

**Laboratório de fluidos e termodinâmica - SLC0629 - 1S/2023**  
**Escoamento laminar viscoso**

**Descrição**

Essa prática tem por objetivo estudar fluidos Newtonianos em situações simplificadas. Precisamente, estudaremos o escoamento da água em um tubo (capilar) cilíndrico no regime de escoamento laminar. Medindo a relação entre a queda de pressão entre as extremidades do tubo e a vazão de água correspondente, podemos medir indiretamente a viscosidade da água através da equação de Hagen-Poiseuille.

Demonstrações complementares:

1. Demonstração da sustentação de uma esfera por um jato de ar proveniente de um túnel de vento.
2. Medida da pressão sobre um aerofólio e determinação esquemática da força de arraste de pressão, i.e., a força de sustentação (não confundir com a força de arraste viscoso).
3. Visualização de diversos fluxos passando por geometrias distintas (diferentes obstáculos) com o auxílio de (i) purpurina e de (ii) permanganato de potássio.

**Introdução: a força viscosa**

Por definição, a força viscosa é uma força volumétrica de atrito entre camadas de um fluido que estão em diferentes velocidades. Como consequência, forças tangenciais aparecem entre diferentes camadas.

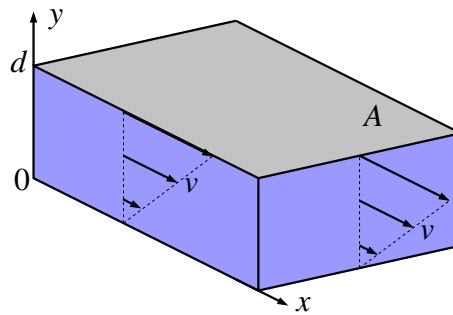


Figura 1: Escoamento laminar viscoso entre duas placas paralelas.

Considere uma camada fina de fluido entre duas placas paralelas de área  $A$  perpendiculares ao eixo  $\hat{y}$  de um eixo de coordenadas (vide Fig. 1). Uma das placas é mantida parada e a outra com velocidade constante  $v_0\hat{x}$ . Para um fluido Newtoniano e velocidades suficientemente pequenas, o fluxo no fluido é laminar, i.e., o fluido se desloca em lâminas planas paralelas que deslizam entre si. Neste caso, isso implica que o campo de velocidades  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  do fluido é tal que  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x(x, y, z)\hat{x} + v_y(x, y, z)\hat{y} + v_z(x, y, z)\hat{z} = v_x(y)\hat{x}$  onde  $v_x = v_0 y/d$ .

Note que a velocidade das camadas de fluido imediatamente em contato com as placas é igual à velocidade da placa associada, i.e., o fluido está parado em relação à superfície (sólida) de contato. Note ainda que o gradiente de velocidade é constante, i.e., a velocidade das diferentes camadas entre as placas varia linearmente com  $y$ .

Para manter a placa superior com velocidade constante  $v_0$ , é necessário aplicar uma força constante  $\mathbf{F} = F\hat{x}$  para contrabalançar a força de atrito viscoso (que está na direção  $-\hat{x}$ ). A magnitude dessa força é igual a

$$F = \eta A \frac{v_0}{d}, \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{A} = \eta \frac{dv_x}{dy}. \quad (1)$$

Ou seja, a tensão tangencial ( $F/A$ ) é proporcional à taxa de variação espacial da velocidade. A constante de proporcionalidade  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade (ou viscosidade dinâmica ou, ainda, viscosidade absoluta), cuja dimensão é  $[\eta] = \frac{\text{força} \times \text{tempo}}{\text{área}}$ . No SI, isso implica em  $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$ . Comumente, usa-se a unidade de *centipoise* (cp), onde  $1 \text{ cp} = 10^{-2} \text{ poise} = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . As viscosidades da água, da glicerina e do ar a  $20^\circ\text{C}$  são, respectivamente,  $\eta \approx 1.00 \text{ cp}$ ,  $\eta \approx 830 \text{ cp}$ , e  $\eta \approx 181 \mu\text{p}$ .

### Fluxo laminar viscoso em dutos cilíndricos

Considere um tubo cilíndrico de raio  $R$  dentro do qual um fluido Newtoniano viscoso escoa de maneira laminar. Por simetria, o campo de velocidades do fluido é  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v(r)\hat{z}$ , ou seja,  $\mathbf{v}$  aponta na direção do eixo do tubo  $\hat{z}$  e sua magnitude depende apenas da distância  $r$  do centro do cilindro (vide Fig. 2).

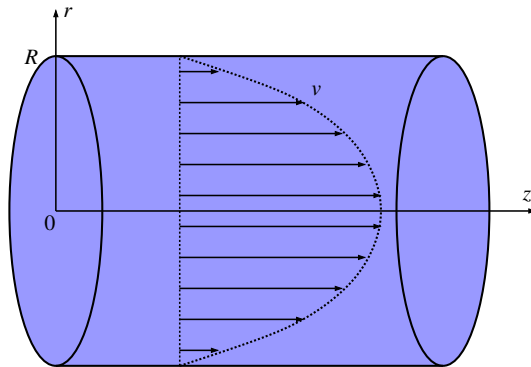


Figura 2: Fluxo laminar de um fluido viscoso em um duto cilíndrico de raio  $R$ .

Note também que a velocidade nas paredes do duto deve ser nula, i.e.,  $v(R) = 0$ . Além disso, esperamos intuitivamente que a velocidade deva ser máxima no eixo de simetria, i.e.,  $v_{\max} = v(0)$ . Nossa tarefa agora é obter a magnitude  $v(r)$  do campo de velocidades. Para isso, considere que a diferença de pressão entre duas seções retas do tubo que distam de  $L$  é  $\Delta P = P_1 - P_2$ . Essa queda de pressão é devido à força viscosa de atrito. Se  $P_1$  fosse igual a  $P_2$ , não haveria fluxo porque o atrito viscoso dissiparia a energia cinética.

Para prosseguir, considere um tubo cilíndrico imaginário de raio  $r < R$ , comprimento  $L$ , e eixo de simetria sendo o eixo  $\hat{z}$ . Quais são as forças sobre o fluido encerrado por esse tubo imaginário? Há a força viscosa (tangencial) na camada exterior em  $r$ , ou seja, de acordo com (1),

$$\mathbf{F}_{\text{visc}} = A(r)\eta\frac{dv}{dr}\hat{z} = 2\pi rL\eta\frac{dv}{dr}\hat{z}. \quad (2)$$

(Note que  $\frac{dv}{dr} < 0$  e, portanto,  $\mathbf{F}_{\text{visc}}$  está na direção  $-\hat{z}$ .) Há também a força normal devido à queda de pressão  $S(r)\Delta P\hat{z} = \pi r^2\Delta P\hat{z}$  que atua nas “tampas” do tubo imaginário. Como o fluido encerrado pelo tubo imaginário não está acelerado, essas duas forças se anulam. Logo,

$$r\Delta P = -2L\eta\frac{dv}{dr}, \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{r^2\Delta P}{4\eta L} + \text{const.} \quad (3)$$

A constante de integração é obtida impondo a condição de contorno que  $v(R) = 0$ . Logo,

$$v(r) = \frac{(R^2 - r^2)\Delta P}{4\eta L}. \quad (4)$$

Uma vez obtido o campo de velocidades  $\mathbf{v}$ , podemos calcular o fluxo de fluido  $I$  atravessando uma seção reta do tubo:

$$I = \int_0^R v dS = \frac{\Delta P}{4\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}. \quad (5)$$

Esta é a lei de Hagen-Poiseuille. Ela é análoga a lei de Ohm para resistores lineares  $I = \frac{\Delta U}{R}$ . A diferença é que a resistência elétrica é proporcional ao inverso da área do resistor. Na lei de Hagen-Poiseuille, a resistência viscosa é proporcional ao inverso do quadrado da área.

Quando a Eq. (5) é válida? Quando o fluxo for laminar. Isso acontece quando o número de Reynolds  $\text{Re} \lesssim 2000$ . Neste caso, o número de Reynolds é

$$\text{Re} = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta} = \frac{2\rho I}{\pi\eta R}, \quad (6)$$

onde  $D = 2R$  é o diâmetro do tubo e  $\bar{v} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v dS$  é a velocidade média de fluxo, i.e.,  $I = \bar{v}\pi R^2$ . (Note que  $\bar{v} = \frac{1}{2}v_{\max} = \frac{1}{2}v(0)$ .)

### Prática experimental: verificação da lei de Hagen-Poiseuille

O objetivo da prática é a verificação experimental da lei de Hagen-Poiseuille (5) que relaciona a vazão do fluxo de um fluido viscoso  $I$  que escoar por um tubo com a queda de pressão  $\Delta P$  correspondente.

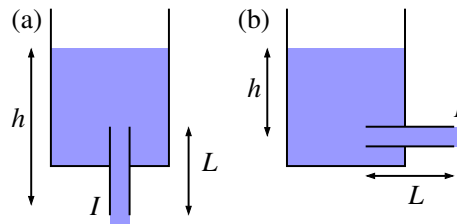


Figura 3: Possíveis esquemas de escoamento de um fluido por um tubo.

Essa é uma situação que encontramos comumente como esquematizado na Fig. 3 onde um fluido escoar de um reservatório por meio de um tubo cilíndrico. É óbvio que há muitas outras situações como, por exemplo, sangue fluindo pelos capilares de um vertebrado.

Nesta prática, utilizamos o esquema experimental ilustrado na Fig. 3(b). A queda de pressão  $\Delta P$  entre as extremidades do tubo é  $\rho gh$  onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $g$  é a aceleração da gravidade, e  $h$  é a altura da coluna de fluido. A altura desta coluna deve ser mantida constante inserindo cuidadosamente fluido pela parte superior do reservatório. Durante esse tempo, o fluxo volumétrico de fluido deve ser medido com a ajuda de um béquer graduado e um cronômetro. Para um mesmo fluxo (ou para uma mesma altura  $h$ ), utilize um cronômetro e um béquer graduado e faça pelo menos 3 medidas de  $I$  com diferentes valores de volume escoado.

Você deve verificar que seus dados estão em desacordo com a Eq. (5) quando identifica-se  $\Delta P$  com  $\rho gh$ . O motivo para tal é muito simples. A queda de pressão ao longo do tubo não é devida apenas à dissipação de energia pela força viscosa, mas também devida à energia cinética carregada pelo fluido. Antes de entrar no tubo, o fluido está praticamente parado. Parte da queda de pressão é utilizada para acelerar o fluido na configuração de velocidade em (4) como esquematizado na Fig. 4(a).

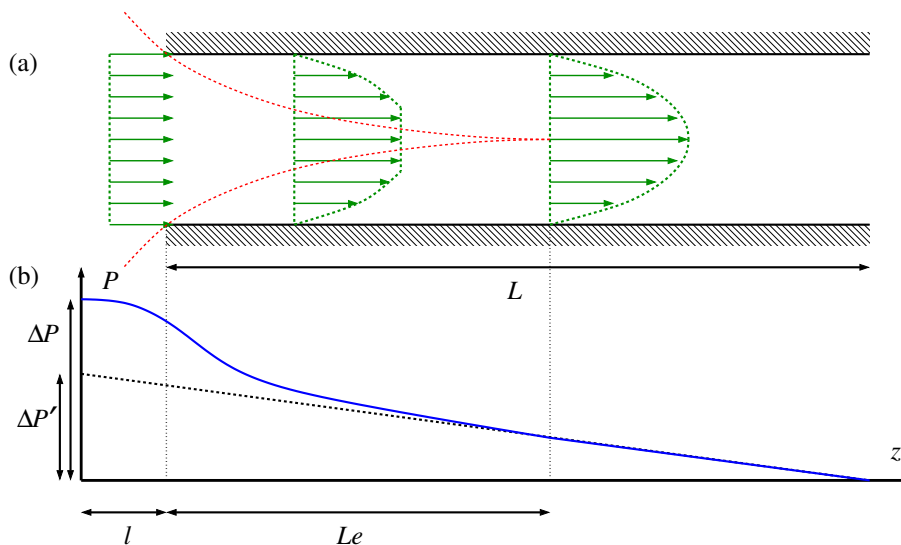


Figura 4: (a) Escoamento de um fluido viscoso por um tubo no regime laminar. (b) Pressão do fluido como função da posição  $z$  no eixo de simetria do tubo.

Note que antes de entrar no tubo, o fluxo é praticamente invíscido (i.e., não viscoso) uma vez que todas as camadas de fluido que entram no tubo estão com a mesma velocidade e, portanto, não há atrito viscoso entre elas. Ao entrar no tubo, as camadas de fluido mais próximas da parede do tubo desaceleram. Por continuidade (conservação de massa), as camadas mais distantes devem acelerar. Logo, há uma camada de fronteira (*boundary layer*) dividindo o fluxo

víscido do invíscido: a linha tracejada vermelha na Fig. 4(a).<sup>1</sup> Enquanto o campo de velocidades não está totalmente desenvolvido, i.e., enquanto não é parabólico como ditado pela Eq. (4), diz-se que o fluxo está em desenvolvimento numa região chamada de região de entrada. No regime de fluxo laminar, esta região tem comprimento

$$L_e \approx 0.06\text{Re}D = 0.24 \frac{\rho I}{\pi \eta}, \quad (7)$$

onde  $D$  é o diâmetro do duto cilíndrico, e  $\text{Re}$  é o número de Reynolds em (6).

Por fim, note que a queda de pressão acontece já antes do fluido entrar no tubo. Isto porque ele é acelerado já nas imediações antes de adentrá-lo (vide Fig. 4(b)). Essa imediações é da ordem do diâmetro do tubo. Mais precisamente, essa queda de pressão pode ser levada em conta de maneira aproximada se considerarmos que o comprimento do tubo é ligeiramente maior que  $L$ . Ou seja, basta trocar  $L$  por  $L + l$  na Eq. (5), onde

$$l \approx 1.64R. \quad (8)$$

Evidentemente, essa aproximação é válida somente quando  $L \gg l$ .

Resta-nos incorporar à nossa análise a queda de pressão devido à transformação de energia potencial em energia cinética. Para isso, é útil considerar a potência de energia cinética atravessando uma seção reta do tubo

$$W_{E_c} = \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} \int v^2 \frac{dm}{dt}, \quad (9)$$

onde  $dm$  é a quantidade de massa que atravessou a seção reta do tubo com velocidade  $v$  entre os instantes de tempo  $t$  e  $t + dt$ . Como as velocidades das partículas do fluido não mudam na região desenvolvida ( $z > L_e$ ), é conveniente escolher fazer essa integral nesta região onde o campo de velocidades é dado por (4).<sup>2</sup> Logo,

$$W_{E_c} = \frac{1}{2} \rho \int v^2 \frac{dS dz}{dt} = \frac{1}{2} \rho \int v^3 dS = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\Delta P'}{4\eta(L+l)} \right)^3 \frac{\pi R^8}{4} = \frac{\rho I^3}{(\pi R^2)^2}, \quad (10)$$

onde  $\frac{\Delta P'}{L+l}$  é a queda de pressão por unidade de comprimento devido à força viscosa (vide linha tracejada preta na Fig. 4(b)).<sup>3</sup> Na última igualdade da Eq. (10), utilizamos a Eq. (5) (com  $L$  corrigido para  $L + l$ ) para relacionar  $W_{E_c}$  com o fluxo de escoamento  $I$ .

Necessitamos agora da potência dissipada pela força viscosa. Esta é obtida facilmente da Eq. (2):

$$W_\eta = \int \frac{dF_\eta dz}{dt} = \Delta P' \int dS \left( \frac{dz}{dt} \right) = \Delta P' \int v dS = \Delta P' I = \frac{8\eta(L+l)I^2}{\pi R^4}. \quad (11)$$

Finalmente, devemos calcular a potência da força normal hidrostática

$$W_P = \int \frac{dF_P dz}{dt} = \Delta P \int dS \left( \frac{dz}{dt} \right) = \Delta P \int v dS = \Delta P I.$$

Por conservação de energia,  $W_P = W_\eta + W_{E_c}$  e, portanto,

$$\Delta P = \frac{8\eta(L+1.64R)}{\pi R^4} I + \rho \left( \frac{I}{\pi R^2} \right)^2. \quad (12)$$

Identificando  $\Delta P = \rho gh$ , a Eq. (12) nos fornece a relação entre a altura da coluna de fluido  $h$  e o fluxo de escoamento  $I$ .

Nesta prática, faça a medida da vazão  $I$  para diversas (pelo menos 10) configurações distintas de  $L$ ,  $R$ , e  $h$ . Escolha diferentes valores de  $h$ , use capilares de diferentes raios  $R$  e comprimentos  $L$ , e conecte diferentes capilares em série para obter outros valores de  $L$ . Faça uma tabela com esses dados e calcule a viscosidade. Não se esqueça de fazer a propagação de erros. Ainda nesta tabela, calcule também o número de Reynolds (6) e o comprimento da região de entrada (7). (Para os cálculos de  $\text{Re}$  e  $L_e$ , use o valor de  $\eta$  na literatura.)

<sup>1</sup> Evidentemente, descrever o fluxo nas imediações da camada de fronteira é complicado. Aqui, vamos assumir que podemos negligenciar sua influência na queda de pressão  $\Delta P$  total.

<sup>2</sup> Note que isto implica que a derivação que se segue só é válida se  $L > L_e$ .

<sup>3</sup> Estamos assumindo que essa taxa se mantém constante mesmo na região de entrada. Esta é uma boa aproximação no limite  $L \gg L_e$ .

Para cada valor de viscosidade calculada, verifique se há um acordo com o valor de  $\eta$  tabelada na literatura. Discuta detalhadamente possíveis discrepâncias verificando se (a) o regime de escoamento é laminar, e (b) se o comprimento do tubo  $L$  é maior que o comprimento de entrada  $L_e$  Eq. (7). Evidentemente, pode haver outros motivos para a discordância. Discuta-os.

**Cuidados:** (i) Procure manter a temperatura da água constante durante sua medida. Se precisar renovar água da torneira, verifique se a temperatura é a mesma. (ii) Procure manter a coluna d'água constante durante a medição da vazão. Isso requer um pouco de treinamento. (iii) Posicione conveniente o béquer usado para a medição da vazão a fim de minimizar efeitos de paralaxe. (iv) Se o fluido gotejar e houver oscilações que atrapalhem a visualização do nível de fluido no béquer, amarre um fio fino em volta da saída do tubo para evitar o gotejamento.

### Bibliografia

1. H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica, Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor*, vol. 2, Editora Blucher (1981).
2. F. W. Sears e M. W. Zemansky, *University Physics, Complete Edition*, Editora Addison-Wesley (1955).
3. S. Bradford Stone, *The Kinetic Energy Correction in Fluid Flow*, J. Rheol. **1**, 240 (1930).