

CÁLCULO VARIACIONAL

123

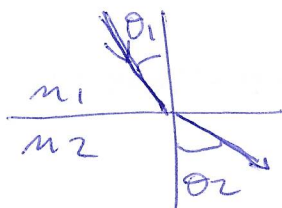
- OBJETIVO: ACHAR EXTREMOS DE FUNÇÕES E FUNCIONAIS.

EM FÍSICA, ESSE PROBLEMA GERALMENTE SURGE DE ALGUM PRINCÍPIO. O MAIS RELEVANTE SENDO O PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO (OU, MAIS PRECISAMENTE, O PRINCÍPIO DA AÇÃO EXTREMA).

EXEMPLO: USANDO O PRINCÍPIO DE FERMAT, DEDUZIR A LEI DE SNELL.

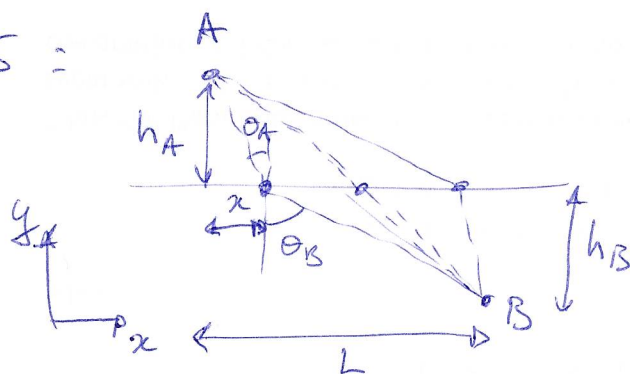
• PRINCÍPIO DE FERMAT: A LUZ VA DE UM PONTO A OUTRO NO MENOR TEMPO

• LEI DE SNELL:



$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

SOLUÇÃO:



TEMPO TOTAL:

$$T(x) = T_A(x) + T_B(x)$$

$$= \frac{\sqrt{h_A^2 + x^2}}{v_A} + \frac{\sqrt{h_B^2 + (L-x)^2}}{v_B}$$

O PRINCÍPIO DE FERMAT DIZ QUE x É TAL QUE

$$\text{MINIMIZA } T(x) \Rightarrow \frac{dT}{dx} = 0 = \frac{x}{\sqrt{h_A^2 + x^2}} \cdot \frac{1}{v_A} - \frac{L-x}{\sqrt{h_B^2 + (L-x)^2}} \cdot \frac{1}{v_B}$$

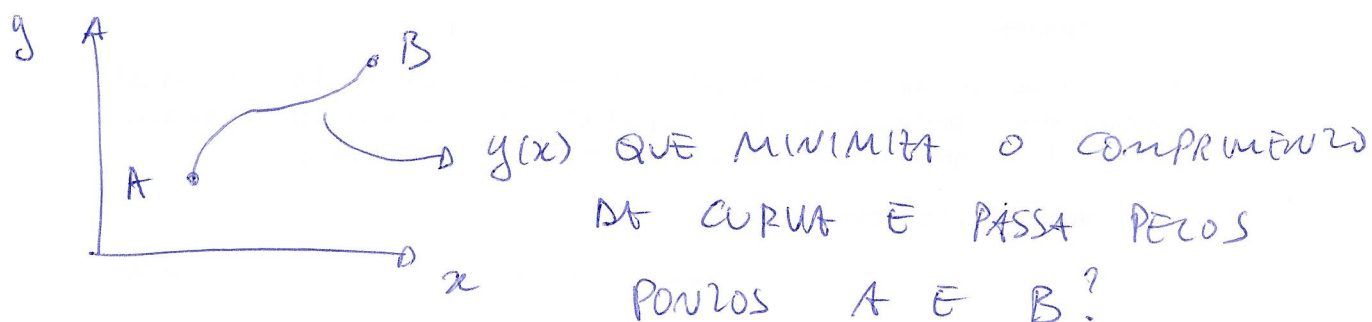
NOTE QUE $\sin \theta_A = \frac{x}{\sqrt{h_A^2 + x^2}}$

(124)

$$\sin \theta_B = \frac{L-x}{\sqrt{h_B^2 + (L-x)^2}}$$

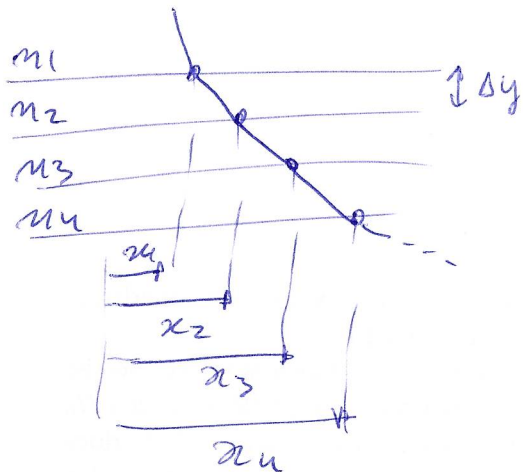
LOGO, $\frac{\sin \theta_A}{v_A} = \frac{\sin \theta_B}{v_B} \Rightarrow \boxed{M_A \sin \theta_A = M_B \sin \theta_B}$

EXEMPLO: ACHAR A GEODÉSICA EM UM PLANO



NOTE QUE AGORA TEMOS QUE ACHAR UMA FUNÇÃO (E NÃO O VALOR DE UMA OU DUAS VARIÁVEIS) QUE SOLUCIONA O PROBLEMA. ISSO É EQUIVALENTE A MINIMIZAR UMA FUNÇÃO DE INFINITAS VARIÁVEIS.

NO CASO DA LEI DE SNEEL, PROCURAMOS OS SEGMENTOS DE RETA ($\overline{AX}$ E $\overline{XB}$) QUE MINIMIZAM O TEMPO DE VIAGEM DA LUZ. SE OS ÍNDICES DE REFRAÇÃO MUDASSEM CONTINUAMENTE NO ESPAÇO, ENTÃO TERÍAMOS REFRAÇÕES CONTINUAMENTE. OU SEJA, TERÍAMOS INFINITAS TRANSIÇÕES ENTRE MEIOS DE DIFERENTES ÍNDICES DE REFRAÇÃO.



O TEMPO TOTAL É

FUNÇÃO DE $T \equiv T(x_1, x_2, x_3, \dots)$

NO LIMITE $\Delta y \rightarrow 0$

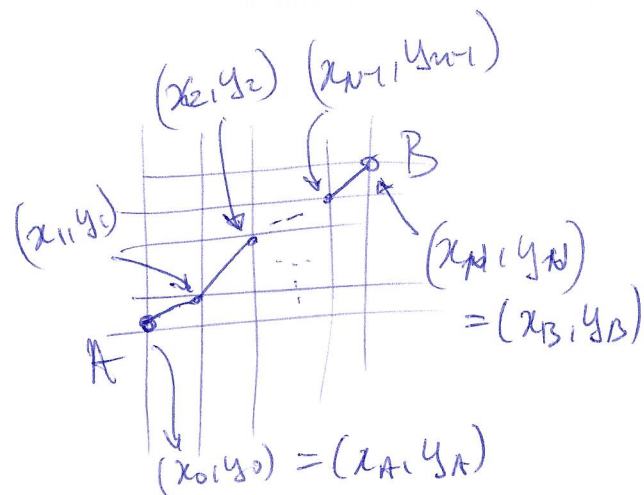
$$\Rightarrow \Delta x = x_{i+1} - x_i \rightarrow 0$$

$\Rightarrow T$ É UMA FUNÇÃO

DE INFINITAS VARIÁVEIS. NO FINAL, ESTARIAMOS PROCURANDO O CONJUNTO $\{x_i, y_i\}$ DE PONTOS QUE DEFINE A TRAJETÓRIA DA LUZ QUE MINIMIZA O TEMPO DE VIAGEM.

NO LIMITE DO CONTÍNUO ($\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$), O CONJUNTO $\{x_i, y_i\}$ SE TORNA UM CONJUNTO INFINITO E, SENDO ASSIM, ESSE CONJUNTO DEFINE UMA CURVA $y(x)$ QUE MINIMIZA O TEMPO DE VIAGEM.

ANALOGAMENTE, ESTAMOS PROCURANDO UMA FUNÇÃO $y(x)$ QUE MINIMIZA O CAMINHO ENTRE 2 PONTOS



NO LIMITE $N \rightarrow \infty$, $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ TEMOS QUE ACHAR UM CONJUNTO INFINITO $\{(x_i, y_i)\}$ E ISSO É UMA FUNÇÃO $y(x)$.

PRECISAMENTE, TEMOS QUE MINIMIZAR O CAMINHO TOTAL L DADO POR

(126)

$$L = \sum_i \Delta l_i = \sum_i \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_i \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

$$= \sum_i \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \quad \text{OU SEJA,}$$

$$L \equiv L(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N)$$

NO LIMITE DO CONTÍNUO

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \rightarrow \frac{dy}{dx}, \quad \Delta x_i \rightarrow dx$$

$$\text{LOGO} \quad L \rightarrow \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + y'^2}$$

DEVEMOS AGORA ENCONTRAR A CURVA $y(x)$

CUJA INTEGRAL $\int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + (y'(x))^2}$ É MÍNIMA

E ESSA CURVA É TAL QUE PASSE PELOS

PONTOS A E B. OU SEJA, $\begin{cases} y(x_A) = y_A \\ y(x_B) = y_B \end{cases}$

ESSA CONDIÇÃO DE QUE $y(x_A) = y_A$ E $y(x_B) = y_B$ É

CHAMADA DE CONDIÇÃO DE CONFORMA.

NOTE POR FIM QUE O COMPRIMENTO (127)

DA GEODÉSICA L É FUNÇÃO DA FUNÇÃO $y(x)$.

OU SEJA, L É UM FUNCIONAL

$$L[y(x)] = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + y'^2}$$

COMO RESOLVER ESSE PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO?

DE MANEIRA GERAL, VAMOS QUERER

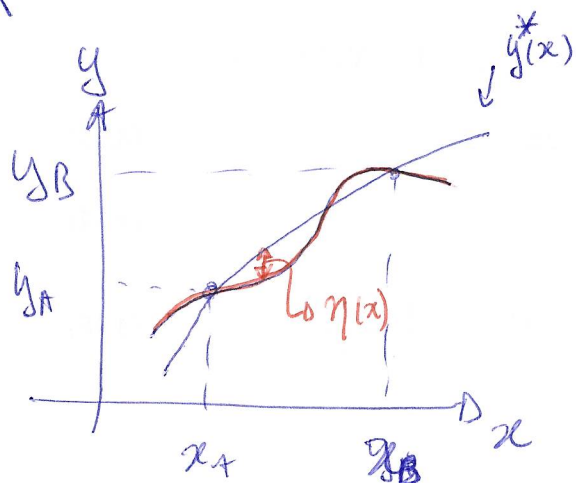
RESOLVER O SEGUINTE PROBLEMA.

SEJA O FUNCIONAL

$$I = \int_{x_A}^{x_B} f(y, y', x) dx$$

QUAL É A CURVA $y(x)$ QUE EXTREMIZA I ?

(DADA A CONDIÇÃO DE CONFINAMENTO $\begin{cases} y(x_A) = y_A \\ y(x_B) = y_B \end{cases}$)



VAMOS DIZER QUE $y^*(x)$ É
A FUNÇÃO QUE EXTREMIZA
O FUNCIONAL I .

ENTÃO DEFINIMOS

$$\begin{aligned} y(x, \alpha) &= y(x, 0) + \alpha \eta(x) \\ &= y^*(x) + \alpha \eta(x) \end{aligned}$$

ONDE $\alpha \eta(x)$ QUANTIFICA O DESVIO (128)

DE ~~$y(x)$~~ $y(x, \alpha)$ DA FUNÇÃO ~~EXTREMA~~ ^{QUE}

EXTREMIZA I , $y^*(x)$

NECESSARIAMENTE, AS VARIACÕES QUANTIFICADAS

POR $\alpha \eta(x)$ S ão TALS QUE $\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0$

A CONDIÇÃO DE EXTREMIZAÇÃO É

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

E ESSA CONDIÇÃO
DEVE SER VÁLIDA
PARA TODA FUNÇÃO $\eta(x)$.

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_A}^{x_B} \underbrace{\frac{d}{d\alpha} f(y, y', x)}_{\text{}} dx$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}_{\eta(x)} + \frac{\partial f}{\partial y'} \underbrace{\frac{\partial y'}{\partial \alpha}}_{\eta'(x)} + \frac{\partial f}{\partial x} \cancel{\frac{\partial x}{\partial \alpha}} \rightarrow 0$$

AGORA, VAMOS INTEGRAR O SEGUNDO TERMO POR PARTES

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial f}{\partial y'} \left(\frac{d\eta}{dx} \right) dx = \underbrace{\eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x_A}^{x_B}}_{=0 \text{ PORQUE } \eta(x_A) = \eta(x_B) = 0} - \int_{x_A}^{x_B} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Logo,

(129)

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx = 0$$

PARA QUE ESSA EQUAÇÃO SEJA VÁLIDA
PARA QUALQUER $\eta(x)$, ENTÃO

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0}$$

ESSA É A
EQUAÇÃO DE
EULER-LAGRANGE

VOLTA-MOS P/ O PROBLEMA DA GEODÉSICA

$$L = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+y'^2} dx \Rightarrow f = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{1+y'^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1+y'^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow y' = \text{const} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y = ax + b \quad (\text{RETA})$$

MAS TEMOS QUE SATISFAZER AS COND. DE CONJUNTO

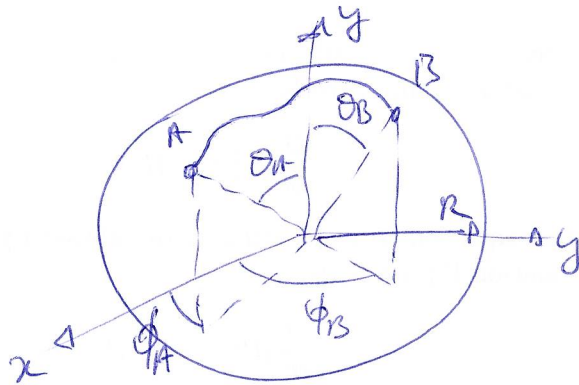
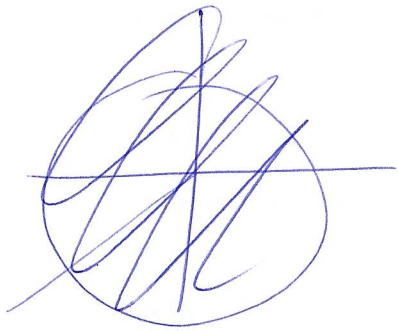
$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right) x + \frac{y_A x_B - y_B x_A}{x_B - x_A}}$$

EXEMPLO: GEODÉSICA NA ESFERA

(130)

~~SEMPRE DÁ EM LUGAR~~



DEVEMOS ACHAR A CURVA $\phi(\theta)$ QUE
MINIMIZA O TAMANHO DO CAMINHO E É
TAL QUE $\phi(\theta_A) = \phi_A$, $\phi(\theta_B) = \phi_B$

~~SEMPRE DÁ EM LUGAR~~

COMO CALCULAR O COMPRIMENTO DO CAMINHO?

EM COORD. CARTESIANAS

$$L = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

MAS

$$\begin{cases} x = R \cos \phi \sin \theta \\ y = R \sin \phi \sin \theta \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = -R \sin \phi \sin \theta d\phi + R \cos \phi \cos \theta d\theta \\ dy = R \cos \phi \sin \theta d\phi + R \sin \phi \cos \theta d\theta \\ dz = -R \sin \theta d\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{dx^2 + dy^2 + dz^2}_{R^2} = s^2\phi s^2\theta d\phi^2 - 2s\phi c\phi s\theta c\theta d\phi d\theta + c^2\phi c^2\theta d\theta^2 + c^2\phi s^2\theta d\phi^2 + 2s\phi c\phi s\theta c\theta d\phi d\theta + s^2\phi c^2\theta d\theta^2 + s^2\theta d\theta^2 \quad (13)$$

$$= s^2\theta d\phi^2 + c^2\theta d\theta^2 + s^2\theta d\theta^2$$

$$= d\theta^2 \left(1 + s^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)^2 \right)$$

Finalmente, $L = R \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{1 + s^2\theta \phi'^2} d\theta$

Euler-Lagrange: $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi'} \sqrt{1 + s^2\theta \phi'^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \phi} \sqrt{1 + s^2\theta \phi'^2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \phi'} \sqrt{1 + s^2\theta \phi'^2} = \text{const} = \frac{s^2\theta \phi'}{\sqrt{1 + s^2\theta \phi'^2}} = A$$

$$\Rightarrow A^2 + A^2 s^2\theta \phi'^2 = s^4\theta \phi'^2 \Rightarrow \phi'^2 = \frac{A^2}{s^4\theta - A^2 s^2\theta}$$

$$\Rightarrow \phi = \int d\theta \frac{A}{\sqrt{s^4\theta - A^2 s^2\theta}}$$

MUDANÇA DE VARIÁVEIS: $u = A \cot \theta \Rightarrow du = -\frac{A}{s^2\theta} d\theta$

$$\Rightarrow \phi = - \int du \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{s^2\theta}}}$$

$u^2 = \frac{A^2 \cot^2 \theta}{s^2\theta} = \frac{A^2}{s^2\theta} - A^2$

$$= - \int \frac{du}{\sqrt{1 - A^2 - u^2}} = - \frac{1}{\sqrt{1 - A^2}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{1 - A^2} \right) u^2}} = - \text{ARCSIN} \left(\frac{u}{\sqrt{1 - A^2}} \right) + B$$

$$= - \text{ARCSIN} (C \cot \theta) + B$$

ONDE

$$C = \sqrt{\frac{A^2}{1-A^2}}$$

(132)

Logo, $\phi - B = -\text{ARCSIN } C \cot \theta$

$$\Rightarrow \boxed{C \cot \theta = \sin(B - \phi)}$$

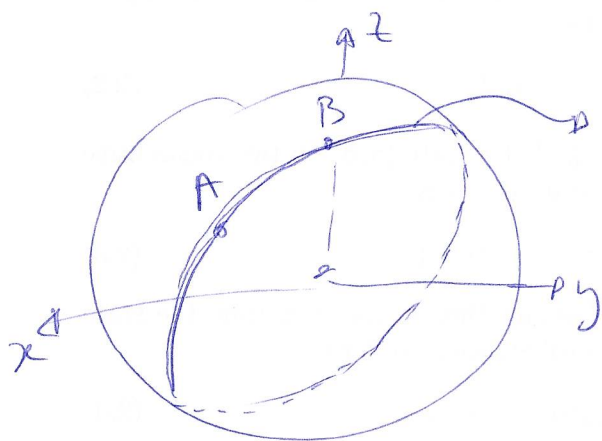
Em COORD. CARTESIANAS

$$\underbrace{\cos \theta}_{\frac{z}{R}} = \sin \theta \sin(\phi - B) = \underbrace{-\sin \theta \sin \phi \cos B}_{y/R} + \underbrace{\sin \theta \cos \phi}_{x/R} \sin B$$

OU SEJA,

$$\boxed{Cz = \sin B x - \cos B y}$$

↓
PLANO QUE CONTÉM A ORIGEM

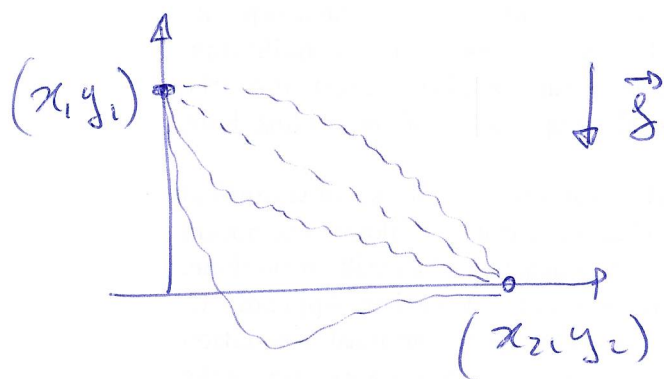


GRANDE CÍRCULO

AS CONSTANTES C E B
GARANTEM QUE O
PLANO CONTÉM OS
PTS A E B

EXEMPLO: CONSIDERE UMA PARTÍCULA SE MOVENDO EM UM CAMPO DE FORÇA CONSTANTE (POR EXEMPLO, A GRAVIDADE $\vec{F} = m\vec{g}$, ONDE $\vec{g} = -g\hat{y}$) INICIALMENTE EM REPOUSO NO PONTO (x_1, y_1) E indo PARA UM OUTRO PONTO (x_2, y_2) SOB A AÇÃO DESSA FORÇA CONSTANTE. ~~RESISTÊNCIA~~ ACHE A CURVA NO PLANO xy QUE LEVA A PARTÍCULA DO PONTO INICIAL AO FINAL EM MENOR TEMPO.

(ESSE É O FAMOSO PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA)



DO GREGO:

BRAKHISTÓS → MAIS CURTO

KHROS → TEMPO

QUAL O FUNCIONAL QUE DEVAMOS MINIMIZAR?

- O TEMPO TOTAL $t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v}$

MAS $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + (y'(x))^2}$

$v = \sqrt{2gy}$ (DA CONSERVAÇÃO DE ENERGIA: $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$)

*OBS: AQUI, y É A DISTÂNCIA VERTICAL ATÉ O PONTO INICIAL. LOGO $y \rightarrow y_1 - y(x)$

POR SIMPLICIDADE, VAMOS ASSUMIR QUE $(x_1, y_1) = (0, 0)$

Logo, $t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} dx \sqrt{\frac{1+y'^2}{-y}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} dx f(y, y', x)$ (134)

EULER-LAGRANGE: $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y}} \right) = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2(-y)^{3/2}} = \frac{(1+y'^2)^2}{2(-y)^{3/2} (1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y}} \right) = \frac{y'}{\sqrt{-y} (1+y'^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{y''}{\sqrt{-y} (1+y'^2)} + \frac{y'^2}{2(-y)^{3/2} \sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2 y''}{\sqrt{-y} (1+y'^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2(-y)^{3/2} (1+y'^2)^{3/2}} \left[2y''(-y)(1+y'^2) + y'^2(1+y'^2) - 2(-y)y'^2 y'' \right]$$

$$\underbrace{-2yy'' - 2yy'^2 y'' + y'^2 + y'^4 + 2yy'^2 y''}_{-2yy'' - 2yy'^2 y'' + y'^2 + y'^4 + 2yy'^2 y''}$$

COLECIONANDO OS TERMOS, A EQ. DE EULER-LAGRANGE FICA

$$\frac{1}{2(-y)^{3/2} (1+y'^2)^{3/2}} \left[1 + 2y'^2 + y'^4 - (-2yy'' + y'^2 + y'^4) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{1 + y'^2 + 2yy'' = 0}$$

ESTA É UMA EQ. DIFERENCIAL NÃO-LINEAR, (135)
E PORTANTO, DE DIFÍCIL SOLUÇÃO.

FELIZMENTE, SABEMOS QUE A SOLUÇÃO É
PARAMETRIZADA POR
$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = -a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

PROVA:
$$\begin{cases} dx = a(1 - \cos\theta) d\theta \\ dy = -a \sin\theta d\theta \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin\theta}{1 - \cos\theta}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d \left(\frac{-\sin\theta}{1 - \cos\theta} \right)}{dx} = \frac{\left(\frac{-\cos\theta}{1 - \cos\theta} + \frac{\sin^2\theta}{(1 - \cos\theta)^2} \right) d\theta}{a(1 - \cos\theta) d\theta}$$

$$= \frac{1}{a(1 - \cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow 1 + y'^2 + 2yy'' = 1 + \frac{\sin^2\theta}{(1 - \cos\theta)^2} + 2(-a)(1 - \cos\theta) \frac{1}{a(1 - \cos\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{(1 - \cos\theta)^2} \left((1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta - 2(1 - \cos\theta) \right)$$

$$= \frac{1}{(1 - \cos\theta)^2} \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta - 2 + 2\cos\theta \right)$$

$$= 0$$

AGORA
~~AGORA~~

VAMOS RESOLVER NOVAMENTE
ESSE PROBLEMA. NAS

136

PÁGINAS 133/134 ESCRIVEMOS O FUNCIONAL COMO

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{ds}{\sqrt{-y}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{-y}}$$

ENTRETANTO, PODEMOS ESCOLHER RESOLVER

$y(x)$ OU $x(y)$. VAMOS AGORA ESCOLHER

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int dy \sqrt{\frac{1+x'^2}{-y}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2g}} \int dy F(x, x', y)$$

APLICANDO EULER-LAGRANGE

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) = 0$$

$$\text{COMO } \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x'} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \frac{x'}{\sqrt{(-y)(1+x'^2)}} = \text{const} \Rightarrow x'^2 = \frac{1}{2a} (-y)(1+x'^2) \\ \Rightarrow x'^2 = \frac{-\text{const } y}{1 + \text{const } y} = \frac{-y}{2a+y}$$

Logo, $\int_0^x dx = - \int_0^y \sqrt{\frac{-y}{2a+y}} dy$

(137)

MUDANÇA DE VARIÁVEL: $y = -a(1 - \cos \theta)$
 $\Rightarrow dy = -a \sin \theta d\theta$

$\Rightarrow x = + \int \sqrt{\frac{a(1 - \cos \theta)}{a(1 + \cos \theta)}} a \sin \theta d\theta$ ~~$= a \int \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} d\theta$~~

$= a \int \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta) \sin^2 \theta}{1 + \cos \theta}} d\theta = a \int \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos^2 \theta)}{1 + \cos \theta}} d\theta$

$= a \int \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{1 + \cos \theta}} d\theta = a \int 1 - \cos \theta d\theta$

$\Rightarrow x = a(\theta - \sin \theta) + \text{const}$

como $y = -a + a \cos \theta$ e $x(y=0) = 0$

$\Rightarrow y=0 \rightarrow \theta = 0 \Rightarrow 0 = a(0 - \sin 0) + \text{const}$
 $\Rightarrow \text{const} = 0$

Logo $\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = -a(1 - \cos \theta) \end{cases}$

COMO HAVÍAMOS
DEMONSTRADO

NA PÁGINA 135

O QUE APRENDAMOS?

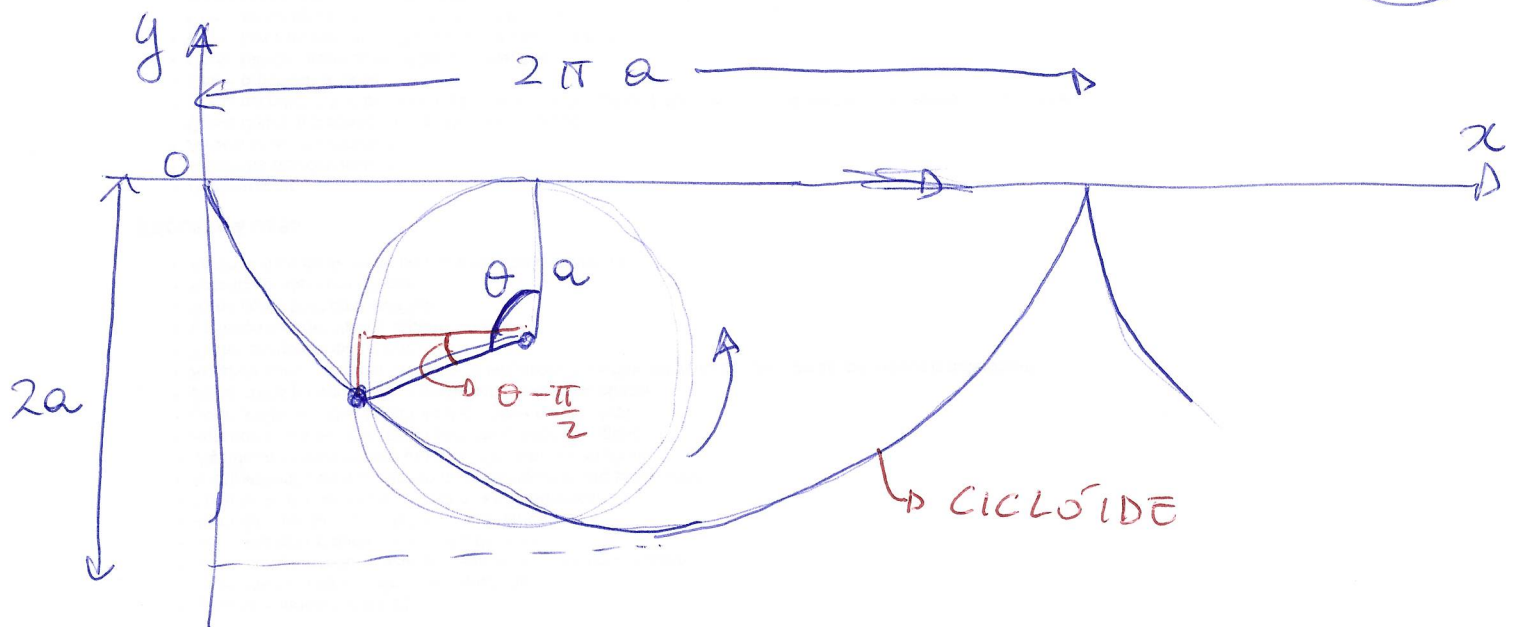
R: TEMOS A LIBERDADE DE FAZER

$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2} = dy \sqrt{1 + x'^2}$

DEPENDENDO DA SITUAÇÃO, UM É MAIS CONVENIENTE QUE
O OUTRO.

QUE CURVA É ESSA BRAQUISTÓCROMA?

138



$$\begin{cases} x = a\theta - a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = a(\theta - \sin\theta) \\ y = -a - a \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -a(1 + \cos\theta) \end{cases}$$

ESSA É A EQUAÇÃO DA CICLOÍDE.

COMO RELACIONAR O RAIO DA CICLOÍDE a COM OS PONTOS DADOS DO PROBLEMA?

$(x_1, y_1) = (0, 0)$ SE ESTÁ SATISFEITA PELA
PARAMETRIZAÇÃO

$$(x_2, y_2) = a(\theta_2 - \sin\theta_2, -1 + \cos\theta_2)$$

2 EQS. E 2 INCÓGNITAS (a E θ_2)

ESSAS SÂO EQS. TRANSCENDENTES

OBRS: MOSTRAMOS QUE A CICLOÍDE É A BRAQUISTÓCROMA E
EXTREMIZA O TEMPO DE VIAGEM. NÃO MOSTRAMOS QUE
É MÍNIMO, MAS ESTE É O CASO

A "SEGUNDA FORMA" DA EQ. DE EULER-LAGRANGE (139)

DERIVAMOS QUE A EQ. DE EULER-LAGRANGE É

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad , \quad \text{ONDE } f \equiv f(y, y', x)$$

HÁ UMA FORMA EQUIVALENTE QUE É CONVENIENTE

AO

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$* \quad \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$* \quad \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y} y' - \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \\ &= \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} + y' \left(\underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y}}_{=0 \text{ (EQ. EULER-LAGR)}} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} f + \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0}$$

QDO

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

, ESSA "SEGUNDA FORMA"

(140)

DA EQ. DE EULER-LAGRANGE

SÉ TORNA BEM CONVENIENTE PORQUE

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const}$$

EXEMPLO: VOLTAMOS AO $f(y, y', x) = f(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{-y}}$ DA

PÁGINA 134. COMO f NÃO DEPENDE DE x ,

USAMOS A "SEGUNDA" FORMA DA EQ. DE E-L

E OBTENHAMOS QUE $\sqrt{\frac{1+y'^2}{-y}} - y' \times \frac{y'}{\sqrt{-y(1+y'^2)}} = \text{const}$

Logo

$$\frac{1}{\sqrt{(-y)(1+y'^2)}} (1+y'^2 - y'^2) = \text{const} = \frac{1}{\sqrt{(-y)(1+y'^2)}}$$

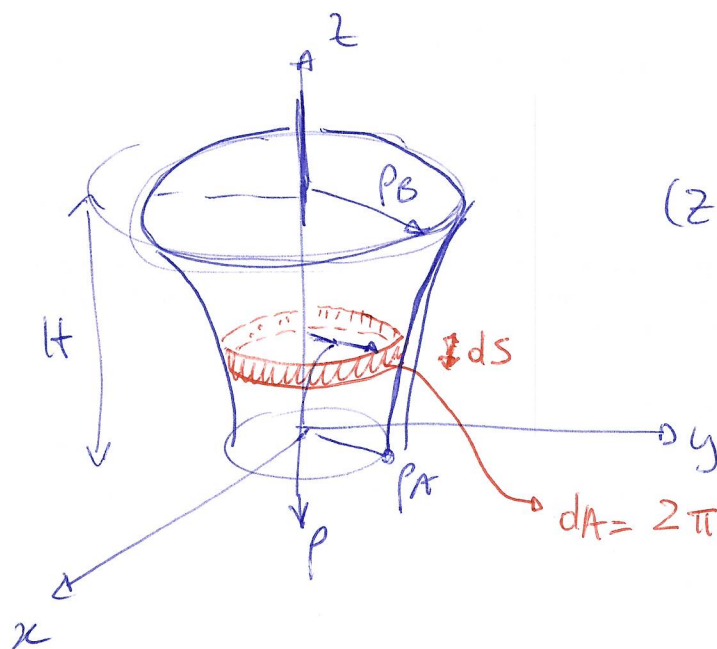
ESTA EQUAÇÃO É EXATAMENTE A MESMA DA PÁGINA 136

$$\frac{x'}{\sqrt{(-y)(1+x'^2)}} = \text{const}$$

PORQUE $x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{y'}}{\sqrt{(-y)(1+\frac{1}{y'^2})}} = \frac{1}{\sqrt{(-y)(y'^2+1)}}$$

EXEMPLO: CALCULE A CURVA CUYA SUPERFÍCIE (141)
DE REVOLUÇÃO É MÍNIMA E ESSA
CURVA PASSA POR DOIS PONTOS DADOS
NO PLANO DE REVOLUÇÃO



PONTOS DADOS:

~~dois pontos~~

$$(z, p) = (0, p_A) \text{ e } (H, p_B)$$

QUAL A CURVA $z(p)$?

$$dA = 2\pi p dS = 2\pi p \sqrt{dp^2 + dz^2}$$

$$\text{FUNCIONAL: ÁREA} \equiv A = \int_{p_A}^{p_B} \underbrace{2\pi p \sqrt{1 + z'^2}}_{f(z, z', p)} dp$$

$$\text{EQ E-L: } \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dp} \left[\frac{\partial f}{\partial z'} \right] = 0$$

$$\text{COMO } \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{pz'}{\sqrt{1 + z'^2}} = \text{CONST} = a$$

$$\Rightarrow p^2 z'^2 = a^2 (1 + z'^2) \Rightarrow z'^2 = \frac{a^2}{p^2 - a^2} \Rightarrow z = \int \frac{a dp}{\sqrt{p^2 - a^2}}$$

$$\text{MUDANÇA DE VARIÁVEIS: } \cosh \theta = p/a \Rightarrow dp = a \sinh \theta$$

$$\Rightarrow z = a \int \frac{d\theta}{\sqrt{\cosh^2 \theta - 1}} \left(\frac{\sinh \theta}{\sqrt{\cosh^2 \theta - 1}} \right) = a\theta + \underbrace{\text{const}}_b$$

Logo, $z = a \operatorname{Arccosh}\left(\frac{p}{a}\right) + b$

142

~~ou ainda~~ OU AINDA

$$p = a \cosh\left(\frac{z-b}{a}\right)$$

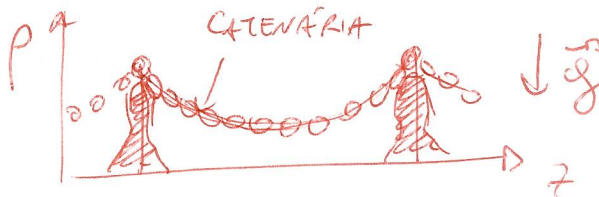
CONDIÇÕES DE CONJUNTO = $p = p_A \Rightarrow z = 0$

$p = p_B \Rightarrow z = H$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_A = a \cosh\left(\frac{b}{a}\right) \\ p_B = a \cosh\left(\frac{H-b}{a}\right) \end{cases}$$

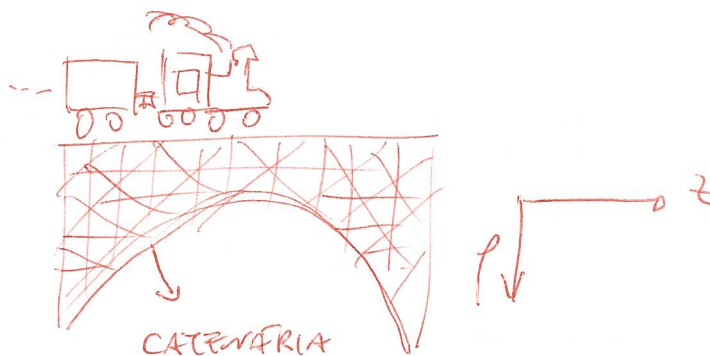
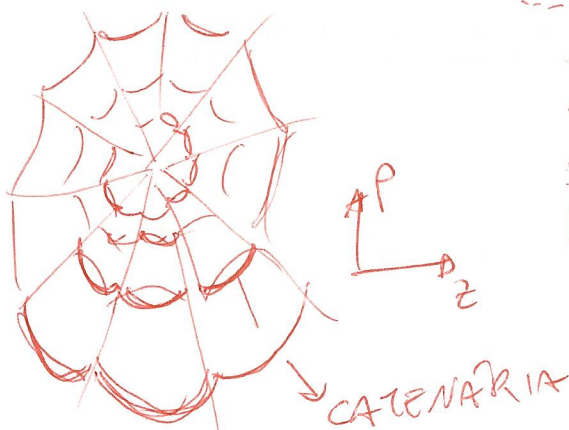
ESSA CURVA
É CONHECIDA COMO
CATENÁRIA

ELA É A CURVA QUE UMA CORDA
(OU QUALQUER CABO FLEXÍVEL) ASSUME QUANDO
PRESTA POR DOIS PONTOS SOB A AÇÃO
DA GRAVIDADE



ELA ESTÁ EM

VÁRIOS LUGARES: PONTES, TEIA DE ARANHA, CONSTRUÇÕES



FUNCCIONAL DE VÁRIAS FUNÇÕES

(143)

ATÉ AGORA, CONSIDERAMOS O PROBLEMA DE EXTREMIZAR UM FUNCCIONAL DE UMA ÚNICA FUNÇÃO $y(x)$, i.e.,

EXTREMIZAMOS
$$\int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx = I$$

VAMOS AGORA GENERALIZAR PARA O CASO EM QUE

$$f \equiv f(y_1(x), y_1'(x), y_2(x), y_2'(x), \dots, y_N(x), y_N'(x), x)$$

$$\equiv f(\{y_i(x), y_i'(x)\}, x), \quad i=1, \dots, N$$

COMO NO CASO DE $N=1$, VAMOS CONSIDERAR

$$y_i(x, \alpha) = y_i(x, 0) + \alpha \eta_i(x), \quad i=1, \dots, N$$

$y_i^*(x) \rightarrow$ FUNÇÃO QUE EXTREMIZA $I[\{y_i(x)\}]$

O DESENVOLVIMENTO É ANÁLOGO AO CASO $N=1$ DA PÁG. 128

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 = \int \frac{df}{d\alpha} dx = \int \sum_i \left\{ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y_i}}_{\eta_i} \frac{\partial y_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_i'} \underbrace{\frac{\partial y_i'}{\partial \alpha}}_{\eta_i'} \right\} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} dx$$

INTEGRANDO POR PARTES

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial f}{\partial y_i'} \frac{dy_i}{dx} dx = \cancel{\eta_i(x) \frac{\partial f}{\partial y_i}} \Big|_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \eta_i(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) dx$$

$= 0$ (POR QUE $\eta_i(x_A) = \eta_i(x_B) = 0$)

$$\text{Logo, } \left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 = \int_{x_A}^{x_B} \sum_{i=1}^N \eta_i(x) \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \right) dx \quad (144)$$

TEMOS AGORA AS EDS. DE EULER-LAGRANGE

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right] = 0, \quad i=1, \dots, N \right]$$

A NOTAÇÃO δ

por simplicidade, vamos considerar o caso $N=1$

$$\Rightarrow \frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dI}{d\alpha}}_{\equiv \delta I} = \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}_{\delta y} dx$$

~~$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} + \delta y$$~~

δy é a variável infinitesimal de $y(x)$ em relação à função extremante $y^*(x)$

~~$$\Rightarrow \left. \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \eta(x) = \frac{\partial y^*}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$~~

NESTA NOTAÇÃO,

(145)

$$\delta I = \delta \int f dx = \int \delta f dx$$

ONDE $\delta f = \delta f(y, y', x) = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x$

MAS $\delta y' = \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y)$

$$\Rightarrow \delta I = \int \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} (\delta y) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right\} dx$$

INTEGRANDO POR PARTES

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

$\Rightarrow \left(\text{POR QUÊ } \delta y(x_A) = \delta y(x_B) = 0 \right)$
OS EXTREMOS SÃO FIXOS
— CONDIÇÕES DE CONTORNO —

$$\Rightarrow \delta I = \int_{x_A}^{x_B} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \delta y dx$$

DE $\delta I = 0 \rightarrow$ CHEGAMOS, NOVAMENTE, NA EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

