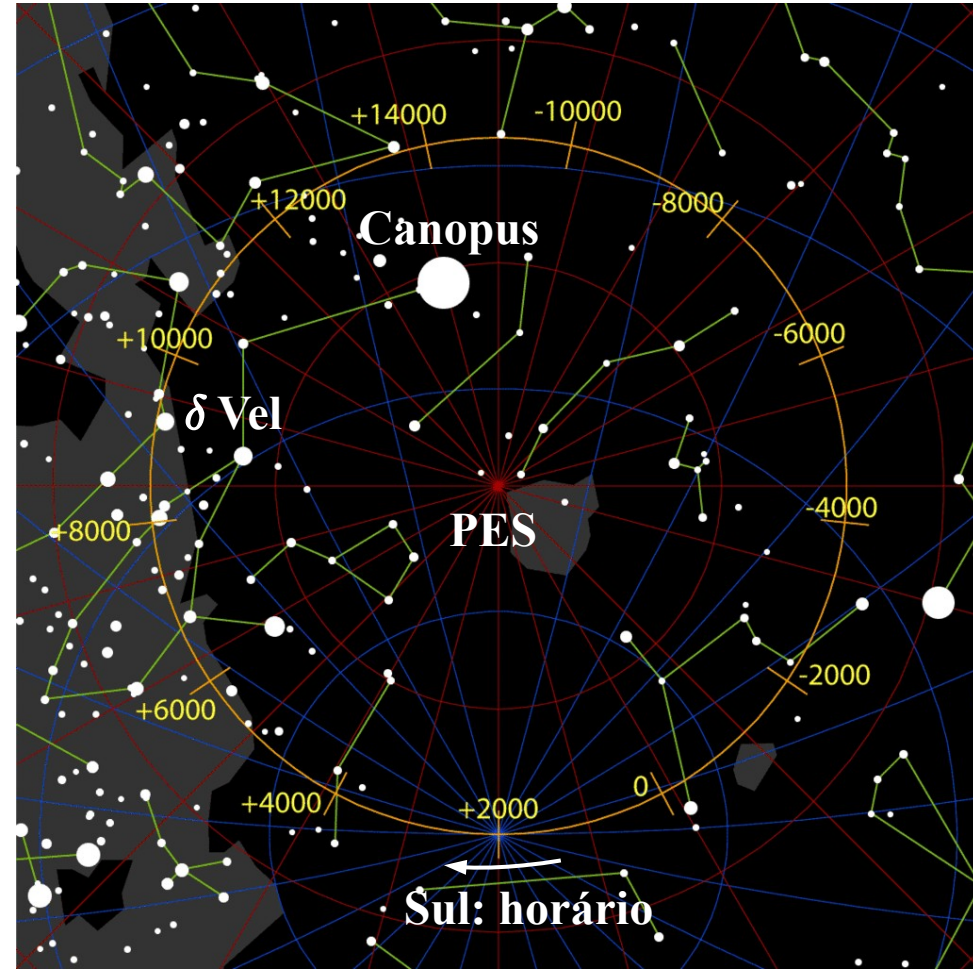
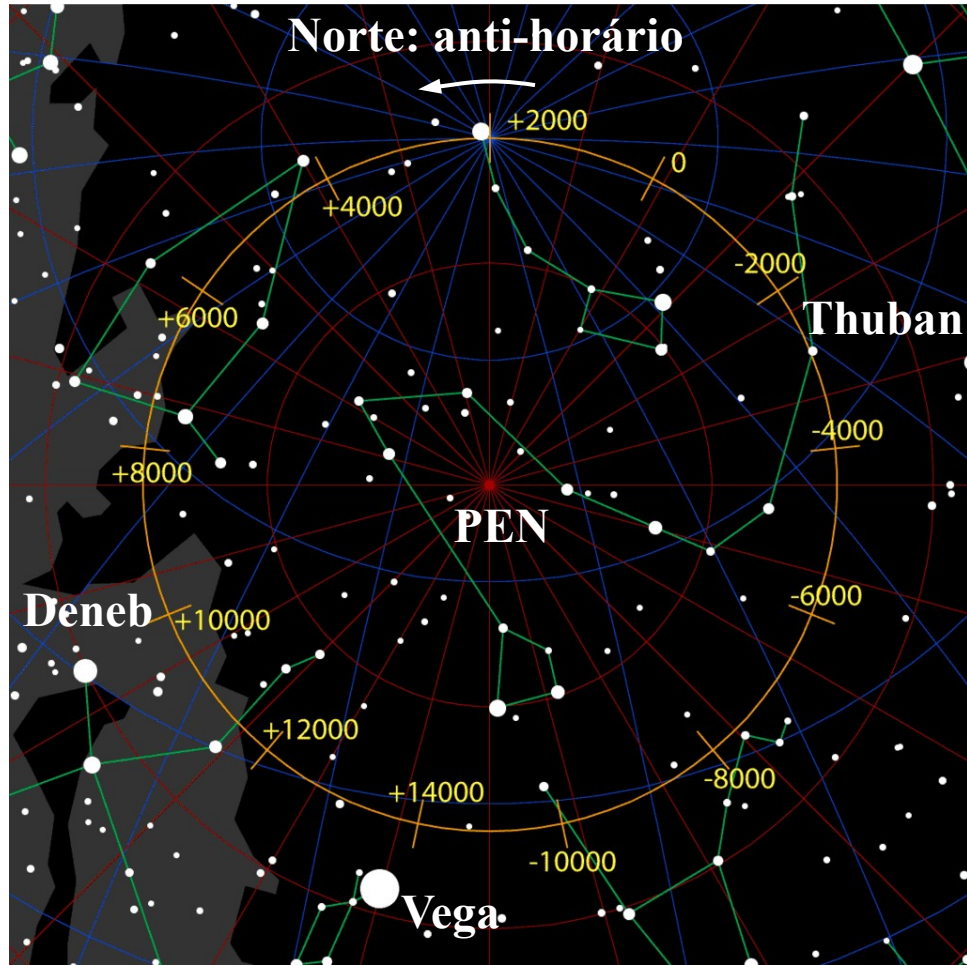
Precessão dos equinócios



Constelação	Entrada	Saída
Touro	4500 AEC	2000 AEC
Áries	2000 AEC	100 AEC
Peixes	100 AEC	2700 EC

Precessão dos equinócios

Período da precessão: de 19 a 26 mil anos



Precessão dos equinócios

Coordenadas do Polo Eclíptico Norte:

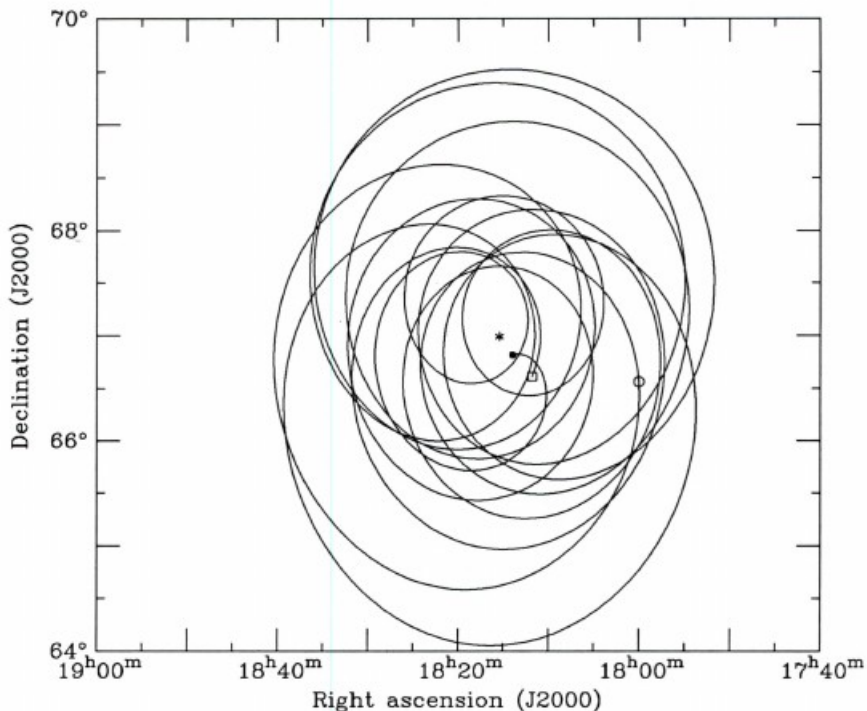
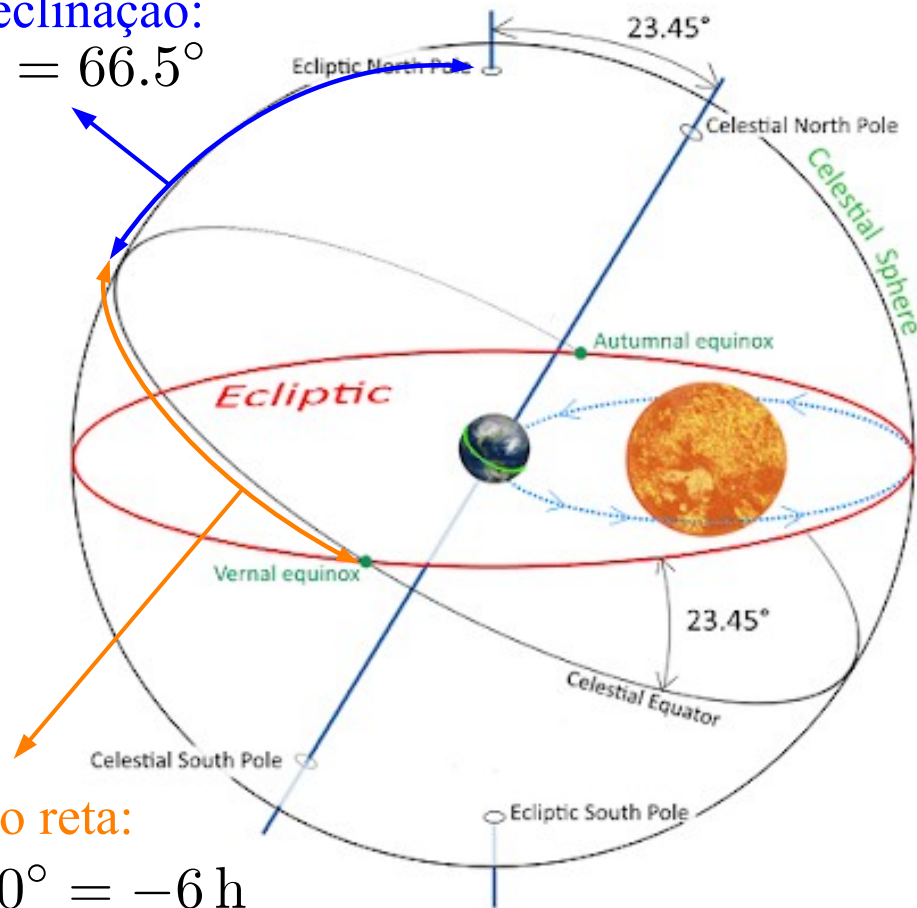


Figure 5-1. J2000 Equatorial Coordinates of the Ecliptic Pole and of the Pole of the Invariable Plane. The positions of the ecliptic pole at $T = -5000$, $T = 0$, and $T = +5000$ are marked with an open square, open circle, and filled circle, respectively. The position of the pole of the invariable plane is marked with an asterisk.

Declinação:
 $\delta = 66.5^\circ$

Ascensão reta:

$$\alpha = 270^\circ = -6 \text{ h}$$



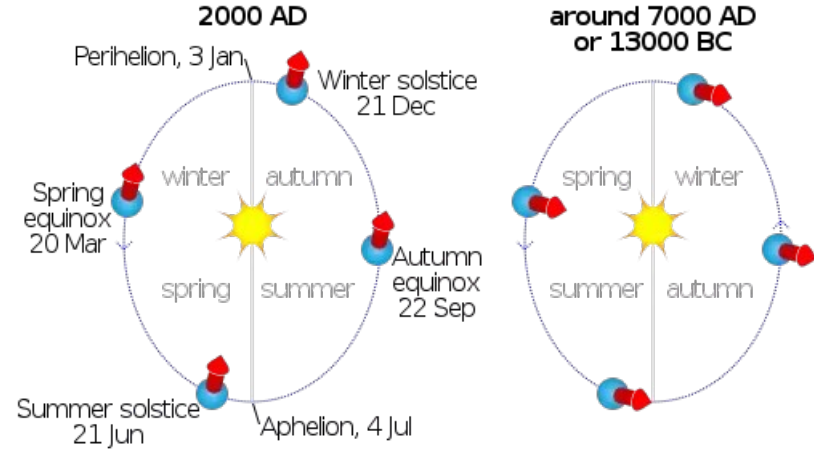
Precessão dos equinócios

Mudança das estações?

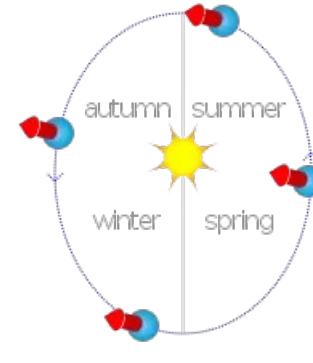
Como a inclinação de $23,5^\circ$ não muda (apreciavelmente), a intensidades das estações não é afetada.

Como o calendário atual (do papa Gregório) segue o ano tropical, as datas das estações também não mudam (apreciavelmente).

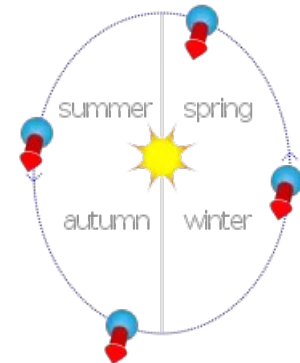
(assumindo período de 20 mil anos)



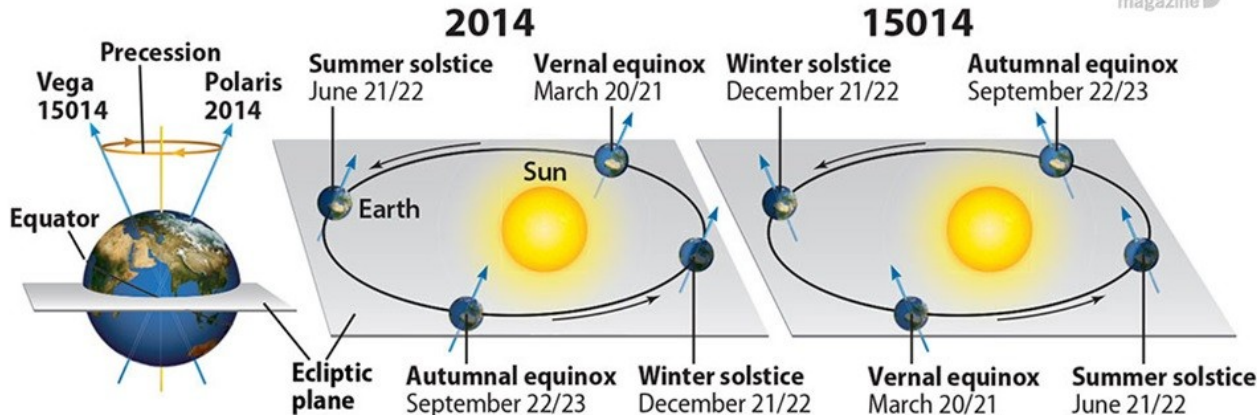
around 17000 AD or 3000 BC



around 12000 AD or 8000 BC



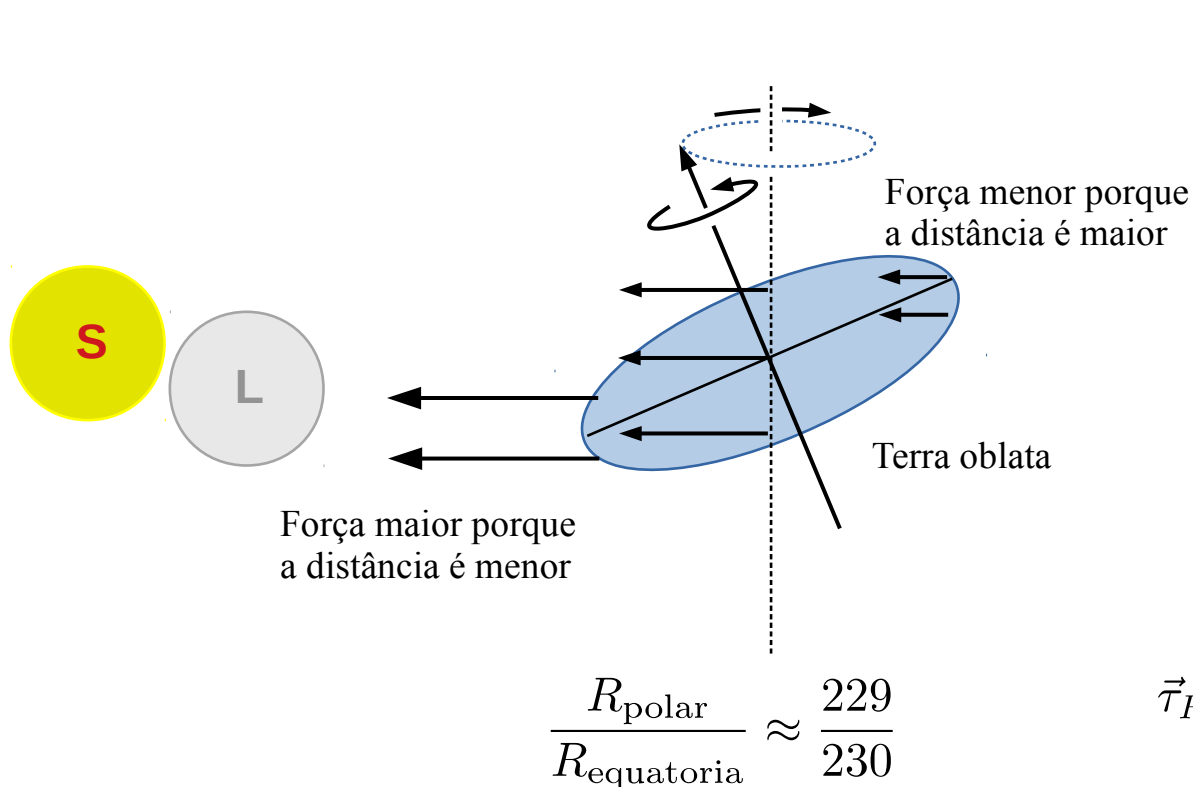
The pope's precession



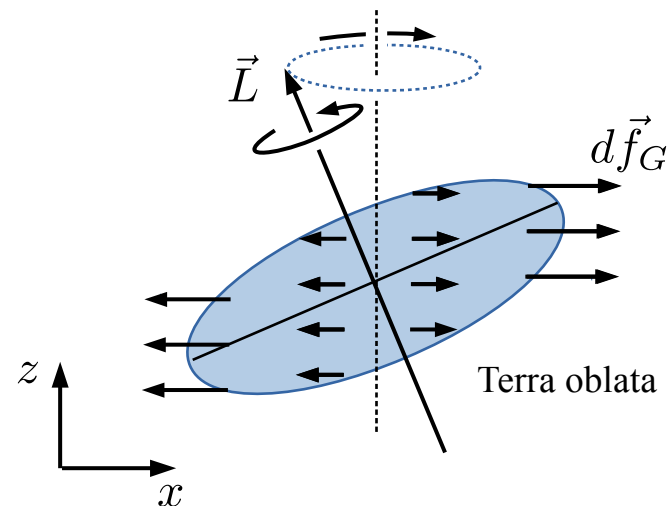
(assumindo período de 26 mil anos)

Precessão dos equinócios

CAUSA: Porque a Terra não é perfeitamente esférica, ela sofre um **torque** gravitacional que é muda o seu **momento angular**.



No referencial do centro da Terra

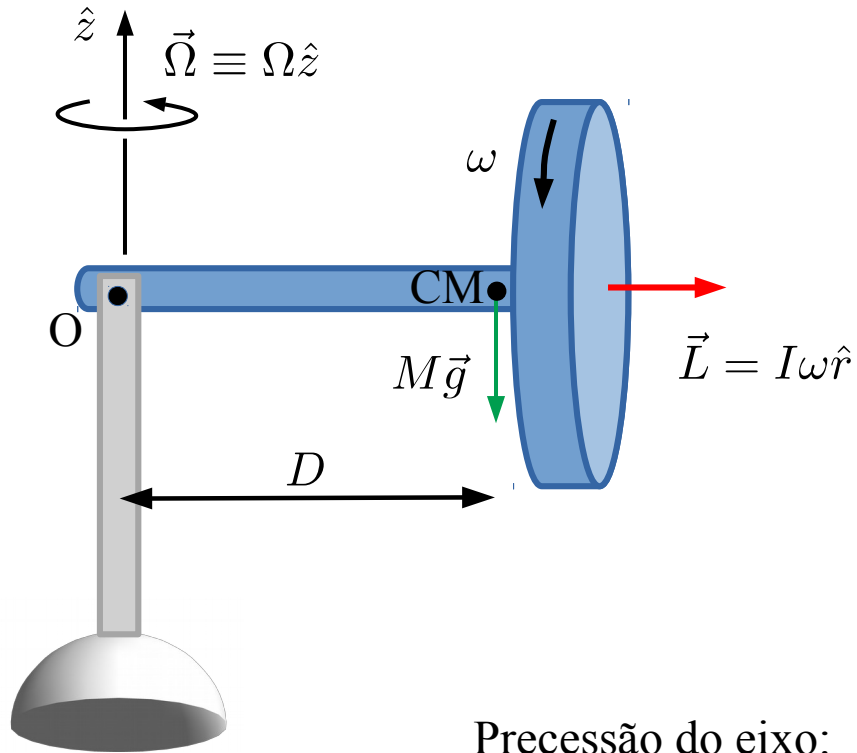


$$\vec{\tau}_R = \int \vec{r} \times d\vec{f}_G = \tau_R \hat{y} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \Rightarrow d\vec{L} \perp \vec{L}$$

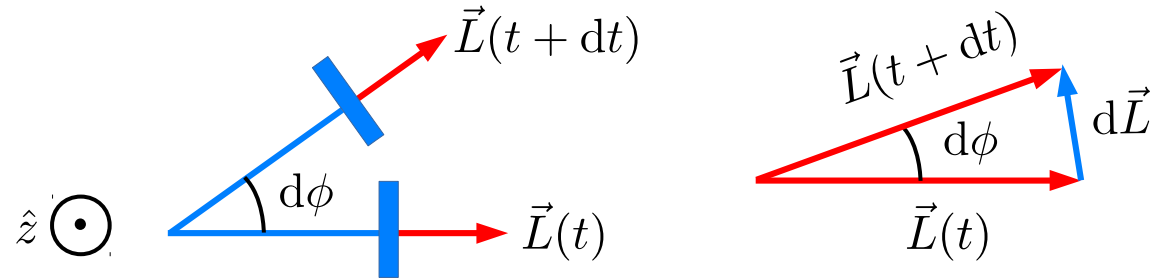
$\tau_R \neq 0$ porque a Terra é oblata

Giroscópio

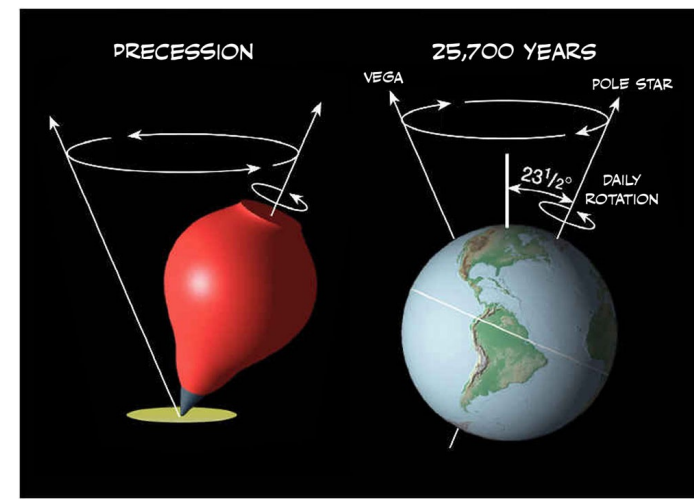
Sólido cuja direção do eixo de rotação não é fixo



Torque em relação à O: $\vec{\tau}_R = MgD\hat{\theta} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \Rightarrow d\vec{L} \perp \vec{L}$

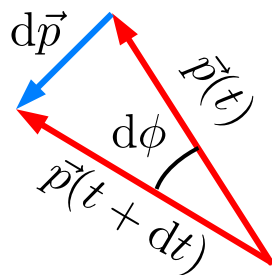
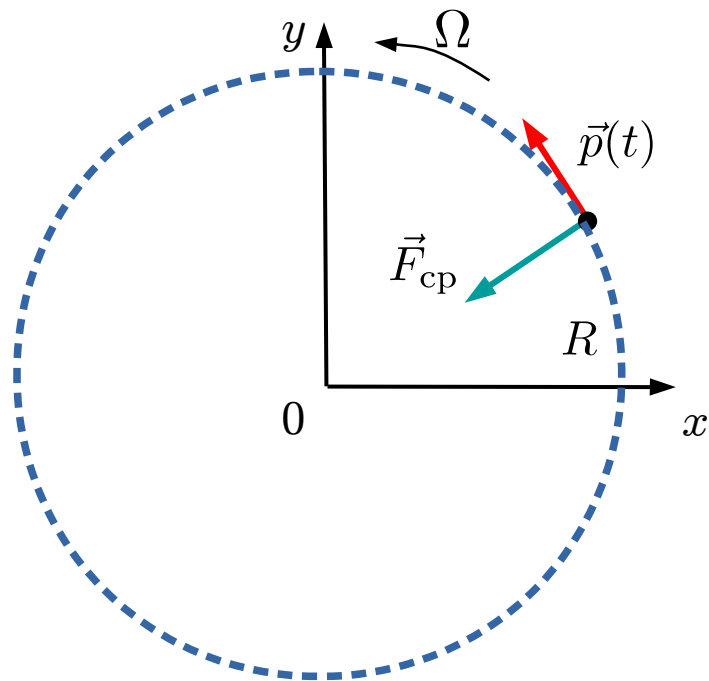


Precessão do eixo: $d\phi = \frac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}|} = \frac{|\vec{\tau}_R| dt}{|\vec{L}|}, \Rightarrow \Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|\vec{\tau}_R|}{|\vec{L}|} = \frac{MgD}{I\omega}$



Giroscópio

Sólido cuja direção do eixo de rotação não é fixo



Analogia com o movimento circular uniforme

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{cp} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \Rightarrow d\vec{p} \perp \vec{p}$$

Precessão do momento:

$$d\phi = \frac{|d\vec{p}|}{|\vec{p}|} = \frac{|\vec{F}_{cp}|}{|\vec{p}|} dt, \Rightarrow \Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{mv^2/R}{mv} = \frac{v}{R}$$

A partícula cai em direção ao centro apenas se o momento inicial for nulo.
Analogamente, o giroscópio só cai apenas se o momento angular inicial for nulo.

Precessão dos equinócios

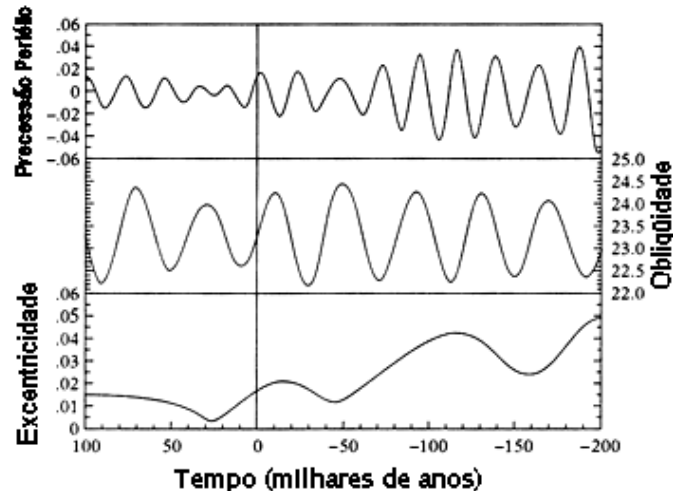
Período:

Ano sideral – Ano tropical = 365d 6h 9m 10s - 365d 5h 48m 46s = 20m 24s = 20.4m

Quantas revoluções em torno do Sol são necessárias até que os anos sideral e tropical difiram de 1 ano?

$$N = \frac{1 \text{ ano}}{20.4 \text{ min}} = 25\,782.35, \quad \Rightarrow \quad T_{\text{precess}} \approx 25.8 \text{ mil anos}$$

O cálculo do período é um pouco mais complicado (estimando-se entre 19 e 26 mil anos) porque a Terra não é sólida e por causa das diversas interações com os outros planetas. Como consequência, o **periélio** e a **excentricidade** da órbita terrestre, e a **obliquidade** (nutação) do eixo de rotação **variam** no tempo.



Lua ☾

Por que em algumas das fotos ao lado a Lua aparece achatada?

- 1) Porque a Lua é **oblata** e, dependendo do ponto de vista, ela aparece mais ou menos excêntrica
- 2) É só uma ilusão de óptica causada pelas cores em indivíduos **lunáticos**
- 3) É uma ilusão causada pela **refração** da luz na atmosfera da Terra
- 4) É a ilusão de óptica da Lua. O tamanho **angular** no horizonte é maior do que zênite
- 5) É consequência da órbita **excêntrica** causando o efeito de super-Lua

Lua cheia e folclore:

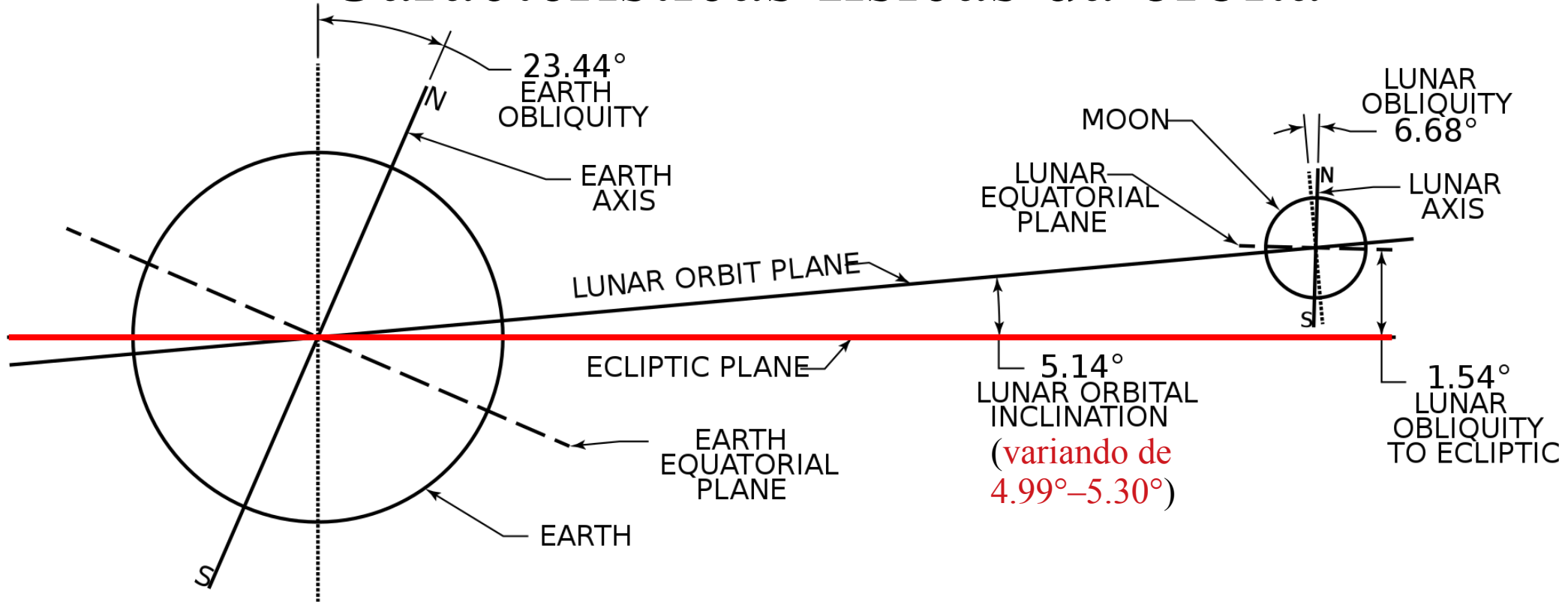
<https://www.almanac.com/full-moon-names>

A ilusão da Lua:

<https://www.lockhaven.edu/~dsimanek/3d/moonillu.htm>



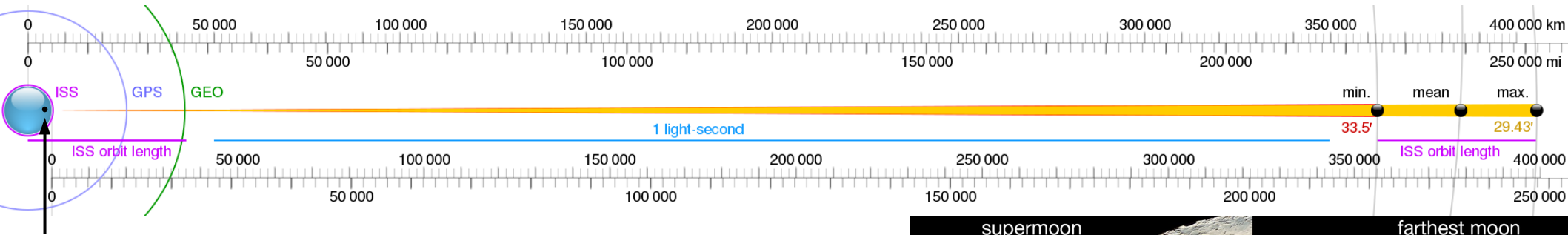
Características físicas da órbita



A Lua tem três movimentos principais: **rotação** em torno de seu próprio eixo, **revolução** em torno da Terra e translação em torno do Sol junto com a Terra, mas existe também um pequeno movimento de **libração**.

Em relação ao equador da Terra, a órbita da Lua tem uma inclinação que varia de $18,4^\circ$ ($23,5^\circ - 5,15^\circ$) a $28,7^\circ$ ($23,5^\circ + 5,15^\circ$) (**precessão do perigeu**).

Características físicas



Baricentro

Diâmetro angular: $31'5''$ (méd.) ($29.4' - 33.5'$)

Semi-eixo maior: 384,748 km

Distância média (centro-centro): 384,403 km $\approx 60R_{\oplus}$

Perigeu: 363,228.9 km (méd.) (356,800–370,400 km)

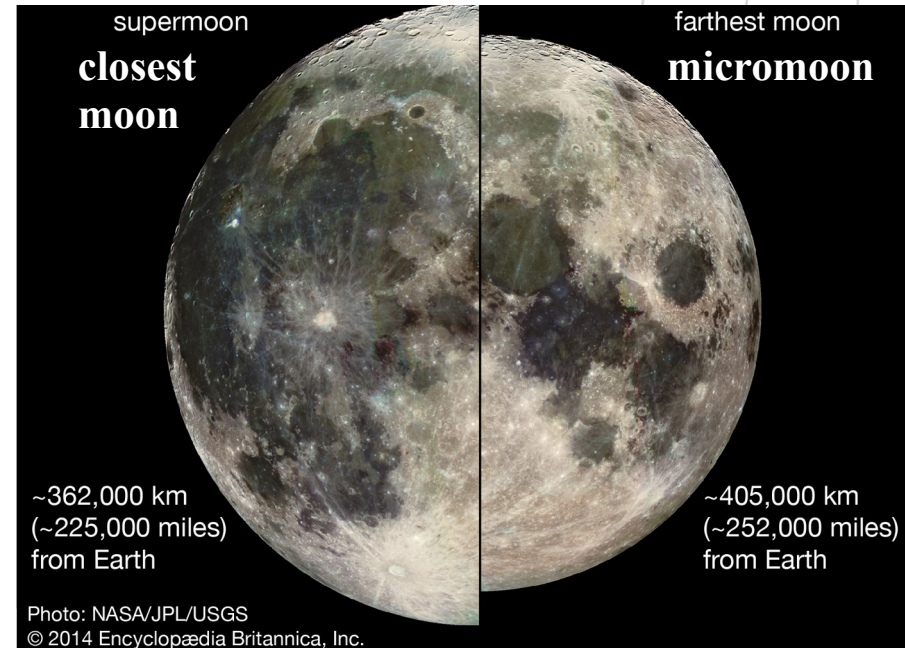
Apogeu: 405,400 km (méd.) (404,000–406,400 km)

Excentricidade média: 0.0549006 (0.026–0.077)

Baricentro (centro de massa): 4,641 km (do centro da Terra)

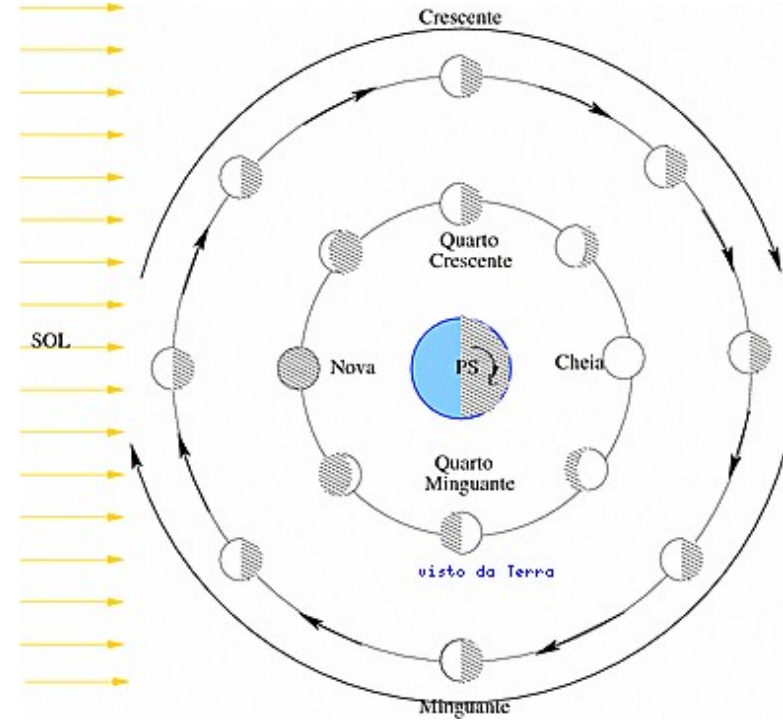
Raio: 1,737.4 km (méd.) (1,738.1 (equat.) 1,736.0 (polar))

$$M_{\text{L}} \approx M_{\oplus} / 81$$



Fases da Lua

OBS.: Perfil Lunar visto do HS da Terra



OBS.1: Do ponto de vista do PCS, a órbita é no sentido horário.

OBS.2: O círculo interno mostra a forma aparente da Lua vista do HS.

Agosto 2018						
Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sáb
			1 	2 	3 	4
5 	6 	7 	8 	9 	10 	11
12 	13 	14 	15 	16 	17 	18
19 	20 	21 	22 	23 	24 	25
26 	27 	28 	29 	30 	31 	

Q-minguante

Nova

Q-crescente

Cheia

Fases da Lua e os períodos sideral e sinódico

Lua Nova

Lua e Sol, vistos da Terra, estão na mesma direção. A Lua nasce 6h e se põe 18h.

Lua Quarto-Crescente

Lua e Sol, vistos da Terra separados de 90° . Lua está a leste do Sol, logo, sua parte iluminada tem a convexidade para o oeste. A Lua nasce 12h e se põe 0h.

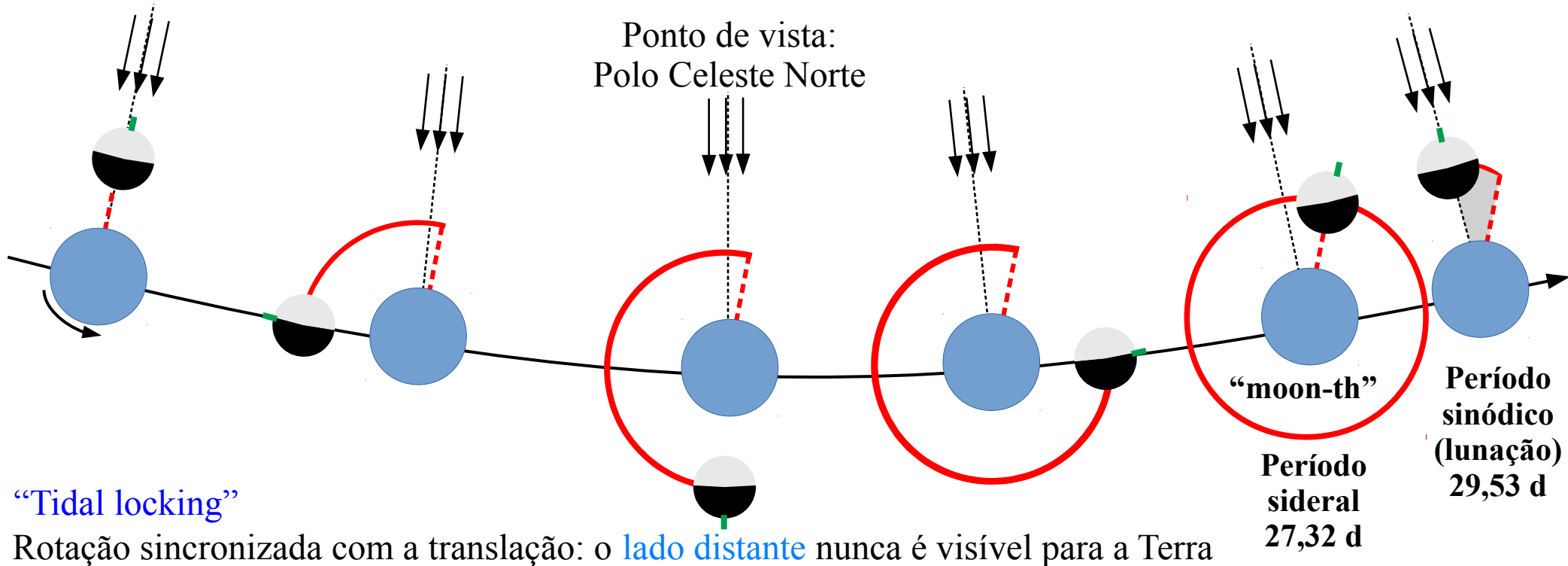
Lua Cheia

Lua e Sol estão em direções opostas. A Lua nasce 18h e se põe 6h do dia seguinte.

Lua Quarto-Minguante

A Lua está a oeste do Sol, que ilumina seu lado voltado para o leste. A Lua nasce 0h e se põe 12h

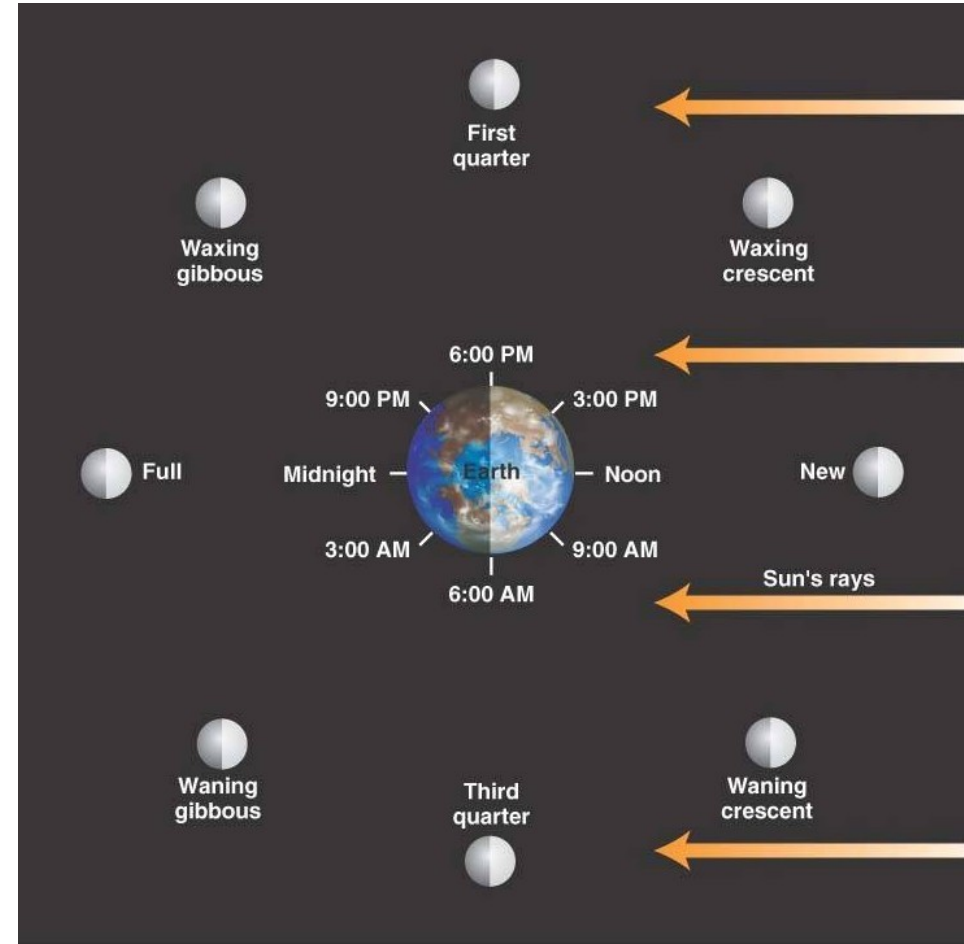
Ponto de vista:
Polo Celeste Norte



Exercício

Na figura ao lado, qual o ponto de vista do observador, qual o sentido da órbita da Lua e qual o sentido de rotação da Terra?

- 1) PCN, anti-horário, horário
- 2) PCN, anti-horário, anti-horário
- 3) PCN, horário, anti-horário
- 4) PCN, horário, horário
- 5) PCS, anti-horário, horário
- 6) PCS, anti-horário, anti-horário
- 7) PCS, horário, anti-horário
- 8) PCS, horário, horário



Exercício

Assinale a alternativa correta

- 1) Como o período sideral é de 27,32 dias, a Lua se propaga 13° por dia para Leste em relação a um meridiano local na Terra
- 2) Como o período sideral é de 27,32 dias, a Lua se propaga 13° por dia para Leste em relação às estrelas distantes
- 3) Como o período sinódico é de 29,53 dias, a Lua se propaga 12° por dia para Oeste em relação às estrelas distantes
- 4) Como o período sinódico é de 29,53 dias, a Lua se propaga 12° por dia para Oeste em relação a um meridiano local na Terra

Exercício

O dia Lunar é definido como o período entre duas culminações da Lua. Ele é de

- 1) 24h48m. Calculado da seguinte maneira: como a Lua anda 12° por dia para Leste em relação a um meridiano local na Terra, então ela nasce 48m atrasada todos os dias
- 2) 23h12m. Calculado da seguinte maneira: como a Lua anda 12° por dia para Leste em relação a um meridiano local na Terra, então ela nasce 48m adiantada todos os dias
- 3) 24h52m. Calculado da seguinte maneira: como o período sideral é de 27,32 d, a Lua anda 13° por dia para Leste em relação a um meridiano local na Terra

Dica: 12° correspondem a 48 minutos e 13° correspondem a 52 minutos.

Exercício

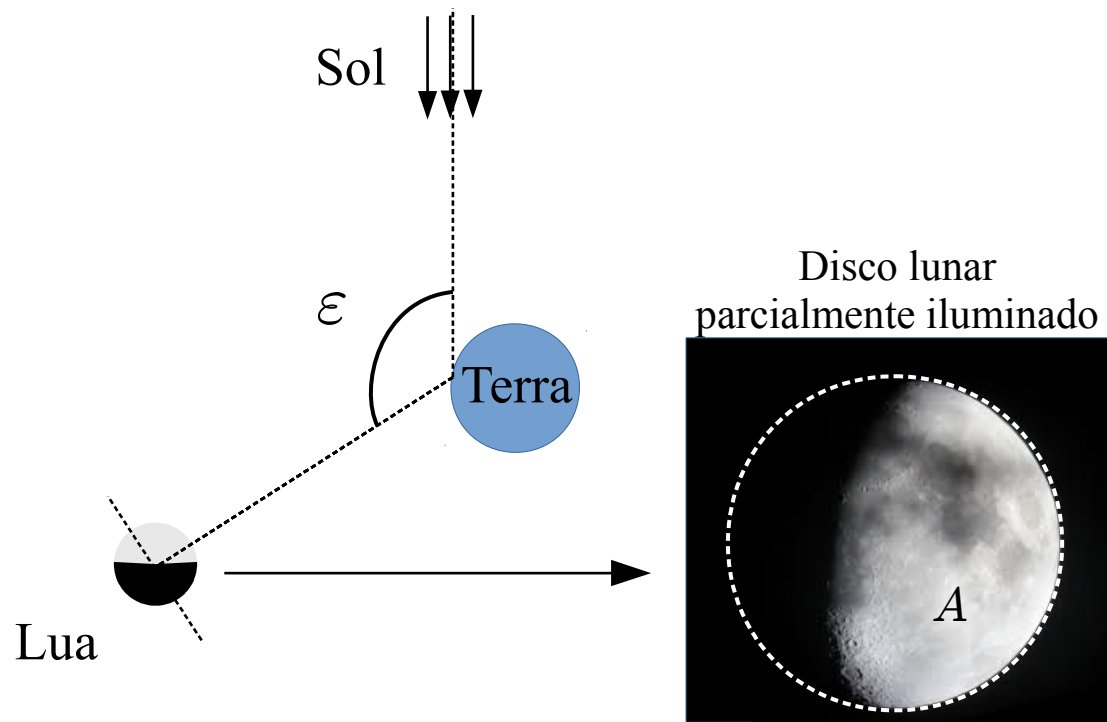
O período de rotação da Lua em torno de seu próprio eixo é

- 1) igual ao período sideral, 27,32 dias
- 2) igual ao período sinódico (ou lunação), 29,53 dias
- 3) infinito. A Lua não gira e vemos sempre a mesma face dela (“tidal locking”)

Desafio

A elongação ε é definida como o ângulo entre o astro observado e o Sol (vide figura abaixo). Mostre que a fração da área iluminada visível do disco Lunar é

$$\frac{A}{\pi R^2} = \sin^2(\varepsilon/2)$$



Libração

<https://apod.nasa.gov/apod/ap210111.html>

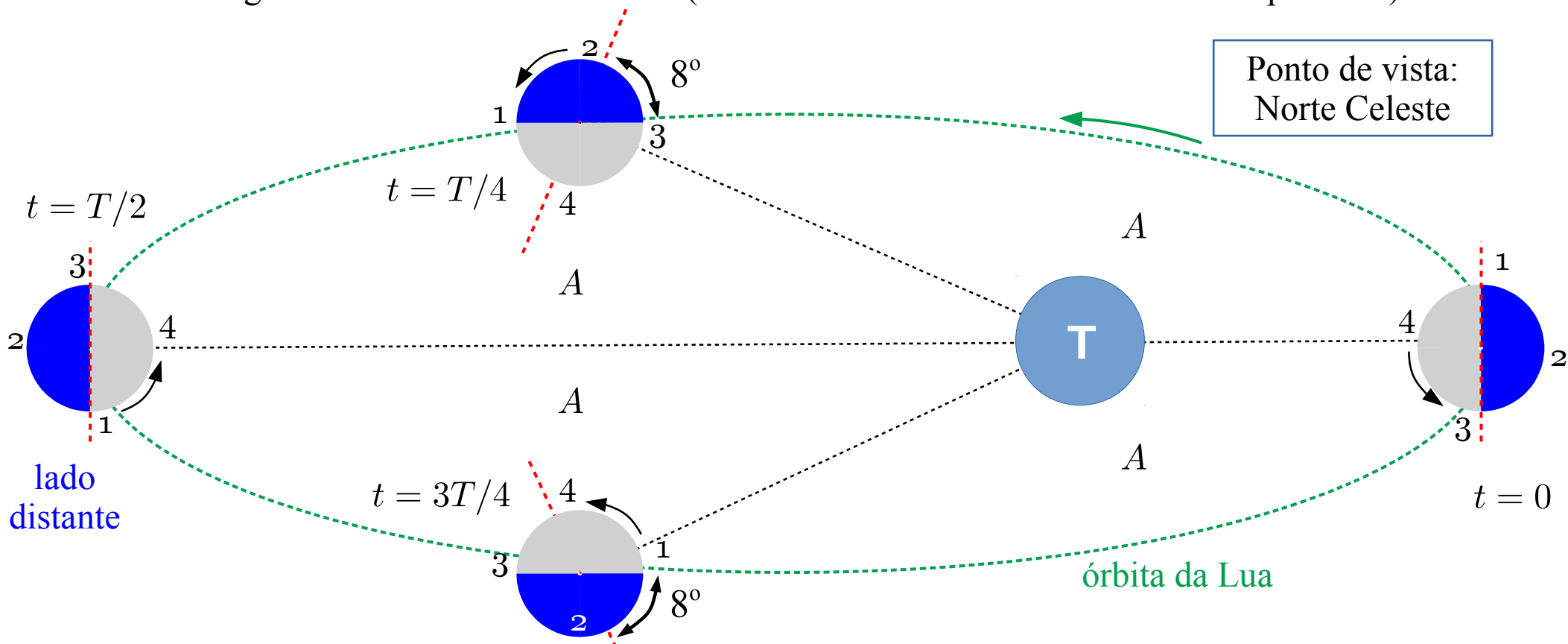
Movimento aparente em que a Lua mostra um pouco mais do que metade de sua superfície (aproximadamente 59%). Há dois tipos de movimento de libração dependendo de sua origem: (a) libração óptica e (b) libração física.

A libração física é muito pequena ($\sim 0.15^\circ$) e se deve aos movimentos de nutação da órbita e de nutação do eixo de rotação da Lua.

A libração óptica é muito maior e são classificadas em 3 tipos: (i) em latitude, (ii) em longitude, e (iii) paralaxial.

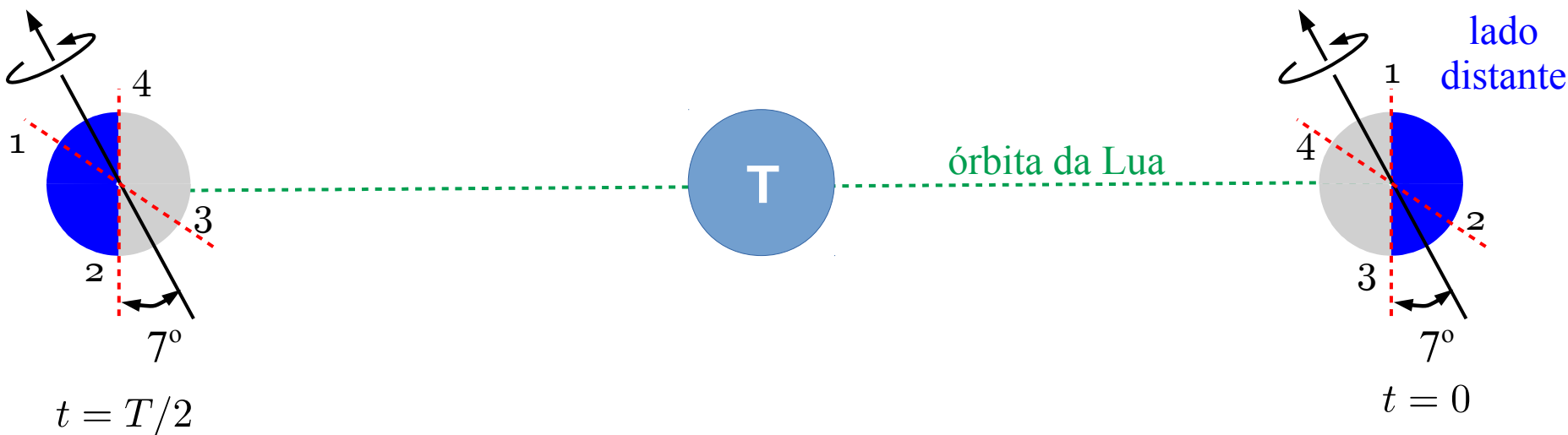
Libração óptica em Longitude

A sincronia rotação/translação só ocorre em **média**. Porque a órbita é **excêntrica**, a velocidade angular orbital não é constante (**lei das áreas**) enquanto a rotacional é. Consequentemente, consegue-se ver até 8° em longitude do lado distante da Lua (em cada uma das fronteiras com o lado próximo).



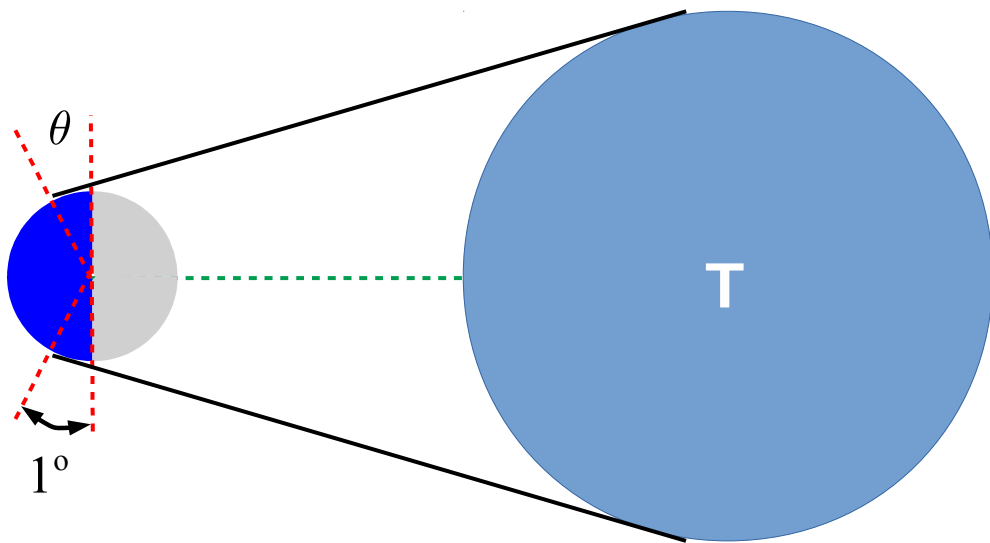
Libração óptica em Latitude

O eixo de rotação da Lua não é perpendicular ao plano de sua órbita. Ele está inclinado de $6,7^\circ$. Por esse motivo, consegue-se ver até $6,7^\circ$ em latitude (além dos polos).



Libração óptica em Paralaxe

Porque a Lua está “apenas” a 60 raios da Terra de distância, consegue-se ver 1° em **Latitude** (quando se caminha do norte até o Sul da Terra) e 1° em **Longitude** quando do movimento diurno da Lua.



$$\begin{aligned}\tan \theta &\approx \theta \approx \frac{R_{\oplus} - R_{\lrcorner}}{R_{\oplus \lrcorner}} \\ &\approx \frac{(1 - 0.2727) R_{\oplus}}{60 R_{\oplus}} \\ &\approx 0.013 \\ \Rightarrow \theta &\approx 0.7^\circ\end{aligned}$$

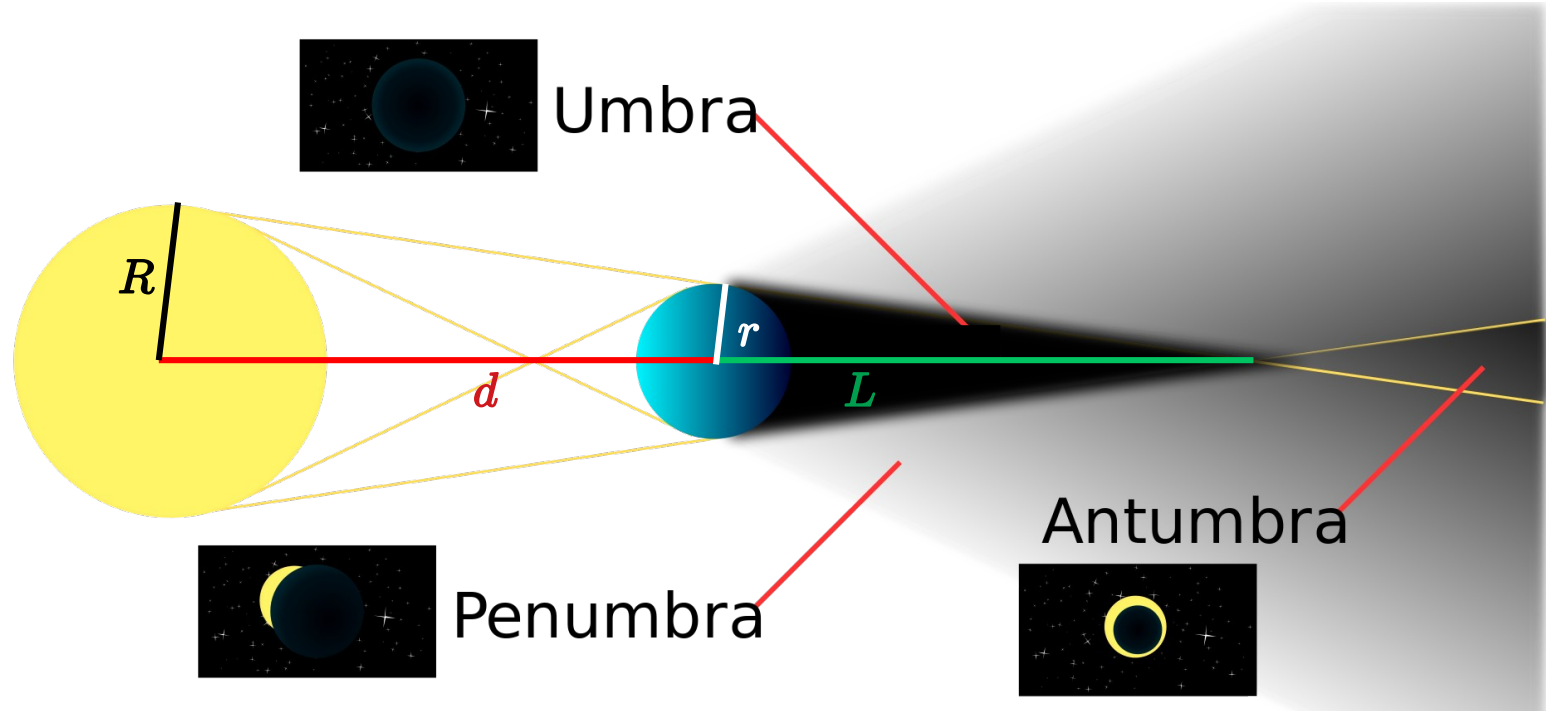
Eclipses

Evento astronômico em que um astro entra na **sombra** de outro.

Umbra: região da sombra que não recebe luz de nenhum ponto da fonte.

Penumbra: região da sombra que recebe luz de alguns pontos da fonte.

Anti-umbra: região da penumbra que recebe luz apenas da região mais externa da fonte.



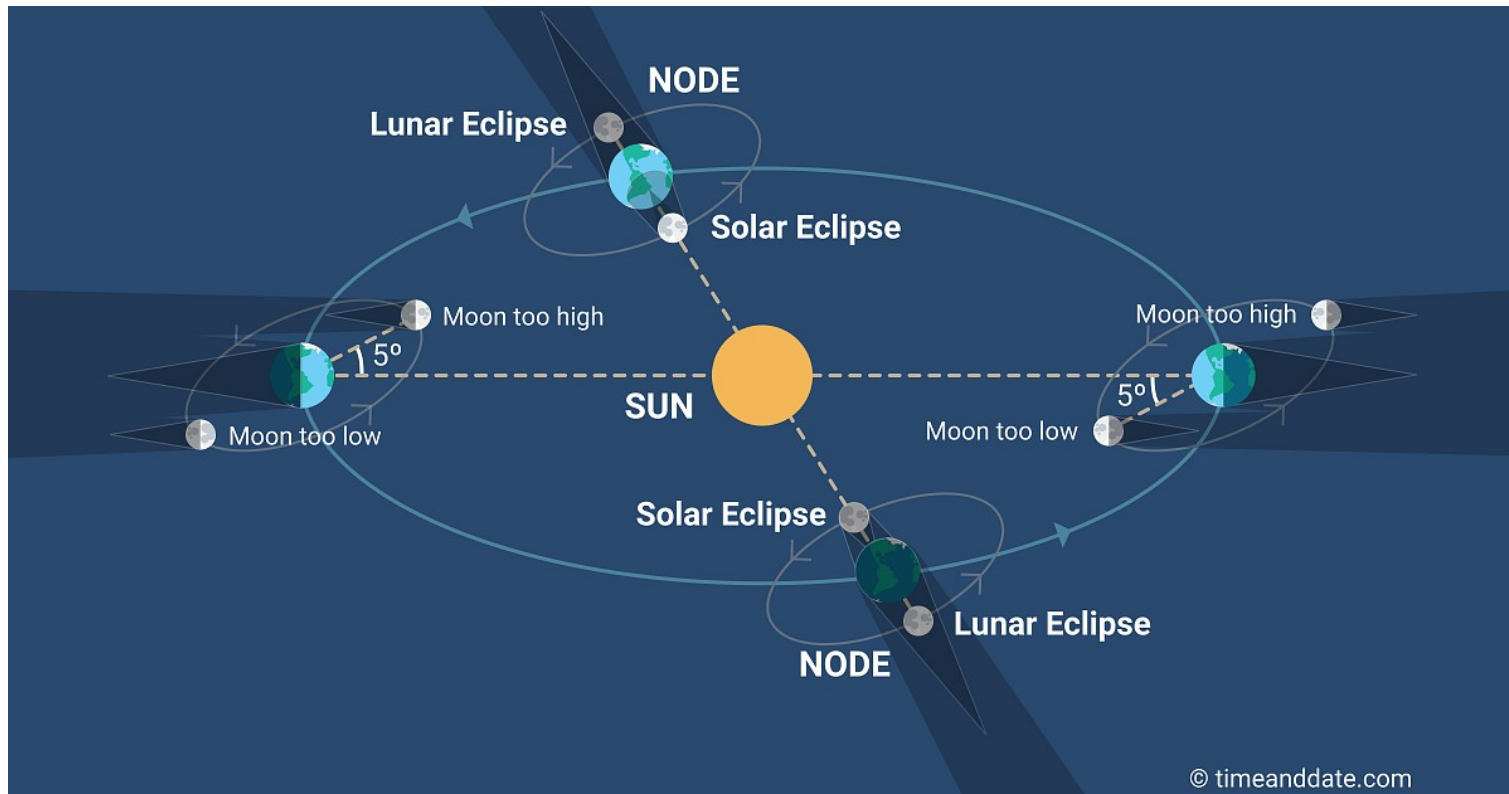
Exercício:

Mostre que a altura L do cone da umbra é $L = \left(\frac{r}{R - r} \right) d$

Eclipses Sol-Terra-Lua

Por que não ocorrem eclipses a cada luação (período sinódico)?

Só ocorrem eclipses quando a Lua está na fase de Lua Cheia ou Lua Nova, e quando o Sol está sobre a **linha dos nodos** (linha de intersecção do plano da eclíptica com o plano da órbita da Lua).

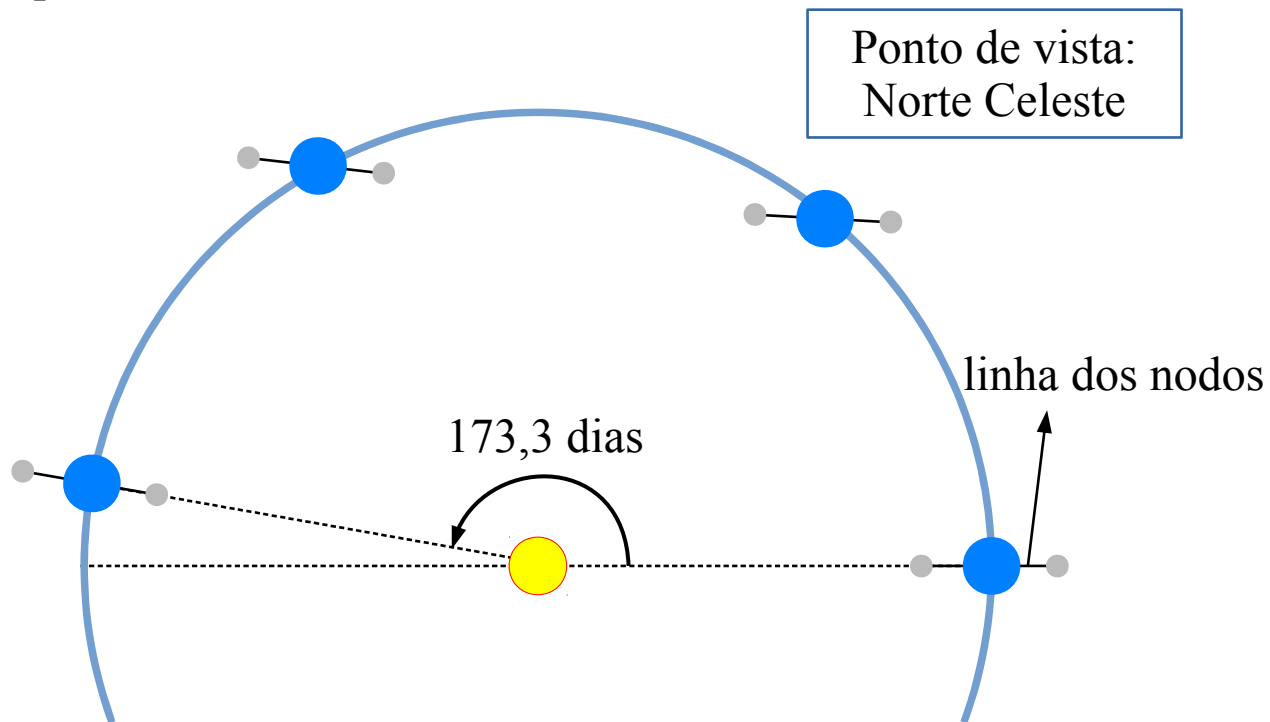


Eclipses Sol-Terra-Lua

Qual o intervalo de tempo (médio) entre duas “estações de eclipses”?

Não é de 6 meses (182 dias) porque há um **precessão retrógrada** (na direção oposta à de translação da Lua – sentido horário em torno da Terra quando visto do PCN) da **linha dos nodos** de período ~ 18.6 anos ($19.3^\circ/\text{ano}$). Logo, o intervalo de tempo é **173,3 dias**.

Exercício: Dado a precessão da linha dos nodos de $-19.3^\circ/\text{ano}$, mostre que o intervalo de tempo médio entre duas estações de eclipses é de 173,3 dias.

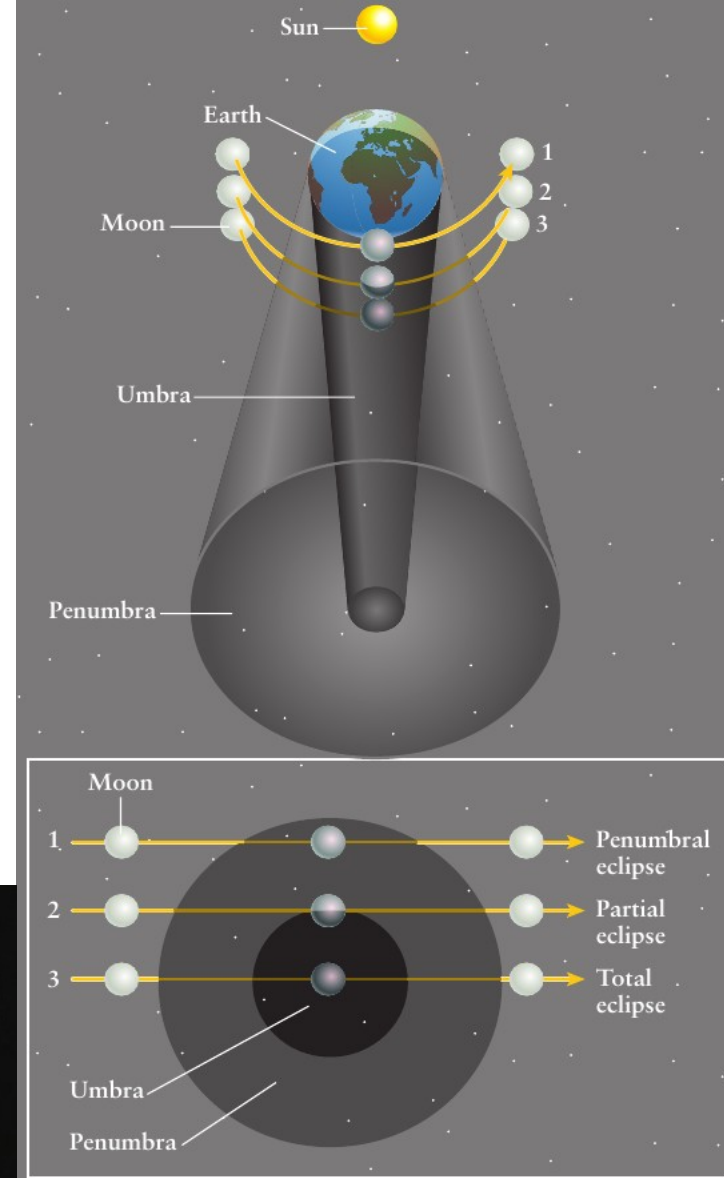


Eclipse da Lua

Há 3 tipos: penumbral, parcial e total.

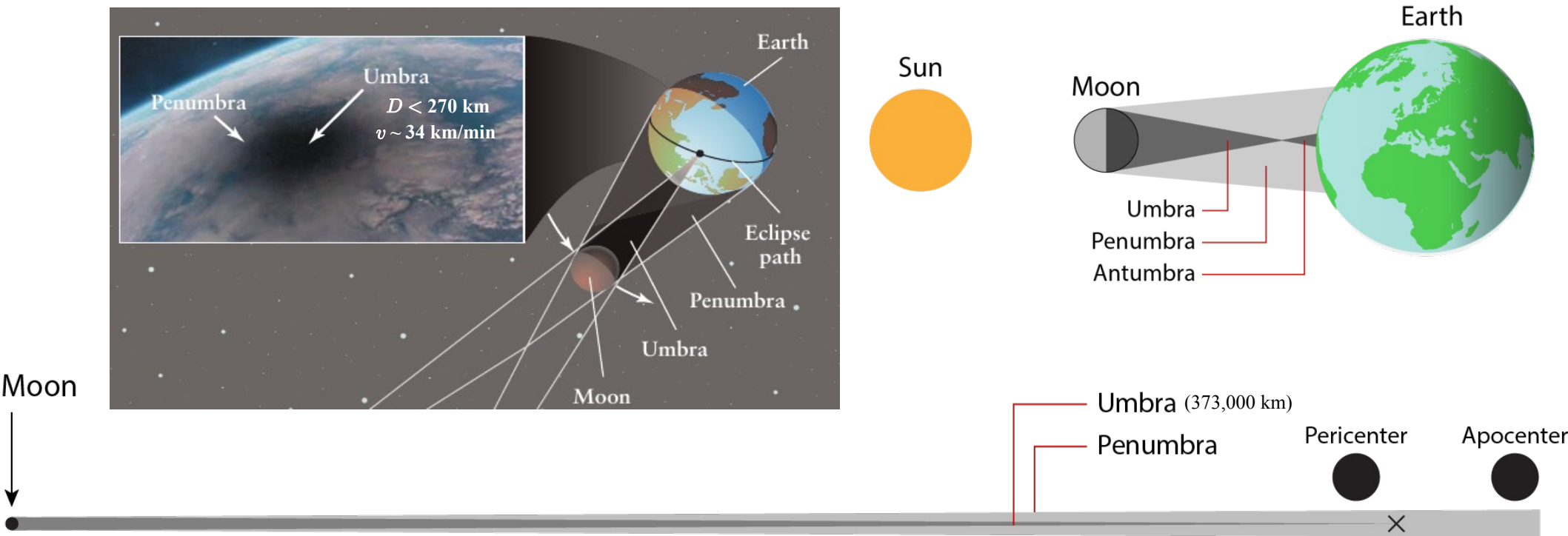
Exercícios:

Por que a Lua é avermelhada “apenas” no eclipse total?
Como calcular o diâmetro da Umbra e da Penumbra da Terra na posição da Lua?
Quanto tempo dura um eclipse?



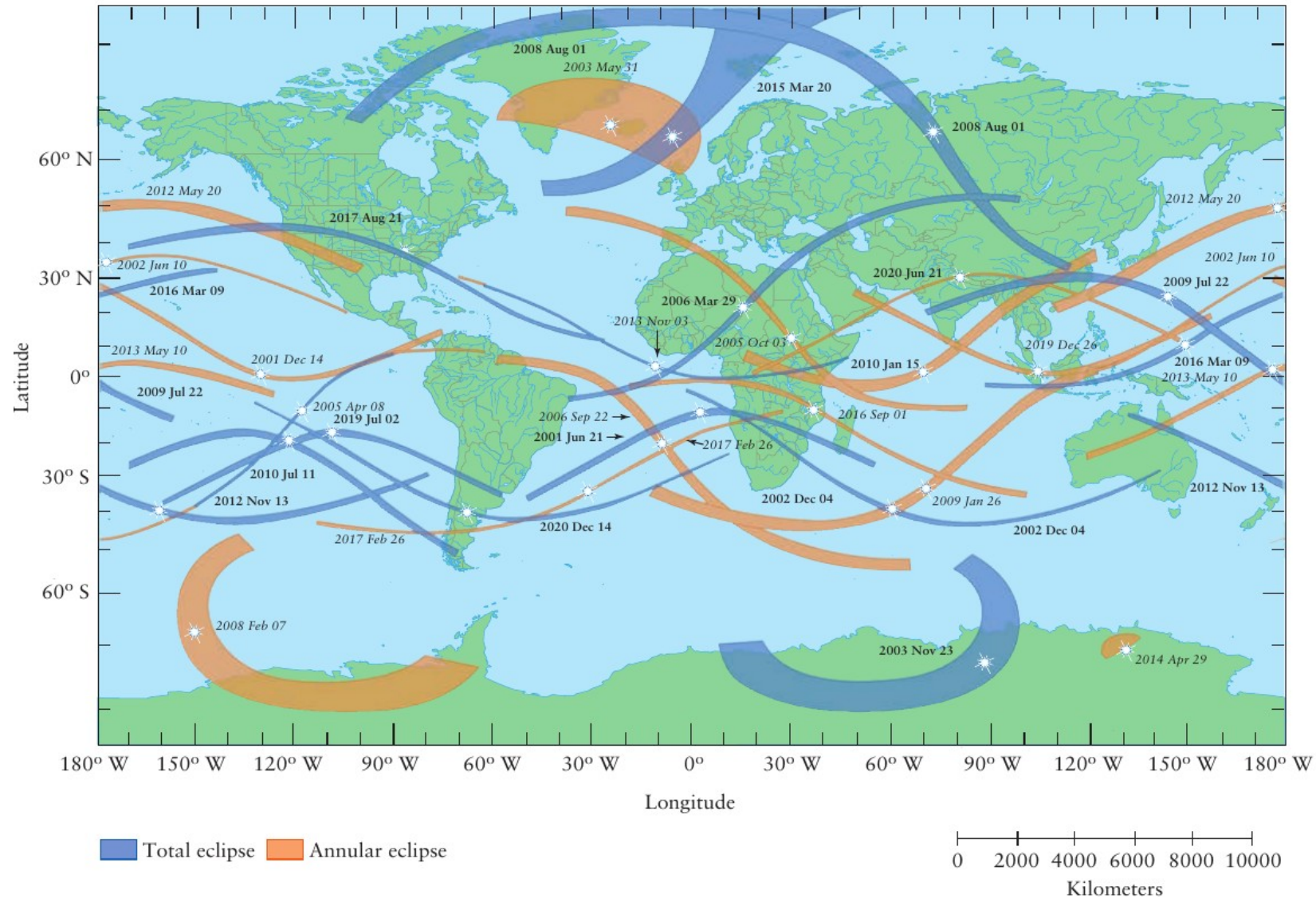
Eclipse do Sol

Porque a **excentricidade** da órbita da Terra é de apenas 0,0167, o **diâmetro angular** do Sol varia 1,67% em torno de sua média (31'59"). A **excentricidade** da órbita da Lua é de 0,05 e, portanto, seu **diâmetro angular** varia 5% em torno de sua média (31'5"), chegando a 33'16", maior do que o diâmetro máximo do Sol.



Há 4 tipos:
parcial, total,
anular e híbrido.

Eles se repetem?



Série de Saros

O período de Saros é baseado em multiplicidades (aproximadas) comuns de 3 ciclos Lunares cujos valores dos períodos (2000 E.C.) são:

Mês Sinódico (de Lua Nova a Lua Nova) = 29,530589 dias = 29d 12h 44m 03s

Mês anomalístico (de perigeu a perigeu) = 27,554550 dias = 27d 13h 18m 33s

Mês Dracônico (de nodo a nodo) = 27,212221 dias = 27d 05h 05m 36s

1 período de Saros é definido como sendo igual a 223 meses sinódicos. Mas isto é aproximadamente 239 meses anomalísticos, ou ainda aproximadamente 242 meses dracônicos:

223 Meses Sinódicos = 6585,3223 dias = 6585d 07h 43m

239 Meses Anomalísticos = 6585,5375 dias = 6585d 12h 54m

242 Meses Dracônicos = 6585,3575 dias = 6585d 08h 35m

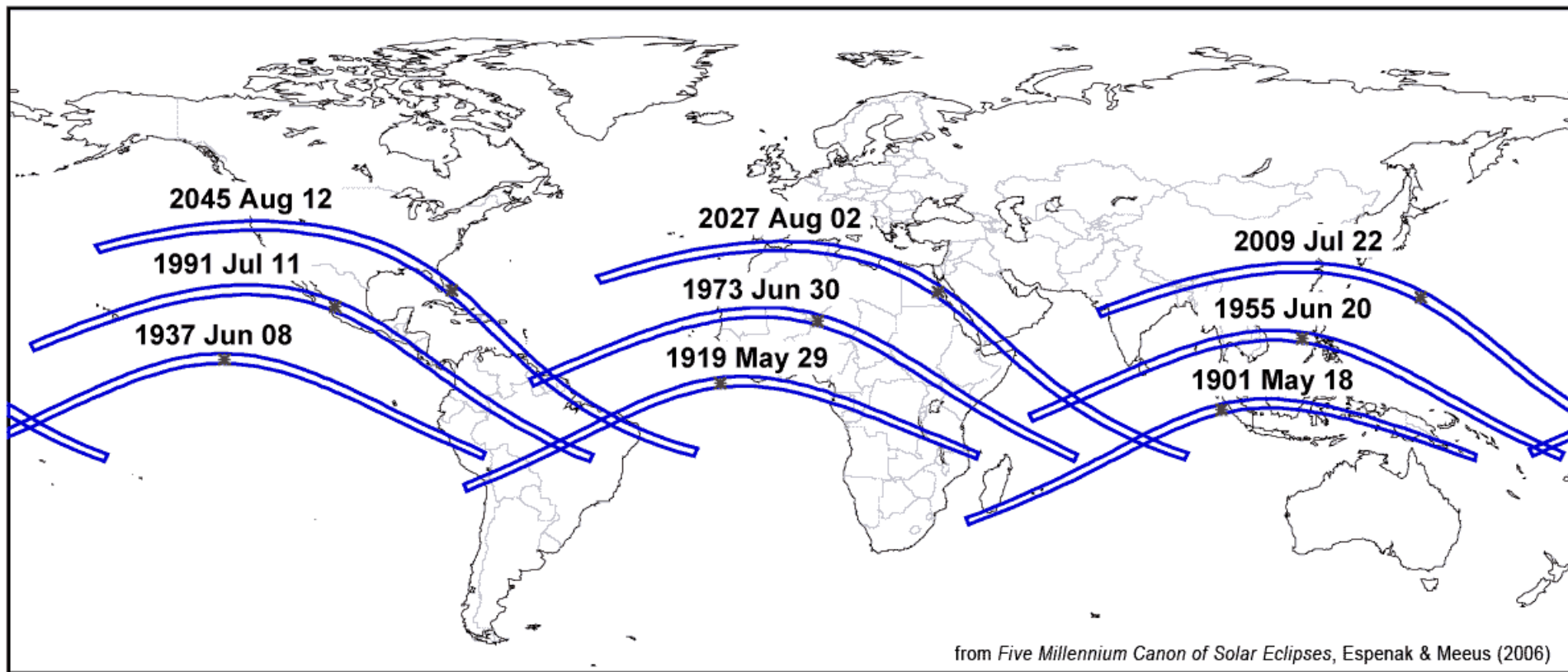
Note que 1 período de Saros é = 6585,3223 dias = 18 anos, 10, 11 ou 12 dias (dependendo do número de anos bisextos) e 8 horas.

OBS.: As 8 horas correspondem a um deslocamento 120° para Oeste no próximo eclipse.

<https://eclipse.gsfc.nasa.gov/SEsaros/SEperiodicity.html>

Série de Saros

Figure 1 — Eclipses from Saros 136: 1901 to 2045



O deslocamento para o Norte é devido ao movimento da Lua em relação ao nodo.

Na série Saros 136 há 71 eclipses em 1262 anos na seguinte ordem: 8 parciais, 6 anulares, 6 híbridos, 44 totais, e 7 parciais.

Marés

Maré: movimento **oscilatório** do nível dos mares.

A causa principal é a interação **gravitacional** com outros astros como o Sol e, principalmente, a Lua. Quantificar o movimento preciso das marés não é simples porque há diversos fatores relevantes como forças hidrodinâmicas e superficiais devido ao relevo (profundidade e forma do leito oceânico). De fato, há lugares em que o período das marés é o dobro do comum. E se a Terra fosse perfeitamente esférica, as marés teriam amplitude de apenas 0.5 m. Há lugares no planeta em que essa amplitude é de 10 m.

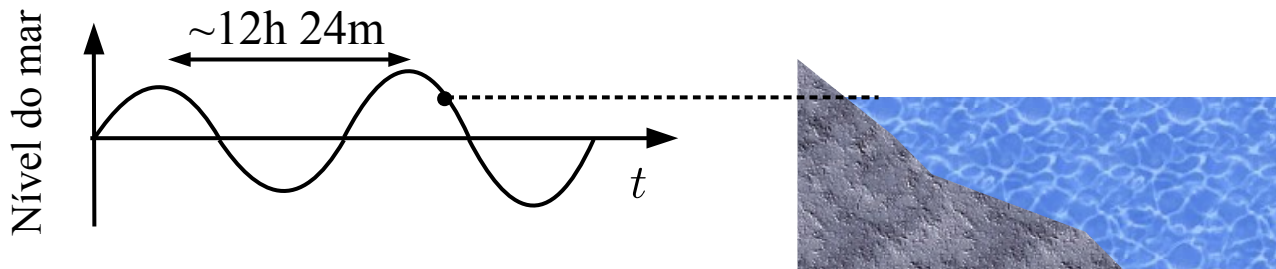
Aqui, iremos discutir apenas o fator mais relevante: as forças gravitacionais de maré.

Características principais

Período: $\sim 12\text{h } 24\text{m}$.

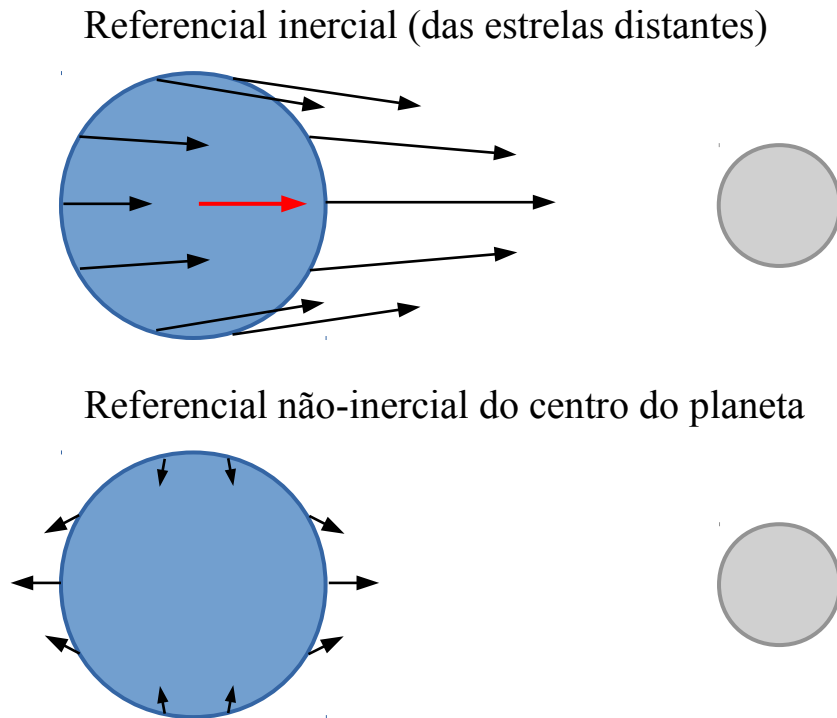
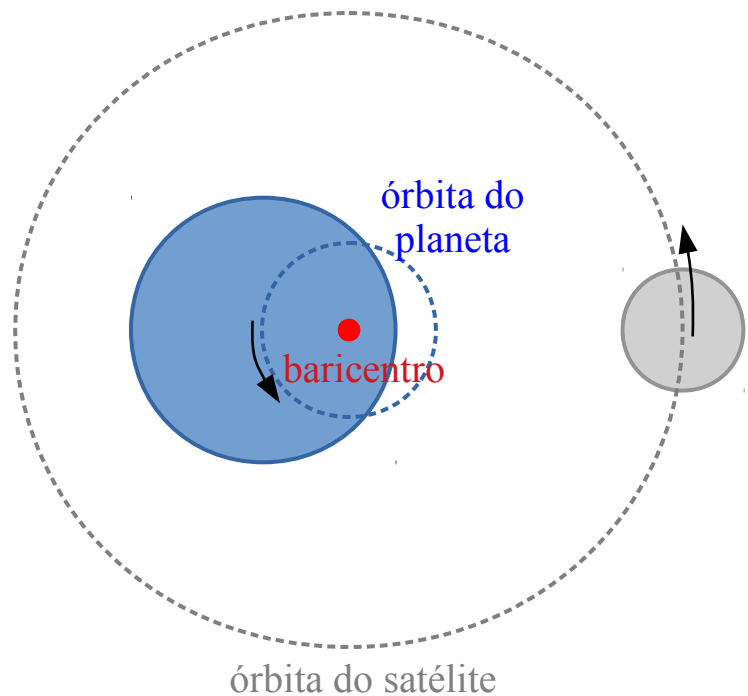
Há uma outra maré diametralmente oposta do outro lado do planeta.

A maré alta está quase alinhada com a direção à Lua. O desalinhamento é de 10° na direção Oeste.



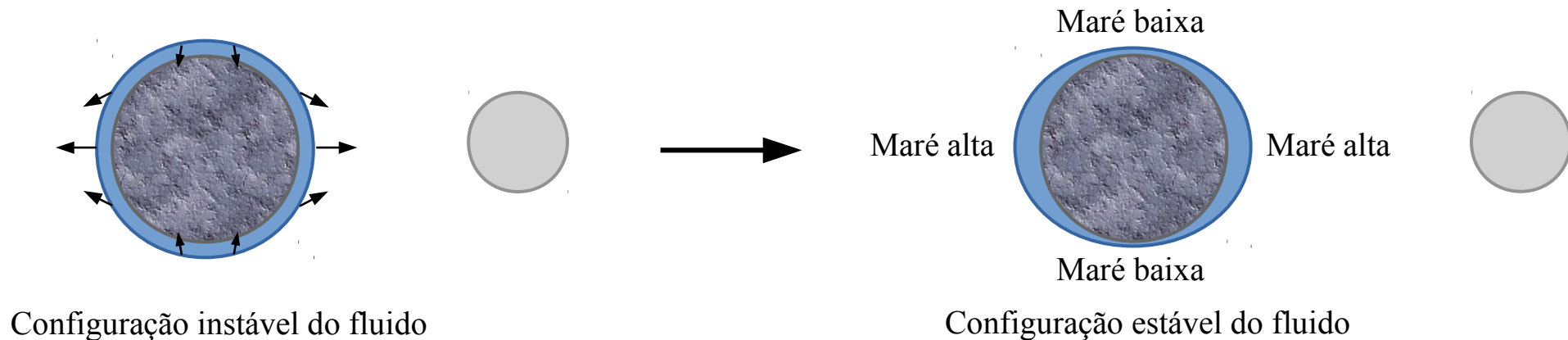
Forças de maré

Considere um planeta e seu satélite. Ambos astros giram em torno do baricentro do sistema, ou seja, ambos estão acelerados. A força de maré é melhor entendida analisando o campo de forças resultante sobre o planeta no referencial do centro do planeta.



Forças de maré

Como resultado dessa configuração de forças, a camada de fluidos sobre o planeta (se houver) não se espalhará esfericamente. Bojos irão se formar configurando **marés marítimas**.



Analogamente, se o núcleo do planeta ainda não se solidificou, marés poderão se formar causando tensões com a crosta do planeta e, possivelmente, favorecendo atividade vulcânica.

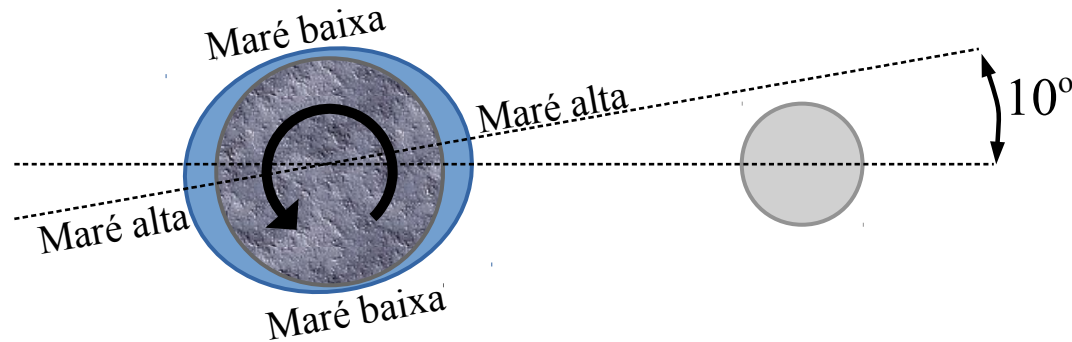
Além disso, ondas sísmicas de longos comprimentos (**marés terrestres**) também podem ser induzidas na crosta do planeta.

Forças de maré e fricção

Se o planeta estiver **girando** com velocidade angular distinta daquela do satélite, então haverá duas marés altas e duas baixas no período de 1 dia do satélite.

No caso da Terra, o **dia Lunar** é de 24h 48m e, portanto, o **período** das marés é de 12h 24m.

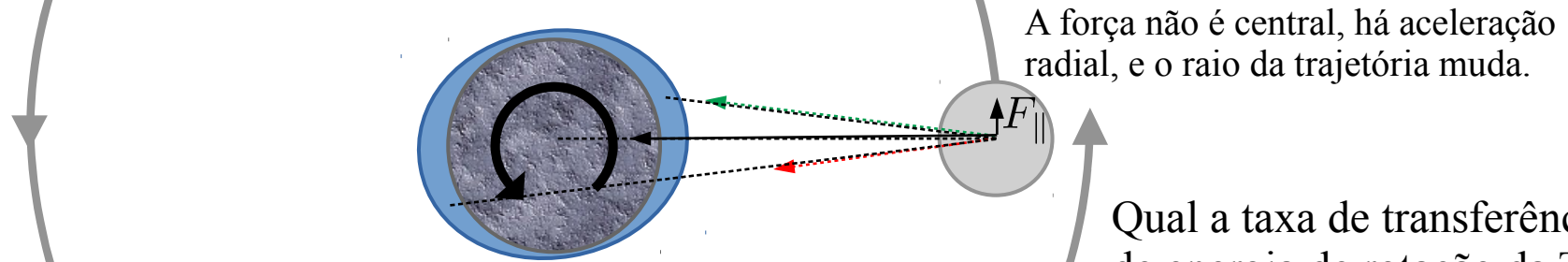
Além disso, a crosta **arrasta** (por atrito) o bojo de maré alta causando um desalinhamento com a direção do satélite. No caso da Terra, o bojo é arrastado de 10° .



As forças de **atrito** entre a crosta e o fluido causam uma mudança no **período** de rotação do planeta. (As marés terrestres também contribuem, mas o efeito é menor.) Essa mudança depende das velocidades angulares de translação do satélite e de rotação do planeta. No caso da Terra, estima-se que o atrito com as marés aumente a duração de dia em 2.3 ms/século. Pode parecer pouco, mas a potência **dissipada** por essas forças é de aproximadamente 4 TW.

Forças de maré e a distância Terra-Lua

A distância média Terra-Lua está **aumentando** a 3,8 cm/ano (medidos por refletores na superfície da Lua). Para que isso ocorra, energia de rotação da Terra é **transferida** para a energia de translação da Lua. (Neste processo, a energia é **conservada**.)



A força não é central, há aceleração radial, e o raio da trajetória muda.

Qual a taxa de transferência de energia de rotação da Terra para a Lua?

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{GMm}{2R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right) \approx 0.1 \text{ TW}$$

$$a_{cp} = \omega^2 R = \frac{GM}{R^2}$$

$$E = \frac{m\omega^2 R^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}$$

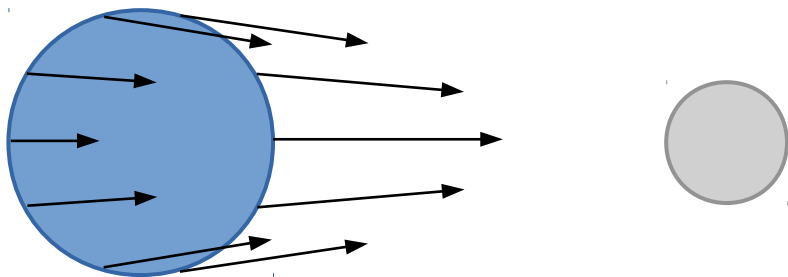
Aumentando a **energia** total da Lua, o **raio** de sua trajetória aumenta e sua **velocidade angular** diminui (3ª lei de Kepler).

Dados paleontológicos indicam que:
620 Ma atrás: dia = 21,9h e 13 lunações/ano.
70 Ma atrás: dia = 23,5h

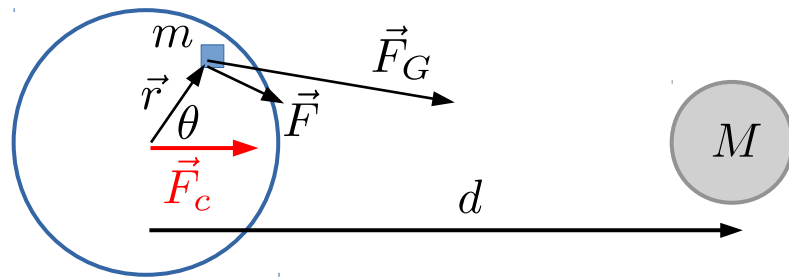
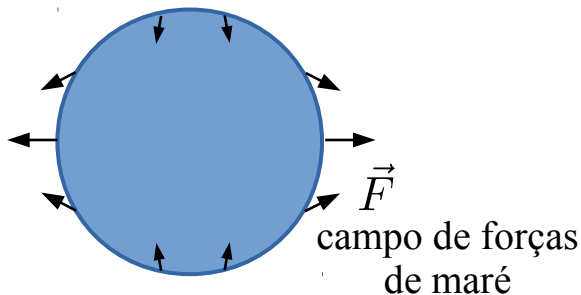
Forças de maré: technicalidades

A **força de maré** é aquela observada no referencial (não-inercial) do centro do astro. Note que ela é nula quando o **gradiente** do campo de forças é nulo.

Referencial inercial (das estrelas distantes)



Referencial não-inercial do centro do planeta



$$\vec{F} = \vec{F}_G - \vec{F}_c = \frac{GMm}{|\vec{d} - \vec{r}|^3} (\vec{d} - \vec{r}) - \frac{GMm}{d^3} \vec{d}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_x &\approx \frac{GMm}{(d - r \cos \theta)^2} - \frac{GMm}{d^2} \\ &\approx 2 \frac{GMm}{d^3} r \cos \theta \end{aligned}$$

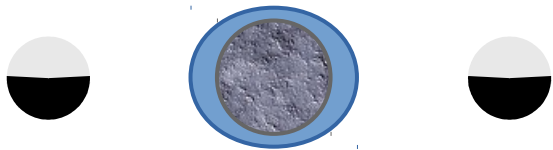
Forças de maré: technicalidades

Forças gravitacionais do Sol e da Lua sobre um corpo na superfície da Terra

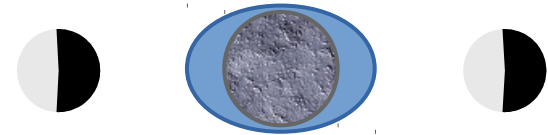
$$\frac{F_{G\odot}}{F_{G\zeta}} \approx \frac{GM_{\odot}m/d_{\odot\oplus}^2}{GM_{\zeta}m/d_{\zeta\oplus}^2} = \frac{M_{\odot}}{M_{\zeta}} \left(\frac{d_{\zeta\oplus}}{d_{\odot\oplus}} \right)^2 \approx \frac{2 \cdot 10^{30}}{7 \cdot 10^{22}} \left(\frac{3.8 \cdot 10^8}{1.5 \cdot 10^{11}} \right)^2 \approx 180$$

Forças gravitacionais de **maré** do Sol e da Lua sobre um corpo na superfície da Terra

$$\frac{F_{\text{maré}\odot}}{F_{\text{maré}\zeta}} \approx \frac{M_{\odot}/d_{\odot\oplus}^3}{M_{\zeta}/d_{\zeta\oplus}^3} = \frac{M_{\odot}}{M_{\zeta}} \left(\frac{d_{\zeta\oplus}}{d_{\odot\oplus}} \right)^3 \approx \frac{2 \cdot 10^{30}}{7 \cdot 10^{22}} \left(\frac{3.8 \cdot 10^8}{1.5 \cdot 10^{11}} \right)^3 \approx 0.46$$



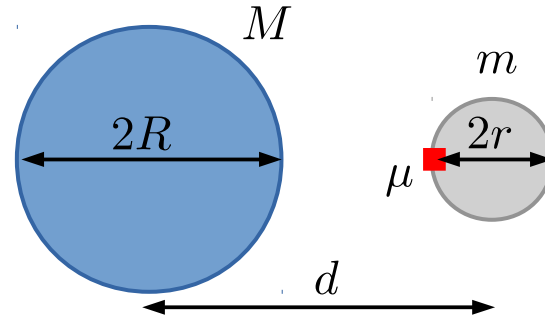
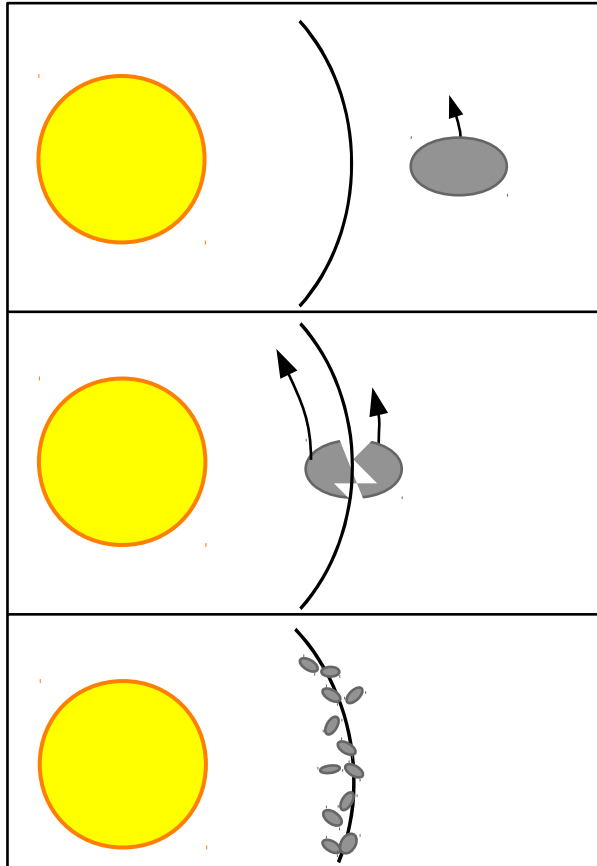
Lua Crescente ou Minguante: **maré morta**



Lua Nova ou Cheia: **maré viva**

Forças de maré: technicalidades

Se um satélite estiver orbitando um astro numa órbita de raio menor que o **Limite de Roche**, então o satélite terá sua integridade destruída pelas forças de maré.



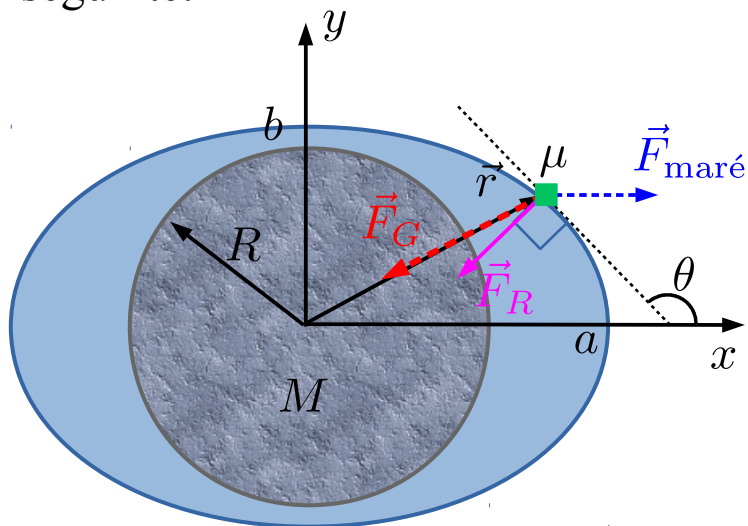
Força gravitacional (interna) que mantém o satélite “coesos”: $\frac{Gm\mu}{r^2}$

Força de maré (externa) tensionando o satélite: $\frac{2GM\mu}{d^3}r$

Limite de Roche: $\frac{2GM\mu}{d^3}r = \frac{Gm\mu}{r^2}, \Rightarrow d = 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}} R$

Ultra desafio: altura do bojo de maré

Imagine que a Terra é perfeitamente esférica. Um cálculo simplificado da altura do bojo de maré é o seguinte:



Força gravitacional: $\vec{F}_G \approx -\frac{GM\mu}{r^3} (x\hat{x} + y\hat{y})$

Força de maré: $\vec{F}_{\text{maré}} \approx -\frac{2Gm\mu}{d^3} x\hat{x}$

$$\vec{F}_R = -\frac{GM\mu}{r^3} \left[\left(1 - 2\frac{m}{M} \left(\frac{r}{d} \right)^3 \right) x\hat{x} + y\hat{y} \right]$$

Equilíbrio estático: $\vec{F}_R \perp$ superfície do fluido

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan \theta = -\frac{F_{R,x}}{F_{R,y}} = -\left(1 - 2\frac{m}{M} \left(\frac{r}{d} \right)^3 \right) \frac{x}{y} \approx -\left(1 - 2\frac{m}{M} \left(\frac{R}{d} \right)^3 \right) \frac{x}{y} \equiv -\left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{x}{y} \quad (\text{eq. da elipse})$$

Altura do bojo: $h = b - a = \frac{m}{M} \left(\frac{R}{d} \right)^3 b \approx \frac{m}{M} \left(\frac{R}{d} \right)^3 R \Rightarrow$

$$\begin{aligned} h_{\zeta} &= 0.36 \text{ m} \\ h_{\odot} &= 0.16 \text{ m} \end{aligned}$$