

# Mecânica Clássica Computacional - 7600033 - 1S/2023

## Projeto 2: O Periélio de Mercúrio

### Descrição

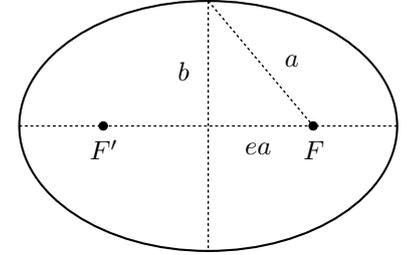
Discutiremos nesse projeto o movimento de “partículas” que interagem por uma força central  $\mathbf{F}_{i,j} = F(\mathbf{r}_{i,j}) \hat{\mathbf{r}}_{i,j}$ , onde  $\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  e  $\mathbf{r}_\alpha$  é a posição da  $\alpha$ -ésima partícula. Em particular, estaremos interessados na lei de Gravitação de Newton (e correções relativísticas) que é um caso específico desse tipo de força:

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_{1,2}|^3} \mathbf{r}_{1,2}, \quad (1)$$

onde  $m_{1(2)}$  é a massa do planeta/astro/partícula 1 (2),  $G$  é a constante gravitacional e  $r = |\mathbf{r}|$  é o módulo do vetor  $\mathbf{r}$ . Nesse caso, consideraremos os planetas se movendo em um plano, o que é uma excelente aproximação para o sistema solar, e, portanto, uma simulação bidimensional será suficiente. Como as órbitas dos planetas são periódicas, o método de Euler é desaconselhável, uma vez que ele não conserva energia e leva a órbitas instáveis. Por isso, utilizaremos o método de Euler-Cromer. Além disso, utilizaremos também um método importante de integração numérica conhecido por método de Runge-Kutta. Como referência, veja as seções 4.3 e 4.4 do Giordano & Nakanishi.

#### 1. O problema de dois corpos: órbitas limitadas

Desde os trabalhos pioneiros de Kepler, sabemos que os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos. Na figura ao lado, mostramos uma elipse com seus focos  $F$  e  $F'$ , semieixos maior  $a$  e menor  $b$ , e excentricidade  $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ . Quando  $e = 0$ , tem-se uma órbita circular. Sabemos que esse resultado segue da lei da gravitação de Newton, Eq. (1), e queremos aqui recuperar essa solução de modo numérico. Antes de discutirmos o método numérico, contudo, vamos estabelecer as unidades mais convenientes para estudarmos o problema. Por se tratar de um problema astronômico, utilizaremos, não muito surpreendentemente, a chamada Unidade Astronômica (UA) como unidade de comprimento.



Uma unidade astronômica, ou simplesmente 1 UA, é definida como a distância média Terra-Sol ( $\approx 1.5 \times 10^{11}$  m). O tempo é convenientemente medido em anos ( $1 \text{ ano} \approx 3.2 \times 10^7$  s) por  $2\pi$ , o que corresponde, naturalmente, ao período de rotação da Terra ao redor do Sol dividido por  $2\pi$ . Desejamos reescrever a lei de Newton nessas unidades. Definindo

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}}{\text{UA}} \text{ e } \tau = \frac{t}{\text{ano}/2\pi}, \quad (2)$$

então

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM_\odot m}{r^3} \mathbf{r}, \Rightarrow \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{d\tau^2} = \ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{GM_\odot \text{ano}^2}{(2\pi)^2 \text{UA}^3} \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}, \quad (3)$$

onde, na última igualdade, usamos que  $GM_\odot = 4\pi^2 \text{UA}^3 \text{ano}^{-2}$ . Este resultado é obtido da seguinte maneira. Assumindo uma órbita circular para a Terra,

$$\frac{M_\oplus v^2}{r} = \frac{GM_\oplus M_\odot}{r^2}, \quad (4)$$

conclui-se que

$$GM_\odot = v^2 r = \left( \frac{2\pi r}{\text{ano}} \right)^2 r = (2\pi)^2 \frac{(\text{UA})^3}{\text{ano}^2}. \quad (5)$$

Vamos considerar inicialmente o problema de dois corpos, planeta + Sol. Pelo fato do Sol ser muito mais massivo

que os planetas, vamos tomar o Sol parado na origem:  $v_{\odot} = 0$  e  $(x_{\odot}, y_{\odot}) = (0, 0)$ . As equações de movimento para as coordenadas  $(x, y)$  de um dado planeta são

$$\frac{d^2 \rho_x}{d\tau^2} = \ddot{\rho}_x = -\frac{\rho_x}{\rho^3} \text{ e } \frac{d^2 \rho_y}{d\tau^2} = \ddot{\rho}_y = -\frac{\rho_y}{\rho^3}, \quad (6)$$

onde

$$\rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}, \quad (7)$$

é a distância instantânea entre o planeta e o Sol em unidades astronômicas. Para utilizarmos métodos de integração numérica, reescrevemos as duas equações diferenciais de segunda ordem como quatro equações diferenciais de primeira ordem, ou seja,

$$\dot{\rho}_x = v_x \text{ e } \dot{v}_x = -\frac{\rho_x}{\rho^3}, \quad (8)$$

$$\dot{\rho}_y = v_y \text{ e } \dot{v}_y = -\frac{\rho_y}{\rho^3}, \quad (9)$$

onde  $v_x$  e  $v_y$  são, respectivamente, as velocidades ao longo das direções  $x$  e  $y$ . Dentro do método de Euler-Cromer (EC), as quatro diferenciais em (8) e (9) são aproximadas por

$$v_{x,i+1} = v_{x,i} - \frac{\rho_{x,i}}{\rho_i^3} \Delta\tau, \quad (10)$$

$$\rho_{x,i+1} = \rho_{x,i} + v_{x,i+1} \Delta\tau, \quad (11)$$

$$v_{y,i+1} = v_{y,i} - \frac{\rho_{y,i}}{\rho_i^3} \Delta\tau, \quad (12)$$

$$\rho_{y,i+1} = \rho_{y,i} + v_{y,i+1} \Delta\tau, \quad (13)$$

onde  $\Delta\tau$  é o passo temporal (em unidades de  $\frac{\text{ano}}{2\pi}$ ).

Um outro importante método de integração numérica é o de Runge-Kutta. Para o caso em questão, o método em quarta ordem de aproximação em  $\Delta\tau$  diz que deve-se iterar as seguintes equações:

$$\rho_{x,i+1} = \rho_{x,i} + \frac{\Delta\tau}{6} \left( F_{1,i}^{(1)} + 2F_{1,i}^{(2)} + 2F_{1,i}^{(3)} + F_{1,i}^{(4)} \right), \quad (14)$$

$$\rho_{y,i+1} = \rho_{y,i} + \frac{\Delta\tau}{6} \left( F_{2,i}^{(1)} + 2F_{2,i}^{(2)} + 2F_{2,i}^{(3)} + F_{2,i}^{(4)} \right), \quad (15)$$

$$v_{x,i+1} = v_{x,i} + \frac{\Delta\tau}{6} \left( F_{3,i}^{(1)} + 2F_{3,i}^{(2)} + 2F_{3,i}^{(3)} + F_{3,i}^{(4)} \right), \quad (16)$$

$$v_{y,i+1} = v_{y,i} + \frac{\Delta\tau}{6} \left( F_{4,i}^{(1)} + 2F_{4,i}^{(2)} + 2F_{4,i}^{(3)} + F_{4,i}^{(4)} \right), \quad (17)$$

onde

$$F_{1,i}^{(j)} = v_{x,i}^{(j)}, \quad F_{2,i}^{(j)} = v_{y,i}^{(j)}, \quad F_{3,i}^{(j)} = -\frac{\rho_{x,i}^{(j)}}{\rho_i^{(j)3}} \text{ e } F_{4,i}^{(j)} = -\frac{\rho_{y,i}^{(j)}}{\rho_i^{(j)3}},$$

com

$$\rho_{x,i}^{(j)} = \rho_{x,i} + C^{(j)} \Delta t F_{1,i}^{(j-1)}, \quad \rho_{y,i}^{(j)} = \rho_{y,i} + C^{(j)} \Delta t F_{2,i}^{(j-1)},$$

$$v_{x,i}^{(j)} = v_{x,i} + C^{(j)} \Delta t F_{3,i}^{(j-1)}, \quad \text{e } v_{y,i}^{(j)} = v_{y,i} + C^{(j)} \Delta t F_{4,i}^{(j-1)},$$

e  $\rho_i^{(j)} = \sqrt{\rho_{x,i}^{(j)2} + \rho_{y,i}^{(j)2}}$ , com  $C^{(1)} = 0$ ,  $C^{(2)} = C^{(3)} = \frac{1}{2}$ , e  $C^{(4)} = 1$ . (Para  $j = 1$ , não se preocupe com  $F^{(j-1)}$  porque  $C^{(1)} = 0$ .)

- (a) Escreva um programa FORTRAN que calcula a posição  $\boldsymbol{\rho}(\tau)$  e velocidade  $\boldsymbol{v}(\tau)$  de um planeta como função do tempo implementando o método de EC por meio das Eqs. (10)-(13).

Planeta	massa ( $M_{\oplus}$ )	semieixo maior (UA)	excentricidade ( $e$ )
Mercúrio	0.055	0.39	0.206
Vênus	0.815	0.72	0.007
Terra	1	1.00	0.017
Marte	0.107	1.52	0.093
Júpiter	318	5.20	0.049
Saturno	95.2	9.58	0.057
Urano	14.5	19.2	0.046
Netuno	17.1	30.1	0.009

Tabela I: Dados planetários úteis. A massa do Sol é  $M_{\odot} = 3.33 \times 10^5 M_{\oplus} = 1.99 \times 10^{30}$  Kg e a massa da Terra é  $M_{\oplus} = 5.97 \times 10^{24}$  Kg.

- (b) Considere a tabela I. Determine as condições iniciais de posição e velocidade correspondentes.  
(c) Queremos quantificar o desvio à órbita elíptica correspondente. Para isso, definimos

$$\delta = \frac{1}{Nb} \sum_{i=1}^N |\rho_{y,i} - y_{\text{elipse}}(\rho_{x,i})|, \quad (18)$$

onde  $y_{\text{elipse}}(x) = \pm b \sqrt{1 - (x/a)^2}$  é a coordenada vertical da elipse na posição  $x$ , e  $N$  é o número de iterações do método para 5 revoluções do planeta em torno do Sol. Trace o gráfico de  $\delta$  como função  $\Delta\tau$ . Definindo como uma boa escolha de passo temporal  $\Delta\tau_{\text{max}}$  como sendo aquele tal que  $\delta \lesssim 10^{-3}$  para todo  $\Delta\tau < \Delta\tau_{\text{max}}$ , determine  $\Delta\tau_{\text{max}}$  como função de  $a$ . Verifique se  $\Delta\tau_{\text{max}} \propto a^{3/2}$ .

- (d) (Opcional) Em termos de coordenadas cilíndricas, as equações de movimento (6) são

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \rho = \frac{1-e^2}{\rho^3} \left( \frac{a}{\text{UA}} \right) - \frac{1}{\rho^2}, \text{ e } \frac{d}{d\tau} \theta = \frac{1}{\rho^2} \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\text{UA}}}.$$

Adapte o método de Euler-Cromer para essas equações e refaça o item 1a. Analogamente, refaça os itens 1b e 1c para o planeta Mercúrio.

- (e) Escreva um programa FORTRAN que calcula a posição  $\boldsymbol{\rho}(\tau)$  e velocidade  $\boldsymbol{v}(\tau)$  de um planeta como função do tempo implementando o método de Runge-Kutta em quarta ordem (RK4) por meio das Eqs. (14)-(17).  
(f) Usando  $\Delta\tau_{\text{max}}$  para o planeta Terra encontrado no item 1c, trace num mesmo gráfico a energia mecânica total calculada pelos métodos de EC e de RK4. Compare também o desvio  $\delta$  [vide Eq. (18)] para os dois métodos.  
(g) Considere forças centrais iguais a  $-\rho^{\phi} \hat{\rho}$ , onde  $\phi$  é um expoente. Usando o método RK4, verifique que, para  $\phi = 1$  (oscilador harmônico) e  $\phi = -2$  (Kepler), as órbitas limitadas são fechadas (evidentemente, não apenas as circulares).  
(h) Existe alguma órbita ilimitada (onde  $\rho \rightarrow \infty$  para algum instante de tempo  $\tau$  e energia finita  $E$ ) para  $\phi > 0$ ? Existe alguma órbita limitada para  $\phi \leq -3$ ? Faça algumas simulações variando  $\phi$ .  
(i) Compare o método de Euler-Cromer com o de Verlet. (Escolha uma quantidade para essa comparação e justifique.)

## 2. Correções relativísticas para a órbita de Mercúrio

Para a órbita de Mercúrio, os efeitos relativísticos da curvatura do espaço-tempo preditos pela Relatividade Geral são suficientemente fortes para serem medidos experimentalmente. Neste caso, podemos encarar os efeitos relativísticos como uma perturbação à lei da gravitação universal de Newton. Mais precisamente, a força gravitacional entre o Sol e Mercúrio torna-se

$$F \approx \frac{GM_{\odot}M_{\oplus}}{r^2} \left( 1 + \frac{\alpha}{(r/\text{UA})^2} \right), \quad (19)$$

onde  $\alpha \approx 1.1 \times 10^{-8}$  é deveras pequeno para os valores de  $r$  para Mercúrio.

- (a) Usando  $\alpha = 0.1$ , utilize o método de RK4 para simular a órbita de Mercúrio corrigida de acordo com (19). Determine a precessão do periélio correspondente traçando o gráfico do ângulo de precessão do eixo como função do tempo. (Utilize unidades astronômicas.) Fazendo um ajuste de seus dados, determine a taxa de precessão do periélio correspondente.
- (b) Repita o item anterior para outros valores menores de  $\alpha$  e trace o gráfico da taxa de precessão correspondente. Fazendo um novo ajuste de seus dados, determine como a taxa de precessão varia com o valor de  $\alpha$ . Finalmente, use seu resultado para calcular a taxa de precessão do periélio de Mercúrio (para  $\alpha = 1.1 \times 10^{-8}$ ).

### 3. Sol, Mercúrio e Júpiter

Utilizando o método RK4, vamos considerar agora o problema no qual temos a Mercúrio, o Sol e Júpiter.<sup>1</sup> As equações de movimento são dadas por

$$\ddot{\rho}_{\odot,x} = \mu_{\text{☿}} a_{\odot,\text{☿},x} + \mu_{\text{♃}} a_{\odot,\text{♃},x} \quad \text{e} \quad \ddot{\rho}_{\odot,y} = \mu_{\text{☿}} a_{\odot,\text{☿},y} + \mu_{\text{♃}} a_{\odot,\text{♃},y}, \quad (20)$$

$$\ddot{\rho}_{\text{☿},x} = -a_{\odot,\text{☿},x} + \mu_{\text{♃}} a_{\text{☿},\text{♃},x} \quad \text{e} \quad \ddot{\rho}_{\text{☿},y} = -a_{\odot,\text{☿},y} + \mu_{\text{♃}} a_{\text{☿},\text{♃},y}, \quad (21)$$

$$\ddot{\rho}_{\text{♃},x} = -a_{\odot,\text{♃},x} - \mu_{\text{☿}} a_{\text{♃},\text{☿},x} \quad \text{e} \quad \ddot{\rho}_{\text{♃},y} = -a_{\odot,\text{♃},y} - \mu_{\text{☿}} a_{\text{♃},\text{☿},y}, \quad (22)$$

onde

$$a_{\star,\times,\alpha} = -\frac{(\rho_{\star,\alpha} - \rho_{\times,\alpha})}{|\rho_{\star} - \rho_{\times}|^3}, \quad (23)$$

$\mu_{\star} = \frac{M_{\star}}{M_{\odot}}$  é a razão entre a massa do planeta  $\star$  e a massa do Sol, e  $\rho_{\odot}$ ,  $\rho_{\text{☿}}$  e  $\rho_{\text{♃}}$  são as posições do Sol, Mercúrio e Júpiter, respectivamente. [Note que estamos usando as variáveis definidas em (2), por isso  $M_{\odot}$  no denominador de  $\mu_{\star}$ .]

- (a) Escreva explicitamente em seu relatório o análogo das Eqs. (14)-(17) para o movimento dos 3 corpos celestes das Eq. (20)-(22).
- (b) Escreva um programa FORTRAN que calcula a órbita dos corpos celestes das Eq. (20)-(22) pelo método de RK4, admitindo como condição inicial aquelas do item 1b para os dois planetas. OBS: Calcule a posição e velocidade do centro de massa. A fim de mantê-lo parado na origem, translate as posições e velocidades dos planetas e do Sol de acordo.
- (c) Trace a trajetória de Mercúrio e calcule a precessão de seu periélio. (Justifique muito bem sua escolha para o valor de  $\Delta\tau$  para essa tarefa e o intervalo de tempo da simulação. Como o efeito da precessão é muito pequeno, aumente a massa de Júpiter para magnificá-lo. Refaça essa tarefa para outros valores e determine como a taxa de precessão do periélio de Mercúrio depende dessa massa e, finalmente, extrapole para o valor de 1 massa de Júpiter).
- (d) Agora, vamos simplificar o problema considerando que o Sol está fixo na origem e substituindo Júpiter por um anel homogêneo de massa  $M_{\text{♃}}$  e raio 5.2 UA cujo centro também está na origem. Calcule a taxa de precessão do periélio de Mercúrio para diferentes massas de anel, determine a dependência dela com a massa e, finalmente, extrapole para o caso em que o anel tem apenas uma massa de Júpiter. Como valor da taxa de precessão se compara com aquele do item anterior?

<sup>1</sup> Note pela tabela I que Júpiter é o planeta que mais afeta Mercúrio.

## Breve discussão sobre a execução dos problemas

### O problema de dois corpos

Em muitos casos de interesse, é possível estudar o problema de dois corpos como se fosse apenas um corpo num potencial externo. Considere o caso de duas partículas interagindo via uma força central. Neste caso, a energia total do sistema é

$$E = \frac{1}{2}m_1 |\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2 |\dot{\mathbf{r}}_2|^2 + V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (24)$$

Além disso, as equações de movimento são

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\nabla_1 V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \text{ and } m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\nabla_2 V(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad (25)$$

onde  $\nabla_i$  é o gradiente com relação à coordenada  $\mathbf{r}_i$ .

Como não há potencial externo, o momento total do sistema deve ser conservado. Isso indica que o momento do centro de massa é conservado. Sendo assim, seria interessante mudar das coordenadas originais  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  para novas  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{r}$  onde

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (26)$$

é a coordenada do centro de massa e  $\mathbf{r}$  (a ser determinada) é dita a coordenada relativa. Para que as novas coordenadas sejam úteis, elas devem ser desacopladas entre si, i.e., as equações de movimento de uma coordenada deve ser independente da outra (que não é o caso de (25)). A resposta para tal é que

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (27)$$

Invertendo as Eqs. (26) e (27), as coordenadas originais são

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Substituindo em (24), temos que a energia total pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \left( m_1 \left( |\dot{\mathbf{R}}|^2 - 2 \frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_2^2}{M^2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 \right) + m_2 \left( |\dot{\mathbf{R}}|^2 + 2 \frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{m_1^2}{M^2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 \right) \right) + V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2} M |\dot{\mathbf{R}}|^2 + \frac{1}{2} \mu |\dot{\mathbf{r}}|^2 + V(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (28)$$

onde  $M = m_1 + m_2$  é a massa total do sistema e  $\mu = m_1 m_2 / M$  (também chamada de massa reduzida). Note que (28) é a energia de duas partículas independentes. A primeira de coordenada  $\mathbf{R}$  e massa  $M$  está livre e, portanto, só contribui com energia cinética para a energia total. A segunda de coordenada  $\mathbf{r}$  tem massa  $\mu$  e está sujeita ao potencial  $V(\mathbf{r})$ . O problema então se reduz a resolver as seguintes equações de movimento:

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0 \text{ and } \mu \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

Neste caso, o problema se reduz a resolver essas duas equações diferenciais independentes. Como a solução de uma independe da outra, diz-se que a transformação (26)-(27) desacopla o sistema. Em suma, o centro de massa é livre e, portanto, descreve um movimento uniforme

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t,$$

enquanto a coordenada relativa descreve um movimento determinado pelo “potencial externo” ditado pela lei de Newton. Para forças centrais  $V(\mathbf{r}) = V(r)$  ou  $\mathbf{F} = F(r) \hat{r}$ , então a

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = F(r) \hat{r}.$$

Para forças centrais do tipo  $F = -Kr^\phi$ , reescrevemos a equação de movimento como

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = -r^\phi, \text{ onde } \tau = \sqrt{\frac{K}{\mu}} t.$$

Para o caso gravitacional, isso quer dizer que  $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM\mu}{r^3} \mathbf{r}$ . Ou seja, a coordenada relativa  $\mathbf{r}$  representa uma partícula de massa  $\mu$  orbitando uma outra partícula de massa  $M$  fixa na origem.

No limite em que  $m_1 \gg m_2$ , como no caso do Sol e um planeta, por exemplo, temos que

$$\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{R} \text{ e } \mathbf{r}_2 \approx \mathbf{R} + \mathbf{r}.$$

Tomando o referencial como o do centro de massa, então o Sol fica parado na origem enquanto o planeta  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$  orbita em torno dele.

### Órbitas planetárias em mecânica clássica

Para o caso de uma partícula num potencial central, o momento angular é conservado. Isso implica que a trajetória é planar. Por esse motivo, vamos considerar que ele se dá no plano  $xy$ . O momento angular é

$$\mathbf{L} = m |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| \hat{z} = mr^2 \dot{\theta} \hat{z}.$$

Aqui, é mais conveniente usar coordenadas cilíndricas

$$x = r \cos \theta \text{ e } y = r \sin \theta.$$

A energia total é

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \tilde{V}(r),$$

onde  $\tilde{V} = V + L^2/(2mr^2)$  é dito o potencial efetivo para a coordenada  $r$ .

A equação do movimento correspondente é

$$\frac{d^2}{dt^2} (mr) = -\frac{d}{dr} (\tilde{V}(r)).$$

Da conservação do momento angular, temos que  $Ldt = mr^2 d\theta$ . Logo,

$$\frac{d^2}{dt^2} (mr) = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\theta} (mr) \right) = \frac{L^2}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} r \right) = -\frac{L^2}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \right).$$

Donde obtemos que

$$-\frac{L^2}{mr^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{d}{dr} (V(r)) + \frac{L^2}{mr^3}, \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{L^2} F(r).$$

Para o caso gravitacional,  $F = -dV/dr = -GMm/r^2$ , e portanto, a equação de trajetória simplifica para

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2}.$$

A solução é do tipo

$$\frac{1}{r} = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GMm^2}{L^2} = \frac{GMm^2}{L^2} [1 - e \cos(\theta - \theta_0)],$$

que é a equação de uma cônica de excentricidade  $e$  e  $\theta = \theta_0$  sendo o afélio. Escolhendo  $x$  como o eixo do semieixo maior e o foco do centro atrator estando a esquerda do afélio, então  $\theta_0 = 0$ . É interessante escrever a excentricidade

como função das constantes do movimento. A partir daqui, vamos considerar o caso de órbitas elípticas e circulares. Note que no afélio,  $r = a(1 + e)$  e  $\dot{r} = 0$ , onde  $a$  é o semieixo maior. Neste caso, a energia total é

$$E = \frac{L^2}{2ma^2(1+e)^2} - \frac{GMm}{a(1+e)}.$$

Como o afélio acontece para  $\theta = 0$ , temos que

$$\frac{1}{a(1+e)} = \frac{GMm^2}{L^2}(1-e).$$

Logo,

$$E = \frac{L^2}{2m} \left( \frac{GMm^2}{L^2}(1-e) \right)^2 - GMm \frac{GMm^2}{L^2}(1-e) = -\frac{G^2M^2m^3}{2L^2}(1-e^2),$$

e

$$a = \frac{L^2}{GMm^2(1-e^2)} = -\frac{GMm}{2E}.$$

Com isso, a equação da trajetória se reduz a

$$\frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} \cos \theta \right) = \frac{1 - e \cos \theta}{a(1 - e^2)}.$$

Com relação à dependência temporal, temos que

$$\ddot{r} = -\frac{d}{dr}(\tilde{V}(r)) = \frac{L^2}{m^2r^3} - \frac{GM}{r^2}, \text{ e } \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}.$$

### Potencial gravitacional de um anel

Considere um anel homogêneo de massa  $M$  e raio  $R$ . Desejamos calcular a força gravitacional entre esse anel e uma partícula de prova de massa  $m$  que se encontra no plano do anel.

Uma possível estratégia é localizar o centro desse anel na origem do sistema e calcular a energia potencial correspondente sendo que a partícula se encontra a uma distância  $zR$  da origem.

Dessa maneira, a energia potencial pode ser obtida via simples integração:

$$dU = -G \left( \frac{M}{2\pi R} R d\theta \right) m \times \frac{1}{\sqrt{R^2 \sin^2 \theta + (zR - R \cos \theta)^2}},$$

onde um elemento de massa do anel tem comprimento  $Rd\theta$  sendo  $\theta$  o ângulo entre o vetor posição desse elemento de massa e o vetor posição da partícula de prova. Continuando com a integração,

$$U(z) = - \left( \frac{GMm}{\pi R} \right) \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2z \cos \theta + z^2}},$$

que resulta numa função elíptica. Para posições da partícula de prova próximas do centro do anel ( $z \ll 1$ ), podemos expandir o integrando e obter o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - 2z \cos \theta + z^2}} &\approx 1 + z \cos \theta + \frac{1}{2^2}(1 + 3 \cos 2\theta)z^2 + \frac{1}{2^3}(3 \cos \theta + 5 \cos 3\theta)z^3 + \frac{1}{2^6}(9 + 20 \cos 2\theta + 35 \cos 4\theta)z^4 \\ &+ \frac{1}{2^3} \cos \theta (15 - 70 \cos^2 \theta + 63 \cos^4 \theta)z^5 + \frac{1}{2^9}(50 + 105 \cos 2\theta + 126 \cos 4\theta + 231 \cos 6\theta)z^6 \\ &+ \frac{1}{2^4} \cos \theta (-35 + 315 \cos^2 \theta - 693 \cos^4 \theta + 429 \cos^6 \theta)z^7 \\ &+ \frac{1}{2^7}(35 - 1260 \cos^2 \theta + 6930 \cos^4 \theta - 12012 \cos^6 \theta + 6435 \cos^8 \theta)z^8. \end{aligned}$$

Integrando em  $\theta$ , note que apenas os termos proporcionais a potências pares de  $z$  não se anulam. O resultado é

$$U(z) = - \left( \frac{GMm}{\pi R} \right) \pi \left( 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{9}{2^6} z^4 + \frac{25}{2^8} z^6 + \frac{1225}{2^{14}} z^8 + \mathcal{O}(z^{10}) \right).$$

Logo, a força resultante sobre a partícula dentro (e no plano) do anel aponta radialmente para fora da origem (em direção ao anel) e tem magnitude

$$F = - \frac{1}{R} \frac{d}{dz} U(z) = \left( \frac{GMm}{2R^2} \right) \left( z + \frac{9}{2^3} z^3 + \frac{75}{2^6} z^5 + \frac{1225}{2^{10}} z^7 + \mathcal{O}(z^9) \right).$$

### O método de Runge-Kutta

Um importante método de integração numérica de equações diferenciais de primeira ordem é o de Runge-Kutta que explicamos a seguir.

Seja o sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dx_\beta}{dt} = f_\beta(x_1, \dots, x_N, t) = f_\beta(\{x_\gamma\}, t), \quad (29)$$

onde  $x_\beta \equiv x_\beta(t)$  são funções do tempo e  $\beta = 1, \dots, N$ . Por exemplo, no caso de uma partícula num potencial externo  $V(\mathbf{r}, t)$  (dependente da posição e do tempo), onde  $\mathbf{r}(t)$  é a posição da mesma no instante  $t$ , tem-se o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_x(t), \Rightarrow \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_6, t) = x_4, \\ \dot{y}(t) &= v_y(t), \Rightarrow \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_6, t) = x_5, \\ \dot{z}(t) &= v_z(t), \Rightarrow \dot{x}_3 = f_3(x_1, \dots, x_6, t) = x_6, \\ \dot{v}_x(t) &= - \frac{d}{dx} \left( \frac{V(\mathbf{r}, t)}{m} \right), \Rightarrow \dot{x}_4 = f_4(x_1, \dots, x_6, t) = - \frac{d}{dx_1} \left( \frac{V(x_1, x_2, x_3, t)}{m} \right), \\ \dot{v}_y(t) &= - \frac{d}{dy} \left( \frac{V(\mathbf{r}, t)}{m} \right), \Rightarrow \dot{x}_5 = f_5(x_1, \dots, x_6, t) = - \frac{d}{dx_2} \left( \frac{V(x_1, x_2, x_3, t)}{m} \right), \\ \dot{v}_z(t) &= - \frac{d}{dz} \left( \frac{V(\mathbf{r}, t)}{m} \right), \Rightarrow \dot{x}_6 = f_6(x_1, \dots, x_6, t) = - \frac{d}{dx_3} \left( \frac{V(x_1, x_2, x_3, t)}{m} \right). \end{aligned}$$

O método diz que uma solução numérica do sistema (29) é dada pela iteração de

$$x_{\beta, k+1} = x_{\beta, k} + \Delta t \sum_{j=1}^m A^{(j)} F_{\beta, k}^{(j)} + \mathcal{O} \left( f_{\beta, k}^{(m)} \Delta t^{m+1} \right). \quad (30)$$

Ou seja, a correção é da ordem de  $\Delta t^{m+1}$  multiplicada pela  $m$ -ésima derivada de  $f_\beta$  no instante  $t = t_k = k\Delta t$ . As funções  $F_{\beta, k}^{(j)}$  dependem das funções em ordem mais baixa:

$$F_{\beta, k}^{(j)} = f_\beta \left( \left\{ x_{\gamma, k} + \frac{\Delta t}{B^{(j)}} F_{\gamma, k}^{(j-1)} \right\}, t_k + \frac{\Delta t}{B^{(j)}} \right), \quad (31)$$

com  $F_{\beta, k}^{(1)} = f_\beta(\{x_{\gamma, k}\}, t_k)$  (o que define  $B^{(1)} \rightarrow \infty$ ). Os coeficientes  $A^{(j)}$  e  $B^{(j)}$  são independentes de  $\beta$  mas dependem da ordem da aproximação  $m$ . Para  $m = 4$ , que é comumente usado, os coeficientes são iguais a

$$2A^{(1)} = 2A^{(4)} = A^{(2)} = A^{(3)} = \frac{1}{3} \text{ e } B^{(2)} = B^{(3)} = 2B^{(4)} = 2. \quad (32)$$

Como pode o incremento dado em (30) ser de precisão  $f_\beta^{(m)} \Delta t^{m+1}$ ? Note que as funções em (31) são calculadas em tempos intermediárias  $t_k + \frac{\Delta t}{B^{(j)}}$ . Dessa forma, instantes de tempo entre  $t_k$  e  $t_{k+1}$  são considerados. Além disso, note que o método considera as funções  $f_\beta$  calculadas em pontos intermediárias  $x_{\gamma, k} + \frac{\Delta t}{B^{(j)}} F_{\gamma, k}^{(j-1)}$ . Dessa maneira, outras derivadas de  $f_\beta$  estão sendo calculadas pelo método.

Vamos derivar agora os coeficientes  $A^{(j)}$  e  $B^{(j)}$  para ordem  $m = 2$ .

Neste caso, considere a expansão

$$\begin{aligned} x_{\beta,k+1} &= x_{\beta,k} + \frac{dx_{\beta,k}}{dt} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{d^2 x_{\beta,k}}{dt^2} (\Delta t)^2 + \dots \\ &= x_{\beta,k} + f_{\beta,k} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{df_{\beta,k}}{dt} (\Delta t)^2 + \mathcal{O}\left(f_{\beta,k}^{(2)} (\Delta t)^3\right), \end{aligned}$$

onde usamos que  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\beta} \frac{\partial x_{\beta}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\beta} f_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}}$ . Logo,

$$x_{\beta,k+1} = x_{\beta,k} + f_{\beta,k} \Delta t + \frac{1}{2} \left( \partial_t f_{\beta,k} + \sum_{\gamma} f_{\gamma,k} \partial_{\gamma} f_{\beta,k} \right) (\Delta t)^2 + \mathcal{O}\left(f_{\beta,k}^{(2)} (\Delta t)^3\right). \quad (33)$$

Agora comparamos a série de Taylor (33) com a seguinte expressão do método de Runge-Kutta

$$x_{\beta,k+1} = x_{\beta,k} + \Delta t \left( A_{\beta}^{(1)} F_{\beta,k}^{(1)} + A_{\beta}^{(2)} F_{\beta,k}^{(2)} \right) + \mathcal{O}\left(f_{\beta,k}^{(2)} (\Delta t)^3\right), \quad (34)$$

com

$$F_{\beta,k}^{(1)} = f_{\beta,k} = f_{\beta}(x_{1,k}, \dots, x_{N,k}, t_k) \text{ e } F_{\beta,k}^{(2)} = f_{\beta} \left( \left\{ x_{\gamma,k} + \frac{\Delta t}{B^{(2)}} f_{\gamma,k} \right\}, t_k + \frac{\Delta t}{B^{(2)}} \right).$$

(Note que estamos abrindo a possibilidade de que os coeficientes  $A_{\beta}^{(j)}$  sejam dependentes de  $\beta$ .) Para que possamos comparar (33) com (34), precisamos expandir

$$\begin{aligned} F_{\beta,k}^{(2)} &= f_{\beta} \left( \left\{ x_{\gamma,k} + \frac{\Delta t}{B^{(2)}} f_{\gamma,k} \right\}, t_k + \frac{\Delta t}{B^{(2)}} \right) = f_{\beta}(\{x_{\gamma,k}\}, t_k) + \sum_{\gamma} \partial_{\gamma} f_{\beta,k} \left( \frac{\Delta t}{B^{(2)}} f_{\gamma,k} \right) + \partial_t f_{\beta,k} \left( \frac{\Delta t}{B^{(2)}} \right) + \mathcal{O}\left(f_{\beta}^{(2)} (\Delta t)^2\right) \\ &= f_{\beta}(\{x_{\gamma,k}\}, t_k) + \frac{\Delta t}{B^{(2)}} \left( \sum_{\gamma} f_{\gamma,k} \partial_{\gamma} + \partial_t \right) f_{\beta,k} + \mathcal{O}\left(f_{\beta}^{(2)} (\Delta t)^2\right) \\ &= f_{\beta}(\{x_{\gamma,k}\}, t_k) + \frac{\Delta t}{B^{(2)}} \frac{d}{dt} f_{\beta,k} + \mathcal{O}\left(f_{\beta}^{(2)} (\Delta t)^2\right). \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado em (34), então

$$x_{\beta,k+1} = x_{\beta,k} + \Delta t \left( A_{\beta}^{(1)} + A_{\beta}^{(2)} \right) f_{\beta,k} + \frac{A_{\beta}^{(2)}}{B^{(2)}} \left( \frac{d}{dt} f_{\beta,k} \right) (\Delta t)^2 + \mathcal{O}\left(f_{\beta,k}^{(2)} (\Delta t)^3\right),$$

de onde concluímos que

$$A_{\beta}^{(1)} + A_{\beta}^{(2)} = 1 \text{ and } \frac{A_{\beta}^{(2)}}{B^{(2)}} = \frac{1}{2}. \quad (35)$$

Note que esse sistema tem mais de uma solução. Mais importante, note que os coeficientes  $A_{\beta}^{(j)}$  não dependem de  $\beta$  e, por esse motivo, não vamos mais escrever o sub-índice  $\beta$ .

Como exemplo, considere o caso em que  $\dot{x} = f_x(x, v, t) = v$ , e  $\dot{v} = f_v(x, v, t)$ . Portanto, até segunda ordem

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta t \left( A^{(1)} v_k + A^{(2)} \left( v_k + \frac{\Delta t}{B^{(2)}} f_{v,k} \right) \right) \\ &= x_k + \Delta t \left( A^{(1)} + A^{(2)} \right) v_k + (\Delta t)^2 \frac{A^{(2)}}{B^{(2)}} f_{v,k} \\ &= x_k + \Delta t v_k + \frac{(\Delta t)^2}{2} f_{v,k}, \end{aligned}$$

para qualquer solução de (35). Note que esta é a equação de movimento de uma partícula com aceleração constante. Ou seja, aprendemos aqui que o método de Runge-Kutta na aproximação de segunda ordem considera o movimento como sendo uniformemente acelerado entre os instantes  $t_k$  e  $t_{k+1}$ . Isso já é uma aproximação melhor do que a do

método de Euler, que considera que o movimento é uniforme entre esses instantes de tempo. A atualização para a velocidade é

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t \left[ A^{(1)} f_{v,k} + A^{(2)} f_v \left( x_k + \frac{\Delta t}{B^{(2)}} v_k, v_k + \frac{\Delta t}{B^{(2)}} f_{v,k}, t_k + \frac{\Delta t}{B^{(2)}} \right) \right].$$

Para o caso em que  $f_v(x, v, t) = f_v(t)$ , e usando a solução  $A^{(1)} = A^{(2)} = \frac{1}{2}$ , e  $B^{(2)} = 1$ , então

$$v_{k+1} - v_k = \frac{\Delta t}{2} [f_{v,k} + f_v(t_k + \Delta t)] = \frac{\Delta t}{2} [f_{v,k} + f_{v,k+1}],$$

que simplesmente é a regra de integração numérica Trapezoidal.

Em suma, o método de Runge-Kutta é uma maneira de implementar as regras numéricas de integração para sistemas de equações diferenciais.

Em ordem  $m = 3$ , encontramos que

$$\left( A_\beta^{(1)} + A_\beta^{(2)} + A_\beta^{(3)} \right) = 1, \quad \left( \frac{A_\beta^{(2)}}{B^{(2)}} + \frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(3)}} \right) = \frac{1}{2!}, \quad \text{e} \quad \frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(2)}B^{(3)}} = \frac{1}{3!} = \left( \frac{A_\beta^{(2)}}{2B^{(2)2}} + \frac{A_\beta^{(3)}}{2B^{(3)2}} \right).$$

Novamente, os coeficientes não dependem de  $\beta$ . Como no caso de segunda ordem, há mais de uma solução. Uma delas (talvez uma das mais simples) é tal que  $A_\beta^{(2)} = 0$ . Neste caso,

$$A^{(1)} = \frac{1}{4}, \quad A^{(2)} = 0, \quad A_3^{(3)} = \frac{3}{4}, \quad B^{(2)} = 3, \quad \text{e} \quad B^{(3)} = \frac{3}{2}.$$

Para o caso de quarta ordem  $m = 4$ , após uma tediosa manipulação algébrica, encontramos que

$$A_\beta^{(1)} + \dots + A_\beta^{(4)} = 1, \quad \frac{A_\beta^{(2)}}{B^{(2)}} + \frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(3)}} + \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(4)}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{A_\beta^{(2)}}{B^{(2)2}} + \frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(3)2}} + \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(4)2}} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(2)}B^{(3)}} + \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(3)}B^{(4)}} = \frac{1}{3!}, \quad \frac{A_\beta^{(2)}}{B^{(2)3}} + \frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(3)3}} + \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(4)3}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(2)2}B^{(3)}} + \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(3)2}B^{(4)}} = \frac{2!}{4!},$$

$$\frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(2)}B^{(3)2}} + \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(3)}B^{(4)2}} = \frac{3}{4!} \quad \text{and} \quad \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(2)}B^{(3)}B^{(4)}} = \frac{1}{4!}.$$

Novamente, os coeficientes não dependem de  $\beta$ . Entretanto, diferentemente dos casos  $m = 2$  e  $m = 3$ , só há uma solução igual aquela apresentada em (32)

$$2A^{(1)} = 2A^{(4)} = A^{(2)} = A^{(3)} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad B^{(2)} = B^{(3)} = 2B^{(4)} = 2.$$

Em outras palavras,

$$x_{\beta,k+1} = x_{\beta,k} + \frac{\Delta t}{6} \left( F_{\beta,k}^{(1)} + 2F_{\beta,k}^{(2)} + 2F_{\beta,k}^{(3)} + F_{\beta,k}^{(4)} \right),$$

onde

$$F_{\beta,k}^{(1)} = f_{\beta,k}, \quad F_{\beta,k}^{(2)} = f_\beta \left( \left\{ x_{\gamma,k} + \frac{\Delta t}{2} f_{\gamma,k} \right\}, t_k + \frac{\Delta t}{2} \right),$$

$$F_{\beta,k}^{(3)} = f_\beta \left( \left\{ x_{\gamma,k} + \frac{\Delta t}{2} F_{\gamma,k}^{(2)} \right\}, t_k + \frac{\Delta t}{2} \right) \quad \text{e} \quad F_{\beta,k}^{(4)} = f_\beta \left( \left\{ x_{\gamma,k} + \Delta t F_{\gamma,k}^{(3)} \right\}, t_k + \Delta t \right).$$