BRAS E KETS

A TODA FUNÇÃO DE ONDA $\psi(\vec{r})$ ASSOCIAMOS UM VETOR $|\psi\rangle$

$$\psi(\vec{r}) \in \mathcal{F} \longleftrightarrow |\psi\rangle \in \mathcal{E}$$

$\mathcal{F}$: ESPAÇO DE FUNÇÕES (+DISTRIBUIÇÕES) EX: DELTA DE DIRAC

$\mathcal{E}$: ESPAÇO DE ESTADOS FÍSICOS

QUEREMOS OPERAR COM OS VETORES $\{|\psi\rangle\}$ DE $\mathcal{E}$ DA MESMA MANEIRA QUE OPERAMOS COM $\psi(\vec{r}) \in \mathcal{F}$ $\Rightarrow$ ESSES ~~ESTADOS~~ ESPAÇOS $\mathcal{F}$ E $\mathcal{E}$ ESTÃO RELACIONADOS

EM MATEMÁTICA, $\mathcal{F}$ É ~~O~~ UM ESPAÇO DE HILBERT.* O ESPAÇO DE ESTADOS $\mathcal{E}$ TAMBÉM É UM ESPAÇO DE HILBERT. MAS NÃO VAMOS NOS APROFUNDAR NOS DETALHES MATEMÁTICOS FORMAIS. O PONTO IMPORTANTE PARA NÓS É SABER QUE ESSES ESPAÇOS SÃO DOTADOS DE UM <u>PRODUTO INTERNO</u>

* TOMAR O DEVIDO CUIDADO COM A DELTA DE DIRAC

PRODUTO ESCALAR (INTERNO):

$$(\,|\varphi\rangle, |\psi\rangle\,) \equiv (\varphi, \psi) \equiv \int d\vec{r}\; \varphi^*(\vec{r})\,\psi(\vec{r})$$

$$\equiv \langle \varphi | \psi \rangle$$

BRA KET

AS PROPRIEDADES DO PRODUTO INTERNO DE ESPAÇO VETORIAIS FINITOS TAMBÉM VALEM AQUI

$$(\,|\varphi\rangle, a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle\,) = a\,(|\varphi\rangle, |\psi_1\rangle) + b\,(|\varphi\rangle, |\psi_2\rangle)$$

$$(\,a|\varphi_1\rangle + b|\varphi_2\rangle, |\psi\rangle\,) = a^* \langle \varphi_1 | \psi \rangle + b^* \langle \varphi_2 | \psi \rangle$$

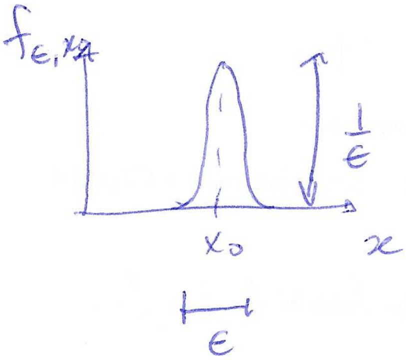
OS "BRAS" $\{\langle \varphi |\}$ NÃO PERTENCEM À $\mathcal{E}$, MAS AO ESPAÇO DUAL $\mathcal{E}^*$

QUE É O ESPAÇO DAS APLICAÇÕES LINEARES SOBRE $\mathcal{E}$. (LEMBRE-SE QUE O PRODUTO INTERNO É UMA APLICAÇÃO LINEAR.)

OUTRAS APLICAÇÕES LINEARES

$$\chi \in \mathcal{E}^* \quad \text{SE} \quad \chi\,[\,|\psi\rangle\,] = \text{NR. COMPLEXO}$$

EX:



3

$$f_{\epsilon,x_0}(x) \longleftrightarrow |f_{\epsilon,x_0}\rangle$$

$\downarrow$ ESPAÇO $\mathcal{F}$ $\qquad$ $\downarrow$ ESPAÇO $\mathcal{E}$

BRA ASSOCIADO $= \langle f_{\epsilon,x_0}|$

$$\Rightarrow \langle f_{\epsilon,x_0}|\psi\rangle = \int dx \left(f_{\epsilon,x_0}(x)\right)^* \psi(x)$$

$$\underset{\epsilon\to 0}{=} \int dx \; \delta^*(x-x_0)\; \psi(x) = \psi(x_0)$$

(LEMBRE-SE QUE $\delta^*(x-x_0) = \delta(x-x_0)$)

QTO VALE $\langle f_{\epsilon,x_0}|f_{\epsilon,x_0'}\rangle$?

$$\underset{\epsilon\to 0}{=} \int dx \; \delta^*(x-x_0)\,\delta(x-x_0') = \delta(x_0-x_0') \to \text{NÃO É FUNÇÃO}$$

$\notin$ ~~[illegible]~~ ESPAÇO DE HILBERT DAS FUNÇÕES USUAIS.

MESMO ASSIM, ~~NESSE~~ ~~NESTA~~ NÓS CONSEGUIMOS TRABALHAR ~~NESSE~~ COM ESTE ESPAÇO.

OPERADORES LINEARES EM $\mathcal{E}$

A É OPERADOR LINEAR SE

$$A|\psi\rangle = |\psi'\rangle$$

$$A\big(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle\big) = a\big(A|\psi_1\rangle\big) + b\big(A|\psi_2\rangle\big)$$
$$= a\,A|\psi_1\rangle + b\,A|\psi_2\rangle$$
$$= a|\psi_1'\rangle + b|\psi_2'\rangle$$

EX: NO $\mathbb{R}^2$

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

- $\langle v_2|v_1\rangle = \sum_i a_i b_i = (b_1 \;\; b_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

- $A = |v_1\rangle\langle v_2| = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}(b_1 \;\; b_2) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix}$

- $A|v_3\rangle = \big(|v_1\rangle\langle v_2|\big)|v_3\rangle = |v_1\rangle\langle v_2|v_3\rangle$

  $= \langle v_2|v_3\rangle\,|v_1\rangle$

- OPERADOR PROJETOR

$|v\rangle \equiv$ VERSOR $\Rightarrow \langle v | v \rangle = 1$

PROJETOR ASSOCIADO $P = |v\rangle\langle v|$

$$P|u\rangle = |v\rangle\langle v|u\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{v}\, \underbrace{u \cos\theta}_{\text{PROJEÇÃO EM } |v\rangle}\, |v\rangle$$

$$= u \cos\theta\, |v\rangle$$

$$P^2 = \big(|v\rangle\langle v|\big)\big(|v\rangle\langle v|\big) = |v\rangle\overbrace{\langle v|v\rangle}^{1}\langle v| = |v\rangle\langle v|$$

$= P$ OU SEJA $P^2 - P = 0$

$\Rightarrow$ AUTO-VALORES DE P SÃO 0 OU 1

- SEJAM $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_m\rangle\} \in \mathcal{E}$

TAIS QUE $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{i,j}$

$P \equiv \sum_{k=1}^{m} |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \equiv$ PROJETOR NO SUB-ESPAÇO GERADO POR $\{|\psi_1\rangle \dots |\psi_m\rangle\}$

OPERADORES ADJUNTOS

A LEVA $|\psi\rangle$ EM $|\psi'\rangle$

$\Rightarrow A^{+}$ LEVA $\langle\psi|$ EM $\langle\psi'|$

$$\langle\psi'|\varphi\rangle = \langle\varphi|\psi'\rangle^{*}$$

MAS $\langle\psi'|\varphi\rangle = \left(\langle\psi|A^{+}\right)|\varphi\rangle = \langle\psi|A^{+}|\varphi\rangle$

MAS $\langle\varphi|\psi'\rangle = \langle\varphi|\left(A|\psi\rangle\right) = \langle\varphi|A|\psi\rangle$

$$\Rightarrow \langle\psi|A^{+}|\varphi\rangle = \left(\langle\varphi|A|\psi\rangle\right)^{*}$$

EXERCÍCIOS

SEJA $\begin{cases} X|x_0\rangle = x_0|x_0\rangle \\ P|p_0\rangle = p_0|p_0\rangle \end{cases}$

ONDE $\begin{cases} |x_0\rangle \longleftrightarrow \delta(x-x_0) \\ |p_0\rangle \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{ip_0x/\hbar} \end{cases}$

CALCULE:

DICA: USE QUE $1 = \int dx\, |x\rangle\langle x| = \int dp\, |p\rangle\langle p|$

$\langle x|p\rangle = \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$

$\langle x|X|\psi\rangle = x\,\psi(x)$

$\langle x|P|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$

$\langle\phi|P|\psi\rangle = \int dx\, \phi^{*}(x)(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$

$\langle x|XP|\psi\rangle = -i\hbar\, x\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$

- SE $A = \lambda |u\rangle\langle v|$, QUEM É $A^\dagger$?

$$A|\psi\rangle = \lambda \langle v|\psi\rangle |u\rangle \Rightarrow \langle\phi|A|\psi\rangle = \lambda \langle v|\psi\rangle \langle\phi|u\rangle$$

COMO $\langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle = \left(\langle\phi|A|\psi\rangle\right)^*$

$$\Rightarrow \langle\psi|A^\dagger|\phi\rangle = \lambda^* \langle v|\psi\rangle^* \langle\phi|u\rangle^* = \lambda^* \langle\psi|v\rangle\langle u|\phi\rangle$$

$$= \langle\psi|\left(\lambda^* |v\rangle\langle u|\right)|\phi\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{A^\dagger = \lambda^* |v\rangle\langle u|}$$

- SE $C = AB$, QUEM É $C^\dagger$?

$$\langle\psi|C^\dagger|\phi\rangle = \left(\langle\phi|C|\psi\rangle\right)^* = \left(\langle\phi|A\underbrace{B|\psi\rangle}_{|\psi'\rangle}\right)^* = \left(\langle\phi|A|\psi'\rangle\right)^*$$

$$= \langle\psi'|A^\dagger|\phi\rangle$$

$$= \langle\psi|B^\dagger A^\dagger|\phi\rangle \Rightarrow \boxed{C^\dagger = B^\dagger A^\dagger}$$

- DEFINIÇÃO: A É HERMITEANO $\Leftrightarrow$ $A = A^\dagger$

ESPECTRO DE OPERADORES HERMITIANOS $(A = A^{+})$

TEOREMA 1: AUTO-VALORES SÃO REAIS $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

TEOREMA 2: SE $\begin{cases} A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \\ A|\phi\rangle = \gamma|\phi\rangle \end{cases} \Rightarrow$ SE $\lambda \neq \gamma \Rightarrow \langle\phi|\psi\rangle = 0$

AUTO-VETORES COM AUTO-VALORES DISTINTOS SÃO ORTOGONAIS ENTRE SI.

TEOREMA 3: TODO OPERADOR HERMITIANO PODE SER DIAGONALIZÁVEL, i.e., $\forall$ AUTO-VALOR $\exists$ AUTO-VETOR

TEOREMA 4: SE $[A, B] = AB - BA = 0$

$\Rightarrow$ a) SE $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ NÃO-DEGENERADO

$\Rightarrow B|\psi\rangle = \gamma|\psi\rangle$

b) SE $A|\psi_j\rangle = \lambda|\psi_j\rangle$, $j = 1, 2, \ldots, g$

(AUTOVETOR g-DEGENERADO)

$$\Rightarrow B|\psi_j\rangle = \sum_{k=1}^{g} c_{k,j}|\psi_k\rangle$$

TEOREMA 5: SE $[A, B] = 0$ E $A|\psi_1\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle$

$A|\psi_2\rangle = \lambda_2|\psi_2\rangle$

COM $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle\psi_1|A|\psi_2\rangle = 0 \\ \langle\psi_1|B|\psi_2\rangle = 0 \end{cases}$$

TEOREMA 6: SE $[A, B] = 0 \Rightarrow$ PODEMOS ESCOLHER UMA BASE CUJOS ESTADOS ~~SÃO~~ SÃO SIMULTANEAMENTE AUTO-ESTADOS DE A E B

PROVA TEO. 1: $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow \langle\psi|A|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\psi\rangle$

$\langle\psi|A^{\dagger}|\psi\rangle = (\langle\psi|A|\psi\rangle)^{*} = \lambda^{*}\langle\psi|\psi\rangle^{*} = \lambda^{*}\langle\psi|\psi\rangle$ (2)

COMO $A = A^{\dagger} \Rightarrow (\lambda - \lambda^{*})\langle\psi|\psi\rangle = 0$ COMO $\langle\psi|\psi\rangle \neq 0$

$\Rightarrow \lambda = \lambda^{*} \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

PROVA TEO. 2: $\langle\phi|A|\psi\rangle = \langle\phi|(A|\psi\rangle) = \lambda\langle\phi|\psi\rangle$

$\langle\phi|A|\psi\rangle \underset{A=A^{\dagger}}{=} (\langle\phi|A^{\dagger})|\psi\rangle = \gamma^{*}\langle\phi|\psi\rangle \underset{\text{TEO. 1}}{=} \gamma\langle\phi|\psi\rangle$

$\Rightarrow 0 = \underbrace{(\lambda - \gamma)}_{\neq 0 \text{ (HIPÓTESE)}}\langle\phi|\psi\rangle \Rightarrow \langle\phi|\psi\rangle = 0$

PROVA TEO. 3: NÃO É SIMPLES E NÃO FAREMOS AQUI. ELA PODE SER ENCONTRADA EM LIVROS DE ÁLGEBRA LINEAR. PROCURE PELO "SPECTRAL THEOREM"

ALÉM DISSO, ∃ UMA MATRIZ UNITÁRIA V TAL QUE $V^{\dagger}AV = D$ ONDE D É DIAGONAL. AS COLUNAS DA MATRIZ V SÃO OS AUTO-VETORES DE A. OS ELEMENTOS DA DIAGONAL DE D SÃO OS AUTO-VALORES DE A

PROVA TEO. 4: COMO $AB = BA \Rightarrow A(B|\psi\rangle) = B(A|\psi\rangle)$
$= \lambda(B|\psi\rangle)$

$\Rightarrow B|\psi\rangle$ É AUTO-VETOR DE A COM AUTO-VALOR λ

a) SE λ É NÃO-DEGENERADO $\Rightarrow B|\psi\rangle$ É PROPORCIONAL (COLINEAR) A $|\psi\rangle$ (TEO. 2)

$\Rightarrow B|\psi\rangle = \gamma|\psi\rangle$

b) SE λ É DEGENERADO $\Rightarrow B|\psi\rangle$ É, DE MANEIRA GERAL, UMA COMBINAÇÃO LINEAR DOS AUTO-ESTADOS DEGENERADOS CORRESPONDENTES

$\Rightarrow B|\psi_j\rangle = \sum_k c_{kj}|\psi_k\rangle$

PROVA TEO. 5:

PELO TEO. 2 $\Rightarrow \langle \psi_1 | A | \psi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \overset{\text{TEO. 2}}{=} 0$

$$\langle \psi_1 | B | \psi_2 \rangle \underset{\text{TEO. 4}}{=} \langle \psi_1 | \Big(\sum_{k=1}^{g} c_{k,2} | \psi_{k,2} \rangle \Big)$$

VETORES DO SUB-ESPAÇO DEGENERADO

$$= \sum_{k} c_{k,2} \underbrace{\langle \psi_1 | \psi_{k,2} \rangle}_{=0,\ \forall k\ (\text{TEO. 2})}$$

$$= 0$$

PROVA TEO. 6:

SEJA $|\psi_n^{(i)}\rangle$ A BASE ORTONORMAL DE A

n = NÍVEL, i.e., $A|\psi_n^{(i)}\rangle = \lambda_n |\psi_n^{(i)}\rangle$

i = CONTA A DEGENERESCÊNCIA, VAI DE 1 ATÉ g_n (DEGENERESCÊNCIA DO n-ÉSIMO NÍVEL)

EX: NESTA BASE

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|ccc|c}
\lambda_1 & 0 & & & & & \\
0 & \lambda_1 & 0 & & 0 & & 0 \\
\hline
0 & & \lambda_2 & & 0 & & 0 \\
\hline
 & & & \lambda_3 & 0 & 0 & \\
0 & & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & \lambda_3 & \\
\hline
0 & & 0 & & 0 & & \ddots
\end{array}\right)$$

NESTE EXEMPLO, O NÍVEL 1 É DUPLAMENTE DEGENERADO, O NÍVEL 2 É NÃO-DEGENERADO, E O NÍVEL 3 É TRIPLAMENTE DEGENERADO.

COMO FICA B NESTA BASE?

$$B = \left(\begin{array}{cc|c|ccc}
b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} & 0 & & 0 & \\
b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & & & & \\
\hline
0 & & b_{11}^{(2)} & & 0 & \\
\hline
 & & & b_{11}^{(3)} & b_{12}^{(3)} & b_{13}^{(3)} \\
0 & & 0 & b_{21}^{(3)} & b_{22}^{(3)} & b_{23}^{(3)} \\
 & & & b_{31}^{(3)} & b_{32}^{(3)} & b_{33}^{(3)}
\end{array} \quad \ddots \right)$$

OS BLOCOS DOS NÍVEIS DEGENERADOS NÃO SÃO DIAGONAIS (TEO. 4)

COMO B É HERMITIANO $\Rightarrow b_{jk}^{(i)} = b_{kj}^{(i)}$

$\Rightarrow$ OS BLOCOS SÃO MATRIZES HERMITEANAS

$\Rightarrow$ PODEM SER DIAGONALIZADO (TEO. 3)

SEJA $|\phi_n^{(i)}\rangle$ OS AUTO-ESTADOS DE B REFERENTES AO N-ÉSIMO NÍVEL

$$B|\phi_n^{(i)}\rangle = \gamma_{n,i}\,|\phi_n^{(i)}\rangle$$

NOTE QUE $|\phi_n^{(i)}\rangle = \sum_{k=1}^{g_n} \alpha_{ik}^{(n)} |\psi_n^{(k)}\rangle$

NOTE QUE $|\phi_m^{(i)}\rangle$, PORTANTO, TAMBÉM É AUTO-ESTADO DE A COM AUTO-VALOR λ_m

$$A|\phi_m^{(i)}\rangle = \sum_{k=1}^{g_m} \alpha_{ik}^{(m)} \underbrace{A|\psi_m^{(k)}\rangle}_{\lambda_m|\psi_m^{(k)}\rangle}$$

$$= \lambda_m \left(\sum_{k=1}^{g_m} \alpha_{ik} |\psi_m^{(k)}\rangle \right)$$

$$= \lambda_m |\phi_m^{(i)}\rangle$$

$\{|\phi_m^{(i)}\rangle\}$

OU SEJA, NA NOVA BASE, A MATRIZ A CONTINUA DIAGONAL E A MATRIZ B, POR CONSTRUÇÃO, É TAMBÉM DIAGONAL.