Mecânica Clássica Computacional - 7600033 - 1S/2023
Projeto 1: Caos no bilhar

Descrição

O objetivo deste projeto é estudar o movimento caótico do problema do bilhar bidimensional. Os conceitos chaves envolvidos são diagramas de espaço de fase e o expoente de Lyapunov. Como referência, veja a seção 3.7 do Giordano & Nakanishi.

1. **Bilhar circular**
   Considere uma partícula pontual confinada a se mover sem atrito em um disco de raio R centrado na origem, i.e., as possíveis posições da partícula são tais que $x^2 + y^2 \leq R$. Considere que as colisões com as paredes do disco (em $x^2 + y^2 = R$) são elásticas e especulares. Sendo que inicialmente a partícula se encontra em $\mathbf{r}_0 = (x_0, 0)$, onde $0 \leq x_0 < R$, e com velocidade $\mathbf{v}_0 = (0, v)$, responda:

   (a) Qual a menor distância ao centro na trajetória subsequente da partícula?

   (b) Trace o gráfico do espaço de fases x vs. v_x para $y = 0$ para os casos (i) $x_0 = R/2$, (ii) $x_0 = R/4$, e (iii) alguns outros casos de sua escolha. O espaço de fase típico se parece com o caso (i) ou (ii)?

   (c) Considere agora que uma segunda partícula também se move no mesmo bilhar e com as condições iniciais $\mathbf{r}'_0 = (x_0 + \delta x, 0)$ e $\mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}_0$. Sendo $\delta r = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}'(t)|$ a distância entre as partículas, determine o gráfico de $\delta r/R$ como função de vt para alguns valores típicos de x_0 e $\delta x = 10^{-6}R$ e $\delta x = 10^{-4}R$. Como as trajetórias se distanciam entre si para o regime em que $\delta r \ll R$? Como a $\delta r(t)$ depende de x_0 e δx? Existe alguma quantidade universal?

2. **Bilhar estádio de futebol**
   Considere agora que as partículas se movem num estádio de futebol. Este estádio é definido como dois semicírculos de raio R conectados por um retângulo de dimensões $2R \times 2\alpha R$ (onde $\alpha > 0$ é uma constante). Como no problema anterior, assuma que as partículas se movem sem atrito dentro do estádio e as colisões com as paredes são especulares e elásticas. Considere também que o centro do estádio (que coincide com o do retângulo) se encontra na origem dos eixos. Finalmente, considere que o maior eixo de simetria do estádio coincide com o eixo x. (Dessa forma, note que $|x| \leq (1 + \alpha) R$ e $|y| \leq R$.) Analogamente ao problema anterior, responda:

   (a) Determine o gráfico do espaço de fases x vs. v_x para $y = 0$ para $x_0 = R/4$, e (i) $\alpha = 10^{-3}$ e (ii) 10^{-1}. Compare com aquele do item 1b.

   (b) Trace o gráfico de δr como função de vt para $\delta x = 10^{-8}R$, $\alpha = 10^{-5}$ e para os mesmos valores de x_0 usados no item 1c. Obtenha o valor do expoente de Lyapunov. Como esse expoente depende de δx e de x_0?

   (c) Trace o gráfico do expoente de Lyapunov como função do parâmetro α e obtenha a dependência assintótica desse expoente para $\alpha \ll 1$. O limite de $\alpha \to 0$ é compatível com aquele obtido no item 1c?