

Mecânica Clássica Computacional - 7600033 - 1S/2023
Projeto 3: Solução de equações diferenciais pelo método iterativo

Descrição

Discutiremos nesse projeto como solucionar equações diferenciais pelo método iterativo onde o espaço é discretizado numa grade. Em particular, vamos nos focar em equações elípticas. Como referência, veja o capítulo 6 do Koonin & Meredith.

1. Equação de Poisson em $d = 1$

Considere a equação diferencial

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = S(x) = 6x, \quad (1)$$

definida em $x \in [0, 1]$, com a condição de contorno $\psi(0) = \psi(1) = 0$. A solução analítica é simples e igual a

$$\psi(x) = x(1 - x^2). \quad (2)$$

A equação (1) pode ser obtida da minimização do funcional

$$E = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx}\psi(x) \right)^2 - S(x)\psi(x) \right], \quad (3)$$

com respeito a todas as funções $\psi(x)$ que obedecem as mesmas condições de contorno (vide detalhes na seção A). (Para a solução (2), o valor mínimo do funcional é $E_{\min} = -2/5$.)

O nosso objetivo é encontrar uma solução numérica para $\psi(x)$ usando o método iterativo. Primeiramente, devemos discretizar o espaço em unidades de h de tal maneira que os pontos discretizados da rede são $x_j = jh$, com $j = 0, 1, \dots, N + 1$. Dessa maneira, temos N pontos entre $x = 0$ e $x = 1$. O campo $\psi(x)$ também se torna discretizado com $\psi(x_j) \rightarrow \psi_j$. Naturalmente, as condições de contorno se tornam $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$. O método iterativo tem por objetivo obter os outros N valores do campo $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$. O método consiste em iterar a Eq. (1) até que um determinado critério de convergência seja satisfeito. Naturalmente, devemos discretizar a Eq. (1). Tal discretização não é única. Aqui, iremos utilizar a segunda derivada de 3 pontos (a mais simples e menos acurada). (Naturalmente, outras derivadas numéricas mais acuradas podem ser utilizadas resultando em convergências mais rápidas.) Logo, a Eq. (1) se torna

$$-\left(\frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{h^2} \right) = S_j, \Rightarrow \psi_j = \frac{1}{2} (\psi_{j+1} + \psi_{j-1} + h^2 S_j). \quad (4)$$

Iterando a Eq. (4) (sempre usando o valor de ψ_j atualizado) até que um critério de convergência seja satisfeito, nos fornece uma solução numérica para $\psi(x)$. Este é o método por iteração.

- (a) Como a solução analítica é conhecida, vamos iterar $M = 10^4$ vezes e comparar o resultado numérico com o analítico em cada uma dessas iterações. Aqui, cada iteração é definida como uma varrida completa por todos $\psi_{j=1, \dots, N}$ fazendo a atualização (4). Após cada iteração, calcule o valor do funcional

$$E = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{1}{2h} (\psi_j - \psi_{j-1})^2 + h S_j \psi_j \quad (5)$$

e faça um gráfico de $\delta E = |E - E_{\min}|$ como função da k -ésima iteração $\{k = 1, \dots, M\}$. Utilize como valor inicial $\psi_j = 0, \forall j$. Essa tarefa deve ser repetida para os seguintes valores de discretização $N = 10, 20, 30, \dots, 100$. Os seus resultados para diferentes N devem ser apresentados num mesmo gráfico log-linear. Interprete o seu resultado. Por que δE satura em $\delta E_{\text{saturado}}$? Estude como $\delta E_{\text{saturado}}$ depende de N .

(b) Repita o exercício anterior mas para a quantidade

$$\delta\psi = h \sum_{j=1}^N |\psi(x_j) - \psi_j|, \quad (6)$$

onde $\psi(x_j)$ é o valor analítico (2) de ψ calculado em $x_j = hj$. Visualize ψ_j como função de jh e compare com o resultado analítico (2).

- (c) O que se pode concluir sobre a relação entre o número de iterações requeridas para que uma determinada precisão seja alcançada e o valor da discretização N ? Para isso, ajuste $\delta E \sim e^{-\lambda E^k}$ e $\delta\psi \sim e^{-\lambda\psi^k}$ para intervalos de iterações k cuidadosamente escolhidos e verifique a dependência de λ com N .
- (d) É bastante desejável diminuir o número de iterações necessárias para se alcançar uma determinada precisão. Uma possível estratégia para tal é “misturar” o valor antigo do campo ψ_j com o atualizado. Pensando dessa maneira, vamos propor a seguinte generalização da Eq. (4):

$$\psi_j \rightarrow (1 - \omega)\psi_j + \omega \frac{1}{2} (\psi_{j+1} + \psi_{j-1} + h^2 S_j). \quad (7)$$

A constante ω é conhecida por parâmetro de relaxação e controla a mistura entre o valor antigo do campo ψ_j e o valor atualizado $\frac{1}{2} (\psi_{j+1} + \psi_{j-1} + h^2 S_j)$. Ela deve ser escolhida a fim de maximizar a velocidade de convergência.

Desejamos agora estudar como o valor de ω muda a velocidade de convergência. Para isso, repita os itens 1a e 1b para vários valores de $\omega \in]0, 2[$ e faça um único gráfico de λ como função de ω para os diferentes valores de N . Sendo ω^* o valor de ω que maximiza λ , faça um gráfico de ω^* como função de N e discuta seus resultados.

(Outras estratégias para minimizar o número de iterações necessárias é utilizar um bom valor inicial para o valor do campo ψ_j . Para isso, costuma-se utilizar o método de iteração começando com uma rede de discretização pequena e de rápida convergência e aumenta-se o tamanho da rede (o valor de N) utilizando como valor inicial de ψ aquele obtido da rede menor interpolado para a rede maior.)

- (e) Por fim, desejamos estudar um critério de convergência. Imagine que não conhecemos a solução analítica (2). Quando devemos parar o método iterativo neste caso? Uma possível escolha é a seguinte. Seja $\{\psi_{j,k}\}$ o campo discretizado após a k -ésima iteração. Podemos assumir que a solução convergiu caso o campo não tenha mudado apreciavelmente em relação a si mesma após algumas iterações. Essa ideia pode ser quantificada através de

$$\delta\tilde{\psi} = h \sum_{j=1}^N |\psi_{j,k} - \psi_{j,k-l}|, \quad (8)$$

onde compara-se o campo “antigo” $\psi_{j,k-l}$ com o “novo” $\psi_{j,k}$ distantes l iterações entre si. Um critério de parada ideal seria quando $\delta\tilde{\psi} \leq \epsilon$ com ϵ sendo a precisão de máquina. Entretanto, isso é raramente praticável. Aqui, usando $l = 20$ (ou seja, comparando os campos $l = 20$ iterações de distância entre si), calcule o número de iterações M necessárias para que o critério de parada (8) seja satisfeito com $\epsilon = 10^{-6}$ como função de ω para os diferentes valores de N . (Novamente, todos esses resultados devem estar no mesmo gráfico.) Finalmente, verifique se esse critério foi satisfatório calculando $\delta\psi$ em (6) para o campo convergido.

2. Hidrodinâmica: fluxo viscoso estacionário em $d = 2$

Desejamos agora estudar o fluxo de um líquido passando por um obstáculo como ilustrado na Fig. 1. Para isso, precisamos de algumas quantidades chaves como o campo de densidade $\rho(\mathbf{r}, t)$, de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ e de pressão $P(\mathbf{r}, t)$. Essas quantidades estão relacionadas por duas equações fundamentais da hidrodinâmica:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \rho^{-1} \nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (10)$$

A Eq. (9) é a equação de continuidade que traduz-se na conservação de massa ao longo do fluxo. A Eq. (10) é a famosa equação de Navier-Stokes que diz como a velocidade muda em resposta às forças convectivas $-(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$,

superficiais ($-\rho^{-1}\nabla P$) e viscosas ($\eta\nabla^2\mathbf{v}$). Aqui, η é a viscosidade cinética que assumiremos como constante. (Estaremos negligenciando os efeitos de forças volumétricas como, por exemplo, a força gravitacional.) Evidentemente, falta mais uma equação para a completa determinação desses campos. Esta é a equação de estado do fluido relacionando a pressão com a densidade e o campo de temperatura, se assim for. Caso, a temperatura não seja constante, uma outra equação de conservação/transporte de energia se faz necessária. Aqui, iremos estudar um fluido mais simples incompressível e cuja temperatura é uniforme. Além disso, iremos considerar o caso de um fluxo bidimensional estacionário como ilustra a Fig. 1. (Podemos pensar que estamos olhando um seção transversal a z onde o movimento nesta pode ser negligenciado. Também estamos considerando o caso estático longe do regime turbulento. Neste caso, os campos são estáticos.)

Dada essas simplificações, e definindo os campos de linhas de fluxo ψ e vorticidade ζ como

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ e } v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (11)$$

e

$$\zeta \equiv \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\nabla^2\psi, \quad (12)$$

as equações (9) e (10) simplificam para (vide detalhes na seção B)

$$\eta\nabla^2\zeta = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \quad (13)$$

$$\nabla^2 P = 2\rho_0 \left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \right)^2 \right]. \quad (14)$$

As equações (12) e (13) definem o sistema de equações possibilitando a determinação do campo vetorial \mathbf{v} independentemente do campo de pressão P . Uma vez que o campo de linhas de corrente ψ estiver determinado, a pressão é obtida via (14).

Por simetria, o campo de velocidades é simétrico com relação a $y \rightarrow -y$ fazendo $v_y \rightarrow -v_y$ e mantendo v_x . Dessa maneira, é suficiente resolver as Eqs. (12) e (13) apenas no plano $y > 0$. Resta-nos agora definir as condições de contorno.

Contorno AH: vamos considerar que o fluxo de entrada está suficientemente longe do obstáculo e não é modificado pela presença do mesmo. Logo, $\mathbf{v} = v_0\hat{x}$ na linha AH (vide Fig. 1). Isso resulta em $\zeta = 0$ e $\psi = v_0y + \text{const}$, onde podemos definir que $\text{const}=0$. Podemos ser mais conservadores e admitir apenas que $\mathbf{v} = v(y)\hat{y}$. Dessa maneira, as condições de contorno tornam-se $\zeta = 0$ e $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$.

Contornos AB e EF: Por simetria, as linhas centrais AB e EF são linhas de fluxo e, portanto, ψ deve ser constante. Sem perda de generalidade, escolhemos $\psi = 0$. Por simetria, a vorticidade deve ser nula nas linhas de simetria. Logo, $\zeta = 0$.

Contornos BC, CD e DE: Nestes, o fluxo perpendicular a eles é nulo, ou seja, esses contornos são linhas de fluxo. Note desta maneira que a linha ABCDEF é uma única linha de fluxo e portanto, $\psi = 0$. Qual

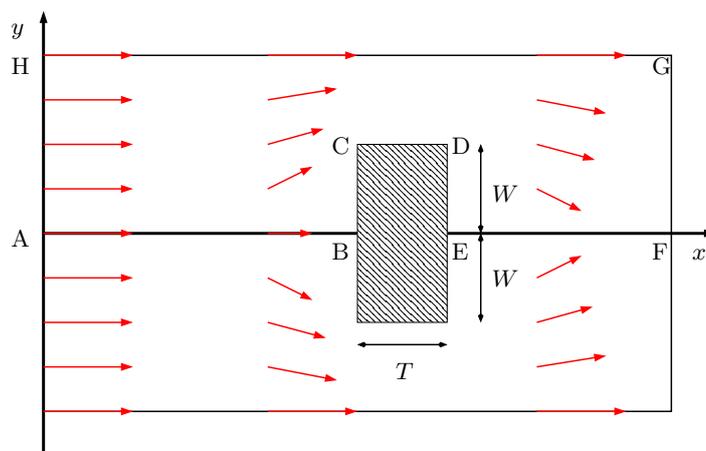


Figura 1: Fluxo de um fluido passando por um obstáculo fixo.

a condição para ζ ? Como o fluxo é viscoso, temos que $\mathbf{v} = 0$ nestes contornos. Mas isso apenas define condições para ψ : $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$. Para obter a condição para ζ , vamos considerar o contorno superior CD. Neste, note que $\zeta = -\nabla^2\psi = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$ porque $\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$ significando que o fluxo é tangente à superfície (exceto nas quinas C e D). Logo, expandindo ψ perto desta superfície, temos que $\psi(x, y + dy) = \psi(x, y) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)(dy)^2 = -\frac{1}{2}\zeta(dy)^2$, porque $\psi(x, y) = 0$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = v_x = 0$ e $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = -\zeta$. Finalmente, a condição de contorno se torna $\zeta = -2\psi(x, y + dy)/(dy)^2$. Analogamente, para o contorno BC, $\zeta = -2\psi(x - dx, y)/(dx)^2$, e para o contorno DE, $\zeta = -2\psi(x + dx, y)/(dx)^2$. Nas quinas C e D, a condição de contorno se torna ambígua.

Contorno GH: Considerando que este se encontra suficientemente longe do obstáculo, o fluxo é então inalterado e $\mathbf{v} = v_0\hat{x}$. Portanto, $\zeta = 0$ e $\frac{\partial\psi}{\partial y} = v_0$.

Contorno FG: Considerando que o obstáculo está longe, admitir as mesmas condições do fluxo de entrada em AH seria plausível. Entretanto, podemos admitir uma condição que minimiza os efeitos no fluxo. Esta é $\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0$ que significa que nada muda com relação à x além dessa fronteira.

Uma vez definida as equações diferenciais e suas condições de contorno, podemos agora aplicar o método de iteração. O primeiro passo é discretizar a rede. Definindo $h = \Delta x = \Delta y$ como sendo a distância entre pontos consecutivos da rede, podemos definir quantidades adimensionais onde comprimentos e velocidades estão em unidades de h e v_0 , respectivamente. Dessa maneira, definindo $\mathbf{r} = h\tilde{\mathbf{r}}$ $\mathbf{v} = v_0\tilde{\mathbf{v}}$, $\psi = v_0h\tilde{\psi}$, $\zeta = v_0\tilde{\zeta}/h$, e $P = \rho_0v_0^2\tilde{P}$ (as quantidades $\tilde{\cdot}$ são adimensionais), as equações se tornam

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}^2\tilde{\psi} &= -\tilde{\zeta} \\ \tilde{\nabla}^2\tilde{\zeta} &= R\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{y}}\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial\tilde{x}} - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}}\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial\tilde{y}}\right), \\ \tilde{\nabla}^2\tilde{P} &= 2\left[\left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^2}\right)\left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{y}^2}\right) - \left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{y}}\right)^2\right],\end{aligned}$$

onde $R = v_0h/\eta$ é o número de Reynolds da rede. Ele não é o número de Reynolds físico que pode ser definido como $\text{Re} = 2Wv_0/\eta$, onde $2W$ é uma medida da dimensão linear do obstáculo perpendicular ao fluxo. Dessa maneira, relacionamos os número de Reynolds físico e da rede através de $R = 2\frac{W}{h}\text{Re}$, ou seja, a razão R/Re é tão maior quanto menor for a granulação da rede h em relação a W . Finalmente, as derivadas numéricas se tornam $\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}} \rightarrow \frac{\tilde{\psi}_{i+1,j} - \tilde{\psi}_{i-1,j}}{2} \equiv \frac{1}{2}(\delta_i\tilde{\psi})_{i,j}$ e $\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^2} \rightarrow \tilde{\psi}_{i+1,j} - 2\tilde{\psi}_{i,j} + \tilde{\psi}_{i-1,j} \equiv (\delta_i^2\tilde{\psi})_{i,j}$. Note que estamos utilizando derivadas centrais. Dessa maneira, ambas têm a mesma precisão da ordem de h^2 . Portanto, as derivadas numéricas se tornam

$$(\delta_i^2\tilde{\psi})_{i,j} + (\delta_j^2\tilde{\psi})_{i,j} = -\tilde{\zeta}_{i,j} \quad (15)$$

$$(\delta_i^2\tilde{\zeta})_{i,j} + (\delta_j^2\tilde{\zeta})_{i,j} = \frac{1}{4}R\left[(\delta_j\tilde{\psi})_{i,j}(\delta_i\tilde{\zeta})_{i,j} - (\delta_i\tilde{\psi})_{i,j}(\delta_j\tilde{\zeta})_{i,j}\right], \quad (16)$$

$$(\delta_i^2\tilde{P})_{i,j} + (\delta_j^2\tilde{P})_{i,j} = 2\left[(\delta_i^2\tilde{\psi})_{i,j}(\delta_j^2\tilde{\psi})_{i,j} - \frac{1}{16}\left((\delta_j\delta_i\tilde{\psi})_{i,j}\right)^2\right]. \quad (17)$$

As condições de contorno são

$$\tilde{\psi}_{i,j} = 0 \text{ e } \tilde{\zeta}_{i,j} = 0 \text{ em AB e EF}, \quad (18)$$

$$\tilde{\psi}_{i,j} = 0 \text{ e } \tilde{\zeta}_{i,j} = -2\tilde{\psi}_{i-1,j} \text{ em BC}, \quad (19)$$

$$\tilde{\psi}_{i,j} = 0 \text{ e } \tilde{\zeta}_{i,j} = -2\tilde{\psi}_{i,j+1} \text{ em CD}, \quad (20)$$

$$\tilde{\psi}_{i,j} = 0 \text{ e } \tilde{\zeta}_{i,j} = -2\tilde{\psi}_{i+1,j} \text{ em DE}, \quad (21)$$

$$\tilde{\psi}_{i-1,j} = \tilde{\psi}_{i+1,j} \text{ e } \tilde{\zeta}_{i-1,j} = \tilde{\zeta}_{i+1,j} \text{ em FG}, \quad (22)$$

$$\tilde{\psi}_{i,j+1} = 2 + \tilde{\psi}_{i,j-1} \text{ e } \tilde{\zeta}_{i,j} = 0 \text{ em GH}, \quad (23)$$

$$\tilde{\psi}_{i-1,j} = \tilde{\psi}_{i+1,j} \text{ e } \tilde{\zeta}_{i,j} = 0 \text{ em HA}. \quad (24)$$

- (a) Escreva um programa que resolva as Eqs. (15) e (16) iterativamente. Neste, faça uma atualização de ψ através de (15), que se torna

$$\tilde{\psi}_{i,j} = \frac{1}{4}\left(\tilde{\psi}_{i+1,j} + \tilde{\psi}_{i-1,j} + \tilde{\psi}_{i,j+1} + \tilde{\psi}_{i,j-1} + \tilde{\zeta}_{i,j}\right),$$

seguida de uma atualização de suas condições de contorno. Em seguida, admita uma atualização das condições de contorno (19)–(21) de ζ sobre o obstáculo. Finalmente, faça uma atualização do campo ζ através da Eq. (16), que se torna

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_{i,j} &= \frac{1}{4} (\tilde{\zeta}_{i+1,j} + \tilde{\zeta}_{i-1,j} + \tilde{\zeta}_{i,j+1} + \tilde{\zeta}_{i,j-1}) \\ &+ \frac{R}{16} [(\tilde{\psi}_{i+1,j} - \tilde{\psi}_{i-1,j}) (\tilde{\zeta}_{i,j+1} - \tilde{\zeta}_{i,j-1}) - (\tilde{\psi}_{i,j+1} - \tilde{\psi}_{i,j-1}) (\tilde{\zeta}_{i+1,j} - \tilde{\zeta}_{i-1,j})].\end{aligned}$$

Por causa da não-linearidade das Eqs. (15) e (16), a implementação do método iterativo deve ser via um parâmetro de relaxação ω pequeno (não muito maior que 0.1).

- (b) Utilizando redes não muito maiores que 70×30 e obstáculos não muito maiores que $W = 6$ e $T = 10$, calcule e faça um gráfico do campo vetorial \mathbf{v} para número de Reynolds da rede R entre 0.01 e 8. Para melhor convergência, comece com R e W pequenos e a condição inicial de fluxo livre (sem obstáculo) $\tilde{\mathbf{v}} = \hat{x}$, $\tilde{\psi} = y$, $\tilde{\zeta} = 0$ (mais as condições de contorno). Com isso, a convergência é rápida e o fluxo é suave em torno do obstáculo. Depois, aumente R e W utilizando como condição inicial o valor dos campos $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\zeta}$ obtidos anteriormente. Verifique como o fluxo muda para diferentes R e como um vórtice surge atrás do obstáculo para R maiores.
- (c) Determine as condições de contorno para o campo de pressão P dado por (17).
- (d) Calcule a força de arraste de pressão sobre o obstáculo definida como

$$F_P = 2 \left(\int_{BC} P(x, y) dy - \int_{DE} P(x, y) dy \right),$$

onde as integrais são sobre as faces do obstáculo e o fator 2 é porque as integrais consideram apenas a parte superior dessas. Note de (27) que $\frac{\partial P}{\partial y} = \rho_0 \eta \frac{\partial \zeta}{\partial x}$.

- (e) Calcule a força de arraste viscoso

$$F_\eta = 2\rho_0\eta \int_{CD} \frac{\partial v_x}{\partial y} dx = -2\rho_0\eta \int_{CD} \zeta dx,$$

onde, novamente o fator 2 é porque há outra face no plano inferior $y < 0$, e a segunda igualdade vem do fato de que $\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$ nas faces laterais do obstáculo.

- (f) **(Opcional)** Calcule o campo \mathbf{v} para outras geometrias como, por exemplo, dois obstáculos um atrás do outro, e um do lado do outro (como numa constricção).

Detalhes matemáticos

A. Cálculo variacional

Dado um funcional

$$E \equiv E[\psi(x)] = \int dx \mathcal{L}(\psi', \psi, x),$$

desejamos achar a função $\psi(x)$ que extremiza E . Seja, ψ^* tal função. Logo,

$$E[\psi(x)] = E[\psi^*(x) + \epsilon\eta(x)] = E[\psi] + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

ou seja,

$$\frac{dE}{d\epsilon} = 0 = \int dx \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{L}(\psi', \psi, x).$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) &= \left(\frac{\partial \psi'}{\partial \epsilon} \right) \frac{\partial}{\partial \psi'} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right) \frac{\partial}{\partial \psi} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) + \left(\frac{\partial x}{\partial \epsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) \\ &= \eta' \frac{\partial}{\partial \psi'} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) + \eta \frac{\partial}{\partial \psi} \mathcal{L}(\psi', \psi, x), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\epsilon} = 0 &= \int dx \eta' \frac{\partial}{\partial \psi'} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) + \eta \frac{\partial}{\partial \psi} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) \\ &= \eta \frac{\partial}{\partial \psi'} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) \Big|_{x_{\min}}^{x_{\max}} - \int dx \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial \psi'} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) \right) + \int dx \eta \frac{\partial}{\partial \psi} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) \\ &= \int dx \eta \left\{ - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial \psi'} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) \right\}, \end{aligned}$$

onde usamos as condições de contorno $\eta(x_{\min}) = \eta(x_{\max}) = 0$. Finalmente, como o funcional é extremizado para qualquer $\eta(x)$ obedecendo as condições de contorno, temos necessariamente que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial \psi'} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \mathcal{L}(\psi', \psi, x) = 0,$$

que é a equação de Euler-Lagrange. Para o funcional da Eq. (3), temos que

$$\frac{d}{dx}(\psi') + S(x) = \psi'' + S(x) = 0,$$

que recupera a Eq. (3).

B. Fluxo bidimensional de um fluido incompressível

Para o caso de um fluido incompressível $\rho(r) = \rho_0$ num fluxo estacionário, as Eqs. (9) e (10) simplificam para

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \tag{25}$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\rho_0^{-1} \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \tag{26}$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\rho_0^{-1} \frac{\partial P}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right). \tag{27}$$

Poderíamos discretizar essas equações e obter uma solução pelo método de iteração discretizando o plano xy em uma região de interesse do fluxo. Entretanto, podemos simplificar essas equações. A equação de continuidade (25) é trivialmente satisfeita admitindo um potencial vetor, i.e., sendo $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{\Psi}$, a Eq. (25) é naturalmente satisfeita porque $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{\Psi}) = 0$ para todo $\mathbf{\Psi}$. Como $\mathbf{v} \cdot \hat{z} = 0$, então temos que $\mathbf{\Psi} = \psi \hat{z}$, onde o campo $\psi \equiv \psi(x, y)$. Logo,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ e } v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (28)$$

que justifica a definição (11). Note que $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ e, portanto, \mathbf{v} é tangente às linhas de contorno de ψ . Ou seja, as linhas em que ψ é constante são as linhas de fluxo (“streamlines”) do fluido. Por essa razão, ψ é conhecido por campo de linhas de fluxo.

É interessante notar que podemos excluir o campo P na determinação dos campos v_x e v_y manipulando as Eqs. (26) e (27). Derivando a primeira com relação a y e subtraindo desta a segunda quando derivada por x , temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \eta \left(\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 v_x - \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 v_y \right), \\ \Rightarrow & \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \\ & + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \eta \nabla^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \eta \nabla^2 (\nabla^2 \psi) \\ & \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \eta \nabla^2 \zeta, \end{aligned} \quad (29)$$

onde

$$\zeta \equiv \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\nabla^2 \psi, \quad (30)$$

que recuperam as Eqs. (13) e (12), respectivamente. O campo ζ é conhecido como campo vorticidade porque $\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{z} = \zeta \hat{z}$.

Manipulando as Eqs. (26) e (27), encontramos que

$$\begin{aligned} \rho_0 \nabla^2 P &= \eta \nabla^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\ &= \eta \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 - v_x \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - v_y \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right) - v_x \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} \right) - \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 - v_y \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \\ &= - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right), \\ \Rightarrow \rho_0 \nabla^2 P &= 2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (31)$$

que recupera a Eq. (14).