TRANSFORMAÇÕES, SIMETRIAS E LEIS DE CONSERVAÇÃO (1)

CAP 9. AFR DE TOLEDO PIZA - "MECÂNICA QUÂNTICA"

* GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES

- TRANSFORMAÇÕES ESPAÇO-TEMPORAIS

$$(\vec{q},t) \longrightarrow (\vec{q}',t') \equiv \underbrace{A}_{\text{TRANSFORMAÇÃO}}(\vec{q},t)$$

$$A(\vec{q},t) \equiv (\vec{q}',t')$$

- PROPRIEDADES:

① PRODUTO - 2 TRANSFORMAÇÕES É UMA NOVA TRANSFORMAÇÃO

$$B\left(A(\vec{q},t)\right) = (\vec{q}'',t'') = D(\vec{q},t) \equiv (BA)(\vec{q},t)$$

② INDENTIDADE - $1(\vec{q},t) \equiv (\vec{q},t)$

③ INVERSA - $A^{-1}A = AA^{-1} = 1$

DEFINIÇÃO:

- AS FAMÍLIAS DE TRANSFORMAÇÕES COM ESSAS 3 PROPRIEDADES SÃO CHAMADAS DE <u>GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES</u>

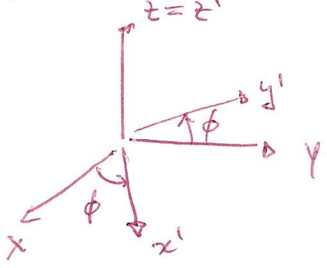
SUBGRUPOS → GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES CONTIDAS NUM GRUPO MAIOR

EX: IDENTIDADE → É UM GRUPO E ESTÁ CONTIDA EM TODOS OS OUTROS GRUPOS

- GRUPOS CONTÍNUOS E GERADORES

GRUPO DAS ROTAÇÕES EM TORNO DO EIXO z $(z'=z,\ t'=t)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv A_\phi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



- PRODUTO: $A_{\phi_1} A_{\phi_2} = A_{\phi_1+\phi_2}$
- INVERSA: $A_\phi^{-1} = A_{-\phi}$
- IDENTIDADE: $A_0 = 1$

COMUTATIVIDADE: EM GERAL $AB \neq BA$, NO CASO DAS ROTAÇÕES EM TORNO

DO EIXO Z, TEMOS QUE $A_{\phi_1} A_{\phi_2} = A_{\phi_2} A_{\phi_1}$

(FÁCIL DE MOSTRAR: $A_{\phi_1} A_{\phi_2} = A_{\phi_1+\phi_2} = A_{\phi_2+\phi_1} = A_{\phi_2} A_{\phi_1}$)

QDO HÁ COMUTATIVIDADE, DIZ-SE QUE O GRUPO É COMUTATIVO OU ABELIANO

- TRANSFORMAÇÕES INFINITESIMAIS (SOMENTE P/ GRUPOS CONTÍNUOS)

$$A_{d\phi} = \begin{pmatrix} 1+d\phi^2 & d\phi & 0 \\ -d\phi & 1+d\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} + d\phi\, \mathbb{M}_3 + O(d\phi)^2$$

$$\mathbb{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PELA PROPRIEDADE DO PRODUTO $\rightarrow$ $A_\phi = \left(A_{\frac{\phi}{n}}\right)^n$

$$= \left(1 + \frac{\phi}{n}\mathbb{M}_3 + O\left(\frac{\phi}{n}\right)^2\right)^n$$

USANDO QUE $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$

$\Rightarrow$ $\boxed{A_\phi = e^{\phi \mathbb{M}_3}}$ $\longrightarrow$ EXPANDINDO ESSA EXPRESSÃO OBTEMOS QUE $A_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

QDO ISSO ACONTECE DIZ-SE QUE

$\mathbb{M}_3$ É <u>GERADOR DO GRUPO</u> DE ROTAÇÕES EM TORNO DO EIXO Z

- REPRESENTAÇÕES

ATÉ AQUI, AS TRANSFORMAÇÕES FORAM NAS COORDENADAS ESPAÇO-TEMPORAIS

- QUAIS SÃO AS MODIFICAÇÕES QUE OCORREM NOS OBSERVÁVEIS DO SISTEMA?

$\Rightarrow$ OLHAR A FUNÇÃO DE ONDA $\psi(\xi)$

AQUI, ξ REPRESENTA ESPAÇO E TEMPO E OUTRA COORD. QUALQUER (COMO SPIN) QUE ~~REPRESENTA~~ DEFINE O ESTADO FÍSICO

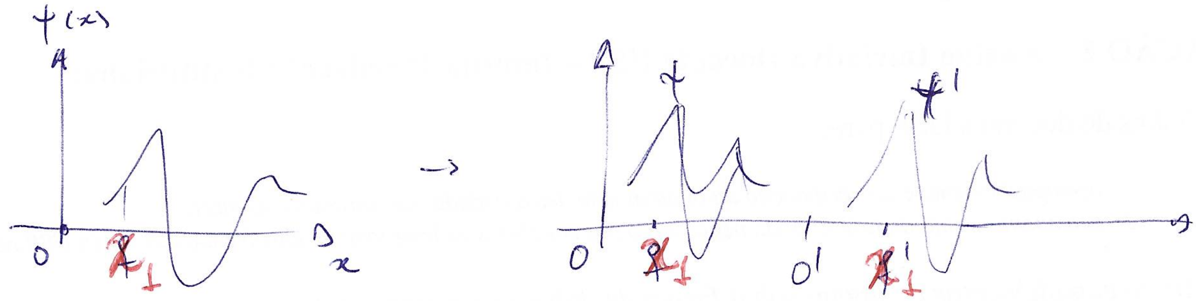
DADA A TRANSFORMAÇÃO $A\vec{q} = \vec{q}\,'$

$\Rightarrow$ EXISTE UMA TRANSFORMAÇÃO CORRESPONDENTE NO ESPAÇO DE FUNÇÕES DE ONDA

$$O_A \psi = \psi', \quad \text{TAL QUE}$$

$$\psi'(\vec{q}\,') = \psi(\vec{q})$$

EX:



EM GERAL

$$\psi(\vec{q}) \neq \psi'(\vec{q})$$

$O_A \equiv$ OPERADOR QUE AGE NO ESPAÇO DE FUNÇÕES DE ONDA

$$(O_A\psi)(\underbrace{A\vec{q}}_{x}) = \psi'(\vec{q}\,') = \psi(\underbrace{\vec{q}}_{A^{-1}x}) \Rightarrow \boxed{O_A\psi(\vec{q}) = \psi(A^{-1}\vec{q})}$$

- PRODUTO $(O_{BA}\psi)(\vec{q}) = \psi((BA)^{-1}\vec{q}) = \psi(A^{-1}B^{-1}\vec{q}) = O_A\psi(B^{-1}\vec{q})$

$$= O_B O_A \psi(\vec{q})$$

$$\Rightarrow \boxed{O_{BA} = O_B O_A}$$

$\rightarrow$ AS PROPRIEDADES DE IDENTIDADE E INVERSA SEGUEM TRIVIALMENTE

$\Rightarrow$ ESSES OPERADORES FORMAM UM GRUPO

É DITO QUE ESSES OPERADORES FORMAM UMA <u>REPRESENTAÇÃO DO GRUPO</u> DE TRANSFORMAÇÕES ESPAÇO-TEMPORAIS EM CONSIDERAÇÃO

*OBS: A REPRESENTAÇÃO DO GRUPO <u>NÃO</u> É ÚNICA (4)

OU SEJA, EXISTE MAIS DE UMA REPRESENTAÇÃO P/ UM DADO GRUPO DE TRANSF. ESPAÇO-TEMPORAIS

• ~~SEJA~~ $\cancel{(\bar{O}_A \psi)(Aq) = \psi(q) = (\bar{O}_A \psi)(Aq)}$

$\cancel{U \bar{O}_A \psi(Aq) = U\psi(q)}$ ~~ONDE U É UM OPERADOR UNITÁRIO~~

EX: TRANSFORMAÇÕES UNITÁRIAS

$$\bar{O}_A = U^{\dagger} O_A U \quad , \quad U \equiv \text{OPERADOR UNITÁRIO}$$

$$\Rightarrow (\underbrace{\bar{O}_A \psi}_{\psi'})(\underbrace{Aq}_{q'}) = (U^{\dagger} O_A \cancel{U\psi})(q') = (U^{\dagger} \bar{O}_A \phi)(q') = U^{\dagger}\phi(q)$$

$$= U^{\dagger} U \psi(q) = \psi(q)$$

$O_A\psi(q') \equiv \psi(q)$

COMO FICA $\bar{O}_A\psi(q')$?

AS PROPRIEDADES DE PRODUTO, IDENTIDADE E INVERSA DA NOVA REPRESENTAÇÃO SEGUEM ANALOGAMENTE

$$\bar{O}_A \bar{O}_B = U^{\dagger} O_A U U^{\dagger} O_B U = U^{\dagger} O_{AB} U = \bar{O}_{AB}$$

— COMO MUDAM OS OPERADORES DO ESPAÇO DE HILBERT?

$$O_A g \psi(q) = O_A g O_A^{-1} O_A \psi(q) = O_A g O_A^{-1} \psi'(q) = g'\psi'(q)$$

g: OPERADOR DO ESPAÇO DE HILBERT

$$\Rightarrow g \rightarrow \boxed{g' = O_A g O_A^{-1}}$$

SE g É O HAMILTONIANO $\Rightarrow$ $H' = O_A H O_A^{-1}$

OUTRA FORMA DE VER: QUEREMOS QUE $\int dq\, \psi^*(q)\, g\, \psi(q) = \langle g \rangle_{\psi}$

$$= \int dq'\, \psi'^*(q')\, g'\, \psi'(q') = \langle g' \rangle_{\psi'}$$

$$\Rightarrow \langle g' \rangle = \int dq'\, O_A^{-1} \psi^*(q)\, g'\, O_A \psi(q)$$

$$\Rightarrow O_A^{-1} g' O_A = g \quad \Rightarrow \boxed{g' = O_A g O_A^{-1}}$$

DEF: UM SISTEMA FÍSICO É DITO INVARIANTE POR UM DADO GRUPO DE TRANSFORMAÇÕES QDO $H' = H$ $\forall O_A$ DO GRUPO

ISSO IMPLICA QUE A DINÂMICA DE ψ e ψ' SÃO IGUAIS (EXCETO P/ TRANSF. POR OPERADORES ANTI-LINEARES - VER INVERSÃO TEMPORAL)

$$H'\psi' = (O_A H O_A^{-1})(O_A\psi) = O_A H\psi = O_A\, i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} O_A\psi$$

ATUA NA FUNÇÃO

PRECISAMOS QUE $O_A i = i O_A$

$$\boxed{H'\psi' = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'}$$ → DE FORMA GERAL

~~...~~

COMO $H = H'$ ⇒ $\boxed{H\psi' = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'}$ ⇒ ψ e ψ' TEM A MESMA DINÂMICA

ALÉM DISSO, NOTE QUE

$$H' = H = O_A H O_A^{-1} \Rightarrow H O_A = O_A H =$$

OU SEJA $\boxed{[O_A, H] = 0}$

LOGO, HÁ CONSTANTES DE MOVIMENTO ASSOCIADAS AOS AUTO-VALORES DE O_A

EX: GRUPO DISCRETO DE INVERSÃO ESPACIAL $\{1, P\}$: $1\vec{r} = \vec{r}$, $P\vec{r} = -\vec{r} = P^{-1}\vec{r}$

REPRESENTAÇÃO: $\{\mathbb{1}, \mathcal{P}\}$

$$\mathcal{P}\psi(\vec{r}) = \psi'(\vec{r}) = \psi(P^{-1}\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$$

CASO $[H, \mathcal{P}] = 0$ ⇒ $\mathcal{P}H\psi_E = H\mathcal{P}\psi_E$

$$\mathcal{P}E\psi_E = \boxed{H\psi'_E = E\psi'_E}$$ ⇒ ψ e ψ' SÃO AUTO-FUNÇÕES DE H COM MESMO AUTOVALOR

COMO $\mathcal{P}^2 = \mathbb{1}$ ⇒ AUTOVALORES ± 1

$$\psi'_E = \mathcal{P}\psi_E = \pm\psi_E$$

$$\Psi_E = \frac{\psi_E \pm \mathcal{P}\psi_E}{\sqrt{2}} = \frac{\psi_E \pm \psi'_E}{\sqrt{2}}$$ SÃO AUTOFUNÇÕES DE H e $\mathcal{P}$ AO MESMO TEMPO

- TRANSLAÇÕES ESPACIAIS E MOMENTO

$$\vec{r}\,' = T_{\vec{d}}\,\vec{r} = \vec{r} - \vec{d}$$

DESLOCAR A ORIGEM DO SISTEMA DE COORDENADAS DE $+\vec{d}$

NOTE QUE

$$T_{\vec{d}_1+\vec{d}_2} = T_{\vec{d}_1} T_{\vec{d}_2} = T_{\vec{d}_2} T_{\vec{d}_1}$$

$$T_{\vec{d}}^{-1} = T_{-\vec{d}}$$

O OPERADOR TRANSLAÇÃO

É TAL QUE

$$\psi'(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = O_{T_{\vec{d}}}\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) =$$

$$= \psi(T_{\vec{d}}^{-1}\vec{r}_1, \dots, T_{\vec{d}}^{-1}\vec{r}_N) = \psi(\vec{r}_1 + \vec{d}, \dots, \vec{r}_N + \vec{d})$$

- GERADOR DO GRUPO:

TRANSLAÇÃO INFINITESIMAL $T_{\vec{\epsilon}}$:

$$\psi'(\vec{r}_j) = \psi(\vec{r}_j + \vec{\epsilon}) = \psi(\vec{r}_j) + \vec{\epsilon}\cdot\sum_j \nabla_j \psi(\vec{r}_j) + O(\epsilon^2)$$

$$= \left(1 + \frac{i}{\hbar}\vec{\epsilon}\cdot\vec{P}\right)\psi(\vec{r}) + O(\epsilon)^2 \quad , \quad \vec{P} = \sum_j \frac{\hbar}{i}\nabla_j \text{ (MOMENTO TOTAL)}$$

LOGO $$O_{T_{\vec{d}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{i}{\hbar}\frac{\vec{d}\cdot\vec{P}}{n}\right)^n = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{d}\cdot\vec{P}} \equiv \text{OPERADOR TRANSLAÇÃO DE } \vec{d}$$

$$\Rightarrow \psi'(\vec{r}_j) = \psi(\vec{r}_j + \vec{d}) = O_{T_{\vec{d}}}\psi(\vec{r}_j) = e^{\frac{i\vec{d}\cdot\vec{P}}{\hbar}}\psi(\vec{r}_j)$$

EM TERMOS DE BRAS E KETS

$$\vec{r}\,|\vec{\rho}\rangle = \vec{\rho}\,|\vec{\rho}\rangle \quad , \quad \langle\vec{\rho}\,'|\vec{\rho}\rangle = \delta^{(3)}(\vec{\rho} - \vec{\rho}\,')$$

$$\vec{r}\,e^{\frac{i\vec{d}\cdot\vec{P}}{\hbar}}|\vec{\rho}\rangle = e^{\frac{+i\vec{d}\cdot\vec{P}}{\hbar}}\underbrace{e^{\frac{-i\vec{d}\cdot\vec{P}}{\hbar}}\,\vec{r}\,e^{\frac{i\vec{d}\cdot\vec{P}}{\hbar}}}_{\text{BAKER-HAUSSDORF} \to \vec{r} - \vec{d}\,\mathbb{1}}|\vec{\rho}\rangle$$

$$e^{A}Be^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \dots$$

$$= e^{\frac{i\vec{d}\cdot\vec{P}}{\hbar}}(\vec{\rho} - \vec{d})|\vec{\rho}\rangle = (\vec{\rho} - \vec{d})\,e^{\frac{i\vec{d}\cdot\vec{P}}{\hbar}}|\vec{\rho}\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{\frac{i\vec{d}\cdot\vec{P}}{\hbar}}|\vec{\rho}\rangle = |\vec{\rho} - \vec{d}\rangle} \longrightarrow \text{ALÉM DE UMA FASE IRRELEVANTE}$$

LOGO

(7)

$$\psi'(\vec{q}) = \langle \vec{q} | \psi' \rangle$$
$$= \langle \vec{q} | e^{i\frac{\vec{P}\cdot\vec{d}}{\hbar}} | \psi \rangle = \langle \vec{q}+\vec{d} | \psi \rangle$$

$$\boxed{\psi'(q) = \psi(\vec{q}+\vec{d})}$$

- O SISTEMA É INVARIANTE TRANSLACIONAL SE $\left[H, e^{i\frac{\vec{d}\cdot\vec{P}}{\hbar}}\right] = 0$ PARA QUALQUER $\vec{d}$

OU SEJA, $[H, \vec{P}] = 0$

$\Rightarrow$ MOMENTO TOTAL É CONSTANTE DO MOVIMENTO

$\Rightarrow$ CONJUNTO COMPLETO $\psi_{E,\vec{K}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ TAL QUE $H\psi_{E,\vec{K}} = E\psi_{E,\vec{K}}$

$$\vec{P}\psi_{E,\vec{K}} = \hbar\vec{K}\,\psi_{E,\vec{K}}$$

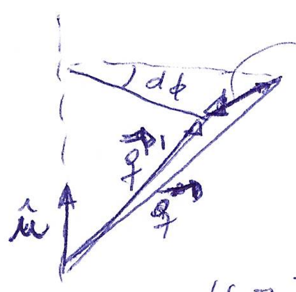
ALÉM DISSO,

$$\psi_{E,\vec{K}}(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = e^{i\vec{K}\cdot\vec{X}}\,\phi_{E,\vec{K}}(\vec{\delta}_1, \dots, \vec{\delta}_N)$$

$\vec{\delta}_j = \vec{r}_j - \vec{X} \equiv$ POSIÇÕES RELATIVAS AO CENTRO DE MASSA $\vec{X} = \dfrac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{\sum_j m_j}$

NO CASO, $\vec{P}\phi_{E,\vec{K}} = 0$

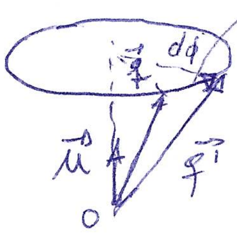
- ROTAÇÕES E MOMENTO ANGULAR (ORBITAL E DE SPIN)



$-d\phi\,\hat{u}\times\vec{q} = -d\vec{\phi}\times\vec{q} \rightarrow$ EQUIVALENTE A TER GIRADO OS EIXOS DE COORDENADAS $\vec{r}$ DE $+d\phi$ NO SENTIDO HORÁRIO

$$\vec{q}\,' = \vec{q} \pm d\vec{\phi}\times\vec{q} + O(d\phi)^2$$

OU SEJA



$d\phi\,\vec{u}\times\vec{q}$

$$q_i' = q_i \pm \sum_{jk} \epsilon_{ijk}\, d\phi_j\, q_k + O(d\phi)^2$$

OU
$$\begin{pmatrix} \rho'_x \\ \rho'_y \\ \rho'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d\phi_z & -d\phi_y \\ -d\phi_z & 1 & d\phi_x \\ d\phi_y & -d\phi_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{pmatrix} + O(d\phi)^2$$

DEFININDO $\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{\rho}\,' = R_{d\vec{\phi}}\, \vec{\rho} = (\mathbb{1} + d\vec{\phi}\cdot\vec{\mathcal{M}})\,\vec{\rho} + O(d\phi)^2$$

QUEM É O OPERADOR REPRESENTANTE?

$$\left(O_{R_{d\vec{\phi}}}\psi\right)(\vec{r}_1,\ldots\vec{r}_N) = \psi\left(R^{-1}_{d\phi}\vec{r}_1, \ldots, R^{-1}_{d\vec{\phi}}\vec{r}_N\right)$$

$$= \psi\left(\vec{r}_1 + d\vec{\phi}\times\vec{r}_1, \ldots, r_N + d\vec{\phi}\times\vec{r}_N\right)$$

$$= \psi\Big(r_{i\alpha} + \sum_{jk}\epsilon_{ijk}\, d\phi_j\, r_{k\alpha}, \ldots\Big)$$

$\alpha = 1, \ldots, N$

$$= \psi(r_{i\alpha}\ldots) + \sum_{i\alpha}\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\, d\phi_j\, r_{k\alpha}\frac{\partial}{\partial r_{i\alpha}}\psi(\ldots) + O(d\phi)^2$$

$$= \Big(1 + \sum_j d\phi_j \sum_\alpha \underbrace{\sum_{ki}\epsilon_{jki}\, r_{k\alpha}\frac{\partial}{\partial r_{i\alpha}}}_{(\vec{r}_\alpha\times\nabla_{\vec{r}_\alpha})_j}\Big)\psi + \ldots$$

$$= \Big(1 + d\vec{\phi}\cdot\sum_\alpha \vec{r}_\alpha\times\nabla_\alpha\Big)\psi$$

$$\Rightarrow O_{R_{d\vec{\phi}}} = 1 + \frac{i}{\hbar}\, d\vec{\phi}\cdot\sum_\alpha \vec{r}_\alpha\times\vec{P}_\alpha = 1 + \frac{i}{\hbar}\, d\vec{\phi}\cdot\vec{L}$$

$\vec{L}$ ↳ MOMENTO ANGULAR TOTAL

$$\Rightarrow \boxed{O_{R_{\vec{\phi}}} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}} = e^{\frac{i}{\hbar}\phi L_{\hat{u}}}}$$

MOMENTO ANGULAR É O GERADOR ~~DAS~~ DO GRUPO DE ROTAÇÕES

O GRUPO É NÃO COMUTATIVO (NÃO-ABELIANO)

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k$$

- ~~INVAR~~ SISTEMA INVARIANTE TRANSLACIONAL $\Rightarrow [H, R_{\vec{\phi}}] = 0$

$$\Rightarrow [H, \vec{L}] = 0 \Rightarrow [H, L^2] = 0 \Rightarrow$$ MOMENTO ANGULAR É CONSERVADO

COMO $[L^2, L_{x,y,z}] = 0 \Rightarrow$ ESCOLHE-SE OS AUTO-ESTADOS

COMO $|E, L, M\rangle$:

$$H|ELM\rangle = E|ELM\rangle$$
$$L^2|ELM\rangle = L(L+1)\hbar^2|ELM\rangle$$
$$L_z|ELM\rangle = \hbar M|ELM\rangle$$

NRS. QUÂNTICOS CORRESPONDENTES

DEGENERESCÊNCIAS

COMO $[H, L_\pm] = 0$

$$\Rightarrow H L_\pm |ELM\rangle = E L_\pm |ELM\rangle = E|EL\,M\pm1\rangle$$

$\Rightarrow$ E NÃO DEPENDE DE M $\Rightarrow$ $(2L+1)$ DEGENERADO

* SIMETRIA AXIAL : $[H, L_{\hat{u}}] = 0$ ENQUANTO $[H, L_{\hat{u}}^\pm] \neq 0 \Rightarrow$ E DEPENDE DE L_u PORQUE $[H, L_{\hat{u}}^\pm] \neq 0$

→ SPIN

MOMENTO ANGULAR TOTAL $\equiv \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

$$= \vec{L} \otimes \mathbb{1}_S + \mathbb{1}_L \otimes \vec{S}$$

$$E \quad [\vec{L}, \vec{S}] = 0$$

GENERALIZAÇÃO : $|\psi'\rangle = O_{R_{\vec{\phi}}} |\psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{J}} |\psi\rangle$

$$\langle \vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N, s_1 \ldots s_N | \psi\rangle = \psi(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N, s_1 \ldots s_N)$$

P/ QUE A GENERALIZAÇÃO SEJA OK,

$\vec{J}$ DEVE TER PROPRIEDADES DE MOMENTO ANGULAR

$\Rightarrow \vec{S}$ DEVE SATISFAZER RELAÇÕES DO TIPO

$$[S_i, S_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} S_k$$

O QUE IMPLICA EM $[J_i, J_j] = i\hbar \sum \epsilon_{ijk} J_k$

$\Rightarrow$ INVARIÂNCIA ROTACIONAL $\rightarrow$ $[H, \vec{J}] = 0$

EX: PARTÍCULA DE SPIN-1/2: $\langle \vec{r}, s | \psi \rangle = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}$

$$O_{R\vec{\phi}} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot(\vec{L}+\vec{S})} = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{S}}$$

, P/ SPIN-$\frac{1}{2}$, $\vec{S} = \underbrace{\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}}_{\text{PAULI MATRICES}}$

$$= e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\phi}\cdot\vec{L}}\, e^{\frac{i}{2}\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}}$$

SENDO $\vec{\phi} = \phi\hat{u}$ $\Rightarrow$ $e^{\frac{i\phi}{2}\cdot\vec{\sigma}} = \mathbb{1}\cos\frac{\phi}{2} + i\hat{u}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\phi}{2}$

$$\Rightarrow O_{R\vec{\phi}} = \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}\phi\,\hat{u}\cdot\vec{L}}}_{\text{AGE EM }\vec{r}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} + i u_z \sin\phi/2 & i(u_x - i u_y)\sin\phi/2 \\ i(u_x + i u_y)\sin\phi/2 & \cos\frac{\phi}{2} - i u_z\sin\phi/2 \end{pmatrix}}_{\text{AGE NO SPINOR} = \mathbb{M}}$$

$$\Rightarrow \psi'(\vec{r}, s) = \mathbb{M} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\phi L_u}\, \psi_+(\vec{r}) \\ e^{\frac{i}{\hbar}\phi L_u}\, \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

PARA $\phi = 2\pi$ $\Rightarrow$ $\mathbb{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (INDEPENDE DO EIXO)

COMO OS AUTOVALORES DE $\frac{L_u}{\hbar}$ SÃO INTEIROS $\Rightarrow$ $e^{i\frac{2\pi}{\hbar}L_u} = 1$

$$\Rightarrow \psi'(\vec{r}, s) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_+ \\ -\psi_- \end{pmatrix} = -\psi(\vec{r}, s)$$

$\Rightarrow$ GIRAR UMA PARTÍCULA DE SPIN-1/2 EM TORNO DE UM EIXO ACARRETA EM UMA FASE (-1)

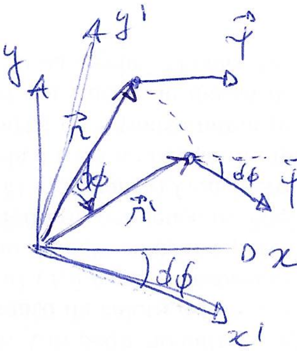
SPINS (RECORD)

$$[\psi](\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N) \equiv \begin{pmatrix} \psi_s(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N) \\ \vdots \\ \psi_{-s}(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N) \end{pmatrix} \quad \text{SPINOR}$$

~~HOW ARE~~ QUAIS SÃO OS EFEITOS DE UMA ROTAÇÃO EM $\vec{\psi}$?

EX: CONSIDERE UM "CAMPO" $\vec{\psi}$ EM 2D

$$\begin{cases} \psi'_{x'}(x',y') = \psi_x(x,y) \\ \psi'_{y'}(x',y') = \psi_y(x,y) \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \psi'_x(x,y) = \psi_x(x + d\phi\, y,\; y - d\phi\, x) \overset{\oplus}{-} \psi_y(x+d\phi\, y,\; y - d\phi\, x)\, d\phi \\ \psi'_y(x,y) = \ominus\psi_x(x + d\phi\, y,\; y - d\phi\, x)\, d\phi + \psi_y(x + d\phi\, y,\; y - d\phi\, x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ A ROTAÇÃO (1) GIRA O VETOR $\vec{r}$

(2) MISTURA AS COMPONENTES DE $\vec{\psi}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \psi'_x \\ \psi'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_x(x,y) + d\phi\, y \frac{\partial}{\partial x}\psi_x - d\phi\, x \frac{\partial}{\partial y}\psi_x \overset{\oplus}{-} d\phi\, \psi_y(x,y) + O(d\phi^2) \\ \psi_y(x,y) + d\phi\, y \frac{\partial}{\partial x}\psi_y - d\phi\, x \frac{\partial}{\partial y}\psi_y \overset{\ominus}{+} d\phi\, \psi_x(x,y) + O(d\phi)^2 \end{pmatrix}$$

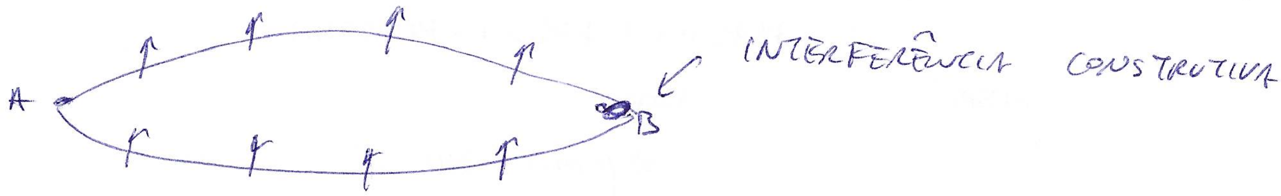
$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{d\phi\, i}{\hbar} \begin{pmatrix} y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) & 0 \\ 0 & y\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{pmatrix} + \frac{i}{\hbar} d\phi \begin{pmatrix} 0 & \overset{\oplus}{-}i\hbar \\ \overset{\ominus}{+}i\hbar & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix}$$

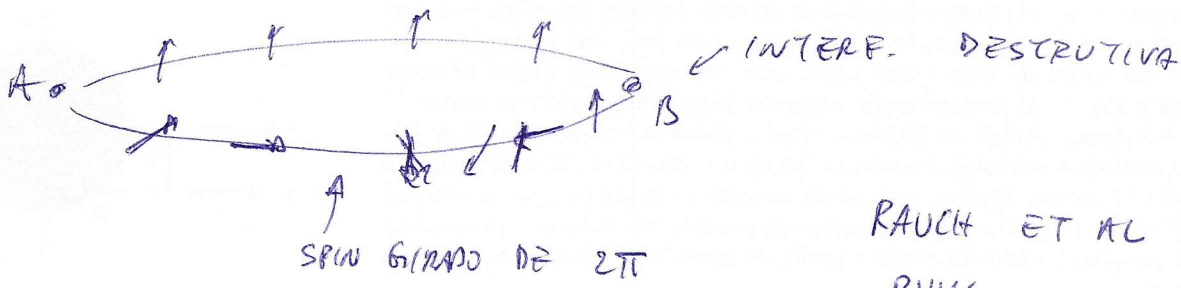
$$= \left[\mathbb{1} + d\phi \frac{i}{\hbar} \left(L_z + S_z \right) \right] \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix}$$

NESSE CASO $S_z = \pm\hbar$

(QDO CONSIDERMOS A EQ. DIRAC, O SPIN APARECE NATURALMENTE COM AUTOVALORES $\pm\frac{1}{2}\hbar$)

ESSA FASE PODE SER MEDIDA EXPERIMENTALMENTE





RAUCH ET AL
PHYS. LETT 54A, 425 (1975)

WERNER ET. AL, PRL 35, 1053 (1975)

- DEGENERESCÊNCIAS ACIDENTAIS
(VER ~~SHAKAR~~ SHANKAR, CAP 15)

O ÁTOMO DE H TEM DEG. MAIOR QUE $2l+1$

DE ONDE VEM ESSAS DEG. EXTRAS?
SÃO ACIDENTAIS?

VETOR DE RUNGE-LENZ

$$\vec{N} = \frac{1}{2m}\left(\vec{P}\times\vec{L} - \vec{L}\times\vec{P}\right) - \frac{e^2\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

EM MEC. CLÁSSICA, $\vec{N} = \frac{\vec{P}\times\vec{L}}{m} - \frac{e^2\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R}$

QUE SIGNIFICA QUE NÃO SÓ A ÓRBITA
ESTÁ CONFINADA NO PLANO PERPENDICULAR A $\vec{L}$
MAS TAMBÉM É FECHADA

$\vec{N}$ É CTE. DO MOVIMENTO P/ ~~PROBLEMAS~~ POTENCIAIS $\propto \frac{1}{r}$

EM MEC. QUÂNTICA

$$\left[\vec{N}, H\right] = 0$$

$\Rightarrow$ $\vec{N}$ É GERADOR DE UMA TRANSF. DE SIMETRIA ADICIONAL A SIMETRIA DE ROTAÇÃO

REGRA DE SIMETRIZAÇÃO $\rightarrow$ $\vec{P}\times\vec{L} \rightarrow \frac{1}{2}\left[\left(\vec{P}\times\vec{L}\right) + \left(\vec{P}\times\vec{L}\right)^{+}\right] = \frac{1}{2}\left[\vec{P}\times\vec{L} - \vec{L}\times\vec{P}\right]$

SENDO $N_1^{\pm 1} = \mp \dfrac{N_x \pm i N_y}{\sqrt{2}}$, $N_1^0 = N_z$

TEMOS QUE $N_1^{\pm 1} |n, l, l\rangle = \text{CONST} \; |n, l\pm 1, l\pm 1\rangle$

USANDO QUE $\left[H, N_1^{\pm 1}\right] = 0 \Rightarrow H|n l l\rangle = E_n |n l l\rangle$

COM E_n NÃO DEPENDENTE DE l

$\Rightarrow$ A DEGENERESCÊNCIA É MAIOR QUE $2l+1$

P/ O OSCILADOR HARMÔNICO

TENSOR Q_2 É CONSERVADO

$$Q_2^2 = \frac{1}{2}\left[a_x^+ a_x - a_y^+ a_y + i\left(a_x^+ a_y + a_y^+ a_x\right)\right]$$

$$Q_2^2 |n l l\rangle = \text{CONST} \; |n, l+2, l+2\rangle$$

TRANSLAÇÃO TEMPORAL

JÁ TEMOS O OPERADOR TRANSLAÇÃO TEMPORAL

$$i\hbar \frac{dU(t,t_0)}{dt} = H(t)\,U(t,t_0) \qquad \text{ou} \qquad U(t,t_0) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, H(t')\,U(t',t_0)$$

EXISTE A IDENTIDADE $\quad U(t_0,t_0) = \mathbb{1}$

" " INVERSA $\quad U^{-1}(t,t_0) = U^{+}(t,t_0)$

" O PRODUTO $\quad U(t,t_0) = U(t,t_1)\,U(t_1,t_0)$

PROVA DO PRODUTO:

$$U(t,t_0) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_1}^{t} dt'\, H(t')U(t',t_0) + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt'\, H(t')U(t',t_0)$$

$U(t_1,t_0)$

MAS $\quad U(t,t_1) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_1}^{t} dt'\, H(t')U(t',t_1)$

$$\Rightarrow U(t,t_1)\,U(t_1,t_0) = \left(\mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_1}^{t} dt'\, H(t')U(t',t_1)\right) U(t_1,t_0)$$

$$= U(t_1,t_0) + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_1}^{t} dt'\, H(t')\,U(t',t_1)\,U(t_1,t_0)$$

$\Rightarrow U(t,t_1)\,U(t_1,t_0)$ E $U(t,t_0)$ OBEDECEM ÀS MESMAS EQS. COM MESMAS COND. INICIAIS

AS OUTRAS PROPRIEDADES SEGUEM DIRETAMENTE

LOGO, $\quad |\psi(t)\rangle = |\psi'\rangle = U(t,t_0)\,|\psi_0\rangle$

O QUE QUER DIZER INVARIANCIA POR TRANSLAÇÃO TEMPORAL?

$$U(t,t_0) = U(t_0+\Delta t, t_0) = U(\Delta t, 0) = U(\Delta t, t_0)$$

OU SEJA, $U(t,t_0)$ NÃO DEPENDE DE t_0, SÓ DE $t-t_0$

TRANSLAÇÃO INFINITESIMAL: $\quad U(t_0+\delta t, t_0) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar}\,\delta t\, H(t_0) + O(\delta t)^2$

P/ QUALQUER t_0 $\Rightarrow$ $\quad = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar}\,\delta t\, H(0)$

OPERADOR <u>TRANSLAÇÃO TEMPORAL</u>

OU <u>EVOLUÇÃO TEMPORAL</u>

EQ. SCHRÖDINGER : $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle$

$$\Rightarrow \frac{\psi(t+dt) - \psi(t)}{dt} = \frac{H}{i\hbar}\psi(t)$$

$$\Rightarrow \psi(t+dt) = \left(\mathbb{1} + \frac{H}{i\hbar}dt\right)\psi(t)$$

OPERAÇÃO ESPACIAL $t' = t - dt$ (ANÁLOGO A $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$)

OPERADOR EVOLUÇÃO TEMPORAL INFINITESIMAL

$$U(t+dt,t) \mapsto \psi'(t') = \psi(t)$$

$$\psi'(t) = \psi(t+dt) = U(t+dt,t)\psi(t)$$

$$\Rightarrow U(t+dt,t) = \mathbb{1} + \frac{H}{i\hbar}dt$$

$$\Rightarrow U(t_0+t, t_0) = \lim_{N\to\infty}\left(\mathbb{1} + \frac{H}{i\hbar}\left(\frac{t-t_0}{N}\right)\right)^N = e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)}$$

OU SEJA, H NÃO DEPENDE EXPLICITAMENTE DO TEMPO $\Rightarrow$ CONSTANTE DO MOVIMENTO

NESSE CASO, $\frac{d}{dt} U(t,t_0) = \frac{1}{i\hbar} H\, U(t,t_0)$

$$\Rightarrow \int \frac{dU}{U} = \frac{H}{i\hbar}\int dt \Rightarrow \boxed{U = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}}$$

INVERSÃO TEMPORAL

EM MEC. CLÁSSICA ISSO QUER DIZER QUE $\begin{cases} t \to -t \\ \vec{v}_i \to -\vec{v}_i \end{cases}$

$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ OU $\begin{cases} \vec{F}_i = m\frac{d\vec{v}_i}{dt} \\ \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \end{cases}$

$$\boxed{r(0) \longrightarrow r(T) \xrightarrow[\vec{p}\to-\vec{p}]{\text{TIME REVERSAL}} \vec{r}(2T) = \vec{r}(0) \quad \vec{p}(2T) = p(0)}$$

COMO É O ANÁLOGO DISSO EM MEC. QUÂNTICA?

$$j_k(q,t) = \mathrm{Re}\left(\langle\varphi(t)|q\rangle\langle q|\frac{p_k}{m_k}|\varphi(t)\rangle\right) \equiv \text{CORRENTE DE PROBABILIDADE}$$

$$[q_j, p_k] = i\hbar\, \mathbb{1}\, \delta_{j,k}$$

TEMPO DE REF. P/ INVERSÃO

$$|\varphi(t)\rangle \xrightarrow[\text{TEMPORAL}]{\text{INVERSÃO}} |\varphi'(t)\rangle = K|\varphi(t_0-t)\rangle$$

↳ INVERSÃO TEMPORAL

↓

FATOR QUE DEVE INVERTER AS CORRENTES DE PROBABILIDADE

COMO K DEVE PRESERVAR A NORMA

$$|\langle q|K|\varphi\rangle|^2 = |\langle q|\varphi\rangle|^2 \Rightarrow K = e^{i\xi_q} \equiv \text{FASE}$$

$$\langle q|K|\varphi\rangle = e^{i\xi_q}\langle q|\varphi\rangle$$

OU SEJA $K|q\rangle = e^{-i\xi_q}|q\rangle$

QUEREMOS QUE

$$\Rightarrow K^+ q_j K = q_j \quad \text{E} \quad K^+ p_k K = -p_k$$

INVERSÃO TEMPORAL EM MEC. CLÁSSICA

DEFINIÇÃO DE TEMPO INVERTIDO
- NO INSTANTE $t = T$

MANTÉM-SE AS COORDENADAS $\vec{r}_R(T) = \vec{r}(T)$

INVERTE-SE OS MOMENTOS $\vec{p}_R(T) = -\vec{p}(T)$

$\Rightarrow$ P/ UM SISTEMA INVARIANTE POR INVERSÃO TEMPORAL

TEMOS QUE $\begin{cases} \vec{r}(2T) = \vec{r}(0) \\ \vec{p}(2T) = -\vec{p}(0) \end{cases}$

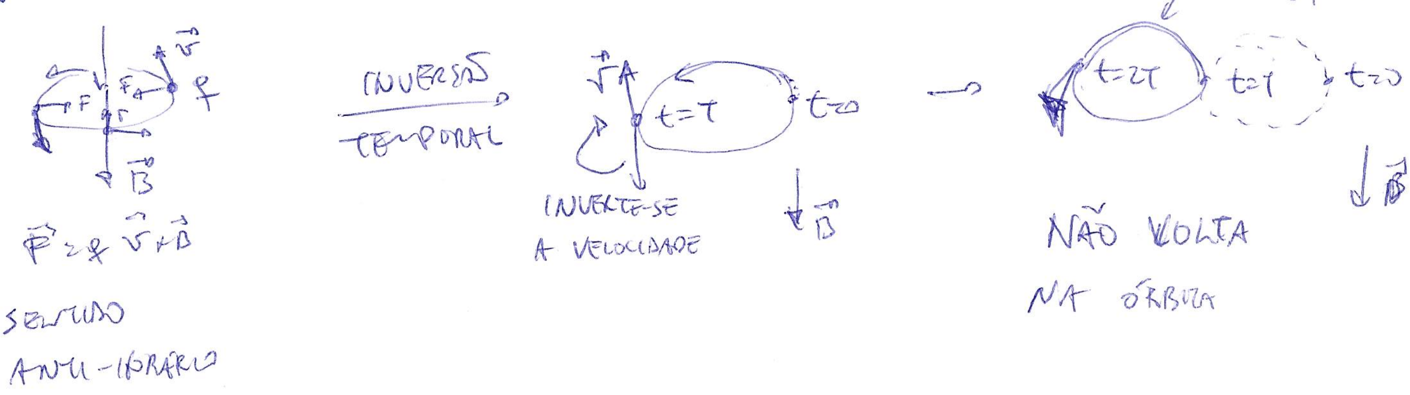
$$\vec{v}_R = \frac{d}{dt}\vec{r}(-t) = -\frac{d}{d(-t)}\vec{r}(-t) = -\vec{v}(-t)$$

2ª LEI DE NEWTON

$$\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_R(t) = \vec{F}(r_R)} \quad \text{OK!}$$

$$= m\frac{d^2}{dt}\vec{r}(-t) = m\frac{d^2}{d(-t)^2}\vec{r}(-t) = \vec{F}(r(-t)) = \vec{F}(\vec{r}_R)$$

NEM TODOS OS PROBLEMAS SÃO INVARIANTES POR INV. TEMPORAL



ESCOLHA MAIS SIMPLES

K ≡ OPERADOR DE CONJUGAÇÃO COMPLEXA : $K = K^+$

$$\Rightarrow K^+ q_j K = K q_j K \quad \text{E} \quad K \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_k} K = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_k}$$

OBS: NOTE QUE ~~ISSO~~ ~~DEPENDE~~ ESSA ESCOLHA DEPENDE DA REPRESENTAÇÃO ADOTADA P/ OPERADORES E VETORES DE ESTADO

• MOMENTO ANGULAR E SPIN

$$\vec{L}' = K^+ \vec{L} K = K^+\left(\sum \vec{r}_k \times \vec{p}_k\right) K = \sum_k \vec{r}_k \times (-\vec{p}_k) = -\vec{L}$$

ANALOGAMENTE $\quad \vec{S}' = K\left(\sum_j \vec{S}_j\right)K = \sum_j -\vec{S}_j = -\vec{S}$

P/ QUE A TRANSF. DO MOMENTO ANGULAR TOTAL $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ SEJA IGUAL A DE $\vec{L}$

TECNICAMENTE, USA-SE $K = K_0 T$

$$\Rightarrow (K_0 T)^+ \left(\sum_j \vec{\sigma}_j\right) K_0 T = K_0 T^+ \left(\sum_j \vec{\sigma}_j\right) T K_0 = K_0 \left(\sum_j -\vec{\sigma}_j\right) K_0$$

P/ AS MATRIZES DE PAULI $\begin{cases} \sigma_1 \text{ E } \sigma_3 \text{ SÃO REAIS} \\ \sigma_2 \text{ É IMAGINÁRIA PURA} \end{cases}$

COMO $\begin{cases} K_0 \sigma_{1,3} K_0 = \sigma_{1,3} \\ K_0 \sigma_2 K_0 = -\sigma_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T^+ \sigma_{1,3} T = -\sigma_{1,3} \\ T^+ \sigma_2 T = \sigma_2 \end{cases}$ → ROTAÇÃO DE π EM TORNO DE $\hat{y}$

$$\Rightarrow T = e^{\frac{i}{\hbar}\pi S_y} = e^{i\frac{\pi}{2}\sum_j \sigma_j^y} = \prod_j e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_j^y}$$

$$\boxed{T = \prod_j i\sigma_j^y}$$

INVARIÂNCIA POR REVERSÃO TEMPORAL

$$H|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow \quad K H K^{+} |\psi'(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi'(t)\rangle$$

* NOTE QUE $K\left(i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle\right) = -i\hbar \frac{d}{-dt}|\psi(t_0-t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}|\psi'(t)\rangle$

$\Rightarrow$ O SISTEMA É INVARIANTE QDO $\boxed{KHK^{+} = H \Rightarrow [H,K]=0}$ H É REAL !!!

PORQUE $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ SÃO SOLUÇÕES DA MESMA EQUAÇÃO COM AS MESMAS COND. INICIAIS $|\psi'(0)\rangle = K|\psi(t_0)\rangle$

QDO HÁ CAMPOS MAGNÉTICOS $\vec{P}$ ENTRA LINEAR EM H

EX: CONSIDERE $\frac{\partial H}{\partial t}=0 \Rightarrow P_{a\to b}(t) = \left|\langle\psi_a| e^{\frac{-iHt}{\hbar}}|\psi_b\rangle\right|^2$

MAS $\langle\psi_a|e^{\frac{-iHt}{\hbar}}|\psi_b\rangle = \langle\psi_a|K^{+}e^{\frac{iHt}{\hbar}}K|\psi_b\rangle = \langle\psi_a'|e^{\frac{iHt}{\hbar}}|\psi_b'\rangle$

LOGO, $\boxed{P_{a\to b}(t) = P_{b'\to a'}(t)}$ NOTE QUE O PAPEL DOS ESTADOS FINAL E INICIAL SE INVERTEM

PRINCÍPIO DA MICROREVERSIBILIDADE

DEGENERESCÊNCIAS

CONSIDERE UM SISTEMA DE N SPINS-1/2

- SE N É PAR $\Rightarrow S_{TOT}$ É INTEIRO $\Rightarrow T = \prod_{j=1}^{N} i\sigma_j^y$

AUTOVALORES DE $\sigma^y = \pm 1 \Rightarrow \boxed{T = \pm 1} \Rightarrow K = K_0 T$

$\Rightarrow$ AUTOVALORES DE $K = \pm 1$

$\Rightarrow$ CASO HAJA SIMETRIA POR INVERSÃO TEMPORAL

$$H|\phi_{E,k}\rangle = E|\phi_{E,k}\rangle$$

$$K|\phi_{E,k}\rangle = k|\phi_{E,k}\rangle, \quad k=\pm 1$$

PARA $K = \pm 1$ → AUTOVETORES TEMPORALMENTE PARES / ÍMPARES

OU REAIS (IMAGINÁRIOS)

COMO $|\phi_{E,-1}\rangle$ É ÍMPAR ⇒ $i\,|\phi_{E,-1}\rangle$ É PAR

⇒ TODOS AUTOVETORES DE UM HAMILTONIANO INVARIANTE SOB INVERSÃO TEMPORAL PODEM SER ESCOLHIDOS DE FORMA A SEREM TEMPORALMENTE PARES (REAIS)

• SE N É ÍMPAR ⇒ $T = \pm i$ ⇒ $\boxed{K^2 = -1}$

$$\Rightarrow K^{\dagger} = (-K^2)\,K^{\dagger} = -K$$

LOGO $\langle \varphi | K | \varphi \rangle = \langle \varphi | K^{\dagger} | \varphi \rangle = -\langle \varphi | K | \varphi \rangle$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \varphi | K | \varphi \rangle = 0}$$

⇒ $K|\varphi\rangle$ É ORTOGONAL A $|\varphi\rangle$

⇒ DADO $H|\phi_E\rangle = E|\phi_E\rangle$

TEMOS QUE $HK|\phi_E\rangle = KH|\phi_E\rangle = E\,K|\phi_E\rangle$

⇒ $|\phi_E\rangle$ E $K|\phi_E\rangle$ SÃO ORTOGONAIS E ~~COM~~ MESMA ENERGIA

⇒ OS ESTADOS DO SISTEMAS SÃO PELO MENOR DUPLAMENTE DEGENERADOS

(DEGENERESCÊNCIA DE KRAMERS)

PARIDADE

FUNÇÕES DE ONDA

(18)

$$\begin{cases} \vec{r} \longrightarrow -\vec{r} \\ \vec{p} \longrightarrow -\vec{p} \end{cases}$$

MEC $\longrightarrow$ QUÂNTICA

$$\mathcal{P}|x\rangle = |-x\rangle$$

$$\mathcal{P}|\vec{p}\rangle = |-p\rangle$$

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$$

$$\langle x|\mathcal{P}|\psi\rangle = \psi(-x)$$

$$\begin{cases} \mathcal{P}^2 = 1 \\ \mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P} \\ \mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger \end{cases} \Rightarrow \mathcal{P} \text{ É HERMITEANO E UNITÁRIO}$$

AUTO-VALORES

± 1

$\downarrow$

PARIDADE DAS AUTO FUNÇÕES

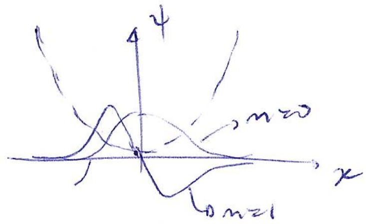
OPERADORES :
$$\begin{cases} \mathcal{P}^\dagger \vec{R} \mathcal{P} = -\vec{R} \\ \mathcal{P}^\dagger \vec{P} \mathcal{P} = -\vec{P} \end{cases}$$

INVARIÂNCIA POR PARIDADE

$$H(\vec{R},\vec{P}) = \mathcal{P}^\dagger H(\vec{R},\vec{P})\mathcal{P} = H(-\vec{R},-\vec{P}) \rightarrow [\mathcal{P},H] = 0$$

EX: OSCILADOR HARMÔNICO $H(\vec{R},\vec{P}) = H(-\vec{R},-\vec{P}) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2R^2$

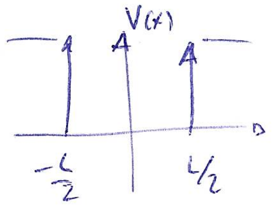
FUNÇÕES DE ONDA



$\rightarrow$ PARIDADE BEM DEFINIDA $(-1)^n$

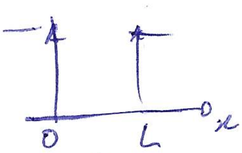
$n=0,1,2\ldots$

EX: CAIXA



$\Rightarrow$ FUNÇÕES DE ONDA COM PARIDADE BEM DEFINIDA $(-1)^{n+1}$, $n=1,2,\ldots$

EX: CAIXA



$\Rightarrow \psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \rightarrow$ SEM PARIDADE DEFINIDA

$\hookrightarrow V(x) \neq V(-x) \Rightarrow [H,\mathcal{P}] \neq 0$

INVARIANCIA POR PARIDADE $\Rightarrow \mathcal{P}\, U(t) = U(t)\, \mathcal{P}$

A: $U(t)\,|\psi(0)\rangle \Rightarrow |\psi_A(t)\rangle$

B: $U(t)\,\mathcal{P}\,|\psi(0)\rangle \Leftarrow |\psi_B(t)\rangle$

$\Big\} \to |\psi_A(t)\rangle$ e $|\psi_B(t)\rangle$ ESTÃO RELACIONADOS ENTRE SI VIA UMA TRANSF. DE PARIDADE (UM É ESPELHO DO OUTRO)

VIOLAÇÃO DE PARIDADE (FORÇA FRACA)

DECAIMENTO $-\beta$: $^{60}Co \to {}^{60}Ni + \underset{\text{ELÉTRON}}{e^-} + \underset{\text{ANTI-NEUTRINO}}{\bar{\nu}} + 2\gamma$

A: $^{60}Co \uparrow J=1 \to {}^{60}Ni + e^- \uparrow s=\frac{1}{2}\ (\downarrow \vec{v}) + \bar{\nu} \uparrow s=\frac{1}{2}\ (\uparrow \vec{v}) + 2\gamma$

B: $^{60}Co \downarrow J=-1 \to {}^{60}Ni + e^- \downarrow s=-\frac{1}{2}\ (\downarrow \vec{v}) + \bar{\nu} \downarrow s=-\frac{1}{2}\ (\uparrow \vec{v}) + 2\gamma$

PROCESSOS A E B SÃO IGUALMENTE PROVÁVEIS

ENTRETANTO, VERIFICA-SE QUE QUASE SEMPRE O e^- É EJETADO COM SPIN NA DIREÇÃO OPOSTA AO MOVIMENTO $\Rightarrow$ PROCESSO B QUASE NUNCA OCORRE

*ISTO ~~ESTÁ~~ FOI RELACIONADO AO FATO DE QUE O NEUTRINO É LEFT-HANDED $\Rightarrow$ ANTI-NEUTRINO É RIGHT-HANDED

HÁ UMA QUEBRA DE PARIDADE NAS INTERAÇÕES FRACAS

OBS: NEUTRINOS SÃO MASSIVOS!