MOMENTO ANGULAR

DEFINIÇÃO: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\to$

DA MEC. CLÁSSICA (MOMENTO ANGULAR ORBITAL)

$\uparrow$ TRANSFORMAR EM OPERADOR

$$L_x = yP_z - zP_y$$
$$L_y = zP_x - xP_z$$
$$L_z = xP_y - yP_x$$

$$\vec{L}^+ = (L_x^+, L_y^+, L_z^+) = \vec{L} \to \text{HERMITEANO}$$

· RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO:

$$[L_x, L_y] = [yP_z - zP_y, zP_x - xP_z]$$
$$= [yP_z, zP_z] + [zP_y, xP_z] - [yP_z, xP_z] - [zP_y, zP_x]$$
$$= y[P_z, zP_z] + P_y x[z, P_z] - 0 \to$$
$$= y(P_z z P_z - z P_z P_z) + P_y x[z, P_z]$$
$$= y[P_z, z]P_z + P_y x[z, P_z] = (xP_y - yP_z)\underbrace{[z, P_z]}_{i\hbar}$$
$$= i\hbar L_z$$

DE MANEIRA GERAL, $[L_\alpha, L_\beta] = i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma$

* NÃO PODEMOS MEDIR SIMULTANEAMENTE 2 COMPONENTES DISTINTAS (L_x e L_y POR EXEMPLO)

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \text{TENSOR DE LEVI-CIVITA} = \begin{cases} 1, & (\alpha\beta\gamma) = xyz \text{ OU PERMUTAÇÕES CÍCLICAS} \\ -1, & (\alpha\beta\gamma) = xzy \text{ OU PERMUTAÇÕES CÍCLICAS} \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

· GENERALIZAÇÃO

UMA TRINCA DE OPERADORES J_x, J_y, J_z FORMAM UM OPERADOR DE MOMENTO ANGULAR $\vec{J}$ SE

$$[J_\alpha, J_\beta] = i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma \quad \text{E} \quad J_\alpha^+ = J_\alpha$$

· CONSEQUÊNCIA IMEDIATA: $\vec{J}_1 + \vec{J}_2$ TAMBÉM É OPERADOR MOMENTO ANGULAR

EXEMPLO: SPIN

~~AUTO-VALORES~~

DEFINIÇÃO: $$\boxed{\begin{aligned} J^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \\ J_+ &= J_x + i J_y \\ J_- &= J_x - i J_y = J_+^\dagger \end{aligned}}$$

a) $[J^2, J_x] = 0 \rightarrow [J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, J_z] = [J_x^2, J_z] + [J_y^2, J_z]$

$$= J_x[J_x, J_z] + [J_x, J_z]J_x + J_y[J_y, J_z] + [J_y, J_z]J_y$$

$$= i\hbar(-J_x J_y - J_y J_x) + i\hbar(J_y J_x + J_x J_y) = 0$$

$[AB, C] = ABC - CAB = A(BC - CB) - (CAB - ACB) = A[B,C] - [C,A]B = A[B,C] + [A,C]B$

O MESMO P/ $[J^2, J_x] = [J^2, J_y] = 0$

CONSEQUÊNCIA:

EXISTE BASE COMUM DE AUTO-ESTADOS DE J^2 E J_z

(PODEMOS MEDIR SIMULTANEAMENTE J^2 E J_z)

b) AUTO-VALORES DE J^2 SÃO POSITIVOS (NÃO NEGATIVOS)

$J^2|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow \lambda = \langle\psi|J^2|\psi\rangle$

$$= \langle\psi|J_x J_x|\psi\rangle + \cdots + \langle\psi|J_z J_z|\psi\rangle$$

$J_x^\dagger = J_x$ (HERMITIANO) $\searrow$ $= \langle\psi|J_x^\dagger J_x|\psi\rangle + \cdots + \langle\psi|J_z^\dagger J_z|\psi\rangle$

$$= |J_x|\psi\rangle|^2 + \cdots + |J_z|\psi\rangle|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda \geq 0}$$

c) $[J^2, J_+] = [J^2, J_-] = 0$

d) $[J_z, J_+] = [J_z, J_x] + i[J_z, J_y] = i\hbar[J_y - iJ_x] = \hbar J_+$

e) $[J_z, J_-] = -\hbar J_-$

f) $[J_+, J_-] = [J_x, -iJ_y] + [iJ_y, J_x] = 2\hbar J_z$

g) $$J_+J_- = J_x^2 + J_y^2 + i\overbrace{\left(-J_xJ_y + J_yJ_x\right)}^{+[J_y,J_x] = -i\hbar J_z}$$
$$= J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_z = J^2 + \hbar J_z - J_z^2$$

h) $$J_-J_+ = J_x^2 + J_y^2 - \hbar J_z = J^2 - \hbar J_z - J_z^2$$

i) $$\{J_+, J_-\} = J_+J_- + J_-J_+ = 2\left(J^2 - J_z^2\right)$$

ESPECTRO E AUTO-ESTADOS

DEFINIÇÃO:

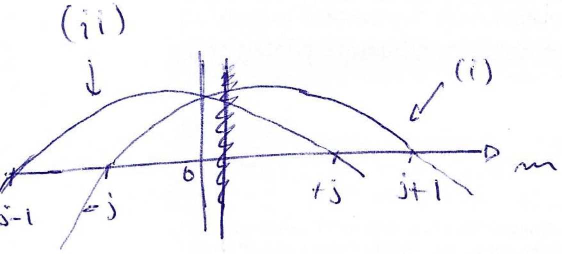
$$J^2 |K, j, m\rangle \equiv \hbar^2 j(j+1) |K, j, m\rangle$$
$$J_z |K, j, m\rangle \equiv \hbar m |K, j, m\rangle$$

K → NR. QUÂNTICO PARA DESCREVER UMA POSSÍVEL DEGENERESCÊNCIA DO AUTO-ESTADO $|j, m\rangle$

- PROPRIEDADES DO ESPECTRO

a) $-j \leq m \leq j$ → (i) $$\left|J_+|Kjm\rangle\right|^2 = \langle Kjm|J_-J_+|Kjm\rangle$$
$$= \langle J^2 + \hbar J_z - J_t^2\rangle = \hbar^2\left(j(j+1) + m - m^2\right)$$
$$= \hbar^2\left(j(j+1) - m(m+1)\right) \geq 0$$

(ii) $$\left|J_-|Kjm\rangle\right|^2 = \langle J_+J_-\rangle$$
$$= \hbar^2\left(j(j+1) - m(m-1)\right) \geq 0$$



PARA SATISFAZER AMBAS

$$\Rightarrow -j \leq m \leq j$$

b) QDO $m = -j \Rightarrow \left|J_-|Kjm\rangle\right|^2 = \left|J_-|Kj-j\rangle\right|^2 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{J_-|Kj-j\rangle = 0}$$

c) QDO $m = +j \Rightarrow J_+|Kjj\rangle = 0$

d) $J_+|kjm\rangle$ É AUTO-ESTADO DE J^2 COM AUTO-VALOR $\hbar^2 j(j+1)$ E AUTO-ESTADO DE J_z COM AUTO-VALOR $\hbar(m+1)$

DESDE QUE $m<j$

$$\rightarrow J^2\left(J_+|kjm\rangle\right) \underset{\substack{\uparrow \\ [J^2,J_+]=0}}{=} J_+\left(J^2|kjm\rangle\right) = \hbar^2 j(j+1)\, J_+|kjm\rangle$$

ANALOGAMENTE, $J_z J_+|kjm\rangle = \left(J_+J_z + \hbar J_+\right)|kjm\rangle$

$$= \hbar(m+1)\, J_+|kjm\rangle$$

e) PARA $m>-j \Rightarrow \begin{cases} J^2 J_-|kjm\rangle = \hbar^2 j(j+1)\, J_-|kjm\rangle \\ J_z J_-|kjm\rangle = \hbar(m-1)\, J_-|kjm\rangle \end{cases}$

f) <u>QUANTIZAÇÃO</u> K E J FIXOS

CONSIDERE A SEQUÊNCIA DE ESTADOS

$$\left\{\ldots, (J_-)^q|kjm\rangle, \ldots, (J_-)^2|kjm\rangle, J_-|kjm\rangle, |kjm\rangle, J_+|kjm\rangle, (J_+)^2|kjm\rangle, \ldots, (J_+)^p|kjm\rangle, \ldots\right\}$$

- TODOS OS ESTADOS ACIMA SÃO AUTO-ESTADOS DE J^2 COM AUTO-VALOR $\hbar^2 j(j+1)$ (DEGENERADOS)
- OS ESTADOS A DIREITA DE $|kjm\rangle$ SÃO AUTO-ESTADOS DE J_z COM AUTO-VALORES $\hbar(m+p)$
- " " " ESQUERDA " " --- $\hbar(m-q)$

POR QUE $(J^2-J_z^2)\geq 0 \Rightarrow -m\leq j\leq m \Rightarrow$ SOMENTE ALGUNS DESSES ESTADOS SÃO NÃO-NULOS. ⇒ QUANTIZA-

$$\begin{cases} m + p_{max} = j \\ m - q_{max} = -j \end{cases} \Rightarrow 2m + p_{max} - q_{max} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m \text{ É SEMI-INTEIRO}}$$

$$\Rightarrow p_{max} + q_{max} = 2j$$

$$\Rightarrow \boxed{j \text{ É SEMI-INTEIRO}}$$

CONSEQUÊNCIAS: SE $j = 0 \Rightarrow m = 0$

$j = +1/2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$

$j = +1 \Rightarrow m = -1, 0, 1$

$\boxed{\text{DEGENERESCÊNCIA: } m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j \Rightarrow \Delta m = 1 \rightarrow \text{HÁ } 2j+1 \text{ VALORES DE } m \text{ P/ CADA } j}$

g) NORMALIZAÇÃO

$$C_{jm} J_- |k j m\rangle = |k j m-1\rangle$$

$$\Rightarrow |C_{jm}|^2 \langle J_+ J_- \rangle = 1 = |C_{jm}|^2 \left(j(j+1) - m(m-1) \right) \hbar^2$$

$$C_{jm} = \frac{1}{\hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{J_- |k j m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \, |k j m-1\rangle}$$

ANALOGAMENTE

$$\boxed{J_+ |k j m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \, |k j m+1\rangle}$$

* OBSERVE QUE
$$\begin{cases} J_+ |k\,j\,j) = 0 \\ J_- |k\,j\,-j) = 0 \end{cases}$$

EXEMPLO $j = 1/2$ (OMITIR o ÍNDICE k)

$\Rightarrow$ 2 ESTADOS : $|k\,j) = |1/2\ 1/2) = |+)$
$|1/2\ -1/2) = |-)$ } BASE

- $J_z |\pm) = \pm \frac{1}{2} \hbar\, |\pm)$ $\Rightarrow$ $\boxed{J_z = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$

- $J_+ |+) = 0$
$J_+ |-) = \hbar |+)$ $\Rightarrow$ $J_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $J_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

COMO $J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-)$
$J_y = \frac{i}{2}(J_- - J_+)$ $\Rightarrow$ $\boxed{J_x = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}$

DE MANEIRA GERAL $\vec{J} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\hbar\,(\underbrace{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z}_{\text{MATRIZES DE PAULI}})$

EXEMPLO $j = 1$ → 3 ESTADOS $\{|1,1),\ |1,0),\ |1\,-1)\}$ → BASE
$\{|1),\ |0),\ |-1)\}$

- $J^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $(m'|J_+|m) = \hbar\sqrt{2 - m(m+1)}\ \delta_{m',m+1}$ → $J_+ = \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ $J_- = \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$J_x = \frac{\hbar\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_y = \frac{\hbar\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$

h) ELEMENTOS DE MATRIZ (OMITIR $\overset{\text{o ÍNDICE}}{k}$)

TRIVIAL
$$\begin{cases} \langle j'm'|J^2|jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)\,\delta_{jj'}\,\delta_{mm'} \rightarrow \text{DIAGONAL} \\ \langle j'm'|J_z|jm\rangle = \hbar m\,\delta_{jj'}\,\delta_{mm'} \rightarrow \text{DIAGONAL} \end{cases}$$

COMO $[J^2, J_a]=0 \Rightarrow \langle j'm'|\vec{J}J^2|jm\rangle = \langle j'm'|J^2\vec{J}|jm\rangle$

$$\Rightarrow \underline{\hbar^2 j(j+1)\langle j'm'|\vec{J}|jm\rangle = \hbar^2 j'(j'+1)\langle j'm'|\vec{J}|jm\rangle}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hbar^2\left(j(j+1)-j'(j'+1)\right)\langle j'm'|\vec{J}|jm\rangle = 0}$$

⇒ ELEMENTO DE MATRIZ É NULO ~~SOMENTE~~ QDO $j \neq j'$
(ANÁLOGO P/ QQ. OPERADOR QUE COMUTE COM J^2)

FORMA EXPLÍCITA P/ J_+

USANDO A NORMALIZAÇÃO EM g)

$$\langle j'm'|J_+|jm\rangle = \delta_{jj'}\,\delta_{m',m+1}\,\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}$$

$$\begin{array}{cc|c|cc|ccc|cccc}
 & & j=0 & 1/2 & & 1 & & & 3/2 & & & \\
 & & m=0 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & -1 & 3/2 & 1/2 & -1/2 & -3/2 \\
\hline
j=0 & m=0 & 0 & & & & & & & & & \\
\hline
1/2 & 1/2 & & 0 & 1 & & & & & & & \\
 & -1/2 & & 0 & 0 & & & & & & & \\
\hline
1 & 1 & & & & 0 & \sqrt{2} & 0 & & & & \\
 & 0 & & & & 0 & 0 & \sqrt{2} & & & & \\
 & -1 & & & & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\hline
3/2 & 3/2 & & & & & & & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\
 & 1/2 & & & & & & & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 \\
 & -1/2 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\
 & -3/2 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \hbar = J_+$$

$\ddots$

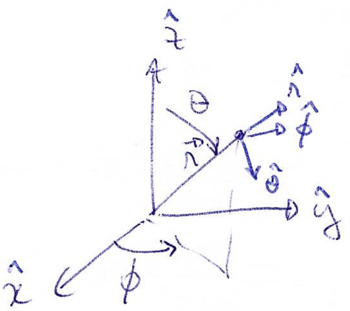
MOMENTO ANGULAR ORBITAL

USUALMENTE USAMOS A LETRA $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$

$$L^2 |lm\rangle = \hbar^2 l(l+1) |lm\rangle$$

$$L_z |lm\rangle = \hbar m |lm\rangle$$

REESCREVER $\vec{L}$ EM COORD. ESFÉRICAS



$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r \cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \tan\phi = y/x \end{cases}$$

$$\cdot\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$= \sin\theta\cos\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\cdot\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\Rightarrow L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

ANALOGAMENTE, $L_x = i\hbar\left(\sin\phi\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\cos\phi}{\tan\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi}\right)$

$$L_y = i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

OUTRA MANEIRA: $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

$$= \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

ONDE

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} \qquad \hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$$

como $\vec{L} = \hat{r}\, r \times (-i\hbar \nabla)$

$$= (-i\hbar)\left(\hat{r}\times\hat{\theta}\, \frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{r}\times\hat{\phi}\, \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right)$$

$$\boxed{\vec{L} = (-i\hbar)\left(-\hat{\theta}\, \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{\phi}\, \frac{\partial}{\partial\theta} \right)}$$

$$\Rightarrow L_z = \hat{z}\cdot\vec{L} = i\hbar\ \hat{z}\cdot\hat{\theta}\, \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} = \boxed{-i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} = L_z}$$

$$L^2 = \vec{L}\cdot\vec{L} = -\hbar^2 \left[\frac{\hat{\theta}\cdot\hat{\theta}}{\operatorname{s}\theta} \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\operatorname{s}\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) + \frac{1}{\operatorname{s}^2\theta}\, \hat{\theta}\cdot \frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \hat{\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\theta} \right) \right.$$
$$\left. - \frac{\hat{\theta}}{\operatorname{s}\theta} \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\hat{\phi} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) - \hat{\phi}\cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\hat{\theta}}{\operatorname{s}\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \right]$$

$$= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\operatorname{s}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \cancelto{0}{\frac{1}{\operatorname{s}^2\theta}\, \hat{\theta}\cdot \cos\theta\, \hat{\phi}} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 0 - 0 - \frac{\hat{\theta}}{\operatorname{s}\theta}\cdot \overbrace{\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\phi} \right)}^{-\cos\phi\,\hat{x} - \operatorname{s}\phi\,\hat{y}} \frac{\partial}{\partial\theta} \right.$$
$$\left. - \frac{\hat{\phi}}{\operatorname{s}\theta}\cdot \underbrace{\left(\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} \right)}_{-\operatorname{s}\theta(\cos\phi\,\hat{x} + \operatorname{s}\phi\,\hat{y}) - \cos\theta\,\hat{z}} \frac{\partial}{\partial\phi} \right]$$

$$= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\operatorname{s}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} + 0 \right]$$

$$\boxed{L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{s}^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right]}$$

AUTO FUNÇÕES $\rightarrow$ $L_z Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \hbar m\, Y_{\ell m}(\theta,\phi)$

$$L^2 Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \hbar^2 \ell(\ell+1)\, Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

ONDE $Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \langle \theta\, \phi \,|\, \ell\, m\rangle$

DE MANEIRA GERAL $\psi_{k\ell m}(r,\theta,\phi) = \langle r\,\theta\,\phi \,|\, k\,\ell\, m\rangle$

$$= f_{k\ell m}(r)\, Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

NORMALIZAÇÃO : $\int |\psi_{k\ell m}|^2 dV = 1 = \int |f_{k\ell m}(r)|^2 r^2 dr * \int |Y_{\ell m}|^2 d\Omega$

ONDE $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

E $\int |Y_{\ell m}(\theta,\phi)|^2 d\Omega = 1$

$$\int |Y_{\ell m}(\theta,\phi)|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = 1$$

$L_z Y = \hbar m Y \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} Y_{\ell m} = \hbar m\, Y_{\ell m} \Rightarrow \partial_\phi Y_{\ell m} = i m Y_{\ell m}$

$$\Rightarrow Y_{\ell m} = F_{\ell m}(\theta)\, e^{i m \phi}$$

HIPÓTESE:

SINGLE-VALUED SOLUTION $\Rightarrow Y_{\ell m}(\theta,\phi+2\pi) = Y_{\ell m}(\theta,\phi)$

$$\Rightarrow e^{2\pi i m} = 1 \Rightarrow \boxed{m \text{ É INTEIRO}}$$

LEMBRE ~~NOTE~~ QUE NO CASO GERAL, m É SEMI-INTEIRO

* COMO $-\ell \leq m \leq \ell$ E PRECISAMOS QUE $L_+|\ell\, m\rangle = 0$ QDO $m = \ell$

E COMO m VARIA DE INTEIROS ($\Delta m = 1$)

$\Rightarrow$ $\boxed{\ell \text{ TAMBÉM PRECISA SER INTEIRO}}$

CASO CONTRÁRIO, NÃO TEMOS UM VÁCUO BEM DEFINIDO A PARTIR DO QUAL CONSTRUIMOS TODOS OS DEMAIS ESTADOS

CÁLCULO DE $Y_{\ell m} = F_{\ell m}(\theta)\, e^{im\phi}$, $-\ell \le m \le \ell$

1ª ALTERNATIVA: $L^2 Y = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y$

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y\right] = \hbar^2\ell(\ell+1)Y$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}F_{\ell m}(\theta)\right) + \ell(\ell+1)F_{\ell m}(\theta) - m^2 F_{\ell m}(\theta) = 0}$$

EQ. DE LEGENDRE ASSOCIADA

$$= \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}F_{\ell m} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}F_{\ell m} + \left(\ell(\ell+1)-m^2\right)F_{\ell m} = 0$$

FAZENDO $u = \cos\theta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial u} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial u} = -\sqrt{1-u^2}\frac{\partial}{\partial u}$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = -\cos\theta\frac{\partial}{\partial u} + \sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial u^2} = -u\frac{\partial}{\partial u} + (1-u^2)\frac{\partial^2}{\partial u^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1-u^2)\frac{\partial^2}{\partial u^2}F_{\ell m} - 2u\frac{\partial}{\partial u}F_{\ell m} + \left(\ell(\ell+1)-m^2\right)F_{\ell m} = 0}$$

EQ DE LEGENDRE ASSOCIADA

SOLUÇÃO GERAL: HARMÔNICOS ESFÉRICOS

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-|m|)!}{4\pi(\ell+|m|)!}}\, e^{im\phi}\, P_{\ell |m|}(\cos\theta)$$

ONDE $P_{\ell m}(u) = (1-u^2)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{d}{du}\right)^m P_\ell(u)$

ONDE $P_\ell(u) = (2^\ell \ell!)^{-1}\left(\frac{d}{du}\right)^\ell (u^2-1)^\ell$

*OBS: ESSAS SOLUÇÕES BEM COMPORTADAS SÓ SÃO POSSÍVEIS SE ASSUMIRMOS QUE $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ É NÃO SINGULAR EM $\theta=0$ E $\theta=\pi$.

ISSO IMPLICA TAMBÉM EM $\ell \geq |m|$, OU SEJA, ℓ É NÃO-NEGATIVO

NOTE QUE $Y_{l-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{l+m}(\theta,\phi)$

$$\int Y^*_{l'm'}(\theta,\phi)\, Y_{lm}(\theta,\phi)\, d\Omega = \delta_{ll'}\,\delta_{mm'}$$

2ª ALTERNATIVA: 1) $L_+ Y_{ll} = 0$ ⇒ OBTEMOS $Y_{ll}(\theta,\phi)$

2) NORMALIZAMOS Y_{ll}

3) $L_- Y_{ll} = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\,\Big|_{m=l}\; Y_{l,l-1}(\theta,\phi)$

⋮

ANALOGAMENTE $L_-^2 Y_{l\,l-1} = cte\; Y_{l\,l-2}$

⇒ OBTEMOS TODOS AS AUTO-FUNÇÕES

1) $L_+ = L_x + iL_y = \hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$

$$\Rightarrow h\, e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}F_{ll} - \frac{l}{\tan\theta}F_{ll}\right)e^{im\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}F_{ll} = \frac{l}{\tan\theta}F_{ll} \to \frac{dF_{ll}}{F_{ll}} = l\,\frac{\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta} = +l\,\frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \ln F_{ll} = l\ln\sin\theta \to F_{ll} = (\sin\theta)^l$$

2) $Y_{ll}(\theta,\phi) = C_l\,(\sin\theta)^l\, e^{il\phi}$

NORMALIZAÇÃO $C_l^2\int(\sin\theta)^{2l}\sin\theta\, d\theta\, d\phi = 1 = C_l^2\, 2\pi\underbrace{\int_0^\pi(\sin\theta)^{2l+1}d\theta}_{\frac{2^{2l+1}(l!)^2}{(2l+1)!}}$

$$\Rightarrow C_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_{ll}(\theta,\phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}\,(\sin\theta)^l\, e^{il\phi}}$$

EX: $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$$Y_{11} = \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, e^{i\phi} \operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow L_- Y_{11} = \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}\; Y_{10} \Rightarrow Y_{10} = \frac{1}{\hbar\sqrt{2}} L_- Y_{11}$$

MAS $L_- = L_x - iL_y = \hbar e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) = L_+^\dagger$ $\left(\text{LEMBRE-SE } \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^+ = -\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$

$$\Rightarrow L_- Y_{11} = \hbar e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, e^{i\phi}\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$= \hbar\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\right)\left(\cos\theta + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}\right) = \hbar\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta}$$

OS HARMÔNICOS ESFÉRICOS FORMAM UMA BASE

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$* \int Y_{lm}^* Y_{l'm'}\, d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

$$* \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta',\phi') = \delta(\cos\theta - \cos\theta')\,\delta(\phi-\phi')$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\delta(\theta-\theta')\,\delta(\phi-\phi')$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_{lm} = \int f(\theta,\phi) Y_{lm}^*(\theta,\phi)\, d\Omega}$$

INTERPRETAÇÃO DO ESTADO $|klm\rangle$

* VALORES MÉDIOS: $\langle L_z\rangle = \langle klm|L_z|klm\rangle = \hbar m$

$$\langle L^2\rangle = \hbar\, l(l+1)$$

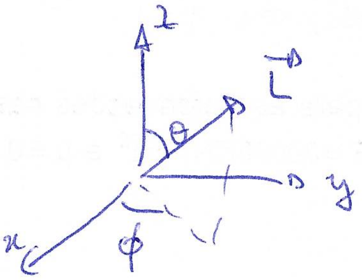
$$\langle L_{\underset{y}{x}}\rangle = \langle klm|\,\frac{L_+ \pm L_-}{2\,(i)}\,|klm\rangle = 0$$

$$\langle L_x^2\rangle = \frac{1}{4}\langle L_+^2 + L_-^2 + L_+L_- + L_-L_+\rangle = \frac{1}{4}\langle \{L_+, L_-\}\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\,2\,\langle J^2 - J_z^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(l(l+1) - m^2\right)$$

$$\langle L_y^2\rangle = \frac{1}{-4}\langle L_+^2 + L_-^2 - L_+L_- - L_-L_+\rangle = \langle L_x^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(l(l+1) - m^2\right)$$

IMAGEM CLÁSSICA



$$\cos\theta = \frac{\langle L_z\rangle}{\sqrt{\langle L^2\rangle}} = \frac{\hbar m}{\hbar\sqrt{l(l+1)}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{\langle L_x^2\rangle + \langle L_y^2\rangle}}{\sqrt{\langle L^2\rangle}}$$

$$= \sqrt{\frac{l(l+1) - m^2}{l(l+1)}}$$

$$L_x \to \hbar\sqrt{l(l+1) - m^2}\,\cos\phi$$

$$L_y \to \hbar\sqrt{l(l+1) - m^2}\,\operatorname{sen}\phi$$

$\Rightarrow \langle L_x\rangle_\phi = \langle L_y\rangle_\phi = 0$

"PRECESSÃO" EM
TORNO DO EIXO z

NOTE QUE $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

ESTADO DE MÁXIMA PROJEÇÃO
EM z → $\cos\theta_{máx} = \frac{l}{\sqrt{l(l+1)}} < 1$ → PRINCÍPIO DA INCERTEZA

DISCUSSÃO ADICIONAL

l E m SÃO INTEIROS → MAIS RESTRITO DO QUE O CASO GERAL DE MOMENTO ANGULAR QUE PODEM SER SEMI-INTEIROS

RESTRIÇÃO DEVE VIR DA FORMA ESPECIAL $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

DEFININDO, $q_1 = \dfrac{x + p_y/m\omega}{\sqrt{2}}$ $\quad p_1 = \dfrac{p_x - y\,m\omega}{\sqrt{2}}$

$q_2 = \dfrac{x - p_y/m\omega}{\sqrt{2}}$ $\quad p_2 = \dfrac{p_x + y\,m\omega}{\sqrt{2}}$

ONDE m E ω SÃO CONSTANTES

$$\Rightarrow [q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0 = [q_1, p_2] = [q_2, p_1]$$

$$\text{E} \quad [q_1, p_1] = \frac{1}{2}\left([x, p_x] - [p_y, y]\right) = i\hbar = [q_2, p_2]$$

LOGO, q_1 e p_1 SÃO VARIÁVEIS CONJUGADAS ASSIM COMO q_2 e p_2

O QUE ISSO TEM A VER COM MOMENTO ANGULAR?

$$L_z = x p_y - y p_x = \left(\frac{q_1+q_2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{q_1-q_2}{\sqrt{2}}\right) m\omega - \left(\frac{p_2-p_1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{m\omega}\left(\frac{p_1+p_2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow L_z = \frac{1}{2\omega}\left(m\omega^2 (q_1^2 - q_2^2) + \frac{1}{m}(p_1^2 - p_2^2)\right)$$

OU SEJA $\omega L_z = \dfrac{1}{2m} p_1^2 + \dfrac{m\omega^2 q_1^2}{2} - \left(\dfrac{1}{2m} p_2^2 + \dfrac{m\omega^2 q_2}{2}\right)$

$= 2$ OSCILADORES HARMÔNICOS

$\Rightarrow$ ESPECTRO DE L_z É : $\dfrac{1}{\omega} * \left(\hbar\omega(n_1 + \tfrac{1}{2}) - \hbar\omega(n_2 + \tfrac{1}{2})\right)$

COM $n_{1,2} = 0, 1, 2 \ldots$ OU SEJA, OS AUTO-VALORES DE L_z SÃO $\hbar(n_1 - n_2) = \hbar m$ COM $m = n_1 - n_2$ SENDO INTEIRO

MOMENTO ANGULAR SPINORIAL

USUALMENTE, PEGAMOS UMA QUANTIDADE CLÁSSICA E A ELEVAMOS AO STATUS DE OPERADOR EM MEC. QUÂNTICA (COMO FIZEMOS P/ O MOMENTO ANGULAR ORBITAL).

- NÃO FUNCIONA P/ O SPIN PQ NÃO HÁ UM ANÁLOGO CLÁSSICO.

SPIN - FENÔMENO QUÂNTICO - RELATIVÍSTICO → PRECISAMOS DA EQ. DE DIRAC

AQUI, EM MEC. QUÂNTICA NÃ-RELATIVÍSTICA, INTRODUZIMOS O SPIN COMO UM SIMPLES OPERADOR DE MOMENTO ANGULAR.

$\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$ ONDE $[S_\alpha, S_\beta] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma$

E OS AUTO-ESTADOS SÃO $|k, s, m\rangle$

ONDE $S^2|k s m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|k s m\rangle$

$S_z|k s m\rangle = \hbar m |k s m\rangle$

O QUE É NATURALMENTE VERIFICADO DA EQ. DE DIRAC.

ENTRETANTO, O SPIN DE UMA PARTÍCULA NÃ É ALGO QUE SE MUDE COMO O MOMENTO ANGULAR.

O VALOR DE S É CARACTERÍSTICA INTRÍNSECA DA PARTÍCULA. ATUALMENTE, CONSIDERAMOS QUE O SPIN FAZ PARTE DO "RG" DA PARTÍCULA

INTERPRETAÇÕES: MOMENTO ANGULAR INTRÍNSECO DA PARTÍCULA.

*OBS: ISSO É VERDADE P/ PARTÍCULAS FUNDAMENTAIS (ELÉTRON, NEUTRINO, QUARK ...),

OUTROS TIPOS DE PARTÍCULAS COMPOSTAS (PRÓTON, NEUTRON, MOLÉCULAS NÚCLEOS ATÔMICOS)

PODEM APRESENTAR "SPINS" EFETIVOS DISTINTOS COMO

VEREMOS NO TÓPICO ADIÇÃO DE MOMENTO ANGULAR

EXEMPLO : SPIN-1/2 → VIDE PÁG. 6

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma} \quad , \quad \underset{=\sigma_1}{\sigma_x = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}} \; , \; \underset{=\sigma_2}{\sigma_y = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}} \; , \; \underset{=\sigma_3}{\sigma_z = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}$$

PROPRIEDADES INTERESSANTES DE SPIN-1/2

- $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$, $\left\{\begin{array}{l} \sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z \\ \sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x \\ \sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y \end{array}\right.$

- QUALQUER MATRIZ HERMITEANA 2x2 PODE SER DECOMPOSTA NA BASE $\{\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$, OU SEJA $H = \sum_{i=0}^{3} a_i\sigma_i$

ONDE $\sigma_0 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

SEJA $H = \begin{pmatrix}\alpha & \beta+i\gamma \\ \beta+i\gamma & \delta\end{pmatrix}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$

COMO DETERMINAR OS COEFICIENTES a_i ?

⇒ MULTIPLIQUE $H = \sum_i a_i\sigma_i$ POR σ_j E TOME O TRAÇO

$$\to \quad \sigma_j H = \sum_i a_i\,\sigma_j\sigma_i \;\to\; tr(\sigma_j H) = \sum_i a_i\, tr(\sigma_j\sigma_i)$$

$$\boxed{\text{MAS} \quad tr(\sigma_j\sigma_i) = 2\,\delta_{ij}} \;\Rightarrow\; \boxed{a_j = \frac{1}{2}\, tr(\sigma_j H)}$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2}(\alpha+\delta) = \frac{tr(H)}{2} \qquad a_2 = \frac{1}{2}tr(\sigma_y H) = \gamma$$

$$a_1 = \frac{tr(\sigma_x H)}{2} = \beta \qquad a_3 = \frac{1}{2}tr(\sigma_z H) = \frac{1}{2}(\alpha-\delta)$$

CONSEQUÊNCIA : QUALQUER SISTEMA DE 2 NÍVEIS PODE SER EXPRESSO COMO UM PROBLEMA DE UM SPIN-1/2 NUM CAMPO MAGNÉTICO

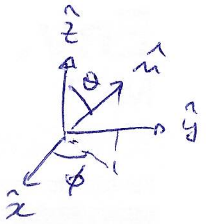
$$H = cte - \vec{h}\cdot\vec{S}$$

ONDE $cte = a_0$

$$\vec{h} = -\frac{1}{2}\hbar\,(a_1, a_2, a_3)$$

AUTO-VALORES DE $S_n = \hat{n}\cdot\vec{S}$

ONDE A DIREÇÃO $\hat{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$



$$\Rightarrow S_n = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

AUTO-VALORES → $\lambda^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \rightarrow \boxed{\text{AUTO-VALORES} = \pm\frac{1}{2}\hbar}$

INDEPENDE DE θ e ϕ

AUTO-VETORES: $\lambda = +\frac{1}{2}\hbar \rightarrow |+\rangle_{\hat{n}} = N\begin{pmatrix} e^{-i\phi}\sin\theta \\ 1-\cos\theta\end{pmatrix}$

$$|-\rangle_{\hat{n}} = N\begin{pmatrix} 1-\cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta\end{pmatrix}$$

ONDE $N = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}$ É A NORMALIZAÇÃO

PODE-SE AINDA REESCREVÊ-LOS COMO

$$|+\rangle_{\hat{n}} = e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\,|+\rangle_{\hat{z}} + e^{i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\,|-\rangle_{\hat{z}}$$

$$|-\rangle_{\hat{n}} = -e^{-i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\,|+\rangle_{\hat{z}} + e^{i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\,|-\rangle_{\hat{z}}$$

MATRIZ DENSIDADE $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ → MATRIZ 2x2 $\Rightarrow \rho = \sum_{i=0}^{3} a_i\sigma_i$

PROPRIEDADE: $\mathrm{tr}\,\rho = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2}$ PORQUE $\mathrm{tr}(\sigma_{x,y,z}) = 0$

$$\mathrm{tr}(\sigma_\alpha\rho) = \mathrm{tr}(\sigma_\alpha|\psi\rangle\langle\psi|) = \langle\psi|\sigma_\alpha|\psi\rangle = \langle\sigma_\alpha\rangle = 2a_\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \sum_{\alpha=x,y,z}\langle\sigma_\alpha\rangle\sigma_\alpha\right)}$$

NOTE QUE ISSO É VERDADE PARA UM ESTADO GENÉRICO

$|\psi\rangle = A_+|+\rangle + A_-|-\rangle$ COM $|A_+|^2 + |A_-|^2 = 1$.

FUNÇÕES DE ONDA

COMO REPRESENTAR O SPIN NAS FUNÇÕES DE ONDA?

O ESTADO FÍSICO : $|\psi\rangle = |f(\vec{r})\rangle \otimes |\chi_s\rangle$

$$|\psi\rangle = \underbrace{|f(\vec{r})\rangle}_{\text{PARTE ORBITAL}} \otimes \underbrace{|\chi_s\rangle}_{\text{PARTE SPINORIAL}}$$

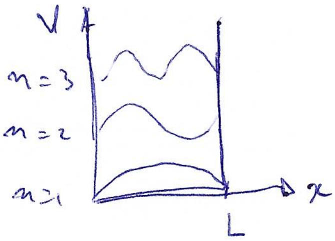
$|f(\vec{r})\rangle \rightarrow$ LEVA EM CONTA O MOMENTO ANGULAR ORBITAL

SEM SPIN : $\psi(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r} | f(\vec{r}) \rangle = f(\vec{r})$

COM SPIN : $\psi_s(\vec{r}) \equiv \langle \vec{r}, s | f(\vec{r}), \chi_s \rangle = f(\vec{r}) \chi_s$

FALAR PRIMEIRO DO SPINOR ANTES DE ENTRAR NOS EXEMPLOS

EX: PARTÍCULA DE SPIN-½ NUMA CAIXA (1D): $H = \frac{1}{2m} P^2$



$$f(x) \equiv f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) \quad , \quad E_n = \frac{\hbar^2 K_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$$

ESTADOS $\rightarrow |n\rangle$

$\langle x | n \rangle = f_n(x)$

INCLUIR SPIN $\rightarrow$ $\begin{cases} |n, m_s = +1/2\rangle \rightarrow f_n(x) \chi_+ \\ |n, m_s = -1/2\rangle \rightarrow f_n(x) \chi_- \end{cases}$ $\quad \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

[illegible]

$$\Rightarrow \langle n', m_s' | n, m_s \rangle = \langle n' | n \rangle \langle m_s' | m_s \rangle$$
$$= \delta_{n,n'} \delta_{m_s, m_s'}$$

NOTE QUE $\begin{cases} \chi_+^* \chi_+ = (1 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \\ \chi_+^* \chi_- = (1 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \chi_-^* \chi_+ = (0 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \chi_-^* \chi_- = (0 1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \end{cases}$

EX: ÁTOMO DE H ($m_{\text{PRÓTON}} \gg m_e$)

$$H = \frac{1}{2m} P^2 - \frac{e^2}{r}$$

AUTO-ESTADOS : $|n \ell m \, m_s\rangle \rightarrow \psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) \chi_s \quad , \quad E_{n\ell m m_s} \equiv E_n = \frac{-13.6 \, eV}{n^2}$

NESSE CASO, O SPIN SÓ CONTRIBUI P/ UMA DEGENERESCÊNCIA EXTRA DOS NÍVEIS ORBITAIS

PODEMOS CONSIDERAR UM ESTADO ~~ONDE~~ DE SUPERPOSIÇÃO COM COMPONENTES Z DO SPIN DIFERENTES

$$|\psi\rangle = A|\psi_{A+}\rangle + B|\psi_{B-}\rangle$$

PARA FORMALIZAR: BASE $|\vec{r}, \cancel{s}, m\rangle \xrightarrow{} |\vec{r}, m\rangle$ ← OMITIR S (che P/ UMA PARTÍCULA)

$$-s \leq m \leq s$$

COMPLETEZA: $\sum_m \int d\vec{r}\, |\vec{r}\, m\rangle\langle r\, m| = \mathbb{1}$

ORTOGONALIDADE: $\langle \vec{r}'\, m' | \vec{r}\, m\rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta_{m,m'}$

$$|\psi\rangle = \sum_m \int d\vec{r}\, \langle \vec{r}\, m|\psi\rangle\, |\vec{r}, m\rangle$$

$$= \sum_m \int d\vec{r}\, \psi_m(\vec{r})\, |\vec{r}, m\rangle$$

P/ $s = 1/2$ → $|\psi\rangle = \int d\vec{r} \left(\psi_+(\vec{r})\, |\vec{r}\, +\rangle + \psi_-(\vec{r})|\vec{r}\, -\rangle \right)$

$|\psi_\pm(\vec{r})|^2 \equiv$ DENSIDADE DE PROB. DE ENCONTRAR A PART. EM $\vec{r}$ COM $\overset{\text{PROJ.}}{\text{SPIN}} = \pm \frac{1}{2}\hbar$

DEFINIÇÃO: SPINOR (NÃO-RELATIVÍSTICO) $[\psi(\vec{r})] = \begin{pmatrix} \psi_s(\vec{r}) \\ \psi_{s-1}(\vec{r}) \\ \vdots \\ \psi_{-s}(\vec{r}) \end{pmatrix}$

P/ $s = 1/2$ → $[\psi] = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$

ESSA DEFINIÇÃO TEM SUAS PRATICIDADES

$$\langle\psi| = \sum_m \int d\vec{r}\, \langle\psi|\vec{r}\, m\rangle\langle\vec{r}\, m| = \sum_m \int d\vec{r}\, \psi^*_m(\vec{r})\, \langle\vec{r}\, m|$$

$$\Rightarrow [\psi]^+ = \left(\psi^*_s(\vec{r}) \quad \psi^*_{s-1}(\vec{r}) \,--\, \psi^*_{-s}(\vec{r}) \right)$$

PRODUTO ESCALAR $\langle\phi|\psi\rangle = \sum_m \int d\vec{r}\, \langle\phi|\vec{r}\, m\rangle\langle\vec{r}\, m|\psi\rangle$

$$= \int d\vec{r}\, [\phi]^+[\psi]$$

NORMALIZAÇÃO

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 = \int d\vec{r}\,[\psi]^{\dagger}[\psi]$$

$$= \int d\vec{r}\,|\psi_s(\vec{r})|^2 + |\psi_{s-1}(\vec{r})|^2 + \cdots + |\psi_{-s}(\vec{r})|^2$$

INTERPRETAÇÃO:

① PROB. DE ENCONTRAR A PARTÍCULA ENTRE $\vec{r}$ e $\vec{r}+d\vec{r}$ COM COMPONENTE z DO SPIN $= m\hbar$?

$$|\psi_m(\vec{r})|^2\, d\vec{r}$$

② PROB. DE MEDIR $S_z = m\hbar$?

$$\int d\vec{r}\,|\psi_m(\vec{r})|^2$$

③ PROB. DE ENCONTRAR A PART. ENTRE $\vec{r}$ e $\vec{r}+d\vec{r}$?

$$\sum_{m=-s}^{s} |\psi_m(\vec{r})|^2\, d\vec{r}$$

OPERADORES NA REPRESENTAÇÃO DE SPINORES

① $\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}(\vec{r})$ → OPERADOR QUE ATUA SOMENTE NA PARTE ORBITAL DOS ESTADOS

$$|\psi\rangle = \sum_m \int d\vec{r}\;\psi_m(\vec{r})\,|\vec{r}\,m\rangle$$

$$|\psi'\rangle = \mathcal{O}|\psi\rangle = \sum_m \int d\vec{r}\;\psi_m(\vec{r})\;\mathcal{O}(\vec{r})\,|\vec{r}\,m\rangle$$

ESCOLHENDO ~~USANDO~~ $|\vec{r}\,m\rangle$ TAL QUE É AUTO-ESTADO DE $\mathcal{O}(\vec{r})$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(\vec{r})\,|\vec{r}\,m\rangle = \Theta(\vec{r})\,|\vec{r}\,m\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi'\rangle = \sum_m \int d\vec{r}\;\theta(\vec{r})\,\psi_m(\vec{r})\,|\vec{r}\,m\rangle$$

ATÉ AQUI, NÃO PRECISAMOS DE SPINORES

COMO FICA $D(\vec{r})$ NESSA REPRESENTAÇÃO ?

$$[\psi'] = ? \quad \longrightarrow \quad [\psi'] = \begin{pmatrix} \sigma(\vec{r})\psi_s(\vec{r}) \\ \vdots \\ \sigma(\vec{r})\psi_{-s}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \sigma(\vec{r}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{+s} \\ \vdots \\ \psi_{-s} \end{pmatrix}$$

$$[\psi'] = \sigma(\vec{r}) \mathbb{1} [\psi]$$

$\Rightarrow$ SE $D(\vec{r})$ É DIAGONAL NA BASE $|\vec{r}\rangle$

$$\Rightarrow D(\vec{r}) \longrightarrow \sigma(\vec{r}) \mathbb{1}$$

② D ATUA NA PARTE DE SPIN

EX: S_z

$$|\psi'\rangle = \sum_m \int d\vec{r}\, \psi_m(\vec{r})\, S_z |\vec{r}\, m\rangle = \sum_m \int d\vec{r}\, \psi_m(\vec{r})\, m\hbar\, |\vec{r}\, m\rangle$$

$$\Rightarrow [\psi'] = \begin{pmatrix} s\hbar\psi_s \\ (s-1)\hbar\psi_{s-1} \\ \vdots \\ -s\hbar\psi_{-s} \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} s & & 0 \\ & s-1 & \\ 0 & & \ddots\ -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_s \\ \vdots \\ \psi_{-s} \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \underbrace{\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \ddots\ -s \end{pmatrix}}_{S_z \text{ NA REPRESENTAÇÃO SPINORIAL}} [\psi]$$

EX: S_+ COM $s = 1/2$

$$|\psi\rangle = \int d\vec{r} \left(\psi_+(\vec{r})\, |\vec{r}+\rangle + \psi_-(\vec{r})\, |\vec{r}-\rangle \right)$$

$$|\psi'\rangle = \int d\vec{r} \left(\psi_+(\vec{r})\, S_+ |\vec{r}+\rangle + \psi_-(r) S_+ |\vec{r}-\rangle \right)$$

$$= \int dr\, \hbar\, \psi_-(\vec{r})\, |\vec{r}+\rangle$$

$$\Rightarrow [\psi'] = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [\psi]$$

Ex! P_x : $|\psi'\rangle = P_x|\psi\rangle$

$$\psi'_{\vec{r}m} = \langle \vec{r}\, m|\psi'\rangle$$

$$= \langle \vec{r}\, m| P_x |\psi\rangle$$

$$= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi(\vec{x}) \Rightarrow [\psi'] = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{1}[\psi]$$

Ex: $L_z S_z$ $|\psi'\rangle = L_z S_z|\psi\rangle$

$$\rightarrow \psi'_{\vec{r}m} = \langle \vec{r}\, m|\hat{L}_z \hat{S}_z|\psi\rangle$$

$$= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\langle \vec{r}\, m|\hat{S}_z|\psi\rangle$$

$$= -i\hbar^2 m\frac{\partial}{\partial\phi}\psi_m$$

$$[\psi'] = -i\hbar^2\begin{pmatrix} s\frac{\partial}{\partial\phi} & 0 \\ 0 & -s\frac{\partial}{\partial\phi}\end{pmatrix}[\psi]$$

Ex: (COHEN) DADO O SPINOR DE COMPONENTES

$$\psi_+ = R(r)\left[Y_{00} + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_{10}\right]$$

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{3}}R(r)\left[Y_{11} - Y_{10}\right]$$

a) QUAL A COND. DE NORMALIZAÇÃO DE R(r)?

$$\int |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2\, d\vec{r} = 1 \Rightarrow \int |R|^2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)r^2 dr = 1$$

$$\boxed{\int_0^\infty |R|^2 r^2 dr = \frac{1}{2}}$$

b) QUAL A PROB. DE MEDIR S_z E OBTER $\pm\hbar/2$?

$$P_\pm = \int |\psi_\pm|^2 d\vec{r} = \int |R|^2 r^2 dr * \int\begin{pmatrix}|Y_{00}|^2 + \frac{1}{3}|Y_{10}|^2 \\ \frac{1}{3}|Y_{11}|^2 + \frac{1}{3}|Y_{10}|^2\end{pmatrix}d\Omega$$

$$= \frac{1}{2} * \begin{pmatrix}1+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}P_+ = \frac{2}{3} \\ P_- = 1/3\end{matrix}}$$

c) QUAL A PROB. DE ~~OBTER~~ MEDIR $S_x = \pm\hbar/2$?

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \to \quad |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z + |-\rangle_z\right)$$

$$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z - |-\rangle_z\right)$$

como $|\psi\rangle = |\psi_+\rangle\otimes|+\rangle_z + |\psi_-\rangle\otimes|-\rangle_z$

$$\to \quad P_{\pm,x} = \int \left\| \left(\langle\vec{r}|\otimes {}_x\langle\pm|\right)|\psi\rangle\right\|^2 d\vec{r}$$

$$= \int d\vec{r}\left|\langle\vec{r}|\otimes\left(\frac{{}_z\langle+| \pm {}_z\langle-|}{\sqrt{2}}\right)\left(|\psi_+\rangle|+\rangle_z + |\psi_-\rangle|-\rangle_z\right)\right|^2$$

$$= \int \frac{d\vec{r}}{2}\left|\langle\vec{r}|\psi_+\rangle \pm \langle\vec{r}|\psi_-\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\int d\vec{r}\left|Y_{00} + \frac{(1\mp 1)}{\sqrt{3}}Y_{10} - \frac{Y_{11}}{\sqrt{3}}\right|^2 \ast$$

$$\ast\,|R|^2$$

$$= \frac{1}{2}\times\begin{pmatrix}1+\frac{1}{3}\\ 1+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}P_{+,x} = \frac{1}{3}\\ P_{-,x} = \frac{2}{3}\end{matrix}}$$

ADIÇÃO DE MOMENTO ANGULAR

MOTIVAÇÃO:

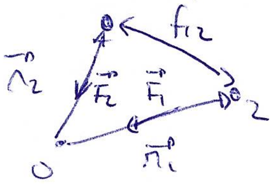
EM MEC. CLÁSSICA

$$\vec{L}_{TOT} = cte \quad \text{se} \quad \vec{\tau}_{EXT} = 0$$

$\downarrow$

PARTÍCULAS INTERAGENTES
(FORÇA CENTRAL) EM
UM POTENCIAL EXTERNO
TAMBEM CENTRAL

EX) 2 PART.



$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{v}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{f}_{12}) = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{f}_{12})$$
$$= \vec{r}_1 \times \vec{f}_{12}$$

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{r}_2 \times (F_2 + \vec{f}_{21}) = \vec{r}_2 \times \vec{f}_{21}$$

$\vec{f}_{12} \parallel \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{f}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{f}_{21} = \vec{f}_{12} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \overset{\downarrow}{=} 0$$

EM MEC. QUÂNTICA

$$H = \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_1} \nabla_1^2 + V(\vec{r}_1) \right)}_{H_1} + \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu_2} \nabla_2^2 + V(\vec{r}_2) \right)}_{H_2} + U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

a) $[H_\alpha, L_{\beta z}] = 0$, $(\alpha, \beta) = (1, 2)$

$[H_\alpha, L_\beta^2] = 0$

$[L_\alpha^2, L_{\beta z}] = 0$

$H_1, H_2, L_1^2, L_2^2, L_{1z}, L_{2z}$
TODOS COMUTAM
ENTRE SI

p/ o caso não interagente $(U = 0)$

$L_{1z}, L_{2z}, L_1^2, L_2^2$ são **comutam** com H

b) NO CASO INTERAGENTE

$$[L_{1z}, H] = [L_{1z}, U] = [x_1 P_{1y} - y_1 P_{1x}, U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)]$$

$$= x_1 [P_{1y}, U] - y_1 [P_{1x}, U] \neq 0$$

$$[L_{2z}, H] = x_2 [P_{2y}, U] - y_2 [P_{2x}, U] \neq 0$$

ENTRETANTO,

$$[L_{1z} + L_{2z}, H] = 0$$

PROVA: $[P_{1y}, U]\psi = -i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial y_1}(U\psi) - U \frac{\partial}{\partial y_1}(\psi) \right] = -i\hbar \psi \frac{\partial U}{\partial y_1}$

COMO $U \equiv U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = U(r)$, $r = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + \cdots + (z_1-z_2)^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_1} U = \frac{\partial r}{\partial y_1} \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{y_1 - y_2}{r} \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\Rightarrow [L_{1z} + L_{2z}, H] = -i\hbar \left\{ x_1 \left(\frac{y_1 - y_2}{r} \right) - y_1 \left(\frac{x_1 - x_2}{r} \right) + x_2 \left(\frac{y_2 - y_1}{r} \right) - y_2 \left(\frac{x_2 - x_1}{r} \right) \right\} \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$= \frac{-i\hbar}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \left\{ (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \right\} = 0$$

ANALOGAMENTE, $[\vec{L}, H] = 0$ ONDE $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$

$[L^2, H] = 0$

⇒ PODE-SE CONSTRUIR UMA BASE DE AUTO-ESTADOS DE ENERGIA, ~~[illegible]~~ E DE L^2 e L_z

PROBLEMA: DADO 2 OPERADORES DE MOMENTO ANGULAR $\vec{J}_1$ e $\vec{J}_2$ E AS BASES $|j_1 m_1\rangle$ e $|j_2 m_2\rangle \to |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ QUE SÃO AUTO-ESTADOS SIMULTÂNEOS DE J_1^2, J_2^2, J_{1z} e J_{2z}, COMO CONSTRUIR UMA BASE DE AUTO-ESTADOS DE J^2 e J_z ONDE $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$?

LEMBRE-SE QUE $[J_\alpha, J_\beta] = i \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma \Rightarrow \exists$ BASE TAL QUE

$$J^2 |J,M\rangle = \hbar^2 J(J+1) |J,M\rangle$$
$$J_z |J,M\rangle = \hbar M |J,M\rangle$$

EX: $S_1 = 1/2 = S_2$ (2 PARTÍCULAS DE SPIN-1/2)

$$\text{BASE}: \{|s_1 m_1, s_2 m_2\rangle\} = \{|\tfrac12 \tfrac12, \tfrac12 \tfrac12\rangle, |\tfrac12 \tfrac12, \tfrac12 -\tfrac12\rangle, |\tfrac12 -\tfrac12, \tfrac12 \tfrac12\rangle, |\tfrac12 -\tfrac12, \tfrac12 -\tfrac12\rangle\}$$
$$= \{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$$
$$= \{|\sigma_1, \sigma_2\rangle\}, \quad \sigma_{1,2} = \pm$$

* NOTE QUE A BASE TEM 4 ESTADOS

* QUEREMOS REESCREVER ESSES 4 ESTADOS ~~COMO~~ NA BASE DE S^2 e S_z, ONDE $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

* QTO VALE S? → POR QUE A BASE TEM 4 ESTADOS, ALGUÉM INGENUAMENTE PODERIA CONCLUIR QUE $S = 3/2$

ISSO IMPLICARIA QUE OS AUTO-VALORES DE S_z SERIAM $\hbar\{+\frac32, +\frac12, -\frac12, -\frac32\}$

MAS ISSO NÃO É VERDADE.

VEJA QUE

$$\left\{\begin{aligned} S_z |++\rangle &= (S_{1z}+S_{2z})\,|++\rangle \\ &= \hbar\,|++\rangle \\ S_z |--\rangle &= -\hbar\,|--\rangle \\ S_z |+-\rangle &= S_z|-+\rangle = 0 \end{aligned}\right.$$

NA FORMA MATRICIAL

$$S_z = \hbar \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} |{+}{+}\rangle & |{+}{-}\rangle & |{-}{+}\rangle & |{-}{-}\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

QUAIS SÃO OS AUTO-VALORES DE S^2 ?

$$S^2 = \vec{S}\cdot\vec{S} = (\vec{S}_1+\vec{S}_2)\cdot(\vec{S}_1+\vec{S}_2) = S_1^2 + S_2^2 + 2\,\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$$

NOTE QUE EM TODOS O 4 ESTADOS $S_1^2 = S_2^2 = \hbar^2 \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)$

$$= \frac{3}{4}\hbar^2$$

$$\Rightarrow \quad S^2 = \frac{3}{2}\hbar^2 + 2\,\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$$

$$= \frac{3}{2}\hbar^2 + 2\left(S_1^x S_2^x + S_1^y S_2^y + S_1^z S_2^z\right) = \frac{3}{2}\hbar^2 + 2\left(\frac{S_1^+ S_2^- + S_1^+ S_2^-}{2} + S_1^z S_2^z\right)$$

$$\boxed{S^2 = \frac{3}{2}\hbar^2 + S_1^+ S_2^- + S_1^- S_2^+ + 2 S_1^z S_2^z}$$

$$\Rightarrow \quad S^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} |{+}{+}\rangle & |{+}{-}\rangle & |{-}{+}\rangle & |{-}{-}\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2\hbar^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar^2 & \hbar^2 & 0 \\ 0 & \hbar^2 & \hbar^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\hbar^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

LOGO $|++\rangle$ e $|--\rangle$ SÃO AUTO-ESTADOS DE S^2 COM AUTO-VALOR $2\hbar^2$

$$\begin{array}{ccc} |++\rangle & & |--\rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cancel{|t_0\rangle} & & \cancel{|t_1\rangle} \\ |t_1\rangle & & |t_{-1}\rangle \end{array}$$

RESTA DIAGONALIZAR S^2 NO SUB-ESPAÇO $\{|+-\rangle, |-+\rangle\}$

$$\hbar^2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0, 2$$

$\Rightarrow$ AUTO-VALORES $2\hbar^2$ e 0

AUTO-ESTADOS: $|t_0\rangle = \dfrac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow 2\hbar^2$

$$|S\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow 0$$

ESPECTRO DE S^2:

$\underline{\underline{|t_1\rangle\,|t_0\rangle\,|t_{-1}\rangle}}$ $\lambda = 2\hbar^2$ (TRIPLETO) $S=1$

$\underline{|S\rangle}$ $\lambda = 0$ (SINGLETO) $S=0$

SINGLETO: ESTADO DE $S=0$ (MOMENTO ANGULAR TOTAL $=0$)

$$S^2|S\rangle = 0$$

$$S_z|S\rangle = \frac{0-0}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow |S\rangle \equiv |J=0, M=0\rangle$$

TRIPLETO: ESTADO DE $S=1$ (MOMENTO ANGULAR TOTAL $=1$)

$S^2|t_1\rangle = 2\hbar^2|t_1\rangle$, $S_z|t_1\rangle = \hbar|t_1\rangle$

$S^2|t_0\rangle = 2\hbar^2|t_0\rangle$, $S_z|t_0\rangle = 0\,|t_0\rangle = 0$

$S^2|t_{-1}\rangle = 2\hbar^2|t_{-1}\rangle$, $S_z|t_{-1}\rangle = -\hbar|t_0\rangle$

$$\Rightarrow |t_1\rangle \equiv |J=1, M=1\rangle$$

$$|t_0\rangle \equiv |J=1, M=0\rangle$$

$$|t_{-1}\rangle \equiv |J=1, M=-1\rangle$$

CASO GERAL, $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

PART. 1 : $|k_1, j_1, m_1\rangle$ → $J_1^2|k_1 j_1 m_1\rangle = \hbar^2(j_1+1)j|k_1 j_1 m_1\rangle$

$J_1^z|k_1 j_1 m_1\rangle = \hbar m_1|k_1 j_1 m_1\rangle$

NR. QUÂNTICO RELATIVO A UMA OPERADOR A_1 QUE COMUTA COM J_1^2 e J_1^z

$$\Rightarrow \quad A_1|k_1 j_1 m_1\rangle = \underset{\downarrow}{a_{k_1,j_1}}|k_1, j_1, m_1\rangle$$

NÃO DEPENDE DE m_1 PQ $[A_1, J_1^\pm] = 0$

ANALOGAMENTE P/ PART. 2

ESTADOS → $|k_2\, j_2\, m_2\rangle$

- PARA CADA k_1, j_1 QUAL A DIMENSÃO DO ESPAÇO EXPANDIDO POR $|k_1 j_1 m_1\rangle$? R: $\varepsilon_1 = (2j_1+1)$

MOMENTO ANGULAR TOTAL

$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ → OPERADORES J^2 e J^z

* NOTE QUE OS OPERADORES $A_1\ A_2\ J_1^2\ J_2^2\ J_1^z\ J_2^z$ COMUTAM TODOS ENTRE SI

$\Rightarrow$ BASE COMUM $\equiv |k_1 k_2, j_1 j_2, m_1 m_2\rangle$

* NOTE TAMBEM QUE $A_1\ A_2\ J_1^2\ J_2^2\ J^2\ J^z$ COMUTAM TODOS ENTRE SI $\Rightarrow$ ∃ BASE COMUM

$|k_1 k_2, j_1 j_2, JM\rangle$ → NR. TOTAL DE ESTADOS $= (2j_1+1)(2j_2+1)$

COMO k_1 k_2 j_1 j_2 ESTÃO FIXOS → DIMINUIR A NOTAÇÃO $|k_1 k_2 j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \to |m_1 m_2\rangle$

$|k_1 k_2 j_1 j_2 J M\rangle \to |J M\rangle$

- OS AUTO-ESTADOS DE J^z SÃO FÁCEIS

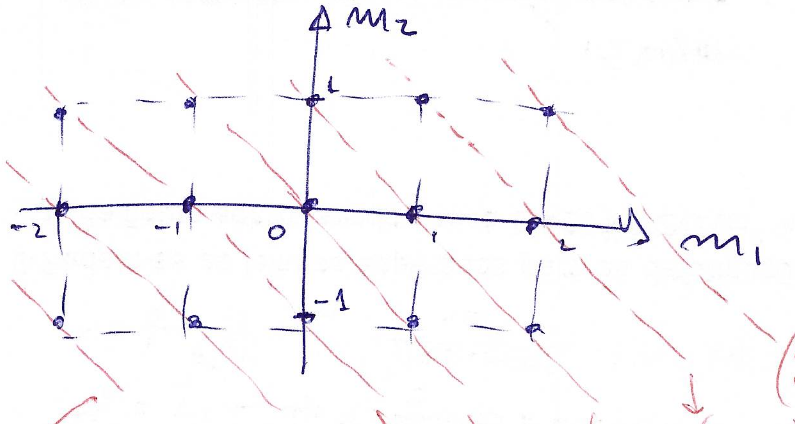
$$J^z |m_1 m_2\rangle = (j_1^z + j_2^z)|m_1 m_2\rangle = \hbar(m_1 + m_2)|m_1 m_2\rangle$$

COMO $J^z |J M\rangle = \hbar M |J M\rangle$

⇒ MÁXIMO $M = j_1 + j_2$

MÍNIMO $M = -(j_1 + j_2)$

EX: $j_1 = 2$, $j_2 = 1$



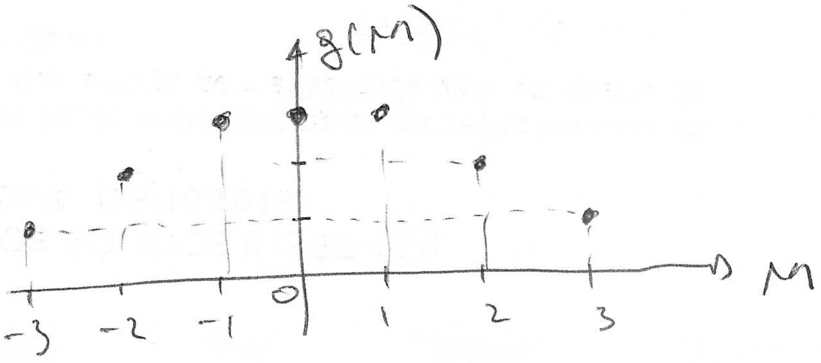
$(g=1)$ $M = j_1 + j_2 = 3$

$(g=2)$ $M = j_1 + j_2 - 1 = 2$

$(g=3)$ $M = j_1 + j_2 - 2 = 1$

$(g=1)$ $M = -j_1 - j_2 = -3$

$(g=2)$ $M = -j_1 - j_2 + 1 = -2$



DEGENERESCÊNCIA

$$\boxed{g_{máx} = 3 = 2 j_2 + 1}$$

$= 2 \min\{j_1, j_2\} + 1$

QUE VALORES J PODE ASSUMIR?

① EXISTE 1 ESTADO COM $M = j_1 + j_2$ $(g=1)$
" " " " $M = -(j_1+j_2)$ $(g=1)$

$\Rightarrow$ EXISTE $J = j_1 + j_2$ $\Rightarrow$ EXISTE $2(j_1+j_2)$ ESTADOS DE J^z CORRESPONDENTES

TAREFA: ENCONTRAR ESSES ESTADOS
P/ DEPOIS

$$\{|J,M\rangle\} = \{|j_1+j_2, j_1+j_2\rangle, \cdots, |j_1+j_2, -(j_1+j_2)\rangle\}$$

② EXISTEM 2 ESTADOS COM $M = j_1+j_2-1$ $(g=2)$ → UM DELES ESTÁ ACIMA. $J = j_1+j_2$, $M = j_1+j_2-1$
" " " " $M = -(j_1+j_2-1)$ $(g=2)$

E SÓ EXISTE UM CASO EM QUE $J = j_1+j_2$

$\Rightarrow$ EXISTE $J = j_1+j_2-1$

$\Rightarrow$ EXISTE OUTROS $2(j_1+j_2-1)+1$ ESTADOS CORRESPONDENTES DE J^z

TAREFA P/ DEPOIS: ENCONTRAR ESSES ESTADOS

③ REPETE-SE O RACIOCÍNIO PARA $J = j_1+j_2-2$

④ ATÉ QUANDO REPETIMOS ESSE RACIOCÍNIO?

R: ATÉ ESGOTARMOS O ESPAÇO DE HILBERT EXPANDIDO POR $|k_1 k_2\, j_1 j_2\, m_1 m_2\rangle \equiv |m_1, m_2\rangle$ QUE CORRESPONDE A $(2j_1+1)(2j_2+1)$ ESTADOS

~~NOTAR QUE SÓ EXISTE UM CONJUNTO DE ESTADOS [illegible]~~, CONTAR O NR. DE ESTADOS DA NOVA BASE

$$\sum_{J=J_{MIN}}^{J_{MAX}} (2J+1) = \sum_{J=J_{MIN}}^{j_1+j_2} (2J+1) = \varepsilon$$

$$\mathcal{E} = 2 * \frac{(J_{MIN} + J_{MAX})(J_{MÁX} - J_{MIN} + 1)}{2} + J_{MÁX} - J_{MIN} + 1 \quad (32)$$

$$= (2j_1+1)(2j_2+1) = J_{MÁX}^2 - J_{MIN}^2 + J_{MÁX} + \cancel{J_{MIN}} + J_{MÁX} - \cancel{J_{MIN}} + 1$$

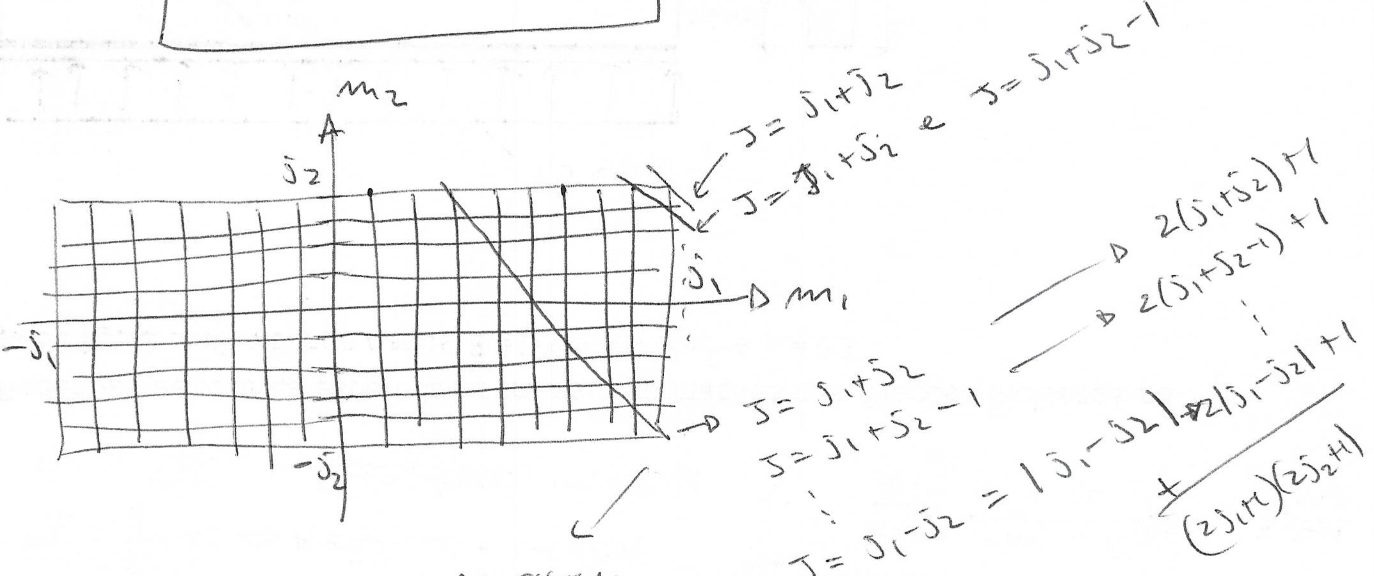
$$\Rightarrow J_{MIN}^2 = J_{MÁX}^2 + 1 - (2j_1+1)(2j_2+1) + 2J_{MÁX}$$

$$= (j_1+j_2)^2 + 1 - (2j_1+1)(2j_2+1) + 2J_{MÁX}$$

$$= j_1^2 - 2j_1j_2 + j_2^2 - 2(j_1+j_2) + 2J_{MÁX}$$

$$J_{MIN}^2 = (j_1-j_2)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{MIN} = |j_1 - j_2|}$$



$J = j_1+j_2$ → $2(j_1+j_2)+1$

$J = j_1+j_2-1$ → $2(j_1+j_2-1)+1$

$\vdots$

$J = j_1-j_2 = |j_1-j_2|$ → $2|j_1-j_2|+1$

$+$ ———

$(2j_1+1)(2j_2+1)$

AO CHEGAR AQUI, TODOS OS OUTROS ESTADOS JÁ TERÃO SIDO CONTADOS

CONCLUSÃO: $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

$\Rightarrow$ OS POSSÍVEIS VALORES DE J SÃO

$$J = |j_1-j_2|,\ |j_1-j_2|+1,\ \ldots,\ j_1+j_2-1,\ j_1+j_2$$

PARA CADA VALOR DE J, TEMOS $(2J+1)$ POSSÍVEIS VALORES PARA $M = -J, -J+1, \ldots, J-1, J$

TAREFA: DETERMINAR OS ESTADOS $|J,M\rangle$

~~RECEITA: ① [illegible]~~

EXPANDIR ~~NA~~ ~~TERMOS DA~~ BASE CONHECIDA $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$

OU SEJA

$$|j_1 j_2 J M\rangle = \sum_{m_1 m_2} \alpha_{j_1 j_2 m_1 m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1 m_2} \underbrace{\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle}_{\substack{\alpha_{j_1 j_2 m_1 m_2} \\ \parallel \\ \text{CLEBSCH-GORDAN} \\ \text{COEFFICIENTS}}} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

OS COEFICIENTES DE CG ~~AINA~~ FICAM ENTÃO DETERMINADOS ALÉM DE UMA FASE GLOBAL ARBITRÁRIA. ELA NÃO É IMPORTANTE, MAS CONVENCIONA-SE QUE

$$\langle j_1 j_2, j_1, J-j_1 | j_1 j_2 J J\rangle \text{ É REAL E POSITIVO}$$

ESSA CONVENÇÃO FIXA A FASE. NA VERDADE OS COEF. DE CG SÃO TODOS REAIS

TRANSF. INVERSA

$$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = \sum_{JM} \langle j_1 j_2 J M | j_1 j_2 m_1 m_2\rangle |j_1 j_2 J M\rangle$$

TAREFA: DETERMINAR OS COEFICIENTES DE CG

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | J M\rangle$$

NOTE QUE OS COEF. DE CG SÃO NULOS EXCETO QDO

a) $m_1 + m_2 = M$

b) $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$

c) $j_1 + j_2 + J \in \mathbb{Z}^+$

1º PASSO: O ESTADO DE MAIOR MOMENTO ANGULAR E PROJ. DE MOMENTO ANGULAR É NÃO DEGENERADO

$$\Rightarrow \left|J = j_1+j_2,\ M=J\right) = |j_1 j_2,\ m_1=j_1,\ m_2=j_1\rangle$$

NOTAÇÃO: $\{|J, M\rangle\} \equiv$ BASE DE J^2 e J^z $= \{|J\,M\rangle\}$

$\{|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\} \equiv$ BASE DE J_1^2, J_2^2, J_1^z e J_2^z $= \{|m_1, m_2)\}$

$$|j_1+j_2, j_1+j_2\rangle = \sum_{m_1 m_2} |m_1 m_2)(m_1 m_2 | j_1+j_2, j_1+j_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1 m_2} \underbrace{(m_1 m_2 | j_1+j_2, j_1+j_2\rangle}_{\propto\, \delta_{m_1,j_1}\, \delta_{m_2,j_2}} |m_1, m_2)$$

$$= \underbrace{(j_1, j_2 | j_1+j_2, j_1+j_2\rangle}_{\text{CONVENÇÃO: REAL E POSITIVO}} |m_1, m_2)$$

POR NORMALIZAÇÃO $\Rightarrow$ $\boxed{(j_1\, j_2 | j_1+j_2, j_1+j_2\rangle = 1}$

∝ OBS: PODEMOS, ANALOGAMENTE, CHEGAR NA CONCLUSÃO DE QUE

$|j_1+j_2, -(j_1+j_2)\rangle = |-j_1, -j_2)$, OU SEJA

$$(-j_1, -j_2 | j_1+j_2, -j_1-j_2\rangle = 1$$

2º PASSO: OBTER OS DEMAIS ESTADOS APLICANDO J^- COM

$$J^- = J_1^- + J_2^-$$

$$J_- |J, M\rangle = \hbar \sqrt{J(J+1) - M(M-1)}\ |J, M-1)$$

LOGO, $J^-_{TOT}|j_1+j_2, j_1+j_2\rangle = \hbar\sqrt{2(j_1+j_2)}\;|j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle$

$$= \left(J_1^- + J_2^-\right)|j_1, j_2)$$

$$= \hbar\sqrt{2j_1}\;|j_1-1, j_2) + \hbar\sqrt{2j_2}\;|j_1, j_2-1)$$

$$\Rightarrow \; |j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle = \frac{\sqrt{j_1}\;|j_1-1, j_2) + \sqrt{j_2}\;|j_1, j_2-1)}{\sqrt{j_1+j_2}}$$

LOGO, OS COEF. DE CG CORRESPONDENTES SÃO

$$\boxed{\begin{array}{l} (j_1-1, j_2 | j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle = \sqrt{\dfrac{j_1}{j_1+j_2}} \\ (j_1, j_2-1 | j_1+j_2, j_1+j_2-1) = \sqrt{\dfrac{j_2}{j_1+j_2}} \end{array}}$$

ANALOGAMENTE, $J^-|j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle = \#\, |j_1+j_2, j_1+j_2-2\rangle$

$$\left(J_1^-+J_2^-\right)|j_1+j_2, j_1+j_2-1\rangle = \left(J_1^-+J_2^-\right)\left(A|j_1-1, j_2) + B|j_1, j_2-1)\right)$$

$$= A'|j_1-2, j_2) + B'|j_1-1, j_2-1) + C'|j_1, j_2-2)$$

OU SEJA,

$$|j_1+j_2, j_1+j_2-2\rangle = \alpha|j_1-2, j_2) + \beta|j_1-1, j_2-1) + \gamma|j_1, j_2-2)$$

⋮ APLICA-SE J^- VÁRIAS VEZES

ATÉ OBTER

$$|j_1+j_2, -(j_1+j_2)\rangle = |-j_1, -j_2)$$

3º PASSO : CONSTRUIR O SUB-ESPAÇO $J=j_1+j_2-1$

LEMBRE-SE QUE HÁ APENAS DOIS ESTADOS EM QUE $M = j_1+j_2-1$: $|j_1-1, j_2)$ e $|j_1, j_2-1)$

A COMBINAÇÃO $\dfrac{\sqrt{j_1}\,|j_1-1, j_2) + \sqrt{j_2}\,|j_1, j_2-1)}{\sqrt{j_1+j_2}}$

É AUTO-ESTADO DE J^2 E J^z COM AUTOVALORES

$\hbar^2 J(J+1)$ e $\hbar M$ COM $\begin{cases} J = j_1+j_2 \\ M = j_1+j_2-1 \end{cases}$

EXISTE UMA OUTRA COMBINAÇÃO QUE É AUTO-ESTADO DE J^2 e J^z COM AUTO-VALORES

$\hbar^2 J(J+1)$ e $\hbar M$ COM $\begin{cases} J = j_1+j_2-1 \\ M = j_1+j_2-1 \end{cases}$

QUE COMBINAÇÃO É ESSA ?

R: SÓ HÁ UMA COMBINAÇÃO QUE É ORTOGONAL AO ESTADO $|J=j_1+j_2, M=j_1+j_2-1\rangle$

$$\Rightarrow |J=j_1+j_2-1, M=j_1+j_2-1\rangle = \text{FASE}\left(\frac{\sqrt{j_2}\,|j_1-1, j_2) - \sqrt{j_1}\,|j_1, j_2-1)}{\sqrt{j_1+j_2}}\right)$$

ONDE A FASE É DETERMINADA PELA CONVENÇÃO

$\langle j_1 j_2, j_1, J-j_1 | j_1 j_2 J J\rangle \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow (j_1, j_2-1 | j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \boxed{\text{FASE} = -1}$

COEF. CG:

$(j_1, j_2-1 | j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle = -\sqrt{\dfrac{j_2}{j_1+j_2}}$

$(j_1-1, j_2 | j_1+j_2-1, j_1+j_2-1\rangle = +\sqrt{\dfrac{j_1}{j_1+j_2}}$

4º PASSO: REPETE-SE ESSES PASSOS RECURSIVAMENTE

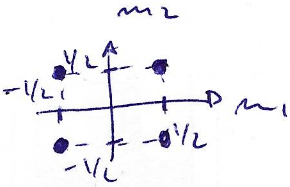
EXEMPLOS: $j_1 = j_2 = 1/2$ → BASE ORIGINAL

$\{|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle\} = \{|\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \ldots \}$

$= \{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$

$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

POSSÍVEIS VALORES DE $J = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow 3 \text{ ESTADOS} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 1 \text{ ESTADO} \end{cases}$



→ 4 ESTADOS

NOVA BASE: $\{|j_1 j_2 J M\rangle\} = \{|J M\rangle\} = \{|1 1\rangle, |1 0\rangle, |1 -1\rangle, |0 0\rangle\}$

$\boxed{|1 1\rangle = |++\rangle}$

$|1 0\rangle \rightarrow J_-|1 1\rangle = \sqrt{2}\hbar\,|1 0\rangle$

$(J_1^- + J_2^-)|++\rangle = \hbar\left(|-+\rangle + |+-\rangle\right)$

$$\Rightarrow \boxed{|1 0\rangle = \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}}$$

$J_-|1 0\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|1 -1\rangle$

$$(J_1^- + J_2^-)\left(\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(|--\rangle + 0 + 0 + |--\rangle\right) = \hbar\sqrt{2}\,|--\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{|1 -1\rangle = |--\rangle}$$

SUB-ESPAÇO $J = 0$ → $\boxed{|0,0\rangle = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}}$

EXEMPLO: $j_1 = j_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -1, 0, 1 \\ m_2 = -1, 0, 1 \end{cases}$ → 9 ESTADOS

POSSÍVEIS J's: $\begin{cases} J = 2 \rightarrow 5 \text{ ESTADOS} \quad M = -2, 1, 0, 1, 2 \\ J = 1 \rightarrow 3 \text{ ESTADOS} \quad M = -1, 0, 1 \\ J = 0 \rightarrow 1 \text{ ESTADO} \quad M = 0 \end{cases}$

NOTAÇÃO: $|J M\rangle \rightarrow |J M\rangle$

$|m_1 m_2\rangle \rightarrow |m_1 m_2)$

SUB-ESPAÇO $J = 2$

$$\boxed{|2,2\rangle = |1\,1)}$$

$$J_-|22\rangle = 2\hbar\,|2,1\rangle$$

$$(J_1^- + J_2^-)|1\,1) = \hbar\sqrt{2}\,(|1\,0) + |0\,1)) \Rightarrow \boxed{|2\,1\rangle = \frac{|1\,0) + |0\,1)}{\sqrt{2}}}$$

$$J^-|21\rangle = \sqrt{6}\,\hbar\,|2\,0\rangle$$

$$(J_1^- + J_2^-)\,\frac{|1\,0) + |0\,1)}{\sqrt{2}} = \hbar\,(|1\,-1) + 2|0\,0) + |-1\,1))$$

$$\Rightarrow \boxed{|2\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|1\,-1) + 2|0\,0) + |-1\,1)\right)}$$

POR SIMETRIA: $\boxed{|2\,-1\rangle = \frac{|-1\,0) + |0\,-1)}{\sqrt{2}}}$ $\boxed{|2\,-2\rangle = |-1\,-1)}$

SUB-ESPAÇO $J=1$

$$\boxed{|1\,1\rangle = \frac{|1\,0) - |0\,1)}{\sqrt{2}}} \rightarrow \boxed{|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,-1) - |-1\,1)\right)}$$

$$\boxed{|1\,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\,-1) - |-1\,0)\right)}$$

SUB-ESPAÇO $J=0$

$$|0\,0\rangle = \alpha|1\,-1) + \beta|0\,0) + \gamma|-1\,1)$$

POR ORTOGONALIDADE

$$\Rightarrow \boxed{|0\,0\rangle = \frac{|1\,-1) - |0\,0) + |1\,-1)}{\sqrt{3}}}$$

EX: **DEUTÉRIO**　　NÚCLEO → SPIN-1
ELÉCTRON → SPIN-1/2

ELÉCTRON : $\vec{J}_e = \underset{\text{ORBITAL}}{\vec{L}} + \underset{\text{SPIN-1/2}}{\vec{S}_e}$

NÚCLEO : $\vec{J}_N = \underset{\text{SPIN-1}}{\vec{S}_N}$

ÁTOMO : $\vec{J}_{\text{ÁTOMO}} = \vec{F} = \vec{J}_e + \vec{S}_N$

a) VALORES DE $\vec{J}_e$ e $\vec{F}$ P/ ÁTOMO NO ESTADO FUNDAMENTAL 1s ($n=1$, $l=0$, $m=0$)

VALORES DE J_e → SOMENTE 1/2

" " F → $(\vec{1} + \vec{\tfrac{1}{2}})$ → $\begin{cases} 3/2 & \to 4 \text{ ESTADOS} \\ 1/2 & \to 2 \text{ ESTADOS} \end{cases}$

b) ESTADO 2p ($n=2$, $l=1$)

$$J_e = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} = 3/2 \\ 1 - 1/2 = 1/2 \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} \text{SE } J_e = 3/2 \to \vec{F} = (\vec{\tfrac{3}{2}} + \vec{1}) \longrightarrow \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1 \\ \text{SE } J_e = 1/2 \to \vec{F} = (\vec{1} + \vec{\tfrac{1}{2}}) \to \frac{3}{2}, 1 \end{cases}$$

BASE : $| S_N, L, J_e, F, M_F \rangle$