

**Introdução à Física Computacional - 7600017 - 2S/2024**  
**Projeto 4 — Equações diferenciais e o movimento oscilatório**  
**Prazo de entrega: 12/11**

**DESCRIÇÃO:**

O objetivo deste projeto é estudar a dinâmica de sistemas oscilatórios simples, mais precisamente, o pêndulo simples. Para isso, duas técnicas de resolução de equações diferenciais serão apresentadas: os métodos de Euler e Euler-Cromer. Para este projeto, todos os seus programas devem usar precisão real dupla (`real(8)`).

**O PÊNDULO SIMPLES**

Considere o movimento de um pêndulo simples como mostrado na figura ao lado. A equação diferencial correspondente vem da segunda lei de Newton e se resume a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \text{sen}\theta, \quad (1)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\ell$  é o tamanho da haste rígida de massa desprezível que conecta o ponto de oscilação ao pêndulo de massa  $m$ . A energia mecânica (cinética + potencial) é

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2 + mg\ell(1 - \cos\theta), \quad (2)$$

onde

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}, \quad (3)$$

é a velocidade angular.

No limite de pequenas oscilações ( $\theta_{\max} \ll 1$ ), a Eq. (1) se torna  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta$  e, portanto, o movimento é harmônico com período  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$  e

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\Omega_0 t + \phi), \quad (4)$$

onde  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$  é a frequência natural de oscilação harmônica, e as constantes  $\theta_{\max}$  e  $\phi$  dependem das condições iniciais do problema.

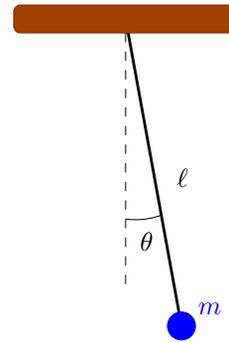
Nosso objetivo é estudar o período  $T$  no caso geral. Para usar o método de Euler, devemos transformar a equação diferencial de segunda ordem Eq. (1) em duas de primeira ordem, ou seja,

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{\ell} \text{sen}\theta \quad \rightarrow \quad \omega_{i+1} = \omega_i - \Omega_0^2 \text{sen}\theta_i \Delta t, \quad (5)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \rightarrow \quad \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \Delta t, \quad (6)$$

onde  $t = i\Delta t$  é o tempo na  $i$ -ésima iteração do método.

Para  $m = 1$  Kg,  $\ell = 1$  m e  $g = 9.8$  m/s<sup>2</sup>. O período do movimento harmônico correspondente é  $T_0 = 2.00709$  s. Pare evitar casos particulares, é conveniente estudar o problema em variáveis adimensionais. Neste caso, é natural definir  $\tau = \Omega_0 t$ . Ou seja,  $\tau$  mede o tempo em unidades do inverso da frequência natural de oscilação  $\Omega_0$ . Como o ângulo  $\theta$  está em radianos, não há necessidade de redefini-lo porque já é adimensional. A velocidade angular  $\omega = \dot{\theta}$ , entretanto, deve ser substituída por  $\frac{d\theta}{d\tau}$ , que é equivalente a fazer  $\omega \rightarrow \omega/\Omega_0$ , ou seja,  $\omega$  é medido em unidades de  $\Omega_0$ .



Analogamente, devemos fazer  $\ddot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta}/\Omega_0^2$ . Sendo assim, as Eqs. (1), (2), (4)–(6) simplificam para

$$\ddot{\theta} = -\sin \theta, \quad (7)$$

$$\mathcal{E} = \frac{E}{mgl} = 1 - \cos \theta + \frac{1}{2}\omega^2, \quad (8)$$

$$\theta(\tau) = \theta_{\max} \cos(\tau + \phi). \quad (9)$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \text{sen}\theta_i \Delta\tau, \quad (10)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \Delta\tau. \quad (11)$$

### 1. Aproximação harmônica:

- (a) Escreva um programa que resolva o pêndulo simples na aproximação harmônica pelo método de Euler, ou seja, seu programa deve iterar a equação diferencial correspondente

$$\frac{d\omega}{dt} \approx -\theta \quad \rightarrow \quad \omega_{i+1} = \omega_i - \theta_i \Delta\tau, \quad (12)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \rightarrow \quad \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \Delta\tau. \quad (13)$$

Mostre no mesmo gráfico  $\theta(\tau)$  e a solução analítica (4).

Mostre no mesmo gráfico a energia mecânica total  $\mathcal{E}(\tau)$  (na aproximação harmônica) e sua solução analítica esperada.

Discuta seus resultados.

- (b) Uma alternativa para o método de Euler é o método de Euler-Cromer. Neste as Eqs. (12) e (13) são modificadas para

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \theta_i \Delta\tau, \quad (14)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1} \Delta\tau. \quad (15)$$

Repita as tarefas do item anterior para o método de Euler-Cromer e compare. Quais as diferenças e semelhanças?

### 2. Período do pêndulo simples:

- (a) Escreva um código FORTRAN que implemente o método de Euler-Cromer para o pêndulo simples (7). Soltando o pêndulo de alguns valores de  $\theta_0$  (com  $\omega_0 = 0$ ), calcule o período de oscilação correspondente. Compare seus resultados com o valor obtido pela integral elíptica

$$\mathcal{T} = \Omega_0 T = \sqrt{2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Esta integral deve ser calculada numericamente utilizando um método de sua escolha. Cuidado com as singularidades nos limites de integração  $\pm\theta_0$ . (Faça uma tabela e um gráfico de  $\mathcal{T}$  como função de  $\theta_0$ .)

- (b) Considere valores pequenos de  $\theta_0$  e verifique que

$$\mathcal{T} \approx 2\pi \left( 1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 \right).$$

### 3. Pêndulo amortecido:

Na presença de uma força viscosa, a equação de movimento (1) é alterada para  $\ddot{\theta} = -\Omega_0^2 \text{sen}\theta - b\dot{\theta}$ , onde  $b$  é uma constante. (Caso o pêndulo seja uma esfera de raio  $R$  imerso num fluido de viscosidade  $\eta$ , a força viscosa é tal que  $b = \frac{6\pi R\eta}{m}$ .) Novamente, trabalhando com variáveis adimensionais, a equação diferencial se torna

$$\ddot{\theta} = -\text{sen}\theta - \gamma\dot{\theta}, \quad (16)$$

onde  $\gamma = b/\Omega_0$  é o coeficiente de Stokes adimensional. Escreva um código FORTRAN que implemente o método de Euler-Cromer para o caso amortecido. Tomando  $\gamma = \frac{1}{2}$ , faça o gráfico de  $\theta$  como função de  $\tau$  e indique se o movimento é sub-, super- ou criticamente amortecido.

#### 4. Pêndulo amortecido e forçado:

Além da força viscosa, desejamos estudar o caso em que há também uma força externa sobre o pêndulo. Uma maneira simples é considerar que há um torque externo sobre o pêndulo igual a  $N_{\text{ext}}(t) = N_0 \sin(\Omega t)$ . Neste caso, a equação de Newton para o ângulo do pêndulo é  $\ddot{\theta} = -\Omega_0^2 \sin\theta - b\dot{\theta} + \frac{N_0}{m\ell^2} \sin(\Omega t)$ . Novamente, trabalhando com quantidades adimensionais, a equação de Newton se torna

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \sin\theta = \alpha \sin(\nu\tau), \quad (17)$$

onde  $\nu = \Omega/\Omega_0$  é a frequência da força externa em unidades da frequência natural e  $\alpha = \frac{N_0}{\Omega_0^2 m \ell^2}$  é uma constante adimensional que parametriza a intensidade do termo forçante. Escreva um código FORTRAN que implemente o método de Euler-Cromer para a Eq. (17) e faça as tarefas abaixo para  $d\tau = 10^{-3}$ ,  $\gamma = 0.5$  e  $\nu = \frac{2}{3}$  fixos, e tempo máximo de simulação  $\tau_{\text{max}} = 50 \times 2\pi$ , i.e., 50 períodos de oscilação naturais.

OBS.: Imponha que  $-\pi \leq \theta < \pi$ . Ou seja, se ao longo das iterações  $\theta_i$  ficar maior do que  $\pi$  em módulo, faça  $\theta_i \rightarrow \theta_i \pm 2\pi$  (com o sinal adequado).

- Faça os gráficos de  $\theta(\tau)$ ,  $\omega(\tau)$  e  $\mathcal{E}(\tau)$  para  $\alpha = 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.4, \text{ e } 1.5$  e condições iniciais  $\theta_0 = \omega_0 = 0$ . Em quais casos o sistema é periódico após um transiente  $\tau_{\text{trans}}$ ? Qual é o período correspondente?
- Utilizando os mesmos dados do item anterior, faça os gráficos de  $\omega(\theta)$ .  
OBS.: Para os casos periódicos, verifique a existência de “círculos limite” para tempos posteriores ao transiente ( $\tau > \tau_{\text{trans}}$ ).
- Faça as seções de Poincaré correspondentes. Para isso, repita o item anterior considerando apenas os instantes de tempo múltiplos do período do termo forçante  $\mathcal{T}_{\text{ext}} = \frac{2\pi}{\nu}$ . Considere apenas o regime estacionário, i.e.,  $\tau > \tau_{\text{trans}}$ .  
OBS.: Note que os círculos limites se reduzem a um conjunto finito de pontos. Para o caso não-periódico (que é caótico), a seção de Poincaré é um fractal (no caso, chamado de atrator estranho). Para uma boa visualização deste, agrupe outros pontos refazendo sua simulação para diversas outras condições iniciais.
- Para ajudar a quantificar a “caoticidade” do sistema, é comum calcular o expoente de Lyapunov. Refaça o item 4a com uma pequena diferença nas condições iniciais,  $\theta_0 = 0$  e  $\omega_0 = 10^{-2}$  para o caso periódico e  $\omega_0 = 10^{-5}$  para o caso caótico, e calcule as novas trajetórias  $\theta_{\text{new}}(\tau)$  e  $\omega_{\text{new}}(\tau)$ . A quantidade de interesse é a diferença entre as trajetórias. No mesmo gráfico, mostre  $\delta\theta(\tau) = |\theta(\tau) - \theta_{\text{new}}(\tau)|$  e  $\delta\omega(\tau) = |\omega(\tau) - \omega_{\text{new}}(\tau)|$  e obtenha o expoente de Lyapunov ajustando  $\delta\theta \propto e^{\lambda_\theta\tau}$  e  $\delta\omega \propto e^{\lambda_\omega\tau}$  aos seus dados no regime estacionário ( $\tau > \tau_{\text{trans}}$ ). Faça uma tabela com os valores de  $\alpha$ ,  $\lambda_\theta$  e  $\lambda_\omega$  e verifique que  $\lambda_\theta = \lambda_\omega = \lambda$ . Quando o expoente de Lyapunov  $\lambda > 0$ , diz-se que o sistema é caótico, i.e., extremamente sensível às condições iniciais.  
OBS.: Note que, para o caso periódico, o regime transiente é caótico.

## BREVE DISCUSSÃO SOBRE A EXECUÇÃO DOS PROBLEMAS

### Período do pêndulo

O nosso objetivo é obtermos a expressão para o período do pêndulo simples para qualquer amplitude de movimento. Sendo  $\theta_{\max}$  a amplitude do movimento oscilatório, a energia mecânica total é  $E = mgl(1 - \cos\theta_{\max})$ . A relação entre a velocidade angular  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  e o ângulo  $\theta$  é obtida da conservação de energia:

$$mgl(1 - \cos\theta_{\max}) = \frac{1}{2}m\ell^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgl(1 - \cos\theta),$$

donde obtemos que

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_{\max})}, \quad (18)$$

com o sinal  $\pm$  se referindo aos instantes em que  $\theta$  é positivo e negativo. Por simetria do movimento,  $\frac{1}{4}T$  é o tempo necessário para  $\theta$  ir de 0 até  $\theta_{\max}$ . Portanto, integrando a Eq. (18) sobre esse intervalo, temos que

$$\int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{T}{4} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{\max}}} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2\sin^2\frac{\theta_{\max}}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}}}. \quad (19)$$

Usando a seguinte mudança de variáveis

$$\text{sen}u = \frac{\text{sen}\frac{\theta}{2}}{k}, \quad (20)$$

onde  $k = \text{sen}\frac{\theta_{\max}}{2}$ , e, conseqüentemente

$$d\theta = \frac{2k \cos u}{\cos\frac{\theta}{2}} du = \frac{2k \cos u}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}} du, \quad (21)$$

temos então que

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}}. \quad (22)$$

Note que  $T$  não depende de  $m$ .

É interessante expandir essa integral para  $k \ll 1$  (que corresponde limite harmônico de pequenas amplitudes  $\theta_{\max} \ll 1$ ). Logo,

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{\text{sen}^2 u}{2} k^2 + \frac{3\text{sen}^4 u}{8} k^4 + \frac{5\text{sen}^6 u}{16} k^6 + \dots\right) du \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \frac{25}{256}k^6 + \dots\right) \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\theta_{\max}^2 + \frac{1}{3072}\theta_{\max}^4 + \frac{173}{737280}\theta_{\max}^6 + \dots\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Vemos que, de fato, as primeiras correções do período com a amplitude são quadráticas e que no limite de pequenas oscilações recuperamos o resultado harmônico.

### O método de Euler e de Euler-Cromer

No método de Euler Eqs. (5) e (6), a energia mecânica total é iterada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} E_{i+1} &= \frac{1}{2}m\ell^2\omega_{i+1}^2 + mgl(1 - \cos\theta_{i+1}) \\ &= E_i + \frac{1}{2}gm(\ell\omega_i^2 \cos\theta_i + g\sin^2\theta_i)(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta t)^3. \end{aligned} \quad (24)$$

Dessa maneira, o ganho de energia em um período

$$\Delta E_T = E(t+T) - E(t) = \sum_i \Delta E_i, \quad (25)$$

onde  $\Delta E_i = E_{i+1} - E_i$ , é sempre positivo porque  $\cos \theta_i$  é, na maioria das vezes, positivo num período. No caso em que  $\theta_{\max} \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \theta_i$  é sempre positivo. Em suma, a energia cresce em média no método de Euler.

Usando o análogo das Eqs. (5) e (6) para o método de Euler-Cromer ( $\omega_{i+1} = \omega_i - \Omega_0^2 \sin \theta_i \Delta t$  e  $\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1} \Delta t$ ), a variação de energia de uma iteração para outra muda para

$$E_{i+1} = E_i + \frac{1}{2} gm (\ell \omega_i^2 \cos \theta_i - g \sin^2 \theta_i) (\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta t)^3. \quad (26)$$

Em contraste com (24),  $\Delta E_i$  não é necessariamente positivo. Na verdade, em um ciclo  $\Delta E_T = 0$  até ordem quadrática em  $\Delta t$ . Esse resultado é fácil de ser mostrado no limite de pequenas oscilações onde podemos usar a aproximação harmônica de que  $\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\Omega_0 t)$  e  $\omega(t) = -\theta_{\max} \Omega_0 \sin(\Omega_0 t)$ . Logo,

$$\Delta E_T \rightarrow \sum_i \frac{1}{2} gm (\ell \omega_i^2 - g \theta_i^2) (\Delta t)^2 \propto \int_t^{t+T} (\omega^2 - \Omega_0^2 \theta^2) dt = 0, \quad (27)$$

dado que  $\int_t^{t+T} \sin^2(\Omega_0 t) dt = \int_t^{t+T} \cos^2(\Omega_0 t) dt$ . Em suma, no método de Euler-Cromer, a energia é conservada em média desde de que  $\Delta t$  seja suficientemente pequeno.

### Integral numérica de singularidades

No projeto anterior, vimos alguns métodos de quadratura numérica. Mas o que fazer quando há uma singularidade ou não-analiticidade no intervalo de integração.

Por exemplo, considere a integral

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad (28)$$

Numericamente, não podemos usar a regra do trapézio, de Simpson e de Boole porque temos a divergência em  $x = 0$ . Podemos modificar a regra do retângulo para considerar o ponto à frente:

$$I_1 \approx h \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{x_i}}, \quad (29)$$

com  $x_i = ih$ ,  $h = \frac{1}{N-1}$ , e  $N$  sendo o número de pontos utilizados para discretizar o intervalo de integração. Ao tomar o ponto da frente, evitamos calcular a função na singularidade. Mas como fica a performance? A tabela I mostra o resultado numérico para diversos valores de  $h$ . Claramente, a convergência é  $\mathcal{O}(\sqrt{h})$  mais lenta que  $\mathcal{O}(h)$  esperado pelo método (vide projeto anterior). Por que a convergência é mais lenta? Ela não é garantida porque não podemos utilizar da série de Taylor na singularidade.

Como lidar com esse problema? Uma possível solução é isolar a singularidade e tratá-la analiticamente. Precisamente, a soma em (29) se dá a partir de  $i = 2$ , e o primeiro intervalo é feito analiticamente. Neste caso, podemos até voltar a usar o método do retângulo usual (com o ponto atrás). Logo,

$$I_1 \approx \int_0^h \frac{1}{\sqrt{x}} dx + h \sum_{i=2}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{x_i}} = 2\sqrt{h} + h \sum_{i=2}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{x_i}}, \quad (30)$$

com  $x_i = (i-1)h$ . A tabela I mostra os valores numéricos obtidos desta estratégia. Claramente, resolvemos o problema da singularidade. Entretanto a convergência continua lenta  $\mathcal{O}(\sqrt{h})$ .

Uma outra solução é fazer uma mudança de variáveis que retira a singularidade do intervalo de integração. Por exemplo, considere o caso

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}. \quad (31)$$

$h$	$I_1$ (Eq. (29))	$I_1$ (Eq. (30))
1.0000000000000000	1.0000000000000000	2.0000000000000000
0.10000000000000001	1.5877789488685561	1.5510245020719235
1.0000000000000000E-002	1.8589603824784156	1.8509603824784160
1.0000000000000000E-003	1.9543194939419888	1.9533827394951919
1.0000000000000000E-004	1.9854464544952306	1.9853484544952309
1.0000000000000001E-005	1.9953769535566868	1.9953670167522395
1.0000000000000002E-006	1.9985391454911787	1.9985381474906789
1.0000000000000002E-007	1.9995381453561709	1.9995380454194114
1.0000000000000002E-008	1.9998539595490730	1.9998539495510728
1.0000000000000003E-009	1.9999538190361066	1.9999538180361696

Tabela I. Integração numérica das Eqs. (29) e (30).

Definindo  $x = y^\beta$ , então

$$I = \int_0^1 \frac{\beta y^{\beta-1} dy}{y^{\alpha\beta}} = \beta \int_0^1 y^{\beta(1-\alpha)-1} dy = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^1 dy, \quad (32)$$

onde, conveniente, escolhemos  $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$  na última passagem. Certamente, não há nenhuma singularidade restante na integração a ser feita.

Vamos agora aplicar essa estratégia num exemplo concreto. Considere

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx. \quad (33)$$

A singularidade em  $x = 0$  é a mesma de antes porque a divergência é  $\sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Utilizando a estratégia de tratar a singularidade de maneira analítica separando-a da somatória, temos que

$$I_2 \approx \int_0^h \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx + h \sum_{i=2}^{N-1} \frac{\sqrt{x_i}}{\sin x_i} \approx \int_0^h \frac{1}{\sqrt{x}} dx + h \sum_{i=2}^{N-1} \frac{\sqrt{x_i}}{\sin x_i} = 2\sqrt{h} + h \sum_{i=2}^{N-1} \frac{\sqrt{x_i}}{\sin x_i}, \quad (34)$$

onde  $x_i = (i-1)h$  e  $N-1 = 1/h$ .

$h$	$I_2$ (Eq. (34))	$I_2$ (Eq. (35))
1.0000000000000000	2.0000000000000000	2.3767902115562425
0.10000000000000001	1.6131972100600316	2.0915834097159354
1.0000000000000000E-002	1.9213511295844967	2.0732281341460856
1.0000000000000000E-003	2.0246185750372487	2.0715185425186489
1.0000000000000000E-004	2.0566690406499277	2.0713488465628171
1.0000000000000001E-005	2.0666941964959959	2.0713081216975588
1.0000000000000002E-006	2.0698678705328022	2.0713278172395331
1.0000000000000002E-007	2.0708680227946887	2.0713297867945970
1.0000000000000002E-008	2.0711839523589339	2.0713299837510091
1.0000000000000003E-009	2.0712838233872390	2.0713300034467279

Tabela II. Integração numérica das Eqs. (29) e (35).

O resultado numérico se encontra na tabela II. Como esperado, a convergência é  $\mathcal{O}(\sqrt{h})$ .

Utilizando a segunda estratégia, fazemos a substituição  $x = y^\beta = y^2$ . Logo,

$$I_2 = 2 \int_0^1 \frac{y^2}{\sin y^2} dy \approx h \sum_{i=1}^{N-1} \frac{y_i^2}{\sin y_i^2}, \quad (35)$$

com  $y_i = ih$  e  $N - 1 = 1/h$ . Note que ainda existe uma singularidade no denominador (mas não na integral). Para evitar essa divisão por zero em  $y = 0$ , basta adotar a regra do retângulo com ponto pra frente. O resultado numérico se encontra na tabela II. O resultado com 15 casas decimais de precisão é 2.071330005634446. Temos uma convergência  $\sim \mathcal{O}(h)$ .