SISTEMAS DE MUITAS PARTÍCULAS

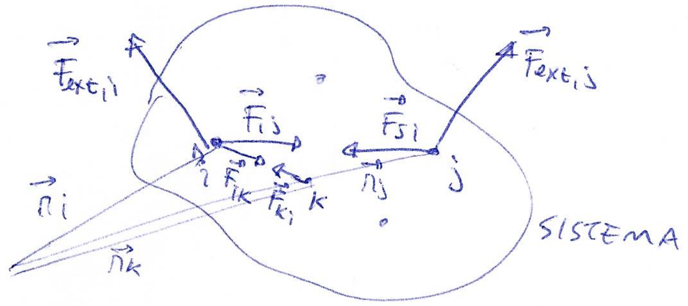
1 MOMENTO DE 1 PARTÍCULA

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

$\vec{p} \equiv$ MOMENTO LINEAR $= m\vec{v} \rightarrow$ VETOR

$\vec{F} =$ VARIAÇÃO TEMPORAL DO MOMENTO (P/ 1 PARTÍCULA)

2 VÁRIAS PARTÍCULAS



$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (AÇÃO - REAÇÃO)

$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$

$$\vec{F}_{R,i} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \quad \vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$$

mas $\vec{F}_{R,i} = \vec{F}_{ext,i} + \underbrace{\text{FORÇAS INTERNAS}}_{\sum_{k\neq i} \vec{F}_{ik}}$

SOMAR TODAS AS FORÇAS

$$\vec{F}_{ext,1} + \dots + \vec{F}_{ext,N} + (\text{FORÇAS INTERNAS})_1 + \dots + (\text{FORÇAS INTERNAS})_N = \vec{F}_{TOTAL}$$

MAS $\sum$ FORÇAS INTERNAS $= 0$ (3ª LEI DE NEWTON)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{TOTAL} = \sum \text{FORÇAS EXTERNAS} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ext,i} = \vec{F}_{ext}}$$

MAS PODEMOS REESCREVE A FORÇA TOTAL COMO

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{ext,1} + \left(\sum \text{FORÇAS INTERNAS}\right)_1 + \dots + \vec{F}_{ext,N} + \left(\sum \text{FORÇAS INT}\right)_N$$

$$= \vec{F}_{R,1} + \vec{F}_{R,2} + \dots + \vec{F}_{R,N}$$

$$= \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} + \dots + \frac{d\vec{P}_N}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_N\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{total} = \frac{d}{dt}\vec{P}_{total}}$$

LOGO $\boxed{\vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{P}_{tot}}{dt}}$

3 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

SE $\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \dfrac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{P}_{tot} = cte}$

EX 1: $v_1 = 4\,m/s$, $m_1 = 1\,kg$ $\qquad v_2 = 2\,m/s$, $m_2 = 5$ $\qquad$ COLIDE E GRUDA $\qquad v' = ?$

COMO NÃO HÁ FORÇAS EXTERNAS $\Rightarrow \vec{P}_{ANTES} = \vec{P}_{DEPOIS}$

$$\vec{P}_{ANTES} = (m_1 v_1 + m_2 v_2)\,\hat{x} = 14\,N\cdot s\,\hat{x}$$
$$\vec{P}_{DEPOIS} = (m_1 + m_2)\,v'\,\hat{x} = 6\,kg \cdot v'\,\hat{x} \Rightarrow \boxed{v' = \frac{7}{3}\,m/s}$$

$$E_{ANTES} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 18\,J$$
$$E_{DEPOIS} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v'^2 = 3 \times \left(\frac{7}{3}\right)^2 = 16.33\ldots\,J$$
$$\Rightarrow E_{ANTES} \neq E_{DEPOIS}$$

EX 2: $v_1 = 4\,m/s$ $\qquad v_2 = -2\,m/s$ $\qquad$ COLIDE E GRUDA $\qquad v' = ?$

$\rightarrow v' = -1\,m/s$

$E_A = 18\,J$

$E_{DEPOIS} = 3\,J$

4 MOMENTO TOTAL E CENTRO DE MASSA

$$\vec{P}_{TOT} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_N \vec{v}_N$$

CASO ESPECIAL: SE $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \dots = \vec{v}_N = \vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{P}_{TOT} = (m_1 + m_2 + \dots + m_N)\vec{v} = M_{TOT}\vec{v}$$

= MOMENTO DE 1 ÚNICA PARTÍCULA DE MASSA M_{TOT} COM VELOCIDADE $\vec{v}$

PERGUNTA: QDO $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2 \neq \vec{v}_3 = \dots$, existe ESSA "PARTÍCULA" DE REPRESENTA O $\vec{P}_{TOT}$?

RESPOSTA: SIM $\rightarrow$ $\vec{P}_{TOT} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_N\vec{v}_N = M_{TOT}\vec{v}_{CM}$

ESSA "PARTÍCULA" É REPRESENTADA PELO CENTRO DE MASSA

$\Rightarrow$ A VELOCIDADE DO CENTRO DE MASSA É

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + \dots + m_N\vec{v}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M_{TOT}}$$

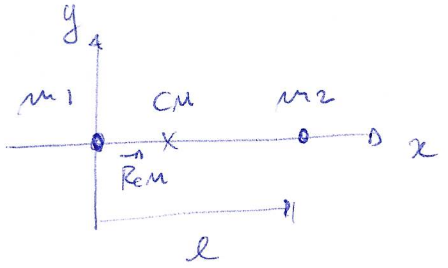
$$\boxed{M_{TOT}\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i} \rightarrow \boxed{\vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i} = \vec{P}_{TOT}$$

E A POSIÇÃO DO CENTRO DE MASSA?

$$M_{TOT}\frac{d\vec{R}_{CM}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(M_{TOT}\vec{R}_{CM}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{TOT}\vec{R}_{CM} = \sum_i m_i \vec{r}_i}$$

EXEMPLO:



$$M_{tot}\vec{R}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \Rightarrow \begin{cases}(m_1+m_2)\,x_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 \\ (m_1+m_2)\,y_{cm} = m_1y_1 + m_2y_2\end{cases}$$

$\vec{r}_1 = (0,0)$

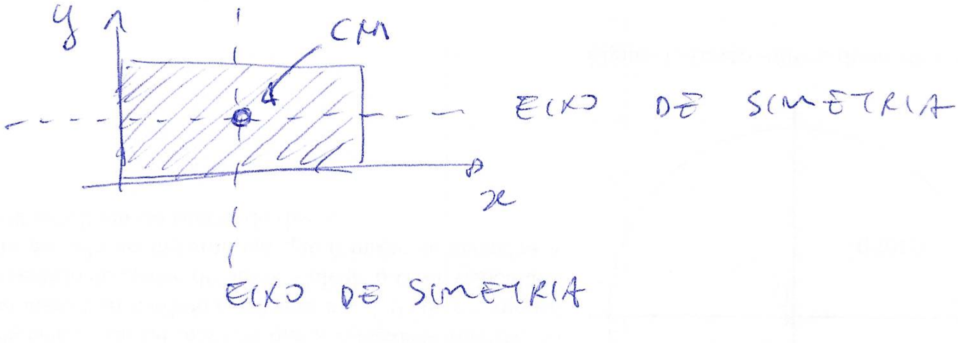
$\vec{r}_2 = (\ell, 0)$ $\quad \Rightarrow \quad y_{cm} = 0 \,, \quad x_{cm} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\,\ell$

$$\vec{R}_{cm} = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\ell \,,\, 0\right)$$

- $m_2 \gg m_1 \Rightarrow \vec{R}_{cm} \approx \vec{r}_2$
- $m_2 \ll m_1 \Rightarrow \vec{R}_{cm} \approx \vec{r}_1$

SIMETRIAS: O CM ESTÁ SEMPRE EM SOBRE UM EIXO DE SIMETRIA:

EXEMPLO: ~~QUADRADO~~ RETÂNGULO HOMOGÊNEO

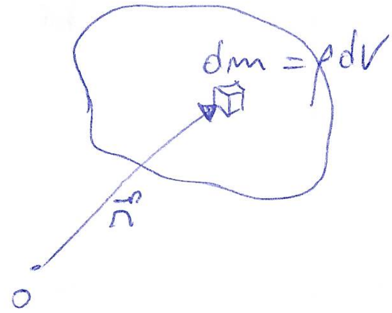


BÔNUS:

COMO CALCULAR O CENTRO DE MASSA DE MANEIRA GENÉRICA?

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \xrightarrow[m_i \to 0]{\text{LIMITE}} \frac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm}$$

$$= \frac{\int \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,dV}{\int \rho(\vec{r})\,dV}$$



5 MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(M_{tot}\vec{v}_{CM}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{ext} = M_{tot}\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$$, se M_{tot} do sistema não mudar

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = M_{tot}\,\vec{a}_{CM}}$$

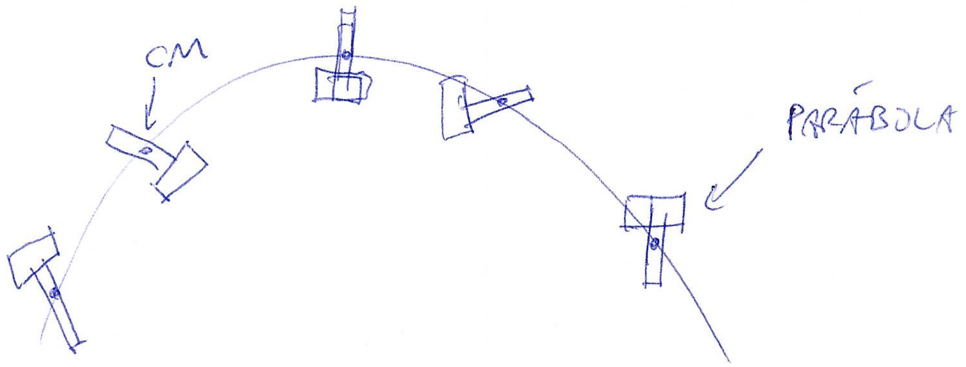
1 - se $\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{CM} = cte \Rightarrow \vec{v}_{CM} = cte$

NÃO SE PODE MUDAR O MOVIMENTO DO CM DO SISTEMA POR FORÇAS INTERNAS!!!

- BARÃO DE MUNCHAUSSEN É UMA EXCESSÃO

DESAFIO → EXPLICAR O BALANÇO

2 - SE $\vec{F}_{ext} = cte \Rightarrow$ CM DESCREVE UM MUV



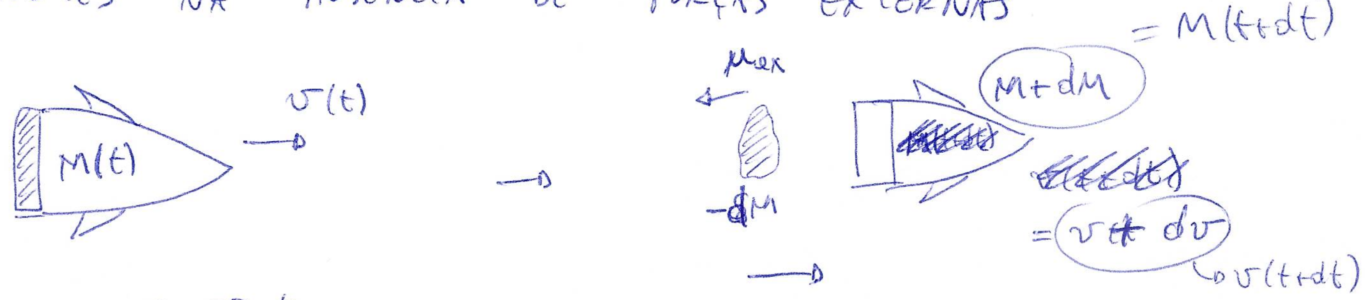
$$\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ext,i} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{g} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\vec{g} = M_{tot}\vec{g}$$

$$= M_{tot}\,\vec{a}_{CM}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{CM} = \vec{g}}$$

⑥ SISTEMA DE MASSA VARIÁVEL

a) FOGUETES NA AUSÊNCIA DE FORÇAS EXTERNAS



INSTANTE t INSTANTE $t+dt$

$\vec{\mu}_{ex} \equiv$ VELOCIDADE DE EXAUSTÃO DOS GASES EM RELAÇÃO AO FOGUETE

— NOTE QUE $dM < 0$

~~INSTANTE~~ t : $\vec{P}_{ANTES} = M\vec{v}$

" " $t+dt$: $\vec{P}_{DEPOIS} = (M+dM)(\vec{v}+d\vec{v}) + (-dM)(\vec{v}+\vec{\mu}_{ex})$

COMO $\vec{P}_{ANTES} = \vec{P}_{DEPOIS} \Rightarrow \cancel{Mv} = \cancel{Mv} + Mdv + \cancel{vdM} - \cancel{vdM} + \mu dM$

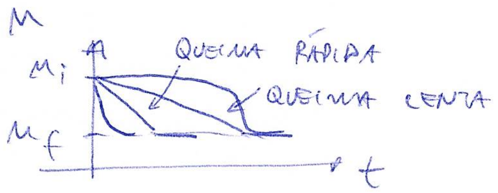
$$\Rightarrow \boxed{M\,d\vec{v} = +\underbrace{\vec{\mu}_{ex}\,dM}_{}}$$

IMPULSO DO GÁS NO INTERVALO DE TEMPO dt

MASSA DO FOGUETE

VARIAÇÃO DO MOMENTO DO FOGUETE ENTRE t e $t+dt$

$$\Rightarrow \int_{v_i}^{v_f} dv = -|\vec{\mu}_{ex}| \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M} \Rightarrow v_f - v_i = -|\vec{\mu}_{ex}| \ln\left(\frac{M_f}{M_i}\right)$$



$$\Rightarrow \boxed{v_f = v_i + \mu_{ex} \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)}$$

*OBS: INDEPENDE DA RAPIDEZ COM QUE O COMBUSTÍVEL É QUEIMADO !!! Δv SÓ DEPENDE DE μ_{ex}, M_i e M_f

• OUTRO ASPECTO DE $M\,dv = -u_{ex}\,dM$

$$\Rightarrow M\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u}_{ex}\frac{dM}{dt} \Rightarrow \boxed{M\vec{a} = -u_{ex}\frac{dM}{dt}}$$

FORÇA SOBRE O FOGUETE

EMPUXO DO FOGUETE

b) FOGUETES NA PRESENÇA DE ~~COM~~ FORÇAS EXTERNAS

$$P(t+dt) = (M+dM)(\vec{v}+d\vec{v}) + (-dM)(\vec{v}+\vec{u}_{ex})$$

$$P(t) = M\vec{v}$$

$$\vec{F}_{ext}(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{P(t+dt)-P(t)}{dt} = \frac{M\,d\vec{v} + \vec{u}_{ex}\,dM}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{u}_{ex}\frac{dM}{dt} \rightarrow \boxed{M\frac{d\vec{v}}{dt} = +\vec{u}_{ex}\frac{dM}{dt} + \vec{F}_{ext}}$$

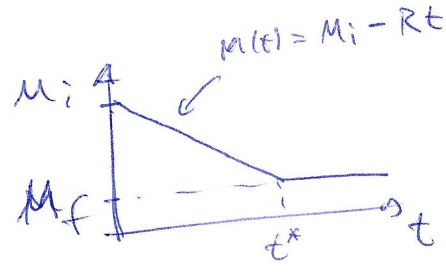
FORÇA RESULTANTE SOBRE O FOGUETE

EMPUXO DO MOTOR

FORÇA EXTERNA SOBRE O FOGUETE

– EM UM CAMPO GRAVITACIONAL CONSTANTE

$$\vec{F}_{ext} = M(t)\,\vec{g}$$



EXEMPLO: FOGUETE NA VERTICAL ONDE

$$u_{ex} = cte$$

$$t^* = \frac{M_i - M_f}{R}$$

$$\Rightarrow (M_i - Rt)\frac{dv}{dt} = +u_{ex}R - (M_i - Rt)g$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g + \frac{u_{ex}R}{M_i - Rt} \rightarrow v(t) - v_i = -gt + u_{ex}\ln\left(\frac{M_i}{M_i - Rt}\right)$$

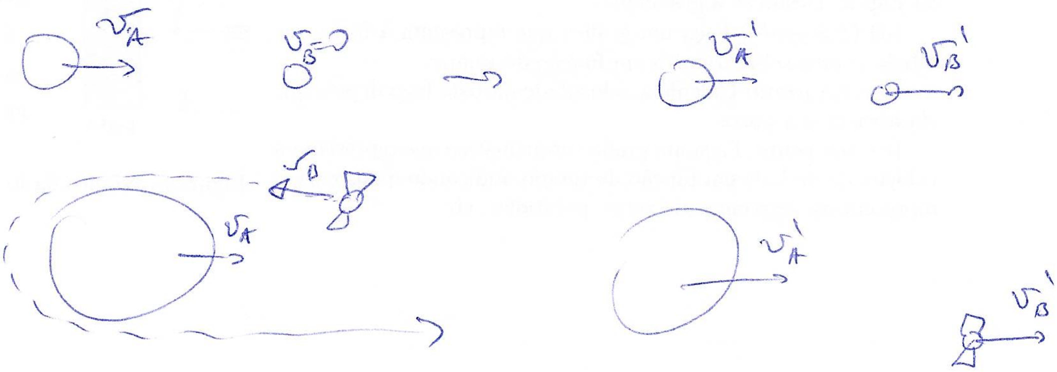
se $t < t^*$

COLISÕES

1 IMPULSO

- CARACTERÍSTICAS DAS COLISÕES → TROCA DE MOMENTO

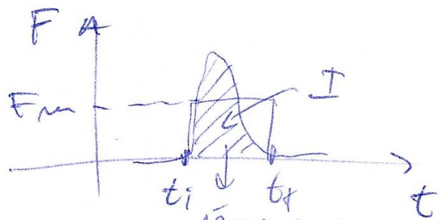
EX:



HÁ INTERAÇÃO ⇒ HÁ FORÇAS ATUANDO

IMPULSO ≡ VARIAÇÃO DE MOMENTO DEVIDO A UMA FORÇA

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt$$



ÁREA DEBAIXO DA CURVA $F \times t$

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt}\, dt = \vec{P}_f - \vec{P}_i$$

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{P}}$$

$$\text{FORÇA MÉDIA} \equiv \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \vec{F}_m$$

$$\vec{F}_{\text{média}} = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} F(t)\, dt$$

2 Colisões e energia

Elásticas ≡ conservam energia cinética

Inelásticas ≡ não conservam E_c

- Perfeitamente inelásticas → perda de E_c é máxima

3 Colisões perfeitamente inelásticas

~~Ref. CA~~ Ref. Lab:

$P_A = m_A v_A + m_B v_B$

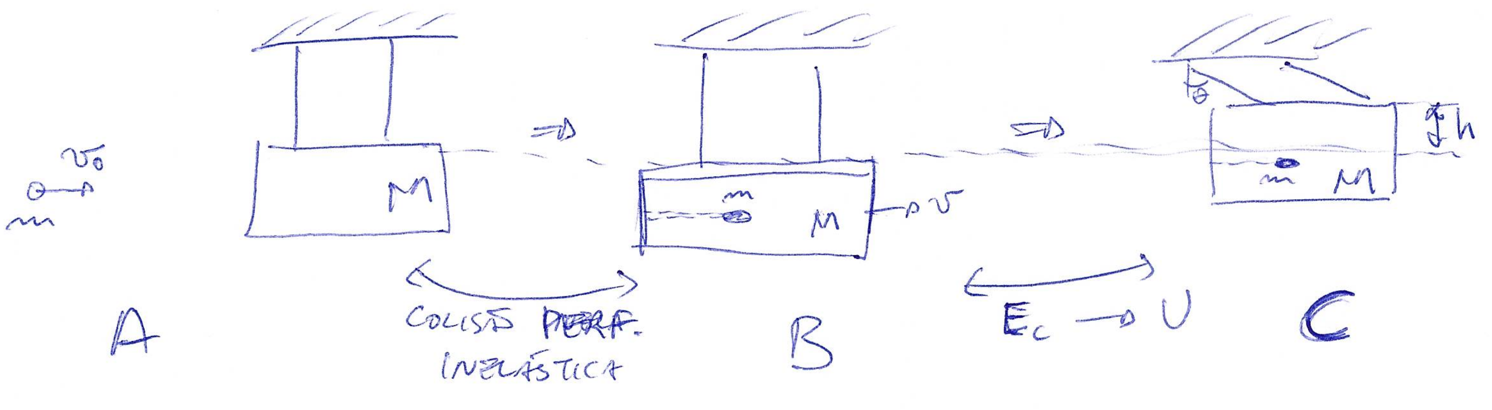
$P_D = (m_A+m_B)\, v$ $\Rightarrow$ $\boxed{v = \dfrac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A+m_B}} = \underline{v_{CM}}$!!!

Ref C.M.:

$E_{C_{ANTES}} = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m\, v_B'^2$ $\quad$ $E_{C_{DEPOIS}} = 0$

→ $\boxed{\text{Toda a } E_c \text{ é perdida}}$

Aplicação: Pêndulo balístico



$P_A = m v_0$

$P_B = (M+m)\, v$

$\Rightarrow \boxed{v = \dfrac{m}{M+m} v_0}$

$E_{cB} = \frac{1}{2}(M+m) v^2$
$= \frac{1}{2} m \left(\frac{m}{M+m}\right) v_0^2$
$= E_A \left(\frac{m}{\ldots}\right)$

$U_C = (M+m) g h$

$h = \dfrac{v^2}{2g} = \dfrac{1}{2g} \dfrac{m v_0^2}{m+M} \cdot \left(\dfrac{m}{m+M}\right)$

④ COLISÕES PERFEITAMENTE ELÁSTICAS (1D)

CONS. MOMENTO: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

CONS. ENERGIA: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$

CARACTERÍSTICA: $m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$

$$m_1 (v_1 + v_1')(v_1 - v_1') = m_2 (v_2 + v_2')(v_2' - v_2)$$

$$\Rightarrow v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \Rightarrow \boxed{v_1 - v_2 = v_2' - v_1'}$$

VEL. REL. APROX. — VEL. REL. AFASTAMENTO

SOLUÇÕES: 1ª SOLUÇÃO: $v_1' = v_1$ e $v_2' = v_2$

NÃO HOUVE COLISÃO

MOTIVO: $v_2 > v_1$ ou NÃO INTERAGIRAM

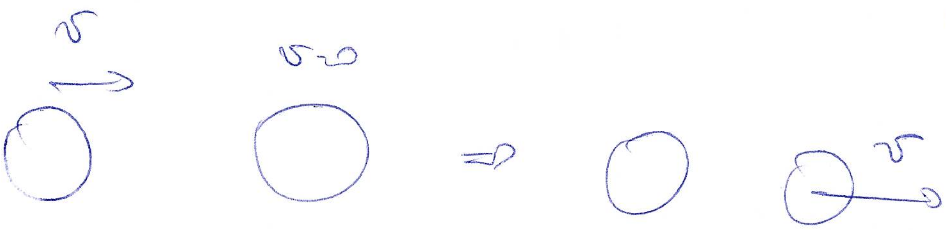
2ª SOLUÇÃO:
$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2 m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

e
$$v_2' = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

CASOS ESPECIAIS

a) $m_1 = m_2 \Rightarrow v_1' = v_2$ e $v_2' = v_1$ (TROCA DE VELOCIDADES)

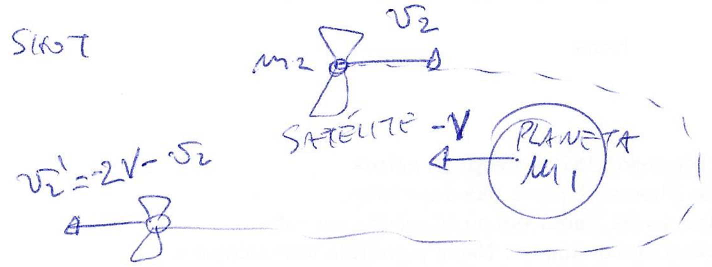
EX: BOLA DE BILHAR
PÊNDULO DE NEWTON



b) $m_1 >> m_2 \rightarrow v_1' \approx v_1$

$$v_2' \approx 2v_1 - v_2$$

EX: SLINGSHOT



$$|v_2'| = 2V + v_2$$

PROVA DA SOLUÇÃO:

$$\vec{P}_A = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \cancel{m_1 v_1} = P_1 + P_2$$
$$\vec{P}_D = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' \rightarrow = P_1' + P_2'$$
$$\rightarrow P_1 - P_1' = P_2' - P_2$$

$$E_{cA} = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2}$$
$$E_{cD} = \frac{P_1'^2}{2m_1} + \frac{P_2'^2}{2m_2}$$
$$\rightarrow P_1^2 - P_1'^2 = \overbrace{\frac{m_1}{m_2}}^{\lambda}\left(P_2'^2 - P_2^2\right)$$

$$\Rightarrow (P_1 + P_1')(P_1 - P_1') = \lambda (P_2 + P_2')(P_2' - P_2)$$

$$(P_1 + P_1')\cancel{(P_1 - P_1')} = \lambda (P_1 - P_1' + 2P_2)\cancel{(P_1 - P_1')}$$

$$P_1 + P_1' = \lambda(-P_1' + P_1 + 2P_2)$$

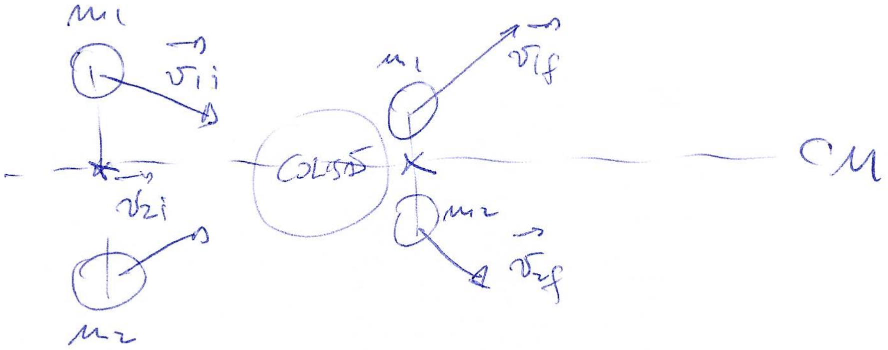
$$P_1'(1+\lambda) = -(1-\lambda)P_1 + 2\lambda P_2 \rightarrow P_1' = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} P_1 + \frac{2\lambda}{\lambda+1} P_2$$

$$m_1 v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} m_1 v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} m_1 v_2$$

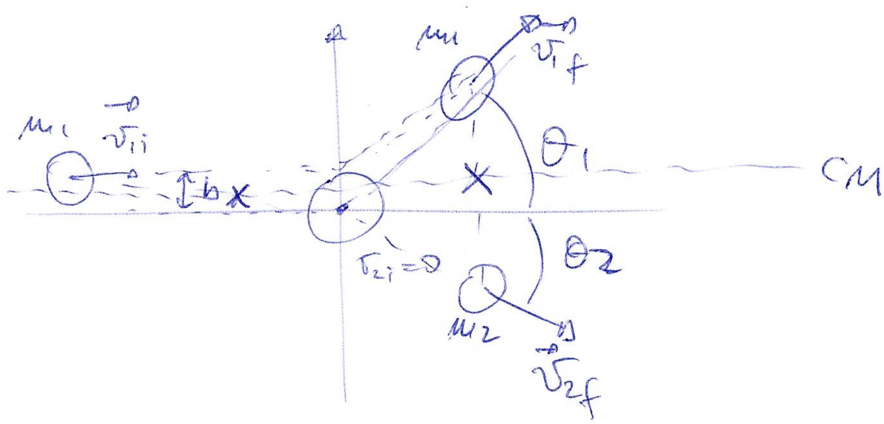
$$\Rightarrow \boxed{v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2}$$

COLISÕES ELÁSTICAS EM 2D

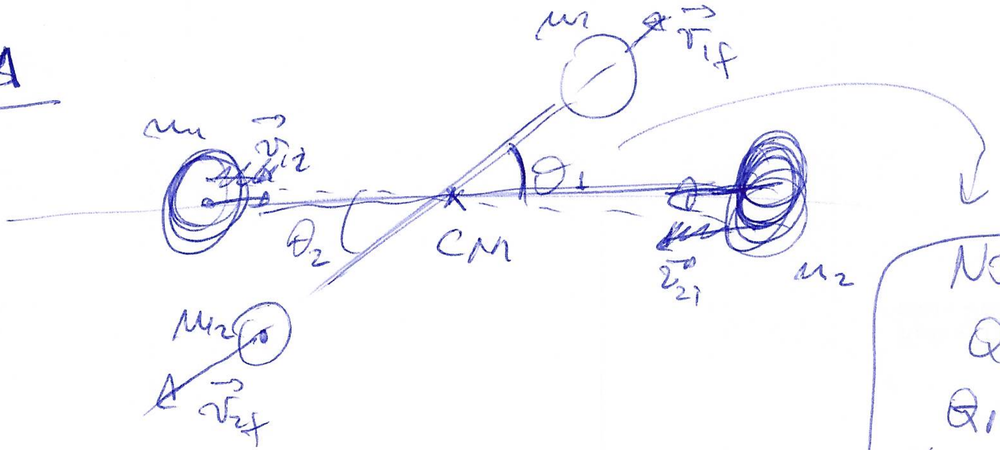
REF. LAB



REF. PART 2 :



REF. CM



NOTE QUE $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ P/ CONSERVAR MOMENTO!!!

REF. CM :

$$\begin{cases} \vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{TOTAL} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} = 0 \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{P_{1i}^2}{2m_1} + \frac{P_{2i}^2}{2m_2} = E_{TOTAL} = \frac{P_{1f}^2}{2m_1} + \frac{P_{2f}^2}{2m_2} \end{cases}$$

INCÓGNITAS : $\vec{P}_{1f}$ e $\vec{P}_{2f}$ $\Rightarrow$ $P_{1fx}, P_{1fy}, P_{2fx}, P_{2fy}$: 4 INCÓGNITAS

3 EQS.
$$\begin{cases} P_{1fx} + P_{1fx} = 0 \\ P_{1fy} + P_{1fy} = 0 \\ \frac{P_{1f}^2}{m_1} + \frac{P_{2f}^2}{m_2} = \frac{P_{1i}^2}{m_1} + \frac{P_{2i}^2}{m_2} \end{cases} \Rightarrow$$

1 INCÓGNITA LIVRE! ÂNGULO θ, POR EXEMPLO

6

CARACTERÍSTICA

- $\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = 0 \Rightarrow \boxed{\underbrace{P_{1i} = P_{2i}}_{\text{MAGNITUDE}}} = P$ $\quad \begin{cases} \vec{P}_{1i} = P\hat{x} \\ \vec{P}_{2i} = -P\hat{x} \end{cases}$

- $\vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} = 0 \Rightarrow P_{2f} = P_{1f} = P'$ $\quad \begin{cases} \vec{P}_{1f} = P'(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}) \\ \vec{P}_{2f} = P'(-\cos\theta\,\hat{x} - \sin\theta\,\hat{y}) \end{cases}$

CONS. ENERGIA: $\dfrac{P_{1i}^2}{m_1} + \dfrac{P_{2i}^2}{m_2} = \dfrac{P_{1f}^2}{m_1} + \dfrac{P_{2f}^2}{m_2} \Rightarrow P^2\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right) = P'^2\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{P = P'}$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} P_{1i} = P_{1f} = P \\ P_{2i} = P_{2f} = P \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ **MAGNITUDE DOS MOMENTOS NÃO MUDA**

$\Rightarrow$ PROBLEMA RESOLVIDO: DADO $\vec{P}_{1i} = P\hat{x}$

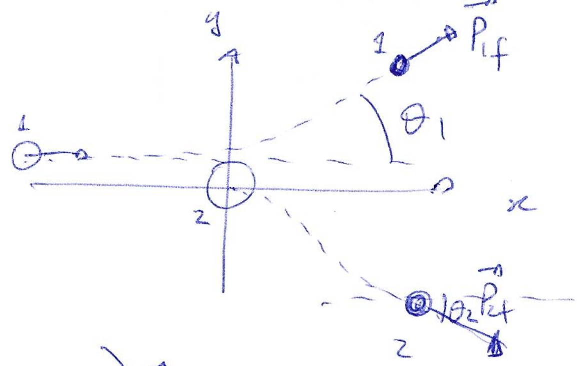
$\Rightarrow$ AUTOMATICAMENTE $P_{2i} = -P\hat{x}$

E CONSEQUENTEMENTE $\begin{cases} P_{1f} = P(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) \\ P_{2f} = -P(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) \end{cases}$

θ É PARÂMETRO LIVRE

SÓ DEPENDE DOS DETALHES DA FORÇA INTERNA ENTRE AS PARTÍCULAS

REF. PART 2:



$$\vec{P}_{TOTAL\,i} = \vec{P}_{1i} = P_1\,\hat{x}$$

$$\vec{P}_{TOTAL\,f} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} = \left(P_{1f}\cos\theta_1 + P_{2f}\cos\theta_2\right)\hat{x} + \left(P_{1f}\,\mathrm{sen}\,\theta_1 + P_{2f}\,\mathrm{sin}\,\theta_2\right)\hat{y}$$

$$\vec{P}_{TOT\,i} = \vec{P}_{TOT\,f}$$

$$E_{TOTAL\,i} = E_{TOTAL\,f} \Rightarrow \boxed{\frac{P_1^2}{m_1} = \frac{P_{1f}^2}{m_1} + \frac{P_{2f}^2}{m_2}}$$

INCÓGNITAS: $\theta_1, \theta_2, P_{1f}, P_{2f}$

Nº EQS = 3

$\Rightarrow$ 1 PARÂMETRO LIVRE

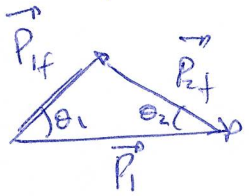
ESCOLHEMOS θ_1

MEDE-SE NO LAB $\boxed{P_1, \theta_1}$ (DADO)

RESOLVER SISTEMA DE EQS:

$$\vec{P}_{2f} = \vec{P}_1 - \vec{P}_{1f} \Rightarrow \boxed{P_{2f}^2 = P_1^2 - 2P_1P_{1f}\cos\theta_1 + P_{1f}^2}$$

LEI DOS COSSENOS



MAS $$P_1^2 = P_{1f}^2 + \frac{m_1}{m_2}P_{2f}^2$$

$$\Rightarrow P_1^2 = P_{1f}^2 + \frac{m_1}{m_2}\left(P_1^2 - 2P_{1f}P_1\cos\theta_1 + P_{1f}^2\right)$$

EQ. DO 2º GRAU P/ P_{1f}

$$\boxed{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)P_{1f}^2 - \left(2\frac{m_1}{m_2}P_1\cos\theta_1\right)P_{1f} + \left(\frac{m_1}{m_2}-1\right)P_1^2 = 0}$$

$$P_{1f} = \frac{2m_1P_1\cos\theta_1 \pm \sqrt{4m_1^2P_1^2\cos^2\theta_1 - 4(m_1+m_2)(m_1-m_2)P_1^2}}{2(m_1+m_2)}$$

$$= \left(\frac{m_1\cos\theta_1 \pm \sqrt{m_2^2 - m_1^2\sin^2\theta_1}}{m_1+m_2}\right)P_1$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{1f} = \left[\frac{\cos\theta_1 \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\theta_1}}{1+\frac{m_2}{m_1}}\right] P_1}$$

ACHA-SE P_{2f} $\longrightarrow$ ACHA-SE θ_2 : $P_{2f}\sin\theta_2 = P_{1f}\sin\theta_1$

NOTE QUE

① SE $m_2 > m_1 \Rightarrow \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\theta_1 > 0$ sempre!

$\Rightarrow$ EXISTE P_{1f} $\forall\theta_1$,

INCLUSIVE $\theta_1 = \pi$
(RECUO DA PART)

② SE $m_2 < m_1$

$$\Rightarrow \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\theta_{1\,máx} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta_{1\,máx} = \frac{m_2}{m_1} \rightarrow \boxed{\theta_{1\,máx} = \text{ARC SIN}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}$$

NÃO HÁ RECUO

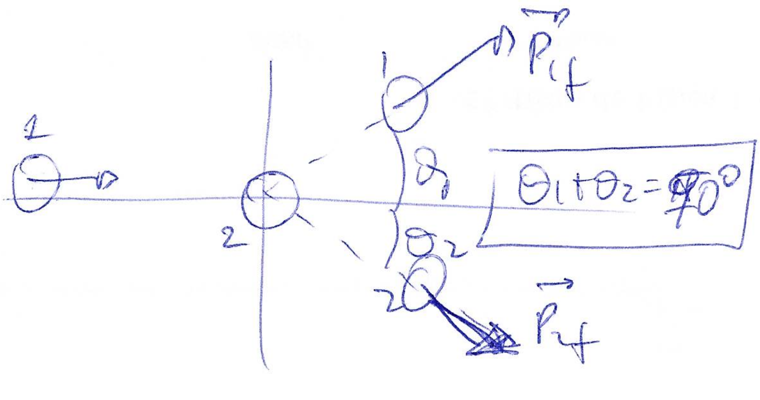
CASO PARTICULAR

$m_1 = m_2 = m \Rightarrow$ NO REF. PART. 2

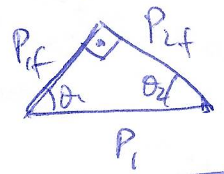
$$\frac{P_1^2}{m_1} = \frac{P_{1f}^2}{m_1} + \frac{P_{2f}^2}{m_2} \Rightarrow \boxed{P_1^2 = P_{1f}^2 + P_{2f}^2}$$

PITÁGORAS

COMO $\vec{P}_1 = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$

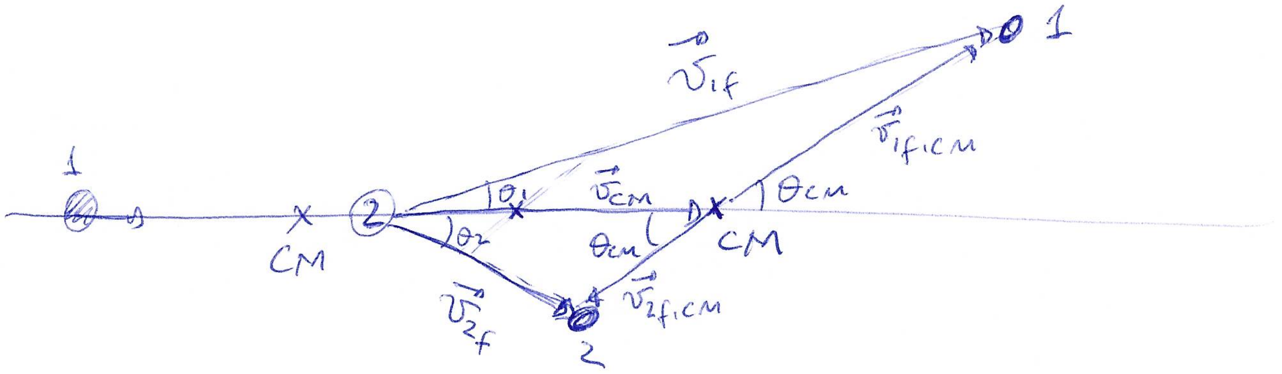


$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \boxed{\theta_1 + \theta_2 = \pi/2}$$

CONEXÃO ENTRE REF CM e REF - PART 2



REF - PART. 2: INPUT: $\vec{v}_{1i}$, m_1 , m_2

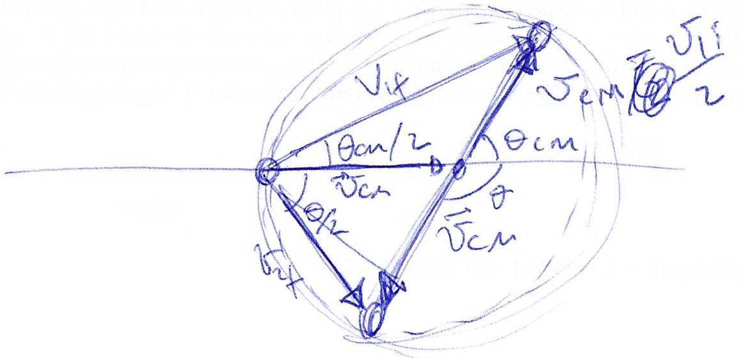
MEDE-SE θ_1

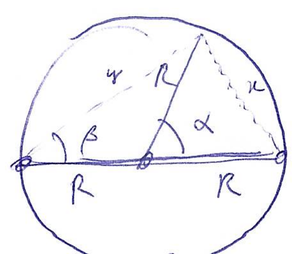
$\Rightarrow$ CALCULA-SE $\vec{v}_{1f}$, $\vec{v}_{2f}$, θ_2

~~NO REF DO CM~~:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_{1i}}{m_1+m_2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{1f,CM} = \vec{v}_{1f} - \vec{v}_{CM} \\ \vec{v}_{2f,CM} = \vec{v}_{2f} - \vec{v}_{CM} \end{cases}$$

CASO ESPECIAL ($m_1 = m_2$)





$x^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha = 2R^2(1-\cos\alpha)$

$= 4R^2 + y^2 - 2Ry\cos\beta$

$y^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(\pi-\alpha) = 2R^2(1+\cos\alpha)$

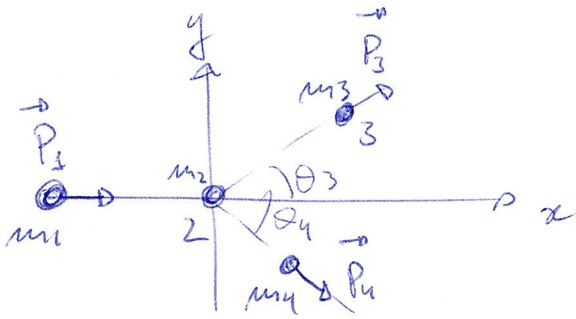
$= 4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$-2R^2\cos\alpha = 2R^2 + 2R^2(1+\cos\alpha) - 2\sqrt{2}R^2\sqrt{1+\cos\alpha}\cos\beta$

$= 2R^2 + 4R^2\cos^2\alpha/2 - 4R^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta$

$\Rightarrow -4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 4R^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta \Rightarrow 2\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\beta$

COLISÕES INELÁSTICAS EM 2D



DADOS: m_1, m_2, m_3, m_4

$\vec{P}_1$, $\vec{P}_2 = 0$

O QUÊ QUEREMOS SABER?

$\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ OU $P_3, P_4, \theta_3, \theta_4$

CONS. MOMENTO: $\vec{P}_1 = \vec{P}_3 + \vec{P}_4$ (2 EQS)

ENERGIA: $Q = E_f - E_i = \frac{P_4^2}{2m_4} + \frac{P_3^2}{2m_3} - \frac{P_1^2}{2m_1}$

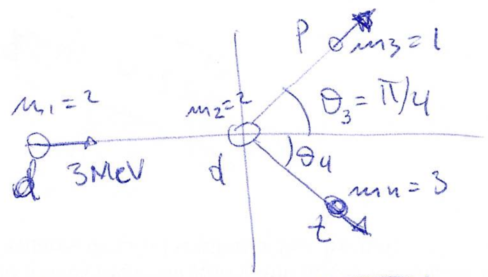
$Q \equiv$ "FATOR Q". $\begin{cases} \text{SE } Q > 0 \to \text{LIBERA ENERGIA} \\ \text{SE } Q < 0 \to \text{APRISIONA ENERGIA} \end{cases}$

3 EQS, 4 INCÓGNITAS $\to$ 1 PARÂMETRO LIVRE $\to$ θ_3 POR EXEMPLO

EX 9.17

$d + d \to p + t$ $\quad Q = 4$ MeV

$T = \frac{p^2}{2m}$



a) T_3?

b) T_4?

c) θ_4?

CONS. MOMENTO: $\begin{cases} \sqrt{2m_1T_1} = \sqrt{2m_3T_3}\cos\theta_3 + \sqrt{2m_4T_4}\cos\theta_4 \\ 0 = \sqrt{2m_3T_3}\sin\theta_3 - \sqrt{2m_4T_4}\sin\theta_4 \end{cases} \to \begin{matrix} \sqrt{2T_1} - \sqrt{T_3}\cos\theta_3 = \sqrt{3T_4}\cos\theta_4 \\ \sqrt{T_3}\sin\theta_3 = \sqrt{3T_4}\sin\theta_4 \end{matrix}$

$Q = T_3 + T_4 - T_1$

$6 - \sqrt{12T_3} + T_3 = 3(4 + 3 - T_3)$

$\boxed{4T_3 - \sqrt{12T_3} - 15 = 0}$

$\sqrt{T_3} = \frac{\sqrt{12} \pm \sqrt{12 + 16\cdot 15}}{8} = 2{,}2 \to \boxed{T_3 = 4{,}84\,\text{MeV}}$

$T_4 = 3 + 4 - 4.84$

$\boxed{T_4 = 2.16\,\text{MeV}}$

~~$2T_1 - 2\sqrt{2T_1T_3}\cos\theta_3 + T_3 = 3T_4$~~

~~$T_4 = \frac{6 - \sqrt{4\cdot3\cdot4.84} + 4.84}{3} = 1.07\,\text{MeV}$~~

$\sin\theta_4 = \sqrt{\frac{T_3}{3T_4}}\sin\theta_3 = 0.61$

$\boxed{\theta_4 = 37{,}7^\circ}$