

2024



UNIVERSIDADE  
DE SÃO PAULO



Instituto de Física de São Carlos

## SLC 0629 - Laboratório de Fluidos e Termodinâmica



Laboratório de Ensino

IFSC/USP



Prof.: [José Abel Hoyos Neto](#)  
Sala 29, Bloco F1 2º andar  
Contato: hoyos@ifsc.usp.br

Turma 2024101 - Prática  
Local: IFSC - LEF, Campus 1  
Horário: 6<sup>as</sup>: 19h-22h40 (em semanas alternadas - vide cronograma)

Horário de atendimento: Livre

Monitoria: Guilherme Domingues ([guilherme.domingues@usp.br](mailto:guilherme.domingues@usp.br))

**Descrição:** Este curso tem por objetivo verificar experimentalmente conceitos básicos de hidrodinâmica e termodinâmica.

**Ementa:**

- Princípio de Arquimedes
- Hidrodinâmica
- Calorimetria
- Zero absoluto de temperatura
- Equivalência energia-calor

**Outros detalhes:** vide [sistema Júpiter](#)

**Necessidades especiais:**

As instalações de IFSC são adaptadas para aqueles com necessidades especiais de locomoção. Em todo caso e se assim julgar necessário, você é encorajado a me procurar no começo do semestre para discutirmos quaisquer outras necessidades que possa ter referente à locomoção.

**Honestidade acadêmica:**

É esperado de todos que se comportem como acadêmicos responsáveis. Desonestidade acadêmica como plágio, sabotagem e cola (entre outros) é uma conduta inaceitável e será tratada com o devido rigor (vide o código de ética da USP em [www.prg.usp.br/wp-content/uploads/CodigoEtica.pdf](http://www.prg.usp.br/wp-content/uploads/CodigoEtica.pdf)).

**Saídas de emergência:**

É seu dever se familiarizar com as saídas de emergência da sala de aula e do prédio em que se encontra.

**Cronograma:**

O cronograma não é definitivo e pode sofrer alterações. Consulte a página do curso para a versão mais atual.

AULA	DIA	ASSUNTO
01	01/03	O curso: experimentos, relatórios, critério de aprovação, etc.
02	15/03	Experimento 1 - Medida de densidades
03	05/04	Experimento 2 - Tensão superficial
04	19/04	Experimento 3 - escoamento laminar viscoso
05	03/05	Experimento 4 - Zero absoluto de temperatura
06	17/05	Experimento 5 - Calorimetria
07	07/06	Experimento 6 - Equivalência calor-energia
08	21/06	Experimento 7 - Medida do expoente adiabático $\gamma$ do ar



# **Práticas**

<b>Prática 1: Medida de densidades .....</b>	<b>7</b>
<b>Prática 2: Tensão superficial .....</b>	<b>13</b>
<b>Prática 3: Escoamento laminar viscoso .....</b>	<b>19</b>
<b>Prática 4: Zero absoluto de temperatura .....</b>	<b>25</b>
<b>Prática 5: Calorimetria .....</b>	<b>31</b>
<b>Prática 6: Equivalência calor-energia .....</b>	<b>37</b>
<b>Prática 7: Medida do expoente adiabático <math>\gamma</math> do ar .....</b>	<b>41</b>
<b>Apêndice 1 – Propagação de erros .....</b>	<b>45</b>
<b>Apêndice 2 – Método de ajuste por mínimos quadrados .....</b>	<b>47</b>



## Prática 1: Medida de densidades

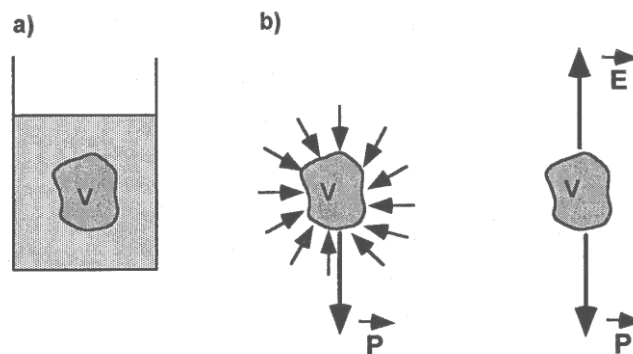
### 1. Objetivo

Determinação da densidade de líquidos e sólidos utilizando o princípio de Arquimedes, através de experimentos realizados com balança e com o areômetro de Nicholson.

### 2. Introdução: Conceito de empuxo

O Princípio de Arquimedes pode ser enunciado como: “Um corpo mergulhado em um líquido, sofre a ação de uma força de sentido ascensional, cujo módulo é igual ao peso do volume de líquido deslocado pelo próprio corpo”. A força ascensional é o empuxo do fluido sobre o corpo. A demonstração do Princípio pode ser feita considerando a condição de equilíbrio hidrostático para um líquido de densidade  $\rho$  no interior de um recipiente. Destaquemos uma porção de líquido com volume  $V$ , de forma e tamanho arbitrário, tal como mostra a Figura 1a. Na condição de equilíbrio hidrostático, a resultante de todas as forças que atuam sobre o volume de líquido destacado deve ser nula. Uma das forças atuantes é o peso do líquido nesse volume,  $\vec{P} = m\vec{g} = \rho V\vec{g}$ . A outra força é a resultante  $\vec{E}$  das forças de pressão que o resto do líquido exerce na superfície do volume  $V$ , tal como esquematizado na Figura 1b. Esta força é o empuxo do líquido sobre o volume  $V$ . Na condição de equilíbrio,  $\vec{P} + \vec{E} = 0$ . Portanto, a força de empuxo  $\vec{E}$  possui magnitude igual ao peso do líquido dentro de  $V$ :

$$E = P = \rho Vg .$$



**Figura 1:** Forças atuantes sobre um volume  $V$  arbitrário dentro de um líquido.

No caso que o volume  $V$  seja preenchido por outro corpo com densidade  $\rho'$ , diferente daquela do líquido  $\rho$ , o empuxo *não será alterado*. O empuxo  $E$  será sempre o peso do líquido de densidade  $\rho$  deslocado pelo volume  $V$ . Isto ocorre porque o volume que limita o corpo não foi alterado, e portanto as forças de pressão externas representadas na figura 1b são as mesmas.

Quando  $\rho > \rho'$ , o corpo submerso no líquido deverá emergir, já que o empuxo exercido pelo líquido será maior que o peso do corpo. Quando  $\rho' > \rho$ , o corpo submerso deverá afundar, pois o seu peso é maior que o empuxo exercido pelo líquido.

Em todos os experimentos descritos a seguir, o empuxo exercido pelo ar sobre os corpos será desprezado. Justifique esta suposição quantitativamente no relatório.

### 3. Medida de densidade de um sólido

Para medir a densidade  $\rho' = m/V$  de um corpo sólido de forma arbitrária, a maior dificuldade é determinar o volume  $V$ . A massa é medida de forma direta usando uma balança. O volume pode ser obtido indiretamente, medindo-se o empuxo  $E$  sofrido por ele quando mergulhado em um líquido de densidade  $\rho_l$  conhecida, normalmente água. A determinação do empuxo  $E$  pode ser feita com uma balança ou com o areômetro de Nicholson.

#### 3.a. Determinação do volume de um corpo usando uma balança.

Descreveremos o método considerando uma balança de pesagem de força normal, como as disponíveis comumente no laboratório de ensino. Deve se lembrar que estas balanças medem a força normal exercida pelo prato sobre o corpo pesado, mas o resultado é mostrado em unidades de massa, isto é, já dividido pela aceleração da gravidade.

Inicialmente, se determina a massa  $m_{r+l}$  do recipiente com o líquido que será usado para submergir o corpo. A leitura que a balança fornece é  $m_{r+l} = N/g$ . A força  $N$  que a balança exerce sobre o recipiente compensa o peso  $m_{r+l}g$ . Numa segunda etapa, mergulha-se o corpo cujo volume se quer determinar segurando-o por um fio, como mostrado na figura 2a, tomando-se cuidado para que ele fique totalmente submerso mas sem encostar nem no fundo nem nas laterais do recipiente. Na figura 2b é mostrado o esquema de forças atuantes sobre o recipiente. Diferente da primeira pesagem, a balança deve exercer uma força  $N'$  sobre o recipiente pois agora esta atuando também a reação ao empuxo  $E$  que o líquido faz sobre o corpo. A leitura da balança é agora:

$$m'_{r+l} = N'/g.$$

Como o sistema está em equilíbrio, o empuxo  $E$  deve ser:

$$E = N' - m_{r+l}g.$$

Mas por outro lado, de acordo com o princípio de Arquimedes o empuxo deve ser:

$$E = \rho_l V g$$

Combinado estas três equações, podemos determinar o volume  $V$  do corpo:

$$v_s = \frac{m'_{r+l} - m_{r+l}}{\rho_l}.$$

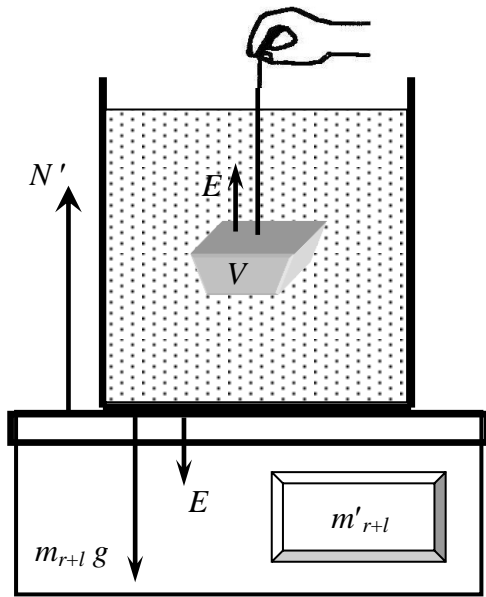
Se o líquido for água, o volume do sólido será simplesmente a diferença entre as duas leituras da balança. Em algumas balanças, pode-se inicialmente *tarar* a balança com o recipiente e o líquido. Neste caso, se o líquido for água e a pesagem está em gramas, a leitura da balança será diretamente o volume do corpo em  $\text{cm}^3$ . Justifique esta afirmação no relatório.

#### 3.b. Determinação do volume de um corpo usando o areômetro de Nicholson

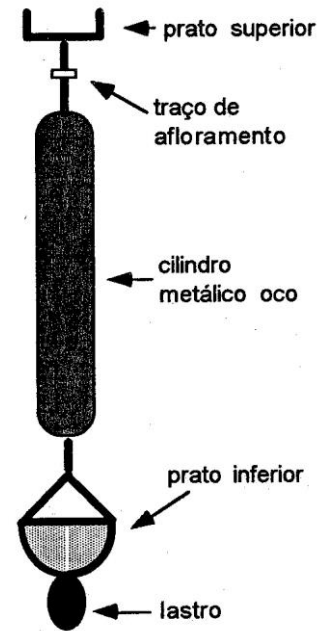
O areômetro de Nicholson, mostrado na figura 3, consiste basicamente de um cilindro metálico oco, ao qual são adaptados dois pratos: um superior e outro inferior, mais um lastro no fundo. Se o areômetro é submerso verticalmente num líquido, como mostrado na figura 4, é necessário colocar pesos nos pratos para compensar o empuxo. A haste que une o prato superior ao cilindro possui uma marca de referência denominada “traço de afloramento”. Quando o areômetro



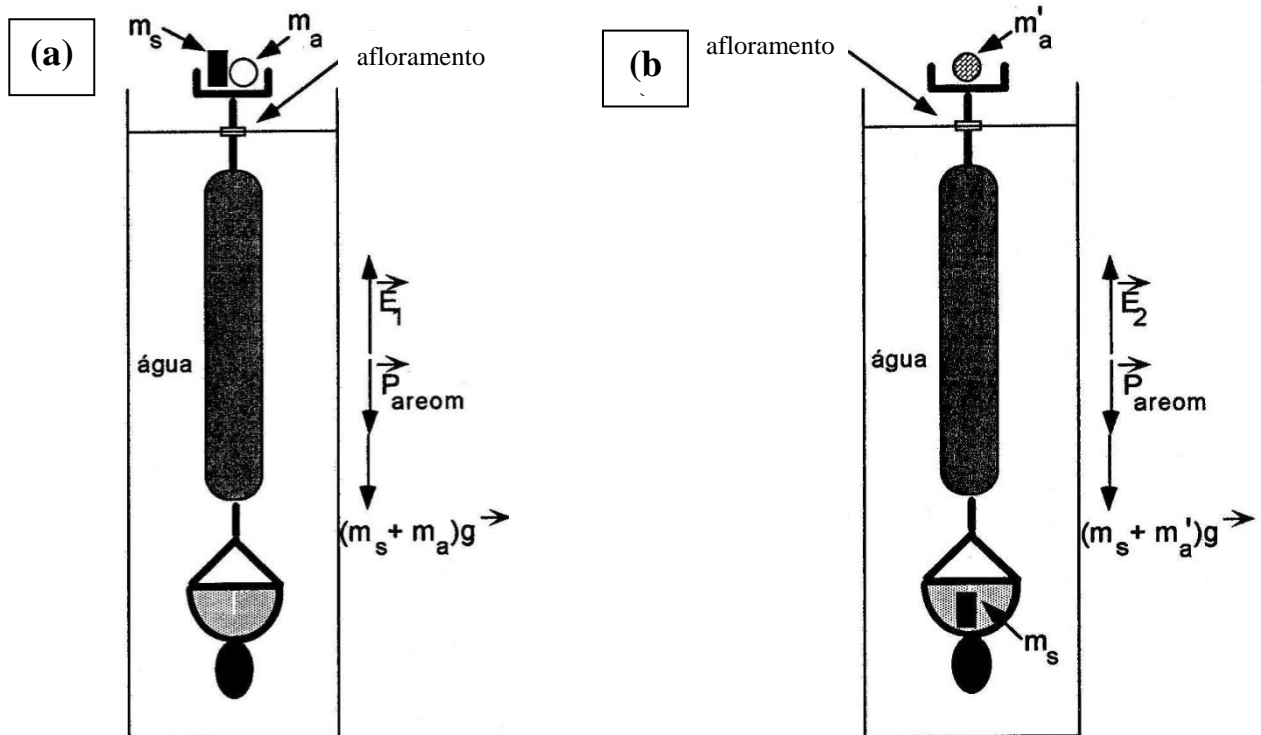
submerso em um líquido se encontra em equilíbrio hidrostático, diz-se que ocorreu o “afloramento”<sup>1</sup> quando o traço coincide com a superfície do fluido. O volume da estrutura do areômetro situado *abaixo* do traço de afloramento será denominado por  $V_{areom}$ , enquanto que seu peso *total* será denominado por  $P_{areom}$ .



**Figura 2:** Método de determinação do volume de um corpo numa balança.



**Figura 3:** Areômetro de Nicholson.



**Figura 4:** Duas etapas para medir o volume do corpo de massa  $m_s$ : (a) equilíbrio do areômetro com o corpo no prato superior e (b) no prato inferior.

<sup>1</sup> Aflorar: colocar no mesmo nível.  
SLC629 Laboratório de Flúidos e Termodinâmica

Inicialmente, determina-se diretamente com uma balança a massa do corpo sólido em questão,  $m_s$ , do qual se deseja determinar a densidade. A medida do volume  $V$  do corpo é feita realizando dois experimentos com o areômetro submerso em água.

No primeiro experimento, o corpo sólido se coloca no prato superior, e se agrega no prato uma massa adicional,  $m_a$ , de modo de obter o afloramento do areômetro, tal como mostrado na figura 4a. Para este caso, a equação de equilíbrio hidrostático do areômetro completo resulta:

$$(m_s + m_a)g + P_{areom} = \rho_{\text{água}} g V_{areom}$$

No segundo experimento, o corpo sólido é colocado no prato inferior do areômetro. Para que o “afloramento” ocorra novamente, deve-se acrescentar uma massa  $m'_a$  no prato superior, como mostrado na figura 4b. Esta massa é maior que no caso anterior, porque estando o corpo submerso há um empuxo adicional que o líquido exerce sobre ele, que precisa ser compensado por uma massa de afloramento maior. A condição de equilíbrio nesta nova situação é:

$$(m_s + m'_a)g + P_{areom} = \rho_{\text{água}} g (V_{areom} + V)$$

Combinando ambas equações, obtemos o volume do corpo sólido:

$$V = \frac{(m'_a - m_a)}{\rho_{\text{água}}}$$

#### 4. Medida da densidade de um líquido utilizando o areômetro de Nicholson.

A medida da densidade de um líquido,  $\rho_l$ , pode ser feita usando o areômetro em duas etapas. Inicialmente, coloca-se o areômetro imerso em água, sendo “aflorado” com uma massa,  $m_t$ , no prato superior, como mostrado na figura 5a. Nesta situação, a condição de equilíbrio hidrostático é:

$$m_t g + P_{areom} = \rho_{\text{água}} g V_{areom}$$

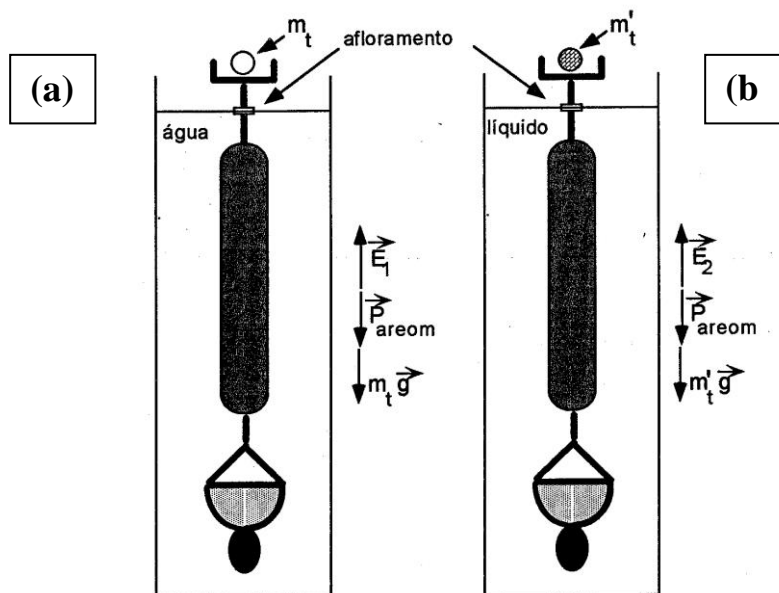
Observe que, se o experimento (3.b) foi realizado, esta condição é a mesma que a mostrada na figura 4a com  $m_t = m_s + m_a$ , e portanto não é necessário repetir este afloramento.

Posteriormente, coloca-se o mesmo areômetro imerso no líquido cuja densidade  $\rho_l$  se deseja determinar, sendo “aflorado” agora com uma massa diferente  $m'_t$ , como mostrado na figura 5b. A nova condição de equilíbrio hidrostático é:

$$m'_t g + P_{areom} = \rho_l g V_{areom}$$

Associando as duas últimas equações obtemos a densidade do líquido:

$$\rho_l = \rho_{\text{água}} - \frac{(m_t - m'_t)}{V_{areom}}$$



**Figura 5:** Utilização do areômetro de Nicholson para a determinação da densidade de um líquido: (a) afioramento em água, equivalente à condição da figura 4a, e (b) afioramento no líquido de densidade desconhecida.

### Recomendações

1. Usar um copinho para colocar as massas no prato superior do areômetro.
2. Prender um fio de linha no areômetro para segurá-lo evitando, assim, que ele afunde se a massa colocada for maior do que a necessária para o afioramento.
3. Quando estiver próximo do ponto de afioramento dar pequenos toques no areômetro para tirar o efeito da tensão superficial do líquido.
4. O areômetro não deve encostar nas paredes do recipiente que o contém.

## **Roteiro da Prática: Densimetria - Areômetros**

**1. Utilizando o dispositivo disponível no laboratório, faça a verificação do Princípio de Arquimedes.**

**2. Determinação do volume e da densidade de um sólido com uma balança.**

- a) Meça diretamente com uma balança a massa do sólido,  $m_s$ .
- b) Meça com uma balança o volume do sólido.
- c) Calcule a densidade do sólido e **compare com os valores tabelados para determinar de que material ele é feito.**

**3. Determinação do volume e da densidade de um sólido utilizando o Areômetro de Nicholson.**

- a) Meça diretamente com uma balança a massa do sólido,  $m_s$ .
- b) Faça o afloramento com o sólido no prato superior do areômetro. Aproveite este afloramento para determinar o volume do areômetro na balança, como foi feito na parte 2. Este volume será usado na parte 4.
- c) Meça diretamente com uma balança a massa adicionada no prato superior,  $m_a$ .
- d) Faça o afloramento com sólido no prato inferior do areômetro.
- e) Meça diretamente com uma balança a massa adicionada no prato superior,  $m'_a$ .
- f) Calcule o volume e a densidade do sólido. **Compare com os valores obtidos item 2(c).**

**4. Determinação da densidade de um líquido utilizando o Areômetro de Nicholson.**

- a) Faça o afloramento do areômetro em água.
- b) Meça diretamente com uma balança a massa adicionada no prato superior,  $m_t$ .
- c) Faça o afloramento do areômetro no líquido cuja densidade se quer determinar. Secar bem o areômetro antes de mergulhá-lo no líquido pesquisado.
- d) Meça diretamente com uma balança a massa adicionada no prato superior,  $m'_t$ .
- e) Calcule a densidade do líquido. **Compare com o valor medido com um areômetro padrão e com valores tabelados. Determine qual é o líquido utilizado.**

### **Observações:**

5. Usar um copinho para colocar as massas no prato superior do areômetro.
6. Prender um fio de linha no areômetro para segurá-lo evitando, assim, que ele afunde se a massa colocada for maior do que a necessária para o afloramento.
7. Quando estiver próximo do ponto de afloramento dar pequenos toques no areômetro para tirar o efeito da tensão superficial do líquido.
8. O areômetro não deve encostar nas paredes do recipiente que o contém.

## Prática 2: Tensão superficial

### 1. Objetivo

Essa prática tem por objetivo medir o coeficiente de tensão superficial de um fluido por dois métodos: pelo (i) método da placa de Wilhelmy, onde utiliza-se uma balança de torção para medir a força de tensão sobre uma tira de papel imersa no fluido; e pelo (ii) método da pressão de bolha, onde utiliza-se o aparato de Jaeger para medir a pressão interna e externa sobre uma bolha de ar imersa no fluido. Serão utilizados dois fluidos: água destilada e água destilada contaminada por detergente. Contaminar a água com detergente tem por objetivo quantificar a alteração das forças de tensão superficial.

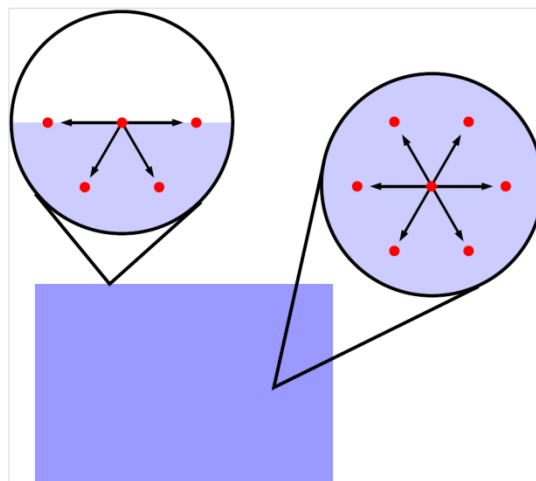
### 2. Demonstrações complementares

1. Equilibrar sobre a superfície da água objetos mais densos que a água. Interferir nesta situação adicionando sabão/detergente na água.
2. Verificar a direção e sentido da tensão superficial em armações de arame.
3. Verificar a formação de superfícies de mínima área formadas por filmes de detergente e água em armações tridimensionais de arame.
4. Visualizar o efeito de capilaridade quando da tensão superficial entre a interface líquido-sólido e como esse efeito é afetado ao se aderir agentes molhantes como parafina.

### 3. Introdução

#### 3.a. Força de tensão superficial

Um filete de água que se afunila ao sair da torneira começa a se “quebrar” em gotas. Uma agulha, mesmo sendo mais densa que a água, flutua sobre sua superfície quando colocada gentilmente. Quando um canudo é imerso em água, nota-se que ela sobe pelas paredes. Esse e outros fenômenos similares estão associados a existência de uma interface entre o líquido e outra substância. As forças de coesão entre as moléculas do líquido são diferentes quando comparadas no volume e na superfície (vide Fig. 1). Como resultado, a interface (superfície) pode ser considerada como uma membrana tensionada. Além disso, como essas tensões superficiais acontecem na interface, elas são mais evidentes quando o volume do fluido não é tão “maior” que sua superfície. Mais precisamente, quando a somatória das forças de coesão na interface é comparável àquela do volume.



**Figura 1:** Ilustração das forças de coesão (setas pretas) sobre uma molécula (bolinhas vermelhas) de um líquido no volume e na interface.

Imagine um filme fino de líquido (água com detergente, por exemplo) em um anel de arame onde há um laço de fio flexível (linha de costura, por exemplo) como ilustrado na Fig. 2(a). O laço de fio imerso no filme de líquido pode ficar em qualquer posição se há filme de líquido dentro e fora do mesmo (configuração da esquerda). Retirando o filme da parte de dentro do laço, nota-se que o fio flexível é puxado em direção ao filme externo. Esta força é perpendicular à superfície do filme e é resultado das forças de coesão moleculares.

Imagine agora uma armação de arame onde um dos lados é móvel como ilustrado na Fig. 2(b). Nota-se a existência de uma força que puxa o arame para dentro (como se o filme de fluido fosse uma membrana tensionada de um tambor). Se a parte móvel do arame for suficientemente leve, a força de tensão superficial será maior que a força peso e o fio móvel será puxado em direção ao filme. Esta força é perpendicular à superfície do fluido e, em módulo, é tão maior quanto maior for a extensão do arame. Define-se como tensão superficial (ou coeficiente de tensão superficial) em um filme,  $\gamma$ , como a razão entre a força de tensão superficial e o comprimento (perpendicular à força) ao longo do qual a força atua.

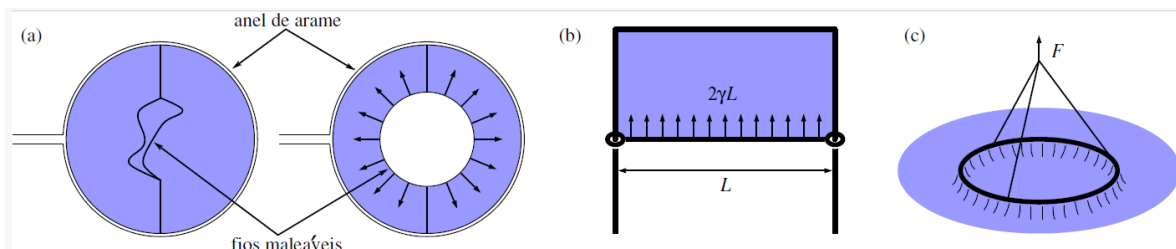
Neste caso,

$$\gamma = \frac{F}{2L} \quad (1)$$

O fator 2 é porque a força atua sobre um comprimento total de  $2L$ . Há um filme fino na face anterior e outro na posterior.<sup>1</sup>

Analogamente, ao se retirar um anel de dentro de um fluido como ilustrado na Fig. 2(c), existe uma força de tensão superficial dada pela Eq. (1), onde  $L$  é o perímetro do anel. Note, entretanto, que a força  $F$  não apenas compensa a força de tensão superficial, mas também o peso do líquido que é levantado acima do nível do fluido (efeito de capilaridade).

Em todos os casos, note que as forças de coesão são tais que tendem a diminuir a área superficial do fluido. Novamente, é como se o filme fino de fluido (a interface) fosse uma membrana tensionada.



**Figura 2:** (a) Um anel de arame com um laço de um fio flexível. Quando o fluido está tanto dentro como fora do laço (esquerda), o arranjo do laço é qualquer. Quando há fluido apenas fora do laço (direita), o laço é puxado em direção ao fluido externo. (b) Arame móvel sendo puxado pelo filme de fluido. (c) Anel imerso num fluido sendo puxado para fora do mesmo.

### 3.b. Diferença de pressão através de um filme fino de fluido

É interessante notar que esses conceitos estão envolvidos diretamente na diferença de pressão do ar dentro e fora de uma bolha de sabão. Lembre-se que as forças de coesão tendem a diminuir a superfície de um filme fino (uma membrana tensionada). Logo, o ar dentro de uma bolha é comprimido. Sendo assim, a pressão dentro da bolha é maior que a pressão externa. Como relacionar o raio da bolha  $R$  com a diferença de pressão  $\Delta P = P_{in} - P_{out}$ ? Simplesmente,

$$\Delta P = \frac{4\gamma}{R} \quad (2)$$

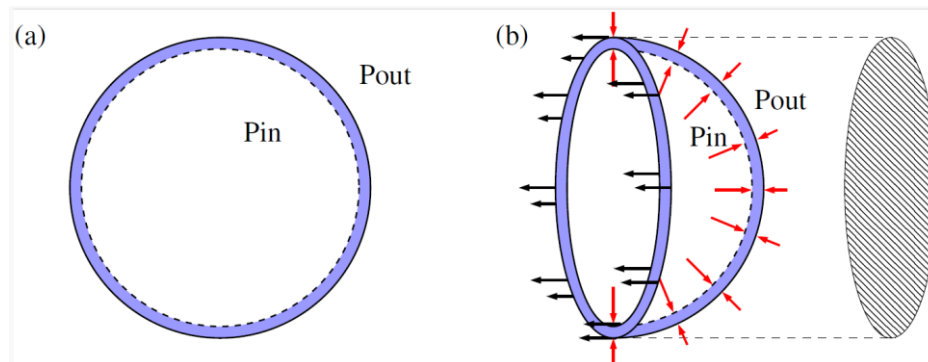
<sup>1</sup> Curiosidade: Ao se deslocar o arame móvel de  $\Delta y$ , o trabalho realizado pela força de tensão superficial é  $W = F\Delta y$ . O aumento de área do filme fino é  $\Delta A = 2L\Delta y$ . Logo, a razão entre o trabalho e o aumento da área do filme fino é  $\frac{W}{\Delta A} = \frac{F}{2L} = \gamma$ , ou seja, a própria tensão superficial.

Vamos agora deduzir esse simples resultado. Uma bolha de sabão consiste de dois filmes finos entre os quais há o fluido (vide Fig. 3(a)). Aplicando os princípios de hidrostática à metade da bolha, temos que ela está em equilíbrio quando as forças de tensão superficial se igualam às forças devidas à diferença de pressão, como ilustra a Fig. 3(b). As forças de tensão superficial somam, em módulo,  $2 \times 2\pi R\gamma$ . Aqui, desprezaremos a diferença entre os raios interno e externo. As forças devidas à diferença de pressão apontam sempre perpendicularmente à superfície do filme. Em módulo, um elemento de força é  $d\vec{F} = \Delta P dS \hat{n}$ , onde  $dS$  é o elemento de área associado e  $\hat{n}$  é a direção normal à superfície naquele ponto. Devemos somar essas forças. Isso equivale a projetar todas essas forças no eixo de simetria da metade da bolha. Equivalentemente, isso é projetar a superfície da metade da bolha no plano perpendicular ao eixo de simetria da bolha. Como resultado,  $F = \Delta P S_{\text{projetado}} = \pi R^2 \Delta P$ . Igualando essa resultante à  $4\pi R\gamma$ , recupera-se o resultado (2). Conclui-se então que a diferença de pressão é tão maior quanto menor for o raio da bolha.

Esse resultado é rapidamente generalizado para o caso de uma bolha de ar num fluido. Neste caso, há apenas um filme fino envolvido. As forças superficiais de tensão somam  $2\pi R\gamma$ , e as forças devida à diferença de pressão não mudam, ou seja, continuam somando  $\pi R^2 \Delta P$ . Portanto,

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} \quad (3)$$

para o caso de uma bolha de ar num líquido, ou mesmo para uma gota de líquido num outro fluido (como o ar).



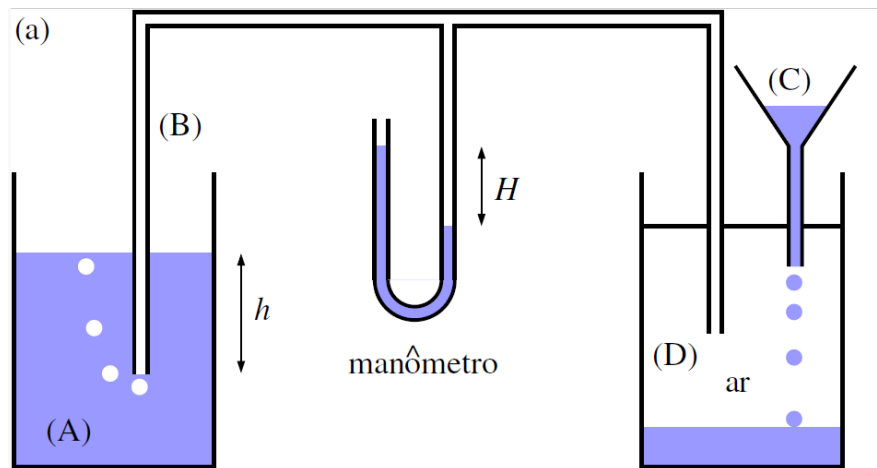
**Figura 3:** (a) Bolha de sabão em equilíbrio hidrostático. (b) Esquema de forças numa metade de bolha. Em preto, as forças de tensão superficial. Em vermelho, as de pressão. A área hachurada ( $\pi R^2$ ) corresponde à projeção da superfície da metade da bolha num plano normal ao eixo de simetria dessa metade de bolha.

#### 4. Prática experimental: medida da tensão superficial

Primeiramente, mede-se o coeficiente de tensão superficial pelo método de Jaegar. O aparato experimental está ilustrado na Fig. 4. O coeficiente de tensão superficial a ser medido é o do fluido no reservatório (A). Uma bolha neste é formada pelo aumento da pressão do ar no tubo (B) provocado pela água que cai do reservatório (C) no reservatório fechado (D). A pressão (interna) do ar dentro da bolha é medida pelo manômetro como sendo  $P_{\text{in}} = P_{\text{atm}} + \rho_1 gH$ , onde  $\rho_1$  é a densidade do fluido no manômetro. A pressão (externa) fora da bolha (no fluido) é medida no ponto onde a bolha é formada e, portanto, é  $P_{\text{ext}} = P_{\text{atm}} + \rho_2 g h$ , onde  $\rho_2$  é a densidade do fluido em (A). Uma vez obtida a diferença de pressão  $\Delta P$  e sendo o raio da bolha igual ao raio do tubo (B), utiliza-se a Eq. (3) para determinar a tensão superficial  $\gamma$ .

Esta medida deve ser repetida várias vezes para cada altura  $h$  da coluna de fluido. Escolha de dois a quatro valores distintos de  $h$ . Primeiramente, o fluido em (A) deve ser água destilada. Depois acrescente poucas gotas de detergente e refaça sua medida. Como a tensão superficial é alterada? Discuta por que adicionar detergente é vantajoso para lavar roupas.

Após utilizar o método de Jaegar, usaremos uma balança de torção para medir a força necessária para equilibrar um tira de papel umedecida pelo fluido e parcialmente imersa no fluido, como ilustra a Fig. 5.



**Figura 4:** Aparato experimental de Jaeger para medir a tensão superficial de um fluido pelo da pressão da bolha.

Quando submersa, a força para equilibrar é, em módulo,  $F_a = P - E + P' + F$ , onde  $P = P_{\text{gancho}} + P_{\text{papel}}$  é o peso do gancho e do papel,  $E$  é o empuxo sobre o papel,  $P'$  é o peso do excesso de fluido que (por capilaridade) sobe pela tira de papel, e  $F$  é a força de tensão superficial. Aqui, vamos desprezar o empuxo.<sup>2</sup> Quando a tira de papel é retirada do reservatório de fluido, como ilustrado na Fig. 5(b), a força para equilibrá-la é  $F_b = P + P''$ , onde  $P''$  é o peso do excesso de fluido. Quantificar os pesos de excesso de fluido  $P'$  e  $P''$  não é simples. Aqui, vamos assumir que o filme adere-se muito rente à tira de papel e, por isso,  $P'$  e  $P''$  podem ser desprezados. (Ou ainda, são aproximadamente iguais e se cancelam.) Em suma,  $F \approx F_a - F_b$ . Consequentemente, a força de tensão superficial  $F$  é dada pela Eq. (1), onde  $L$  é a largura da tira de papel.<sup>3</sup>

As forças  $F_a$  e  $F_b$  são medidas utilizando-se a balança de torção. Os ângulos de torção associados são  $\theta_a$  e  $\theta_b$ , respectivamente. Para traduzir esses ângulos em força, necessita-se calibrar a balança de torção com pesos conhecidos. Usando duas massas conhecidas, sabe-se relacionar um determinado ângulo  $\theta$  com uma determinada força  $T$ , i.e., para um dado ângulo, sabe-se a força corresponde  $T(\theta)$ . Uma simples interpolação linear fornece

$$T(\theta) = m_1 g + (m_2 g - m_1 g) \left( \frac{\theta - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1} \right) \quad (4)$$

e, consequentemente,  $F_{a,b} = T(\theta_{a,b})$ . A Eq. (4) é tão melhor quanto mais próximos os ângulos  $\theta_{1,2,a,b}$  forem entre si.

As medidas de  $F_{a,b}$  devem ser repetidas algumas vezes. Faça a medida de  $F_a$  antes de  $F_b$  a fim de minimizar o efeito de evaporação da água na tira de papel.

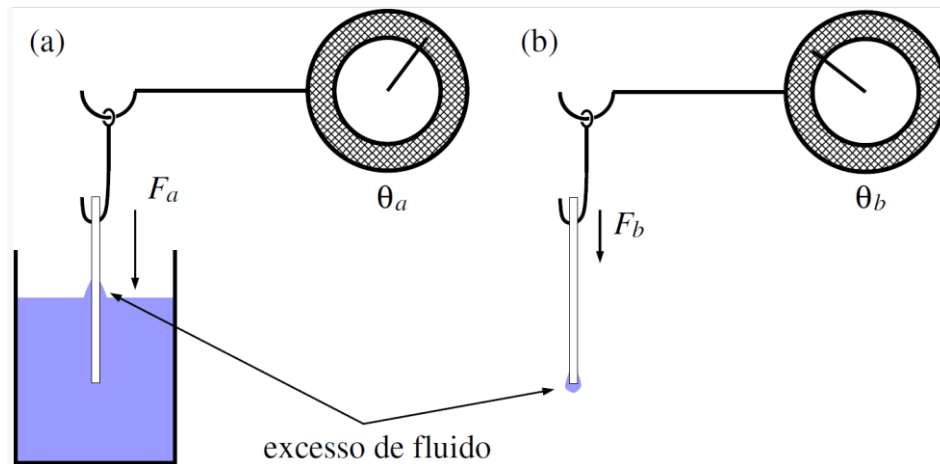
Primeiramente, faça a medida da tensão superficial para água destilada. Depois adicione algumas gotas de detergente e refaça o experimento.

Finalmente, compare os valores de  $\gamma$  obtidos pelos dois métodos e discuta possíveis discrepâncias.

<sup>2</sup> Verifique que essa é uma boa aproximação variando a posição do reservatório de fluido e, por consequência, o volume de papel submerso. Para diferentes frações de papel submerso, note que  $F_a$  não muda apreciavelmente.

<sup>3</sup> Mais precisamente,  $F = 2\gamma L \cos \alpha_1$  onde  $\alpha$  é o ângulo entre a tira de papel e o filme fino de fluido. Aqui vamos assumir que  $\alpha \approx 0$  e, portanto,  $\cos \alpha = 1$ .





**Figura 5:** Aparato experimental para medir a tensão superficial de um fluido pelo método da placa de Wilhelmy.

**Cuidados:** (a) Em ambos os métodos e em todas as medidas, evite contaminar o fluido com quaisquer outras substâncias, incluindo a gordura de suas mãos. (a.i) Use a pinça para manusear a tira de papel. (a.ii) Umedeça a tira de papel sobre um recipiente e descarte o excedente. Não misture com o reservatório de água destilada. (a.iii) Não contamine objetos que entrarão em contato com a água destilada. (b) Seja rápido em medir o peso na balança de torção a fim de minimizar a evaporação de água na tira de papel.

### Bibliografia

F. W. Sears, M. W. Zemansky, e H. D. Young, Física 2 - Mecânica dos fluidos, calor e movimento ondulatório, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (1984).

F. W. Sears e M. W. Zemansky, University Physics, Complete Edition, Editora Addison-Wesley (1955).



## Prática 3: Escoamento laminar viscoso

### 1. Objetivo

Essa prática tem por objetivo estudar fluidos Newtonianos em situações simplificadas. Precisamente, estudaremos o escoamento da água em um tubo (capilar) cilíndrico no regime de escoamento laminar. Medindo a relação entre a queda de pressão entre as extremidades do tubo e a vazão de água correspondente, podemos medir indiretamente a viscosidade da água através da equação de Hagen-Poiseuille.

### 2. Demonstrações complementares

1. Demonstração da sustentação de uma esfera por um jato de ar proveniente de um túnel de vento.
2. Medida da pressão sobre um aerofólio e determinação esquemática da força de arraste de pressão, i.e., a força de sustentação (não confundir com a força de arraste viscoso).
3. Visualização de diversos fluxos passando por geometrias distintas (diferentes obstáculos) com o auxílio de (i) purpurina e de (ii) permanganato de potássio.

### 3. Introdução

#### 3.a. Força viscosa

Por definição, a força viscosa é uma força volumétrica de atrito entre camadas de um fluido que estão em diferentes velocidades. Como consequência, forças tangenciais aparecem entre diferentes camadas.

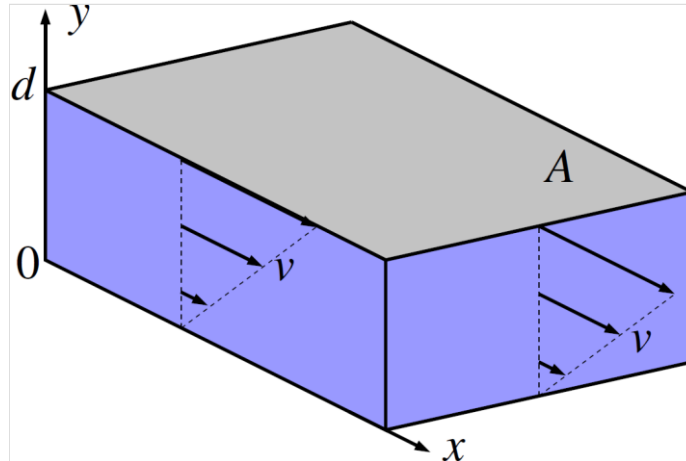


Figura 1: Escoamento laminar viscoso entre duas placas paralelas.

Considere uma camada fina de fluido entre duas placas paralelas de área  $A$  perpendiculares ao eixo  $\hat{y}$  de um eixo de coordenadas (vide Fig. 1). Uma das placas é mantida parada e a outra com velocidade constante  $v_0\hat{x}$ . Para um fluido Newtoniano e velocidades suficientemente pequenas, o fluxo no fluido é laminar, i.e., o fluido se desloca em lâminas planas paralelas que deslizam entre si. Neste caso, isso implica que o campo de velocidades  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  do fluido é tal que  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x(x, y, z)\hat{x} + v_y(x, y, z)\hat{y} + v_z(x, y, z)\hat{z} = v_x(y)\hat{x}$  onde  $v_x = v_0y/d$ .

Note que a velocidade das camadas de fluido imediatamente em contato com as placas é igual à velocidade da placa associada, i.e., o fluido está parado em relação à superfície (sólida) de contato. Note ainda que o gradiente de velocidade é constante, i.e., a velocidade das diferentes camadas entre as placas varia linearmente com  $y$ .

Para manter a placa superior com velocidade constante  $v_0$ , é necessário aplicar uma força constante  $\mathbf{F} = F\hat{x}$  para contrabalançar a força de atrito viscoso (que está na direção  $-\hat{x}$ ). A magnitude dessa força é igual a

$$F = \eta A \frac{v_0}{d}, \Rightarrow \frac{F}{A} = \eta \frac{dv_x}{dy} \quad (1)$$

Ou seja, a tensão tangencial ( $F/A$ ) é proporcional à taxa de variação espacial da velocidade. A constante de proporcionalidade  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade (ou viscosidade dinâmica ou, ainda, viscosidade absoluta), cuja dimensão é  $[\eta] = \frac{\text{força} \times \text{tempo}}{\text{área}} = \text{Pa} \cdot \text{s} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$ . Comumente, usa-se a unidade de *centipoise* (cp), onde  $1 \text{ cp} = 10^{-2} \text{ poise} = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . As viscosidades da água, da glicerina e do ar a  $20^\circ\text{C}$  são, respectivamente,  $\eta \approx 1.00 \text{ cp}$ ,  $\eta \approx 830 \text{ cp}$ , e  $\eta \approx 181 \mu\text{p}$ .

### 3.b. Fluxo laminar viscoso em dutos cilíndricos

Considere um tubo cilíndrico de raio  $R$  dentro do qual um fluido Newtoniano viscoso escoa de maneira laminar. Por simetria, o campo de velocidades do fluido é  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v(r)\hat{z}$ , ou seja,  $\mathbf{v}$  aponta na direção do eixo do tubo  $\hat{z}$  e sua magnitude depende apenas da distância  $r$  do centro do cilindro (vide Fig. 2).

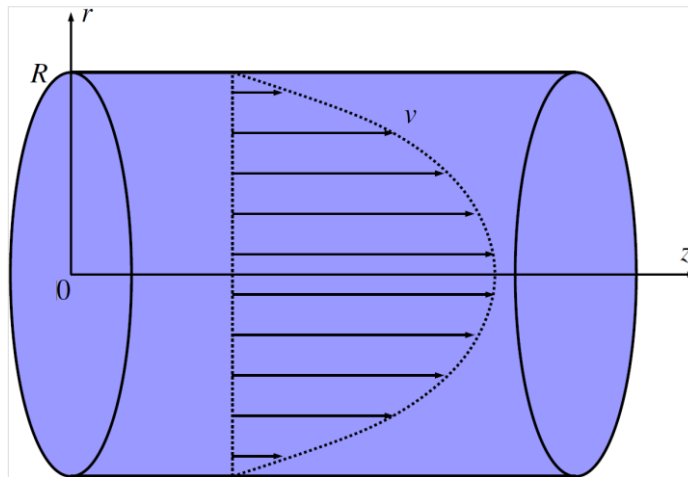


Figura 2: Fluxo laminar de um fluido viscoso em um duto cilíndrico de raio  $R$ .

Note também que a velocidade nas paredes do duto deve ser nula, i.e.,  $v(R) = 0$ . Além disso, esperamos intuitivamente que a velocidade deva ser máxima no eixo de simetria, i.e.,  $v_{\max} = v(0)$ . Nossa tarefa agora é obter a magnitude  $v(r)$  do campo de velocidades. Para isso, considere que a diferença de pressão entre duas seções retas do tubo que distam de  $L$  é  $\Delta P = P_1 - P_2$ . Essa queda de pressão é devido à força viscosa de atrito. Se  $P_1$  fosse igual a  $P_2$ , não haveria fluxo porque o atrito viscoso dissiparia a energia cinética.

Para prosseguir, considere um tubo cilíndrico imaginário de raio  $r < R$ , comprimento  $L$ , e eixo de simetria sendo o eixo  $\hat{z}$ . Quais são as forças sobre o fluido encerrado por esse tubo imaginário? Há a força viscosa (tangencial) na camada exterior em  $r$ , ou seja, de acordo com (1),

$$\mathbf{F}_{\text{visc}} = A(r)\eta \frac{dv}{dr} \hat{z} = 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \hat{z} \quad (2)$$

(Note que  $\frac{dv}{dr} < 0$  e, portanto,  $\mathbf{F}_{\text{visc}}$  está na direção  $-\hat{z}$ ) Há também a força normal devido à queda de pressão  $S(r)\Delta P \hat{z} = \pi r^2 \Delta P \hat{z}$  que atua nas “tampas” do tubo imaginário. Como o fluido encerrado pelo tubo imaginário não está acelerado, essas duas forças se anulam. Logo,

$$r\Delta P = -2L\eta \frac{dv}{dr}, \Rightarrow v = -\frac{r^2\Delta P}{4\eta L} + \text{const.} \quad (3)$$

A constante de integração é obtida impondo a condição de contorno que  $v(R) = 0$ . Logo,

$$v(r) = \frac{(R^2 - r^2)\Delta P}{4\eta L} \quad (4)$$

Uma vez obtido o campo de velocidades  $\mathbf{v}$ , podemos calcular o fluxo de fluido  $I$  atravessando uma seção reta do tubo:

$$I = \int_0^R v dS = \frac{\Delta P}{4\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L} \quad (5)$$

Esta é a lei de Hagen-Poiseuille. Ela é análoga a lei de Ohm para resistores lineares  $I = \frac{\Delta U}{R}$ . A diferença é que a resistência elétrica é proporcional ao inverso da área do resistor. Na lei de Hagen-Poiseuille, a resistência viscosa é proporcional ao inverso do quadrado da área.

Quando a Eq. (5) é válida? Quando o fluxo for laminar. Isso acontece quando o número de Reynolds  $Re > 2000$ . Neste caso, o número de Reynolds é

$$Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta} = \frac{2\rho I}{\pi\eta R} \quad (6)$$

onde  $D = 2R$  é o diâmetro do tubo e  $\bar{v} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v dS$  é a velocidade média de fluxo, i.e.,  $I = \bar{v}\pi R^2$ .

(Note que  $\bar{v} = \frac{1}{2}v_{max} = \frac{1}{2}v(0)$ .)

#### 4. Prática experimental: verificação da lei de Hagen-Poiseuille

O objetivo da prática é a verificação experimental da lei de Hagen-Poiseuille (5) que relaciona a vazão do fluxo de um fluido viscoso  $I$  que escoar por um tubo com a queda de pressão  $\Delta P$  correspondente.

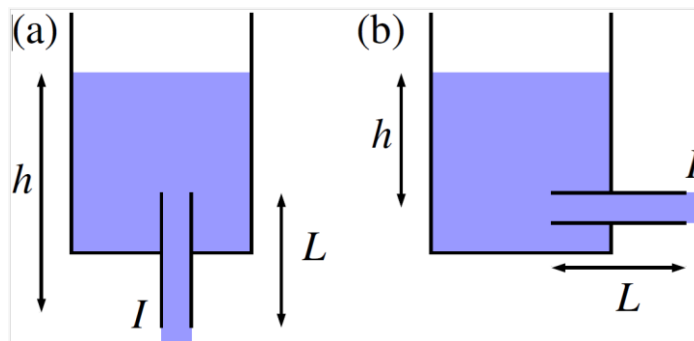


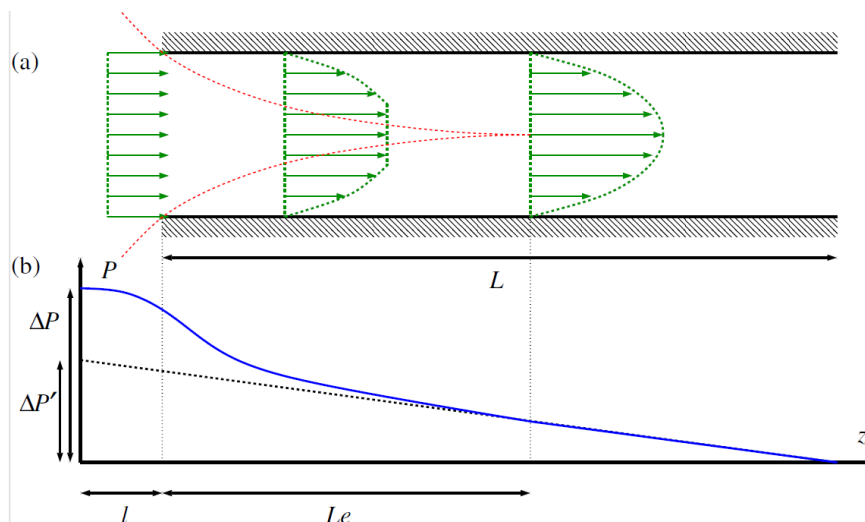
Figura 3: Possíveis esquemas de escoamento de um fluido por um tubo.

Essa é uma situação que encontramos comumente como esquematizado na Fig. 3 onde um fluido escoar de um reservatório por meio de um tubo cilíndrico. É óbvio que há muitas outras situações como, por exemplo, sangue fluindo pelos capilares de um vertebrado.

Nesta prática, utilizamos o esquema experimental ilustrado na Fig. 3(b). A queda de pressão  $\Delta P$  entre as extremidades do tubo é  $\rho gh$  onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $g$  é a aceleração da gravidade, e  $h$  é a altura da coluna de fluido. A altura desta coluna deve ser mantida constante inserindo cuidadosamente fluido pela parte superior do reservatório. Durante esse tempo, o fluxo volumétrico de fluido deve ser medido com a ajuda de um béquer graduado e um cronômetro. Para

um mesmo fluxo (ou para uma mesma altura  $h$ ), utilize um cronômetro e um béquer graduado e faça pelo menos 3 medidas de  $I$  com diferentes valores de volume escoado.

Você deve verificar que seus dados estão em desacordo com a Eq. (5) quando identifica-se  $\Delta P$  com  $\rho gh$ . O motivo para tal é muito simples. A queda de pressão ao longo do tubo não é devida apenas à dissipação de energia pela força viscosa, mas também devida à energia cinética carregada pelo fluido. Antes de entrar no tubo, o fluido está praticamente parado. Parte da queda de pressão é utilizada para acelerar o fluido na configuração de velocidade em (4) como esquematizado na Fig. 4(a).



**Figura 4:** (a) Escoamento de um fluido viscoso por um tubo no regime laminar. (b) Pressão do fluido como função da posição  $z$  no eixo de simetria do tubo.

Note que antes de entrar no tubo, o fluxo é praticamente invíscido (i.e., não viscoso) uma vez que todas as camadas de fluido que entram no tubo estão com a mesma velocidade e, portanto, não há atrito viscoso entre elas. Ao entrar no tubo, as camadas de fluido mais próximas da parede do tubo desaceleram. Por continuidade (conservação de massa), as camadas mais distantes devem acelerar. Logo, há uma camada de fronteira (boundary layer) dividindo o fluxo víscido do invíscido: a linha tracejada vermelha na Fig. 4(a).<sup>1</sup> Enquanto o campo de velocidades não está totalmente desenvolvido, i.e., enquanto não é parabólico como ditado pela Eq. (4), diz-se que o fluxo está em desenvolvimento numa região chamada de região de entrada. No regime de fluxo laminar, esta região tem comprimento

$$L_e \approx 0.006 Re D = 0.24 \frac{\rho l}{\pi \eta}, \quad (7)$$

onde  $D$  é o diâmetro do duto cilíndrico, e  $Re$  é o número de Reynolds em (6).

Por fim, note que a queda de pressão acontece já antes do fluido entrar no tubo. Isto porque ele é acelerado já nas imediações antes de adentrá-lo (vide Fig. 4(b)). Essas imediações são da ordem do diâmetro do tubo. Mais precisamente, essa queda de pressão pode ser levada em conta de maneira aproximada se considerarmos que o comprimento do tubo é ligeiramente maior que  $L$ . Ou seja, basta trocar  $L$  por  $L + l$  na Eq. (5), onde

$$l \approx 1.64 R. \quad (8)$$

<sup>1</sup> Evidentemente, descrever o fluxo nas imediações da camada de fronteira é complicado. Aqui, vamos assumir que podemos negligenciar sua influência na queda de pressão  $\Delta P$  total.

Evidentemente, essa aproximação é válida somente quando  $L \gg l$ .

Resta-nos incorporar à nossa análise a queda de pressão devido à transformação de energia potencial em energia cinética. Para isso, é útil considerar a potência de energia cinética atravessando uma seção reta do tubo

$$W_{Ec} = \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} \int v^2 \frac{dm}{dt}, \quad (9)$$

onde  $dm$  é a quantidade de massa que atravessou a seção reta do tubo com velocidade  $v$  entre os instantes de tempo  $t$  e  $t + dt$ . Como as velocidades das partículas do fluido não mudam na região desenvolvida ( $z > Le$ ), é conveniente escolher fazer essa integral nesta região onde o campo de velocidades é dado por (4).<sup>2</sup> Logo,

$$W_{Ec} = \frac{1}{2} \rho \int v^2 \frac{dS dz}{dt} = \frac{1}{2} \rho \int v^3 dS = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\Delta P'}{4\eta(L+l)} \right)^3 \frac{\pi R^8}{4} = \frac{\rho I^3}{(\pi R^2)^2}, \quad (10)$$

onde  $\frac{\Delta P'}{L+l}$  é a queda de pressão por unidade de comprimento devido à força viscosa (vide linha tracejada preta na Fig. 4(b)).<sup>3</sup> Na última igualdade da Eq. (10), utilizamos a Eq. (5) (com  $L$  corrigido para  $L + l$ ) para relacionar  $W_{Ec}$  com o fluxo de escoamento  $I$ .

Necessitamos agora da potência dissipada pela força viscosa. Esta é obtida facilmente da Eq. (2):

$$W_\eta = \int \frac{dF_\eta dz}{dt} = \Delta P' \int dS \left( \frac{dz}{dt} \right) = \Delta P' \int v dS = \Delta P' I = \frac{8\eta(L+l)I^2}{\pi R^4} \quad (11)$$

Finalmente, devemos calcular a potência da força normal hidrostática

$$W_P = \int \frac{dF_P dz}{dt} = \Delta P \int dS \left( \frac{dz}{dt} \right) = \Delta P \int v dS = \Delta P I.$$

Por conservação de energia,  $W_P = W_\eta + W_{Ec}$  e, portanto,

$$\Delta P = \frac{8\eta(L+1.64R)}{\pi R^4} I + \rho \left( \frac{I}{\pi R^2} \right)^2. \quad (12)$$

Identificando  $\Delta P = \rho gh$ , a Eq. (12) nos fornece a relação entre a altura da coluna de fluido  $h$  e o fluxo de escoamento  $I$ .

Nesta prática, faça a medida da vazão  $I$  para diversas (pelo menos 10) configurações distintas de  $L$ ,  $R$ , e  $h$ . Escolha diferentes valores de  $h$ , use capilares de diferentes raios  $R$  e comprimentos  $L$ , e conecte diferentes capilares em série para obter outros valores de  $L$ . Faça uma tabela com esses dados e calcule a viscosidade. Não se esqueça de fazer a propagação de erros. Ainda nesta tabela, calcule também o número de Reynolds (6) e o comprimento da região de entrada (7). (Para os cálculos de  $Re$  e  $Le$ , use o valor de  $\eta$  na literatura.)

Para cada valor de viscosidade calculada, verifique se há um acordo com o valor de  $\eta$  tabelada na literatura. Discuta detalhadamente possíveis discrepâncias verificando se (a) o regime de escoamento é laminar, e (b) se o comprimento do tubo  $L$  é maior que o comprimento de entrada  $Le$  Eq. (7). Evidentemente, pode haver outros motivos para a discordância. Discuta-os.

**Cuidados:** (i) Procure manter a temperatura da água constante durante sua medida. Se precisar renovar água da torneira, verifique se a temperatura é a mesma. (ii) Procure manter a

<sup>2</sup> Note que isto implica que a derivação que se segue só é válida se  $L > Le$ .

<sup>3</sup> Estamos assumindo que essa taxa se mantém constante mesmo na região de entrada. Esta é uma boa aproximação no limite  $L \gg Le$ .

coluna d'água constante durante a medição da vazão. Isso requer um pouco de treinamento. (iii) Posicione conveniente o béquer usado para a medição da vazão a fim de minimizar efeitos de paralaxe. (iv) Se o fluido gotejar e houver oscilações que atrapalhem a visualização do nível de fluido no béquer, amarre um fio fino em volta da saída do tubo para evitar o gotejamento.

### **Bibliografia**

H. M. Nussenzveig, Curso de Física Básica, Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor, vol. 2, Editora Blucher (1981).

F. W. Sears e M. W. Zemansky, University Physics, Complete Edition, Editora Addison-Wesley (1955).

S. Bradford Stone, The Kinetic Energy Correction in Fluid Flow, J. Rheol. 1, 240 (1930).



## Prática 4: Zero Absoluto

### 1. Objetivo

Determinação da temperatura de zero absoluto, utilizando um termômetro de gás Hélio.

### 2. Introdução

Consideramos um gás ideal dentro de uma ampola de vidro fechada, conectada a um manômetro de coluna de mercúrio, como mostrado na figura 1. Se variarmos a temperatura do gás, como a ampola é rígida e mantém seu volume constante, a pressão do gás deve mudar. Experimentalmente pode-se observar que a variação de pressão é diretamente proporcional à pressão inicial e à temperatura. Portanto, adotando como condição inicial do gás a temperatura de 0°C, com sua correspondente pressão  $P_0$ , a pressão  $P(t)$  na temperatura  $t$  (em °C) será dada por:

$$P(t) = P_0 \beta t + P_0 .$$

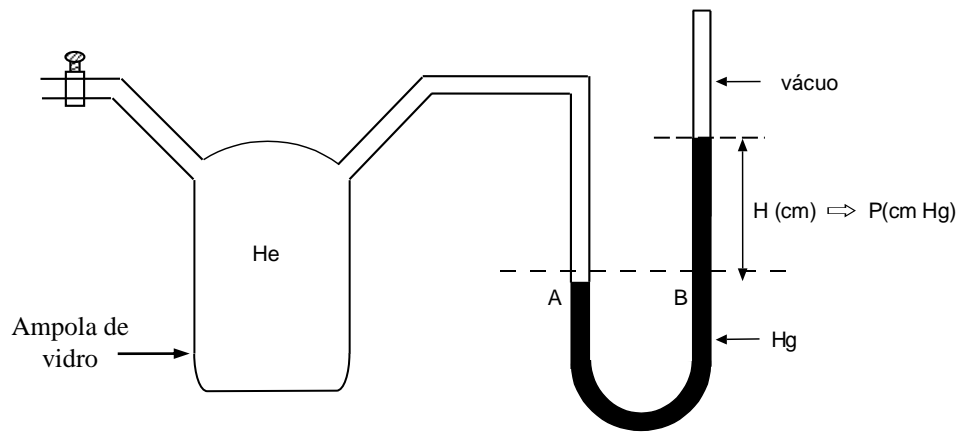
O parâmetro  $\beta$  é o coeficiente de dilatação térmica do gás ideal a *volume constante*. O valor medido para  $\beta$  é da ordem de  $0,003660 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

É possível observar que para certa temperatura  $t_Z = -1/\beta$  resulta  $P(t_Z) = 0$ . A pressão absoluta pode ser interpretada fisicamente como à transferência média de impulso pelas colisões das moléculas de gás sobre a parede do recipiente. Portanto, a pressão somente pode assumir valores positivos ou nulos. Assim,  $t_Z$  é a mínima temperatura fisicamente possível para o gás. Esta temperatura é denominada *zero absoluto*.

### 3. Procedimento experimental

O utilizado nesta prática é um termômetro de gás He, mostrado na figura 1, operando com volume constante. O bulbo de vidro contendo He será colocado em contacto com banhos térmicos estáveis a diferentes temperaturas, e a pressão do gás será medida em cada uma delas utilizando o barômetro de Torricelli, contendo mercúrio, acoplado ao bulbo. A pressão pode ser determinada medindo a altura  $H$  entre ambos meniscos do mercúrio. Observe que, pelo tipo de manômetro, a pressão determinada é *absoluta*.

- Meça a pressão do gás para diversas temperaturas: ambiente, gelo fundente (0°C para água pura), nitrogênio gasoso em ebulição (-196°C) e vapor de água em ebulição (100°C para água pura no nível do mar). Faça as medidas nessa seqüência, para minimizar os tempos de estabilização térmica durante o experimento.
- Monitore a pressão e registre o valor quando estabilizar. Se possível, monitore a temperatura do banho térmico com um termômetro apropriado.
- Construa um gráfico da pressão (medida em cm de Hg) em função da temperatura (medida em °C).
- Determine pelo método dos mínimos quadrados a temperatura de zero absoluto  $t_Z$  e o coeficiente de dilatação dos gases ideais a volume constante  $\beta$ . Compare os valores obtidos com valores de referência.



**Figura 1:** Termômetro a gás He a volume constante.

Constantes úteis:

Temperaturas de ebulição de líquidos	T (°C)
Nitrogênio	-195,95
Oxigênio	-183,0
Ar	-194,35

Densidade do mercúrio:  $13,534 \text{ g/cm}^3$   
 Constante dos gases:  $R=8,314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$

## Bibliografia

“Física” – Vol.1 – P.A. Tipler, 4ta. Edição – Livros Técnicos e Científicos, 1999.

## Método dos Mínimos Quadrados Ajuste de Curvas a dados Experimentais

Suponhamos que temos duas variáveis representadas pelas coordenadas cartesianas (x,y), das quais n pares de valores (x1 , y1 ), (x2 , y2), ... (xn , yn) são determinados experimentalmente.

Suponhamos também que aos n pontos correspondentes deve-se, na teoria e de fato, se ajustar uma reta:

$$y = ax + b \quad (4)$$

Nos defrontamos neste caso com um problema geral que é como determinar a eq. 4 a partir de um conjunto de n dados experimentais já que estes estão sujeitos a erros de medida.

Existem dois métodos para resolver este problema:

- \* Método da “Mão Livre”
- \* Método dos Mínimos Quadrados.
- \*

Ambos tratam de adaptar ao conjunto de pontos obtidos experimentalmente, a reta que mais se aproxime de todos eles.

O Método da “Mão Livre” utiliza o bom senso do observador já que ele mesmo terá que ajustar a melhor reta a partir da observação visual do conjunto de pontos (x,y).

Ajustada a melhor reta no gráfico, pode-se então determinar os valores das constantes a e b com o seguinte procedimento:

$$a = \frac{(Y_2 - Y_1)}{(X_2 - X_1)} \quad (\text{coeficiente angular}) \quad (5)$$

$$b = Y_3 \quad (\text{coeficiente linear}) \quad (6)$$

onde Y2 , Y1 , X2 e X1 são pontos pertencentes a reta previamente escolhida e Y3 corresponde à leitura no gráfico onde a mesma intercepta o eixo y.

Este procedimento tem a desvantagem de observadores distintos obterem retas com coeficientes angulares e lineares distintos, já que a escolha é subjetiva.

Para evitar o critério individual na determinação das retas, torna-se necessário encontrar-se matematicamente a “melhor reta ajustada”.

A solução deste problema é dada pelo Método dos Mínimos Quadrados onde os valores de a e b são dados por:

$$a = \frac{N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (7)$$

$$\Delta a = \sqrt{\frac{N}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}} \Delta(y_i) \quad (8)$$

$$b = \frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i y_i)(\sum x_i)}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \quad (9)$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}} \Delta(y_i) \quad (10)$$

$$\Delta(y_i) = \sqrt{\frac{\sum (ax_i + b - y_i)^2}{(N - 2)}} \quad (11)$$

Tomemos como exemplo a medida da pressão  $P$  ( $y_i$  em cm de Hg), em função da temperatura  $t$  ( $x_i$  em °C) em um termômetro a volume constante:

$y_i$ (cmHg)	$x_i$ (°C)
0,30	-196,0
1,04	0,0
1,10	25,0
1,15	50,0
1,40	98,0

Teoricamente sabemos que a pressão,  $P$ , em função da temperatura,  $t$ , a volume constante é dada pela eq. 2. Como se trata de uma reta, vamos nos utilizar do método dos mínimos quadrados para determinar as constantes  $P_0 \beta$  e  $P_0$ , as quais são equivalentes, respectivamente, aos termos  $a$  e  $b$  da eq. 4.

Para facilitar o cálculo de mínimos quadrados, vamos utilizar a seguinte tabela de dados:

$y_i$	$x_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$	$ax_i + b - y_i$	$(ax_i + b - y_i)^2$	
cmHg	°C	°C <sup>2</sup>	cmHg°C	cmHg	(cmHg) <sup>2</sup>	
0,30	-196	38416	-58,80	0,000	0,000	
1,04	0	0	0,00	-0,025	0,000	
1,10	25	625	27,50	0,006	0,000	
1,15	50	2500	57,50	0,047	0,002	
1,40	98	9604	137,20	-0,027	0,000	
$\Sigma$ :	4,99	-23	51145	163,40	---	0,002
$\Sigma^2$ :	---	529	---	---	---	---

Podemos agora determinar os parâmetros  $a$  e  $b$  a partir das equações 7 e 9 e das 4 primeiras colunas da segunda tabela de dados

$$a = 0,00365 \text{ cmHg/}^\circ\text{C}$$

$$b = 1,0148 \text{ cmHg}$$

Conhecidos  $a$  e  $b$  podemos agora determinar seus respectivos erros a partir das equações (8), (10) e (11) e da segunda tabela:

$$\Delta(y_i) = 0,0258 \text{ cmHg}$$

$$\Delta a = 0,0001 \text{ cmHg/}^\circ\text{C}$$

$$\Delta b = 0,0115 \text{ cmHg}$$

Deste modo teremos, de acordo com as equações (2) e (4), a equação da pressão em função da temperatura para um termômetro a gás a volume constante:

$$P(t) = (0,0037) \pm 0,0001)t + (1,01 \pm 0,01) = P_0 \beta t + P_0 \quad (12)$$

onde  $P$  é dado em cmHg e  $t$  em  $^{\circ}\text{C}$ .

Podemos agora, a partir da equação 12, determinar a temperatura para a qual  $P(t)=0$ , ou seja, a temperatura de zero absoluto:

$$P(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{-1,01 \pm 0,01}{0,0037 \pm 0,0001} = (-270 \pm 10) ^{\circ}\text{C}$$

Repita este procedimento de cálculo efetuando todos os passos algébricos, faça o gráfico dos pontos obtidos experimentalmente (primeira tabela) em um papel milimetrado e trace a reta definida pelo Método dos Mínimos Quadrados, eq. 12.

Autor: Esta apostila foi originalmente escrita pelo prof. Dietrich Schiel. Posteriormente foi reescrita e reestruturada pelo prof. Tito J. Bonagamba (02-92).

### **Bibliografia:**

1. Tipler P. A.; Física. 1b, Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois 1985.
2. Spiegel M. R.; Estatística, São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1984.



## Prática 5: Calorimetria

### 1. Objetivo

Determinar o calor específico de um sólido e o calor latente de condensação da água, utilizando um calorímetro com capacidade térmica determinada experimentalmente.

### 2. Introdução

#### 2.a. Calor específico

Considere dois corpos  $A$  e  $B$ , a diferentes temperaturas,  $t_a$  e  $t_b$  respectivamente, tais que  $t_a > t_b$ . Ao colocarmos os mesmos em contato, ocorre uma transferência de energia térmica, calor, do corpo  $A$  para o corpo  $B$ . A transferência de calor cessa ao ser atingido o equilíbrio térmico entre os dois corpos, ou seja, quando suas temperaturas se igualam,  $t'_a = t'_b$ .

A quantidade de calor,  $Q$ , trocada pelos corpos tem a mesma unidade de energia. Portanto no sistema internacional a unidade de quantidade de calor é o Joule (J). Por razões históricas, outra unidade é também usada, a caloria (cal), cuja relação com o Joule é:  $1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$ .

Quando um corpo muda sua temperatura desde um valor inicial  $t_i$  até uma temperatura final  $t_f$ , a quantidade de calor  $Q$  recebida (ou cedida) depende diretamente de sua massa  $m$ , e da variação de temperatura  $\Delta t = t_f - t_i$ :

$$Q = cm\Delta t \quad (1)$$

sendo o coeficiente de proporcionalidade  $c$  denominado *calor específico do corpo*, uma propriedade específica do material que o constitui. Diferentes substâncias apresentam distintos valores de calor específico, os quais também dependem da fase (sólida, líquida ou gasosa) em que ela se encontra. Na tabela 1 são mostrados valores de calor específico para algumas substâncias.

**Tabela 1: Calor específico de algumas substâncias**

substância	c(cal/g°C°)
latão	0,092
prata	0,056
ouro	0,032
gelo	0,500
água	1,000
vapor de água	0,480
alumínio	0,218
Cobre	0,093

#### 2.b. Calor latente: transições de fase.

Existem outros fenômenos térmicos em que, embora ocorram trocas de calor, a temperatura permanece constante. É o que acontece quando o estado físico da substância está passando de uma forma para outra: de líquido para gás, de sólido para líquido, de uma forma cristalina para outra, etc. Estes processos são as *transições de fase*. A energia térmica entregada (ou cedida) ao corpo não modifica sua temperatura, senão a organização molecular. A quantidade de calor necessária para que um corpo mude de fase, mantendo sua temperatura fixa, é proporcional a sua massa  $m$ :

$$Q = Lm \quad (2)$$

sendo a constante de proporcionalidade,  $L$ , denominada *calor latente*, uma característica da substância e do tipo de transição de fase. Assim, com a convenção  $Q > 0$  quando um sistema recebe

calor, e  $Q < 0$  quando cede, o calor latente poderá ser positivo ou negativo, dependendo da mudança de fase ocorrer com ganho ou perda de calor pelo sistema. Na tabela 2 são mostrados alguns valores característicos.

**Tabela 2: Calor latente de algumas transições de fase**

Transição	$L$ (cal/g)
fusão do gelo (a $0^\circ\text{C}$ )	80
solidificação da água (a $0^\circ$ )	-80
vaporização da água (a $100^\circ$ )	539
condensação do vapor de água (a $100^\circ$ )	-539

## 2.c. Medição das trocas de calor: o calorímetro

Vamos considerar um sistema termicamente isolado, onde não há troca de calor com o meio ambiente. Se  $N$  corpos, com temperaturas diferentes, forem colocados no interior desse sistema, haverá uma troca de calor entre eles de tal forma que a soma algébrica das quantidades de calor,  $\Delta Q_i$  trocadas por eles até o estabelecimento do equilíbrio térmico, será nula:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0, \quad (3)$$

pois a energia total do sistema, isolado do ambiente, deve ser constante.

No estudo das trocas de calor, os corpos ou substâncias são geralmente colocados no interior de dispositivos especiais denominados *calorímetros*, onde são mantidos termicamente isolados do meio exterior. Porém, é inevitável que algumas partes do calorímetro também participem das trocas de calor que ocorrem em seu interior, e ele mesmo mude de temperatura. Pelo fato de ele poder ser constituído de partes de diferentes materiais e, principalmente, porque um mesmo calorímetro é utilizado em diferentes medidas, costuma-se representar sua participação nas trocas de calor definindo a *capacidade térmica do calorímetro*,  $C$ . Este valor constante permite relacionar a quantidade de calor envolvida na variação de temperatura que o mesmo sofre,  $\Delta t$ :

$$Q = C \Delta t \quad (4)$$

## 3. Procedimento experimental

### 3.1 Determinação da capacidade térmica de um calorímetro

Para determinar a capacidade térmica de um calorímetro vamos considerar uma quantidade de água de massa  $m_1$  inicialmente a uma temperatura  $t_1$ , em equilíbrio no interior do calorímetro. Uma outra quantidade de água, de massa  $m_2$  a uma temperatura  $t_2$ , será colocada no interior do calorímetro. Se o calorímetro fosse ideal, com capacidade térmica nula, a transferência de calor entre estas quantidades de água seria descrita como:

$$m_1 c_a (t_f - t_1) + m_2 c_a (t_f - t_2) = 0 \quad (5)$$

onde  $t_f$  é a temperatura final de equilíbrio do sistema e  $c_a$  é o calor específico da água.

Entretanto, num calorímetro real haverá sempre troca de calor com as substâncias colocadas em seu interior, e portanto deveremos adicionar essa quantidade de calor trocada na Eq. 5:



$$m_1 c_a (t_f - t_1) + m_2 c_a (t_f - t_2) + C(t_f - t_1) = 0. \quad (6)$$

Isolando a capacidade térmica do calorímetro  $C$ , na Eq. 6, obtemos o parâmetro desejado:

$$C = m_2 c_a \frac{(t_2 - t_f)}{(t_f - t_1)} - m_1 c_a \quad (7)$$

### 3.2. Determinação do calor específico de um sólido

Determinaremos o calor específico de um corpo metálico,  $c_m$ . Neste experimento vamos considerar que uma quantidade de água de massa  $m_1$  a uma temperatura  $t_1$  esteja em equilíbrio no interior de um calorímetro com capacidade térmica  $C$ . O corpo metálico de massa  $m_2$  é preparado a uma temperatura inicial diferente,  $t_2$ , e é introduzido rapidamente no calorímetro. Após certo tempo é atingido o equilíbrio térmico na temperatura final,  $t_f$ . As trocas de calor entre os componentes devem satisfazer:

$$m_1 c_a (t_f - t_1) + m_2 c_m (t_f - t_2) + C(t_f - t_1) = 0 \quad (8)$$

Isolando a grandeza desejada,  $c_m$ , na Eq. 8 obtemos

$$c_m = \frac{(m_1 c_a + C)(t_f - t_1)}{m_2 (t_2 - t_f)} \quad (9)$$

### 3.3. Determinação do calor latente de condensação da água

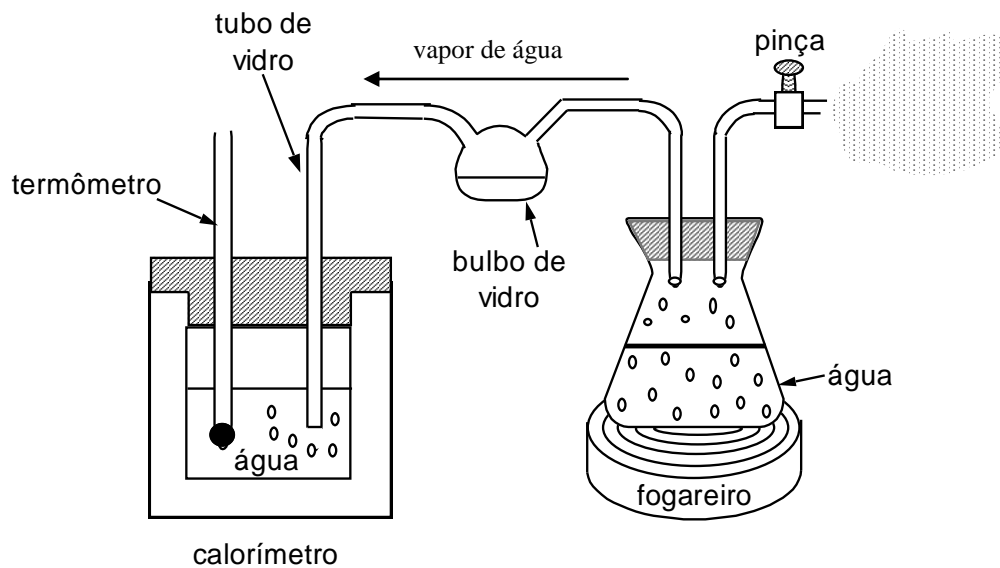
Mediremos o calor latente de condensação da água,  $L_c$ , utilizando o dispositivo mostrado na figura 1. Um balão contém água em ebulição, sendo o vapor conduzido através de um tubo de vidro até o interior de um calorímetro. O bulbo de vidro serve como armadilha para coletar gotas de água que eventualmente venham condensar durante o trajeto, garantindo assim que somente vapor vai ingressar no calorímetro. O calorímetro inicialmente contém uma massa de água  $m_1$  a temperatura inicial  $t_1$ , em equilíbrio térmico.

O tubo conduzindo o vapor é conectado com o calorímetro durante um certo tempo, ingressando uma massa de vapor  $m_2$ , com temperatura  $t_c$ , que condensará totalmente. Na situação final, o sistema completo (água, vapor condensado e calorímetro) estabiliza numa temperatura comum  $t_f$ . As trocas de calor no processo completo satisfazem a seguinte equação:

$$m_1 c_a (t_f - t_1) + C(t_f - t_1) + m_2 L_c + m_2 c_a (t_f - t_c) = 0 \quad (10)$$

onde o terceiro e o quarto termos desta expressão estão relacionados, respectivamente, com o processo de condensação da massa  $m_2$  de vapor de água e com a variação de temperatura desta mesma massa, já condensada, de  $t_c$  para  $t_f$ . A partir da Eq. 10 obtemos o valor do calor de condensação da água:

$$L_c = \frac{(m_1 c_a + C)(t_1 - t_f)}{m_2} + c_a(t_c - t_f). \quad (11)$$



**Figura 1:** Montagem experimental para determinar o calor latente de condensação da água.

## 4. Procedimento experimental

### 4.1. Determinação da capacidade térmica do calorímetro.

- Coloque no interior do calorímetro aproximadamente 120g de água,  $m_1$ , inicialmente a uma temperatura cerca de  $10^\circ\text{C}$  abaixo da temperatura ambiente.
- Meça continuamente a temperatura no interior do calorímetro, até o sistema entrar em equilíbrio térmico, com temperatura  $t_1$ .
- Adicione agora no calorímetro mais 120g de água,  $m_2$ , a temperatura  $t_2$  da ordem de  $20^\circ\text{C}$  acima da temperatura ambiente.
- Espere novamente o sistema entrar em equilíbrio e meça sua temperatura,  $t_f$ .
- Determine a capacidade térmica do calorímetro  $C$ , utilizando a eq. 7. Compare este resultado com o valor de capacidade térmica do copo de alumínio:  $C_{\text{copo}} = m_{\text{copo}} c_{\text{Al}}$ . Qual é a relação entre eles? Quem deveria ser maior?

### 4.2. Determinação do calor específico de um metal.

- Coloque no interior do calorímetro aproximadamente de 150g a 200g de água,  $m_1$ , inicialmente a uma temperatura cerca de  $5^\circ\text{C}$  abaixo da temperatura ambiente;
- Espere este sistema entrar em equilíbrio térmico e meça a temperatura no interior do calorímetro,  $t_1$ .
- Coloque agora no interior do calorímetro uma peça de metal com massa  $m_2$  e temperatura  $t_2$  igual a temperatura de ebulição da água.
- Espere o sistema entrar em equilíbrio e meça sua temperatura  $t_f$ .
- Determine o calor específico do metal utilizado a eq. 9 e compare com o valor tabelado. Discuta seus resultados. Se necessário, repita o procedimento.

### 4.3. Determinação do calor latente de condensação da água.

- a) Coloque aproximadamente 150g de água,  $m_1$ , no interior do calorímetro a uma temperatura cerca de 10°C abaixo da ambiente.
- b) Espere este sistema entrar em equilíbrio térmico e meça a temperatura no interior do calorímetro,  $t_1$ .
- c) Sem colocar o tubo de vidro no interior do calorímetro, como indicado na figura 2, aqueça a água até atingir a temperatura de ebulição,  $t_c$ . Atingida a condição de regime estacionário, onde a água está em ebulição e o vapor flui controladamente no tubo de vidro totalmente aquecido, introduza-o no interior do calorímetro.
- d) Meça a temperatura do calorímetro até que o mesmo atinja cerca de 70°C. Isto equivale a aproximadamente à entrada de 20g de vapor no calorímetro.
- e) Retire o tubo de vidro do calorímetro, tampe, espere o sistema entrar em equilíbrio e meça a temperatura no interior do calorímetro,  $t_f$ .
- f) Meça a massa de água condensada,  $m_2$ , conhecendo a massa do copo do calorímetro e a massa inicial de água previamente colocada no mesmo,  $m_1$ .
- g) Determine o calor latente de condensação da água através da eq. 11 e discuta seu sinal e compare com valor tabelado.

### Bibliografia

“Física” – Vol.1 – P.A. Tipler, 4ta. Edição – Livros Técnicos e Científicos, 1999.



## Prática 6: Primeira Lei da Termodinâmica - Equivalente Mecânico da Caloria

### 1. Objetivo

Determinar o equivalente mecânico da caloria  $E$ , isto é, a energia necessária em Joule para aumentar a temperatura de uma grama de água em um grau Celsius. A diferença do experimento clássico de Joule, onde se converte trabalho mecânico em energia térmica, converteremos trabalho elétrico sobre uma resistência em energia térmica para aquecer a massa de água.

### 1. Introdução

#### 2.a. Equivalente mecânico da caloria

No célebre experimento realizado em 1843, James Joule demonstrou quantitativamente que é possível mudar a temperatura de um sistema sem transferir calor, mas efetuando trabalho mecânico sobre ele. Este experimento estabeleceu a conexão entre o trabalho  $W$  realizado *sobre* um sistema, a variação da energia interna do sistema  $\Delta U$  e calor transferido,

$$Q = \Delta U - W, \quad (1)$$

que é a Primeira Lei da Termodinâmica. Como consequência do experimento de Joule, é possível determinar qual é o fator de conversão entre as unidades de trabalho (Joule) e energia térmica (caloria) ou, em outras palavras, quantos Joule são necessários para elevar a temperatura de 1 grama de água em 1 grau Celsius. Este fator  $E$  é conhecido como “equivalente mecânico da caloria”. A palavra “mecânico” se origina na circunstância histórica do experimento de Joule, que agitava a água através de um sistema de paletas movimentadas por polias e massas em queda. No entanto, a equivalência trabalho-energia é muito mais geral. Há outras formas de fazer trabalho sobre um sistema físico e assim aumentar sua temperatura, por exemplo através de trabalho elétrico.

#### 2.b. Trabalho elétrico

É possível movimentar cargas elétricas ao longo de um material, aplicando forças apropriadas. Neste caso, estamos fornecendo trabalho sobre o conjunto de cargas, pois mudamos sua energia cinética. Um fluxo de elétrons se movimentando ao longo de um fio de material constitui uma *corrente elétrica*. A unidade de corrente elétrica é o Ampere (A). Para manter essa corrente em movimento, é necessário que exista uma *diferença de potencial elétrico* entre os extremos desse fio. A unidade de potencial elétrico é o Volt (V). A ação da diferença de potencial elétrico sobre as cargas elétricas é análoga à ação da diferença de potencial gravitatório sobre as massas: ocorre movimento na direção do menor potencial.

Supondo que nos extremos de um fio fosse aplicada uma diferença de potencial  $V$ , obtida por exemplo de uma bateria, e ao longo do fio circula uma corrente de cargas  $I$ , o trabalho  $W$  feito pelo gerador sobre as cargas pode ser calculado da expressão:

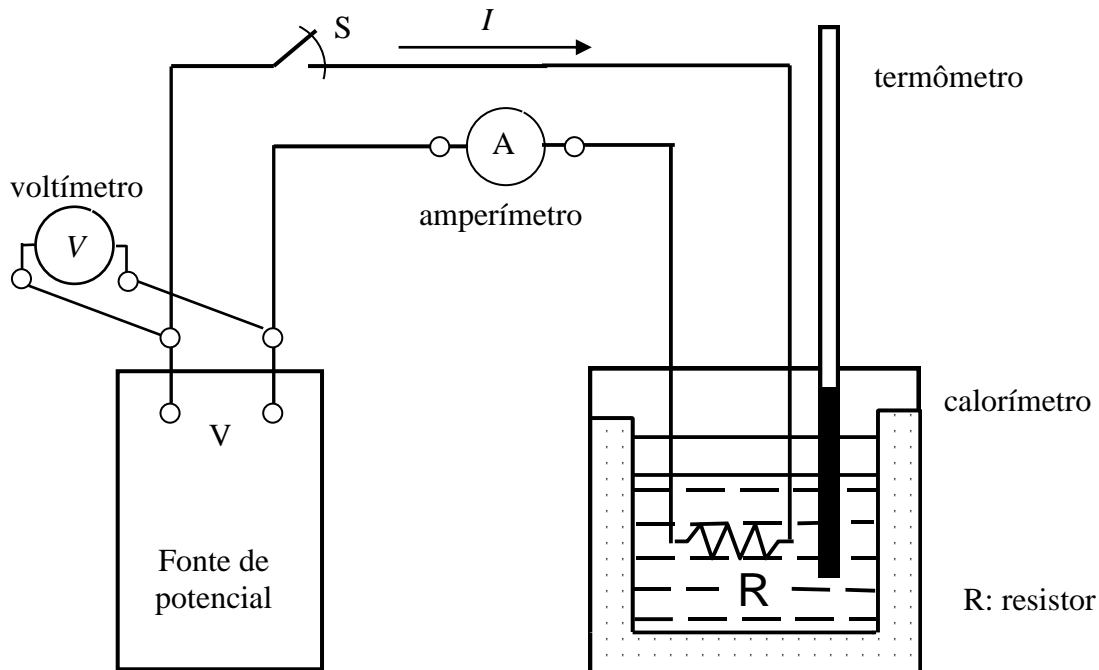
$$W = V I t, \quad (2)$$

sendo  $t$  o tempo durante o qual o potencial  $V$  está aplicado sobre o fio. Medindo a corrente em Ampere, o potencial em Volt e o tempo em segundos, o trabalho resulta em unidades de Joule.

No entanto, o movimento dos elétrons dentro do material é perturbado pela presença dos íons. Se a bateria for desligada, a corrente cessa pois as cargas elétricas acabam transferindo sua energia cinética para os íons, que realizam movimentos oscilatórios com maior energia cinética. A equação (2) mostra que o gerador deve fazer trabalho permanentemente para manter os elétrons circulando, compensando a energia que eles perdem para os íons. O movimento vibratório dos íons constitui energia térmica do material. É por este motivo que a temperatura dos materiais aumenta

quando circula uma corrente elétrica. Assim, o trabalho feito pela bateria sobre os elétrons é transformado em energia térmica. Este fenômeno é aproveitado em aplicações cotidianas tais como o ferro de passar ou o chuveiro elétrico.

No experimento, faremos trabalho elétrico (2) sobre um fio condutor e aproveitaremos a elevação de temperatura do fio para aquecer uma massa de água dentro de um calorímetro.



**Figura 1:** Montagem experimental para medir o equivalente mecânico da caloria  $E$ .

## 2. Experimental

Na figura 1 está esquematizado o dispositivo experimental. Uma bateria (fonte de potencial) é conectada mediante fios condutores a um *resistor* (R), que é apenas um fio longo de material parcialmente condutor montado dentro de uma carcaça cerâmica. O resistor fica no interior do calorímetro, mergulhado completamente na água. Quando o interruptor  $S$  for fechado, a corrente de elétrons  $I$  circula pelo circuito e o resistor aquece. Se o interruptor permanece fechado durante um intervalo de tempo  $t$ , o trabalho realizado pela fonte de voltagem sobre o sistema é dado pela expressão (2). A diferença de potencial  $V$  aplicada nos extremos do circuito e a corrente  $I$  circulante são medidas diretamente com um voltímetro e um amperímetro, respectivamente. Mediante o termômetro é possível monitorar a variação de temperatura dentro do calorímetro. A massa de água  $m_A$  se encontra inicialmente a temperatura  $T_i$ . Após um tempo  $t$  a temperatura atinge um valor  $T$ . Podemos aplicar ao sistema (calorímetro + água) a Primeira Lei da Termodinâmica (1). Considerando que o sistema está termicamente isolado e portanto não há trocas de calor com o ambiente externo  $Q=0$ , e então resulta  $\Delta U = W$ . A variação de energia interna  $\Delta U$  tem duas contribuições: o aumento de temperatura da massa de água e do próprio calorímetro:

$$\Delta U = m_A c_A (T - T_i) + m_C c_{Al} (T - T_i), \quad (3)$$

onde  $c_A$  é o calor específico da água,  $m_C$  é a massa do copo de alumínio do calorímetro e  $c_{Al}$  é o calor específico do alumínio. Utilizando o valor de  $c_A = 1 \text{ cal/(g } ^\circ\text{C)}$  e  $c_{Al} = 0,215 \text{ cal/(g } ^\circ\text{C)}$ , as unidades na equação (3) são calorias. Quando formos igualar (3) com  $W$  resultante da equação (2),

deveremos considerar a relação entre Joule e calorias, isto é, o equivalente mecânico do calor  $E$ . Portanto:

$$m_A c_A (T - T_i) + m_C c_{Al} (T - T_i) = \frac{W}{E}. \quad (4)$$

Substituindo  $W$  pela equação (2) e expressando  $T$  como função do tempo de aquecimento  $t$ :

$$T = \frac{V I}{(m_A c_A + m_C c_{Al}) E} t + T_i. \quad (4)$$

Desta forma a dependência de  $T$  com  $t$  resulta linear, e o valor do equivalente mecânico da caloria  $E$  pode se determinar da inclinação da reta, conhecendo o resto dos parâmetros experimentais.

### 3. Procedimento

- a) Determine o valor da massa do copo de alumínio do calorímetro.
- b) Verifique a conexão do voltímetro e do amperímetro no circuito, **ANTES DE CONECTAR OU LIGAR A FONTE**:
  - **Voltímetro** – em paralelo à fonte, na escala de corrente contínua (DC) com máximo de 20 V
  - **Amperímetro** – em série com a fonte, escala de corrente contínua (DC) com máximo de 2 A
- c) Coloque inicialmente uma massa de água da ordem de 200g a uma temperatura da ordem de 5°C abaixo da temperatura ambiente, pelo menos. Verifique que o resistor fique completamente submerso. Permita o calorímetro equilibrar com a água a uma temperatura  $T_i$ .
- d) Ligue a fonte e, conferindo com o voltímetro, coloque uma voltagem de 10V. Conecte a fonte ao circuito e confira a corrente ( $\sim 2$  A). Meça o tempo  $t$  durante o qual a corrente está circulando pelo resistor. Registre a temperatura e o tempo, aproximadamente a cada incremento de temperatura de um grau.
- e) Registre os valores até o sistema atingir uma temperatura  $T_f$  da ordem de 5°C acima da temperatura ambiente, como mínimo.
- f) Faça um gráfico e verifique se a relação entre  $T$  e  $t$  é linear. Discuta.
- g) Utilizando o método de mínimos quadrados determine a melhor reta que represente a região linear dos dados experimentais coletados e obtenha o valor de  $E$ , considerando a relação (4).

#### **ATENÇÃO:**

- **CONFIRA CUIDADOSAMENTE A CONEXÃO DOS INSTRUMENTOS.**
- **ANTES DE CONECTAR OU LIGAR A FONTE, PEÇA AOS DOCENTES OU TECNICOS RESPONSÁVEIS PARA CONFERIR A CONEXÃO.**





## Prática 7: Processos sobre gases - Medida do fator $\gamma$ do ar

### 1. Objetivo

Determinar o valor do fator  $\gamma$  do ar, a razão entre os calores específicos a pressão e volume constantes  $\gamma = c_p/c_v$ , utilizando o método de Clément e Desormes.

### 4. Introdução

#### 2.a. O método de Cléments e Desormes

O experimento para determinar o fator  $\gamma$  de gases foi realizado pela primeira vez em 1819 pelos químicos Charles-Bernard Desormes e Nicolas Clément. O método consiste em aplicar sobre o gás, suposto ideal, uma série de dois processos ilustrados na figura 1: uma expansão adiabática e um aquecimento isocórico. No estado de equilíbrio (1), dito inicial, uma certa quantidade de moles  $n$  de gás se encontram a pressão  $P_1$  acima da pressão atmosférica, com volume  $V_1$  e temperatura  $T_1$  igual à temperatura ambiente. Uma expansão adiabática é realizada até o estado (2) com pressão  $P_2$  igual à pressão atmosférica, volume  $V_2$  e temperatura  $T_2$  menor que a temperatura ambiente. Imediatamente é realizado um aquecimento isocórico até o estado (3), a temperatura ambiente  $T_1$  e pressão  $P_3$ .

Para calcular o fator  $\gamma$  do gás, consideramos a relação entre  $P$  e  $V$  a longo de um processo adiabático:  $P V^\gamma = \text{constante}$ . Assim podemos escrever que

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \quad . \quad (1)$$

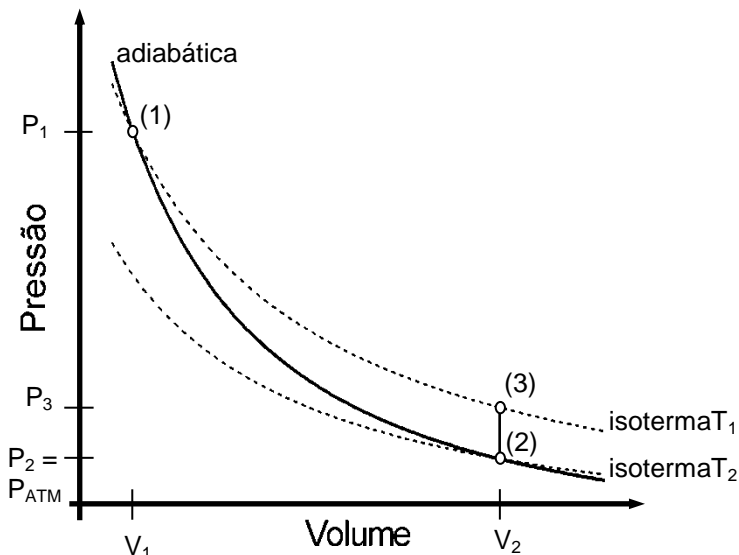
Desta relação é possível chegar a escrever o fator  $\gamma$  como

$$\gamma = \frac{\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)} \quad . \quad (2)$$

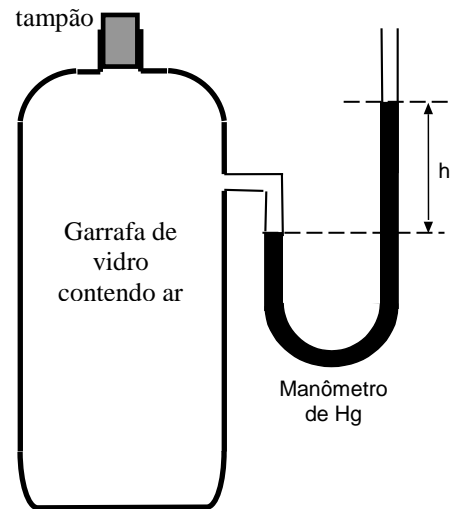
Para obter o resultado apenas em termos de pressões e não de volumes, que na prática serão difíceis de medir com precisão, pode-se considerar agora o processo isocórico (2)  $\rightarrow$  (3) e a condição que os estados (1) e (3) se encontram sobre a mesma isoterma de temperatura  $T_1$ . Resulta assim

$$\gamma = \frac{\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{\ln\left(\frac{P_3}{P_1}\right)} \quad . \quad (3)$$

Portanto, o valor de  $\gamma$  pode ser obtido medindo apenas os três valores de pressão, sendo  $P_2$  a pressão atmosférica.



**Figura 1:** Diagrama P-V para o processo sobre o gás aplicado no experimento de Cléments e Desormes: entre o estado inicial (1) e o (2) o processo é adiabático. Entre (2) e (3) é isocórico.



**Figura 2:** Esquema da montagem do experimento de Clements e Desormes com o manômetro acoplado.

## 2.b. Medida das pressões

No experimento montado no laboratório, as pressões serão medidas usando manômetros de coluna de mercúrio abertos no extremo, tal como indicado na figura 2. Neste caso as pressões em função da altura  $h$  da coluna resultam:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{ATM} + \rho g h_1 \\ P_2 &= P_{ATM} \\ P_3 &= P_{ATM} + \rho g h_3 . \end{aligned} \quad (4)$$

Observe que para  $P_2$ , que é à pressão atmosférica  $P_{ATM}$ , a altura de coluna de mercúrio deve ser nula:  $h_2 = 0$ . Com estas expressões e com (3) já é possível calcular  $\gamma$  a partir das medidas de  $P_{ATM}$ ,  $h_1$  e  $h_3$ . No entanto, é possível ainda obter uma expressão mais compacta para  $\gamma$  em função das alturas medidas nos manômetros fazendo uma aproximação em (3). Em primeiro lugar, reescrevemos as pressões  $P_1$  e  $P_3$  como

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{ATM} \left( 1 + \frac{\rho g h_1}{P_{ATM}} \right) \\ P_3 &= P_{ATM} \left( 1 + \frac{\rho g h_3}{P_{ATM}} \right) . \end{aligned} \quad (5)$$

Em segundo lugar, podemos utilizar uma expressão da função logaritmo na forma de uma série infinita:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

que é válida quando  $x < 1$ . Quanto mais termos sejam considerados na série do lado direito, mais próximo será o resultado da soma ao valor de  $\ln(1+x)$ . A aproximação mais simples desta

expressão, válida quando  $x$  é muito pequeno ( $x \ll 1$ ) é simplesmente considerar o primeiro termo da série

$$\ln(1+x) \cong x . \quad (6)$$

Substituindo em (3) as expressões de (4) para  $P_1$  e  $P_3$ , é possível usar a aproximação (6) nos logaritmos, identificando a  $x$  com a razão  $\frac{\rho g h}{P_{ATM}}$ , resultando a expressão aproximada

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_3} . \quad (7)$$

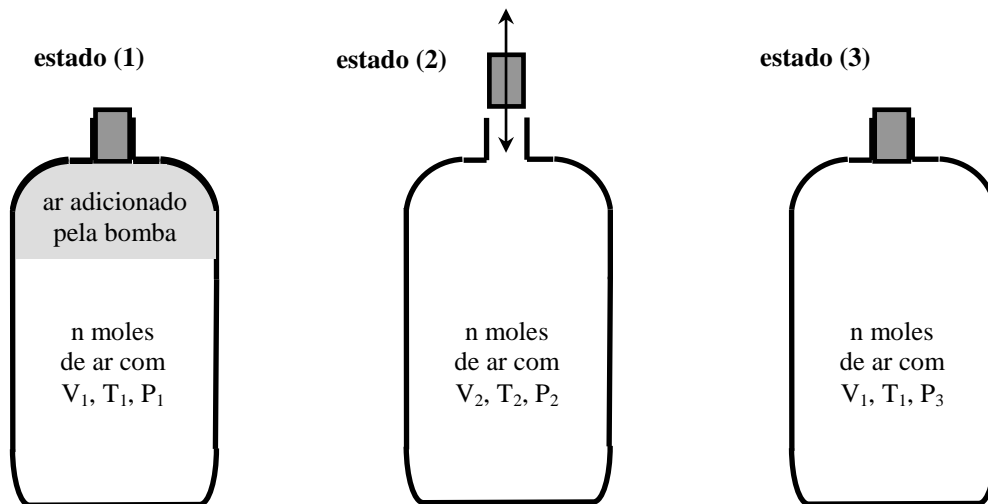


Figura 3: Os três estados considerados no processo do experimento de Clements e Desormes.

### 3. Experimento

O recipiente utilizado para conter o gás (ár) será um garrafão de vidro com um manômetro de mercúrio acoplado, como mostrado na figura 2. A garrafa tem uma rolha para tampar/destampar e uma entrada adicional acoplada a uma bomba manual, para aumentar a pressão interior do gás. O procedimento sugerido está indicado a seguir, seguindo a seqüência ilustrada na figura 3.

- Preparação:** o garrafão é tampado e, utilizando a bomba manual, certa quantidade de ar é injetada para aumentar a pressão interna. Espere o sistema entrar em equilíbrio (observe o manômetro) num estado com temperatura ambiente  $T_1$  e pressão  $P_1$  (e altura  $h_1$  no manômetro). Este é o estado inicial (1). Registre o valor de  $h_1$ .
- Processo adiabático:** destampe e feche rapidamente o garrafão. Desta forma a pressão interna deve ficar igual à pressão atmosférica:  $P_2 = P_{ATM}$ . Como o processo de abertura/tampado é rápido, o gás que está no interior do garrafão não tem tempo de trocar calor com o ambiente nesse intervalo de tempo: a condutividade térmica do vidro é baixa. Portanto, o processo pode ser considerado adiabático. Quando o tampão é fechado, estamos no estado (2).
- Processo isocórico:** imediatamente após a expansão adiabática o gás deveria estar numa temperatura  $T_2$  menor que a temperatura ambiente. Espere um certo tempo até a temperatura do sistema atingir a temperatura ambiente  $T_1$ . Como a garrafa é rígida, o processo ocorre com volume constante  $V_2$ . Quando o gás atingir a  $T_1$ , o sistema se encontra no estado final (3). Registre a pressão  $P_3$  nessa condição (altura  $h_3$ ).

- d. Calcule  $\gamma$  e repita o processo experimentando com diferentes tempos de abertura do tampão do garrafão e decida qual é o mais conveniente. Tempos curtos demais tal vez não sejam suficientes para liberar o excesso de pressão e atingir a pressão atmosférica dentro da garrafa. Tempos longos demais são inconvenientes, pois o ar trocará calor com o ambiente, e o processo já não será adiabático.
- e. Uma vez escolhido o tempo mais apropriado, repita várias vezes o processo para fazer uma estatística sobre  $\gamma$  (média e desvio padrão). Discuta o resultado obtido, comparando com os valores esperados para gases monoatômicos ( $\gamma \approx 1,67$ ), diatômicos ( $\gamma \approx 1,4$ ) e poliatômicos ( $\gamma \approx 1,3$ ).

Questões para serem discutidas *antes* de realizar a prática, e incluídas no relatório:

- 1) Demonstre a expressão (3).
- 2) Demonstre a expressão (7).

Questões para serem discutidas durante a prática, e incluídas no relatório:

- 1) Qual é a quantidade de gás que efetivamente participa do processo completo (1)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  (3)? É todo o ar que está no garrafão após pressurizar com a bomba, no estado (1)?
- 2) Usando valores experimentais, faça um cálculo aproximado do número de moles de ar  $n$  que efetivamente participaram no processo.

## **Bibliografia**

“Física” – Vol.1 – P.A. Tipler, 4ta. Edição – Livros Técnicos e Científicos, 1999.

## Apêndice 1

Formulas de propagação de incertezas para as operações básicas e algumas funções importantes.

- **Adição:**  $z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x) + (y \pm \Delta y) = (x + y) \pm (\Delta x + \Delta y)$
- **Subtração:**  $z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x) - (y \pm \Delta y) = (x - y) \pm (\Delta x + \Delta y)$
- **Multiplicação:**  $z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x) \cdot (y \pm \Delta y) = (x \cdot y) \pm (x\Delta y + y\Delta x)$
- **Multiplicação por uma constante:**  $z \pm \Delta z = c (x \pm \Delta x) = cx \pm c\Delta x$
- **Potência:**  $z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x)^n = x^n \pm n x^{n-1} \cdot \Delta x$
- **Divisão:**  $z \pm \Delta z = \frac{x \pm \Delta x}{y \pm \Delta y} = \frac{x}{y} \pm \frac{1}{y^2} (x\Delta y + y\Delta x)$
- **Cosseno:**  $z \pm \Delta z = \cos (x \pm \Delta x) = \cos x \pm \text{sen } x \cdot (\Delta x)$
- **Seno:**  $z \pm \Delta z = \text{sen } (x \pm \Delta x) = \text{sen } x \pm \cos x \cdot (\Delta x)$
- **Logarítmo:**  $z \pm \Delta z = \log_c (x \pm \Delta x) = \log_c x \pm \frac{\log_c e}{x} \cdot \Delta x$
- **Exponencial:**  $z \pm \Delta z = c^{(x \pm \Delta x)} = c^x \pm c^x \cdot \ln c \cdot (\Delta x)$



## Apêndice 2

### Método de ajuste por mínimos quadrados

O método dos mínimos quadrados é um método de análise gráfica que permite determinar os parâmetros de uma curva de forma analítica. No caso de uma função linear  $y(x) = a x + b$ , o método permite ajustar os valores dos coeficientes angular  $a$  e linear  $b$ , a partir da tabela de valores medidos para  $x_i$  e  $y_i$ . O princípio básico do método é determinar  $a$  e  $b$  a partir da seguinte regra: *a soma dos quadrados das distâncias entre os pontos experimentais e a curva que se quer ajustar deve ser mínima*. Quando esta condição é satisfeita temos a melhor curva ajustada pelo método. No caso linear, os coeficientes são determinados a partir das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \text{inclinação da reta (coeficiente angular):} \quad a &= \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \\ \text{ordenada na origem (coeficiente linear):} \quad b &= \bar{y} - a \bar{x} \end{aligned}$$

sendo  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  os valores médios sobre a tabela de valores de  $x_i$  e  $y_i$ :

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{N} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\sum_i y_i}{N}$$

e os somatórios sobre os  $N$  dados da tabela. A incerteza associada aos coeficientes é:

$$\Delta a = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}} \quad \text{e} \quad \Delta b = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i)^2}{N \sum_i (x_i - \bar{x})^2}} \sigma$$

sendo a quantidade  $\sigma$  definida como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (a x_i + b - y_i)^2}{N - 2}}.$$

Esta quantidade  $\sigma$  é aproximadamente a *média* das quantidades  $(a x_i + b - y_i)^2$ , os quadrados das distâncias entre o dado medido  $y_i$  e o valor calculado através da reta  $a x_i + b$ . Este valor  $\sigma$  caracteriza a magnitude da dispersão dos dados experimentais com relação à melhor reta ajustada.