

ÁLGEBRA VETORIAL

32

• MÓDULO

$$r = |\vec{r}|, \quad |c\vec{r}| = |c| |\vec{r}| = |c| r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

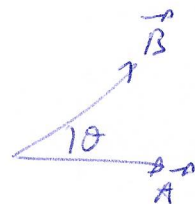
• ASSOCIATIVIDADE com ESCALAR $c\vec{r} = \vec{r}c = (cx, cy, cz)$

• SOMA É ASSOCIATIVA: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

$$(c+d)\vec{A} = c\vec{A} + d\vec{A}$$

• PRODUTO ESCALAR: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \theta$



PROVA: $\vec{A} = A\hat{x}$, $\vec{B} = B(\cos \theta, \sin \theta, 0) \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2, \quad \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0$$

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (1, 0, 0) \equiv \hat{e}_1 \equiv \hat{i} \\ \hat{y} &= (0, 1, 0) \equiv \hat{e}_2 \equiv \hat{j} \\ \hat{z} &= (0, 0, 1) \equiv \hat{e}_3 \equiv \hat{k} \end{aligned}$$

• PRODUTO VETORIAL: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ (NÃO COMUTATIVO, ANTI-COMUTATIVO)

$$\hat{x} \times \hat{x} = 0 = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0$$

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

(REGRAS DA MÃO DIREITA)
SISTEMA DE COORDENADAS DESTROGIRAO

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \times (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z})$$

$$\begin{aligned} &= A_x B_x \hat{x} \times \hat{x} + A_x B_y \hat{x} \times \hat{y} + A_x B_z \hat{x} \times \hat{z} \\ &+ A_y B_x \hat{y} \times \hat{x} + A_y B_y \hat{y} \times \hat{y} + A_y B_z \hat{y} \times \hat{z} \\ &+ A_z B_x \hat{z} \times \hat{x} + A_z B_y \hat{z} \times \hat{y} + A_z B_z \hat{z} \times \hat{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0 + A_x B_y (\hat{z}) + A_x B_z (-\hat{y}) \\ &+ A_y B_x (-\hat{z}) + 0 + A_y B_z (\hat{x}) \\ &+ A_z B_x (\hat{y}) + A_z B_y (-\hat{x}) + 0 \end{aligned}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_j B_k \right) \hat{e}_i$$

TENSOR DE LEVI-CIVITA

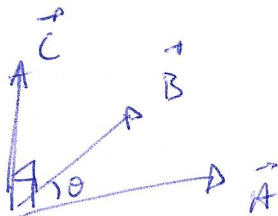
TENSOR DE LEVI-CIVITA

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1, & (ijk) = (213), (321), (132) \\ 0, & \text{EM TODOS OS OUTROS CASOS} \end{cases}$$

PROPRIEDADES

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta$$

(33)



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{C} \cdot \vec{A} &= 0 \\ \vec{C} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{C} &\perp \vec{A} \\ \vec{C} &\perp \vec{B} \end{aligned}$$

$$C = |\vec{C}| = AB \sin \theta$$

PROVA: $\vec{A} = A\hat{x}$, $\vec{B} = B(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y})$

$$\Rightarrow \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = AB (\underbrace{\cos \theta}_{0} \hat{x} \times \hat{x} + \underbrace{\sin \theta}_{\hat{z}} \hat{x} \times \hat{y}) = AB \sin \theta \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{C} \cdot \vec{A} = AB \hat{z} \cdot \hat{x} = 0$$

$$\vec{C} \cdot \vec{B} = AB (\cos \theta \hat{z} \cdot \hat{x} + \sin \theta \hat{z} \cdot \hat{y}) = 0$$

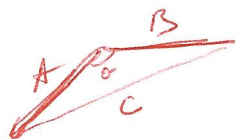
$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

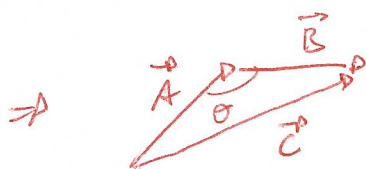
$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

EX: ~~PROVA~~ LEI DO COSSENO

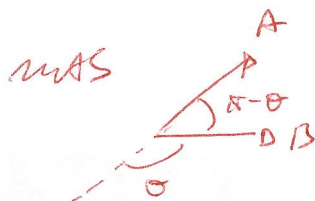


$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$$

VALORES DETERMINAR $\vec{A} = \text{vector}$ e $\vec{B} = \text{vector}$ e $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



$$\Rightarrow C^2 = \vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = A^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + B^2$$

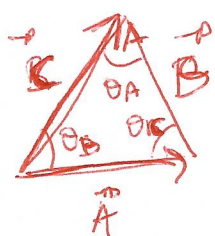


$$\text{MAS } \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\pi - \theta) = -AB \cos \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{C^2 = A^2 - 2AB \cos \theta + B^2}$$

EX: LEI DO SENO

34



$$\Rightarrow \vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

$$\vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow |\vec{A} \times \vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$AC \sin \theta_B = AB \sin \theta_C \Rightarrow \frac{C}{\sin \theta_C} = \frac{B}{\sin \theta_B}$$

ANALOGAMENTE PI $\vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \times \vec{A}$

$$\text{tem-se } \left[\frac{A}{\sin \theta_A} = \frac{B}{\sin \theta_B} = \frac{C}{\sin \theta_C} \right]$$

DIFERENCIAÇÃO E INTEGRAÇÃO

$$\vec{A} = (A_x(t), A_y(t), A_z(t)) = A_x(t) \hat{x} + A_y(t) \hat{y} + A_z(t) \hat{z}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{\vec{A}} = (\dot{A}_x, \dot{A}_y, \dot{A}_z)$$

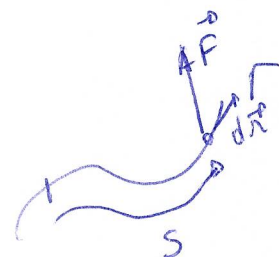
$$\frac{d(\vec{A} + \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt} = \dot{\vec{A}} + \dot{\vec{B}}$$

$$\frac{d(f\vec{A})}{dt} = \dot{f}\vec{A} + f\dot{\vec{A}}$$

$$\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{dt} = \dot{\vec{A}} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \dot{\vec{B}}$$

$$\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{dt} = \dot{\vec{A}} \times \vec{B} + \vec{A} \times \dot{\vec{B}}$$

INTEGRAL DE LINHA: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \rightarrow W = \int_{\Gamma} dW$



$$d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

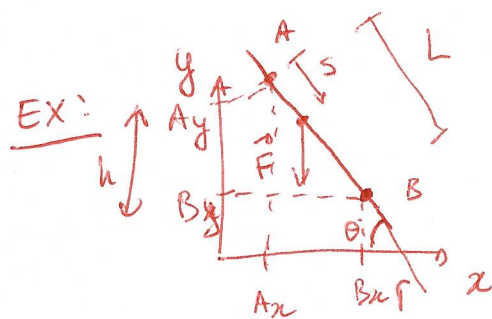
SEJA S UMA VARIÁVEL QUE
PARAMETRIZA O CAMINHO
 $\Rightarrow$ A CADA VALOR DE S, SABE-SE
O PT DA TRAJETÓRIA (x, y, z)
 $\Rightarrow x = x(s), y = y(s), z = z(s)$

Logo, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right) ds$

(35)

mas $\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \hat{x} + \frac{dy}{ds} \hat{y} + \frac{dz}{ds} \hat{z}$

$\Rightarrow W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \left(F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds} + F_z \frac{dz}{ds} \right) ds$



$W = \int_{A, \Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$\vec{F} = -F \hat{y} = -mg \hat{y}$

CAMINHO A $\rightarrow$ B POR Γ

$\vec{r} = (x(s), y(s))$

QD $s=0 \Rightarrow x = Ax = 0$
 $y = Ay = L \sin \theta$

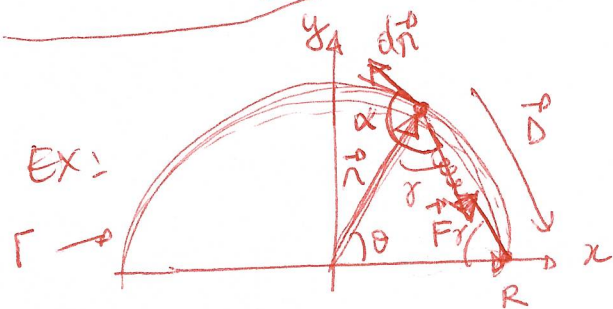
$s=L \Rightarrow x = Bx = L \cos \theta$
 $y = By = 0$

O CAMINHO É UMA RETA
 $y = +L \sin \theta \equiv \tan \theta x$

$\Rightarrow \begin{cases} x = s \cos \theta \\ y = L \sin \theta - s \sin \theta \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{dx}{ds} = \cos \theta, \frac{dy}{ds} = -\sin \theta$

$\Rightarrow W = \int_0^L (F_x \cos \theta + F_y \sin \theta) ds = \int_0^L 0 + mgs \sin \theta ds = mgL \sin \theta = mgh$



$\vec{F} = K \vec{D}, \vec{D} + \vec{n} = R \hat{x}$

$\gamma + \theta + \theta = \pi, \alpha = \gamma + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \alpha dr = F \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) dr$

$= -F \sin \frac{\pi}{2} dr$

$= -K D \sin \frac{\pi}{2} R d\theta$

$= -K \sqrt{R^2 - 2R^2 \cos \theta + R^2} \sin \frac{\pi}{2} R d\theta$

$= -\sqrt{2} K R^2 \sqrt{1 - \cos \theta} \sin \frac{\pi}{2} d\theta$

mas $\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = -2 K R^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta$

$$\Rightarrow W = \int_0^\pi -2KR^2 \sin\frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2} d\theta$$

36

$$= -KR^2 \int_0^\pi \sin\frac{\theta}{2} d\theta = -2KR^2$$

ESSE É O RESULTADO ESPERADO PORQUE A FORÇA É

CONSERVATIVA $\Rightarrow W = -\Delta U = \frac{1}{2} K R_A^2 - \frac{1}{2} K R_B^2 = 0 - \frac{1}{2} K (2R)^2 = -2KR^2$

VAMOS AGORA PARAMETRIZAR O CAMINHO EM
RELACÃO À θ :

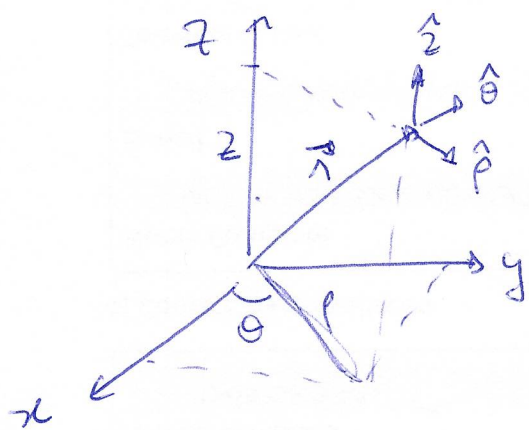
$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

$$\vec{F} = K\vec{D} = KR((1-\cos\theta)\hat{x} - \sin\theta\hat{y})$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(F_x \frac{dx}{d\theta} + F_y \frac{dy}{d\theta} \right) d\theta = KR \left((1-\cos\theta)(-R\sin\theta) - \sin\theta R \cos\theta \right) d\theta = -KR^2 \sin\theta d\theta$$

$$\Rightarrow W = \int_0^\pi (-KR^2 \sin\theta) d\theta = -2KR^2$$

RECUPERANDO O RESULTADO ANTERIOR



$$\hat{z} = \text{FIXO}$$

$\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ DEPENDEM DA POSIÇÃO

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctan y/x$$

$$\vec{r} = r \hat{r} + z \hat{z}$$

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} \\ \hat{\theta} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$$

como em coord. POLARES (2D)

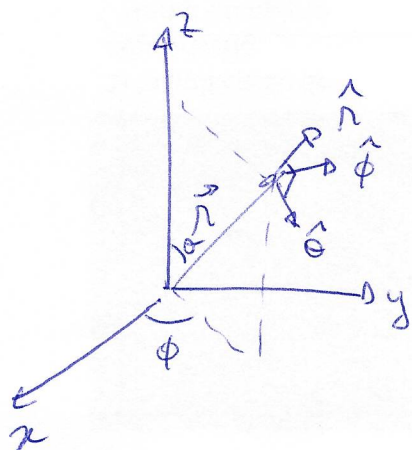
$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \hat{r} + z \hat{z})$$

$$= \dot{r} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{z} \hat{z} = \boxed{\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{z} = \vec{v}}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{r} \ddot{\theta} \hat{r} + r \ddot{\theta} \hat{\theta} + \ddot{z} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{r} + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \hat{\theta} + \ddot{z} \hat{z}}$$

COORDENADAS ESFÉRICAS



$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

ou seja

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi = \arctan y/x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\phi} = -\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} \end{cases}$$

Logo, $\frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} = \hat{\theta}$, $\frac{\partial \hat{n}}{\partial \phi} = \sin \theta \hat{\phi}$

(38)

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{n}, \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} = \cos \theta \hat{\phi}$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = -\sin \theta \hat{n} - \cos \theta \hat{\theta}$$

como $\vec{r} = r \hat{n} = r \hat{n}(\theta, \phi)$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{n} + r \frac{d\hat{n}}{dt} = \dot{r} \hat{n} + r \left(\frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \hat{n}}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} \right)$$

$$= \dot{r} \hat{n} + r \left(\dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r} \hat{n} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi}}$$

ANALOGAMENTE, $\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\dot{r} \hat{n} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi} \right)$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r} \hat{n} + 2\dot{r}\dot{\theta} \hat{\theta} + r\ddot{\theta} \hat{\theta} + r\dot{\theta}(\dot{\theta}(-\hat{n}) + \cos \theta \dot{\phi} \hat{\phi}) + \dot{r} \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi} + r \cos \theta \dot{\phi} \dot{\phi} \\ + r \sin \theta \ddot{\phi} \hat{\phi} + r \sin \theta \dot{\phi}(-\sin \theta \hat{n} - \cos \theta \hat{\theta}) \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{a} = & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \hat{n} \\ & + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 \right) \hat{\theta} \\ & + \left(r\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta \right) \hat{\phi} \end{aligned}}$$

como $\hat{n}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ formam uma base,

(39)

ENTÃO PODAMOS ESCRIVER um vetor qualquer

$$\vec{A} = A_n \hat{n} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi} = A_n \hat{n} + A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}$$

E A DERIVADA TEMPORAL DESTA É

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{A}_n \hat{n} + \dot{A}_\theta \hat{\theta} + \dot{A}_\phi \hat{\phi}$$

$$= \dot{A}_n \hat{n} + A_n \dot{\hat{n}} + \dot{A}_\theta \hat{\theta} + A_\theta \dot{\hat{\theta}} + \dot{A}_\phi \hat{\phi} + A_\phi \dot{\hat{\phi}}$$

$$\text{com } \begin{cases} \dot{\hat{n}} = \frac{\partial \hat{n}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \hat{n}}{\partial \phi} \dot{\phi} = 0 + \dot{\theta} \hat{\theta} + \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi} \\ \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{n} + \omega \sin \theta \hat{\phi} \\ \dot{\hat{\phi}} = -\sin \theta \dot{\phi} \hat{n} - \omega \sin \theta \hat{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} &= \left(\dot{A}_n - A_\theta \dot{\theta} - A_\phi \sin \theta \dot{\phi} \right) \hat{n} \\ &+ \left(\dot{A}_\theta + A_n \dot{\theta} - A_\phi \omega \sin \theta \dot{\phi} \right) \hat{\theta} \\ &+ \left(\dot{A}_\phi + A_n \sin \theta \dot{\phi} + A_\theta \omega \sin \theta \dot{\phi} \right) \hat{\phi} \end{aligned}$$

ANÁLISE VETORIAL

40

UMA FUNÇÃO $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$ TEM 3

DERIVADAS $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$.

DEFINE-SE COMO

$$\text{GRADIENTE DE } f \equiv \vec{\nabla} f \\ = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

DEFINI-SE COMO DIFERENCIAL DE f

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

QUE PODE, PORTANTO, SER REESCRITA COMO

$$df = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f, \text{ ONDE } d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

COMUMENTE DEFINI-SE COMO OPERADOR NABLA,

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

QUE OPERA EM FUNÇÕES $f \equiv f(x, y, z)$

DEFINIÇÃO: DIVERGENTE DE UM VETOR $\vec{A} \equiv \vec{A}(\vec{r}) \equiv \vec{A}(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z})$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

POR QUE $\frac{\partial (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})}{\partial x, y, z} = 0$

DEFINIR-SE COMO ROTACIONAL DE UM VETOR $\vec{A} = A(\vec{r})$

(41)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} \hat{x} \times \hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{x} \times \hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{x} \times \hat{z} \\ &\quad + \frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{y} \times \hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \hat{y} \times \hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{y} \times \hat{z} \\ &\quad + \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{z} \times \hat{x} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{z} \times \hat{y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \hat{z} \times \hat{z}\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

GRADIENTE EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

SABEMOS QUE $df = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f$.

EM COORD. CILÍNDRICAS, $\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} \rightarrow d\vec{r} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\theta \hat{\theta} + dz \hat{z}$

QUEREMOS QUE $df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

ENTÃO, P/ QUE $df = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f$ SEJA VERDADE EM COORD. CILÍNDRICAS,

PRECISAMOS QUE $\vec{\nabla} f = \hat{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z}$

OU AINDA, $\boxed{\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\theta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}}$

ALTERNATIVA MONTAR PORÉMAMOS USAR

(42)

4 DEFINIÇÃO $\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$

5 SUBSTITUIR NELA $\begin{cases} \hat{x} = \cos\theta \hat{\rho} - \sin\theta \hat{\theta} \\ \hat{y} = \sin\theta \hat{\rho} + \cos\theta \hat{\theta} \end{cases}$

6 QUE $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{\cos\theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dy} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dy} = \frac{\sin\theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases}$ (VIDE ANEXO)

$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{d\rho}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho} = \cos\theta$
 $\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx} \tan\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{-y}{x^2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \left(\frac{x^2}{r^2}\right) \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{\sin\theta}{\rho}$

Logo,

$\vec{\nabla} = (\cos\theta \hat{\rho} - \sin\theta \hat{\theta}) \left(\frac{\cos\theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + (\sin\theta \hat{\rho} + \cos\theta \hat{\theta}) \left(\frac{\sin\theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$
 $= (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + 0 + 0 + \frac{1}{\rho} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}}$

TRANSFORMANDO $\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta}$ em $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$: $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho \sin\theta & \rho \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$

AGORA, BASTA INVERTER A MATRIZ

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{\rho} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}$

DIVERGENTE EM COORD. CILINDRICAS $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

(43)

$$\text{como } \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\theta \hat{\theta} + A_z \hat{z} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \hat{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (A_\rho \hat{\rho} + A_\theta \hat{\theta} + A_z \hat{z}) + \frac{1}{\rho} \hat{\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\rho \hat{\rho} + A_\theta \hat{\theta} + A_z \hat{z}) + \hat{z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (A_\rho \hat{\rho} + A_\theta \hat{\theta} + A_z \hat{z})$$

$$= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{\theta} \cdot \left(\hat{\theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + A_\rho \underbrace{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \theta}}_{+\hat{\theta}} + A_\theta \underbrace{\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta}}_{-\hat{\rho}} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

que é comumente REESCRITO como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ANALOGAMENTE,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \hat{z}$$

ANALOGAMONT, PARA COORD. ESFÉRICAS

(44)

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} A_\phi$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r}$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$

DERIVAÇÃO ALTERNATIVA ÀQUELA DA PÁGINA (13).

• NOTE QUE $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (v_x^2) = m \left(\frac{dv_x}{dt} \right) v_x$

MASSA CONSTANTE DA PARTÍCULA

ANALOGAMENTE,
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_y^2 \right) = m \dot{v}_y v_y = F_{Ry} v_y \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_z^2 \right) = m \dot{v}_z v_z = F_{Rz} v_z \end{cases}$$

PORQUÊ $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m(\dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z) = (F_{Rx}, F_{Ry}, F_{Rz}) = \vec{F}_R$

Logo,
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

$$= \frac{d}{dt} (T)$$

$$= F_{Rx} v_x + F_{Ry} v_y + F_{Rz} v_z$$

$$= \vec{F}_R \cdot \vec{v}$$

$\Rightarrow dt = \vec{F}_R \cdot \vec{v} dt$, MAS $d\vec{r} = \vec{v} dt$

$\Rightarrow dT = \vec{F}_R \cdot d\vec{r} \Rightarrow \Delta T = \int_T \vec{F}_R \cdot d\vec{r}$

$\Rightarrow$ VARIAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA É IGUAL AO TRABALHO DA FORÇA RESULTANTE

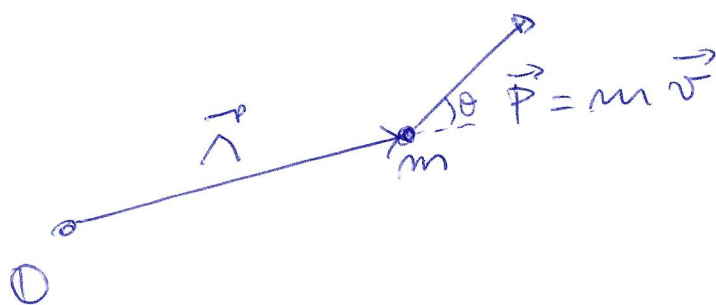
MOMENTO ANGULAR DE UMA PARTÍCULA

46

DEFINIÇÃO: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\downarrow$ $\downarrow$
 POSIÇÃO MOMENTO DA PARTÍCULA

~~Como o momento angular depende do ponto de referência~~
 COMO $\vec{r}$ DEPENDE DO PONTO DE REFERÊNCIA
 $\Rightarrow \vec{L}$ DEPENDE DESTES PONTOS



RIGOROSAMENTE, DEVERÍAMOS DENOTAR $\vec{L}$ COMO $\vec{L}_O$

$\downarrow$
 PONTO DE REFERÊNCIA

MAS, POR SIMPLICIDADE DE NOTAS,
 NÃO VAMOS ESCREVER $\vec{L}_O$, APENAS $\vec{L}$.

$$\Rightarrow L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = r p \sin \theta$$

EX: UMA PARTÍCULA EM MOVIMENTO UNIFORME $\vec{r} = v_0 t \hat{x}$
 CALCULE $\vec{L}$ EM RELACÃO A

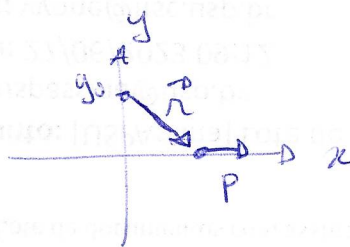
a) ORIGEM

RESPOSTA: COMO $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} = m v_0 \hat{x}$

b) PONTO $O = (0, y_0, 0)$

$\Rightarrow$ a) $\vec{L}_{\text{origem}} = v_0 t \hat{x} \times m v_0 \hat{x} = 0$

b) $\vec{r} = v_0 t \hat{x} - y_0 \hat{y} \Rightarrow \vec{L}_O = (v_0 t \hat{x} - y_0 \hat{y}) \times m v_0 \hat{x} = m v_0 y_0 \hat{z}$



TORQUE É MOMENTO ANGULAR DE UMA PARTÍCULA

47

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

$$\text{mas } \dot{\vec{r}} = \vec{v} \parallel \vec{p} \Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = 0$$

$$\text{Logo } \boxed{\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{L} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F}_R}$$

DEFINIMOS COMO TORQUE DA FORÇA RESULTANTE

$$\vec{N}_R = \vec{r} \times \vec{F}_R = \frac{d}{dt} \vec{L}$$

DE MANEIRA GERAL, DEFINIMOS COMO

TORQUE DE UMA FORÇA QUALQUER

A QUANTIDADE

$$\boxed{\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

DESTA MANEIRA, TEMOS UM ANÁLOGO

DO MOMENTO LINEAR E FORÇA RESULTANTE

COM O MOMENTO ANGULAR E TORQUE RESULTANTE

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

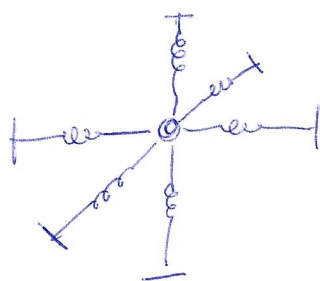
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{N}_R = \vec{r} \times \vec{F}_R = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\Delta \vec{p} = \int \vec{F}_R dt$$

$$\Delta \vec{L} = \int \vec{N}_R dt$$



$$\vec{F} = -k_x \hat{x} - k_y \hat{y} - k_z \hat{z}$$

$$= m \ddot{x} \hat{x} + m \ddot{y} \hat{y} + m \ddot{z} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = -k_x x \\ m \ddot{y} = -k_y y \\ m \ddot{z} = -k_z z \end{cases}$$

3 ERS. DIFERENCIAIS DESAEOPLANAS

$\Rightarrow$ 3 PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS

$$\Rightarrow \text{SOLUÇÃO} : \begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega_x t + \frac{v_{0x}}{\omega_x} \sin \omega_x t \\ y(t) = y_0 \cos \omega_y t + \frac{v_{0y}}{\omega_y} \sin \omega_y t \\ z(t) = z_0 \cos \omega_z t + \frac{v_{0z}}{\omega_z} \sin \omega_z t \end{cases}$$

ONDE $\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}$
 $\omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}$
 $\omega_z = \sqrt{\frac{k_z}{m}}$

OU AINDA, $x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \theta_x)$

$y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \theta_y)$

$z(t) = A_z \cos(\omega_z t + \theta_z)$

AS TRAJETÓRIAS PROJETADAS NOS

PLANOS, xy , xz , yz S

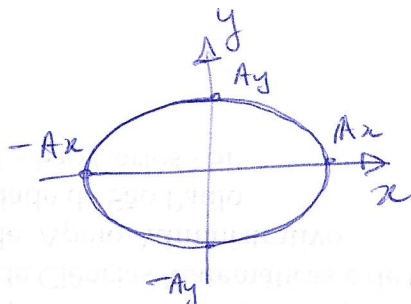
CHAMADAS DE FIGURAS DE LISSAJOUS.

49

EXEMPLOS:

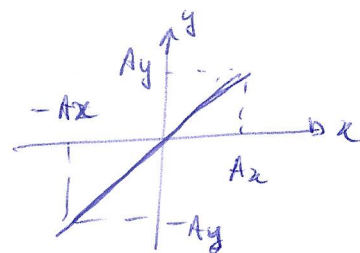
$$\omega_x = \omega_y$$

$$\theta_x - \theta_y = \frac{\pi}{2}$$



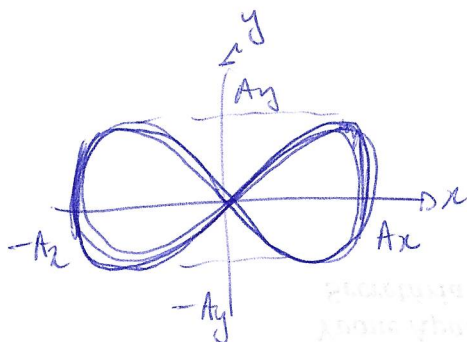
$$\omega_x = 4\omega_y$$

$$\theta_x = \theta_y$$



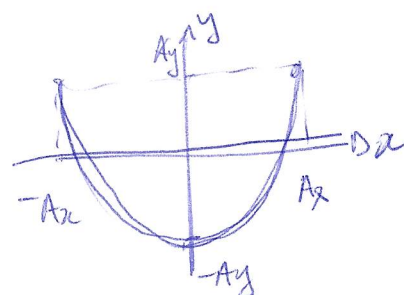
$$2\omega_x = \omega_y$$

$$\theta_x - \theta_y = \frac{\pi}{2}$$



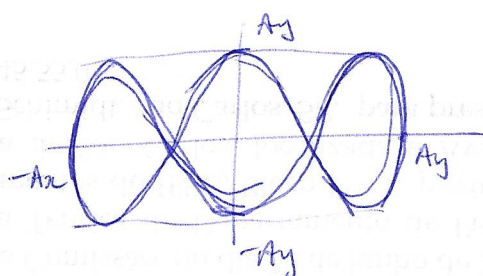
$$2\omega_x = \omega_y$$

$$\theta_x = \theta_y$$



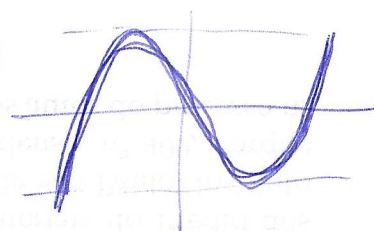
$$3\omega_x = \omega_y$$

$$\theta_x - \theta_y = \frac{\pi}{2}$$



$$3\omega_x = \omega_y$$

$$\theta_x = \theta_y$$



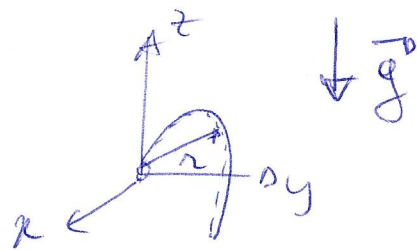
QPO $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ É RACIONAL, A FIGURA DE LISSAJOUS É

UMA CURVA FECHADA PORQUE O MOVIMENTO É PERIÓDICO EM x, y

$$\text{SEJA } \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{T_y}{T_x} = \frac{p}{q} \Rightarrow qT_y = pT_x$$

$$\Rightarrow x(t + pT_x) = x(t) \quad \text{E} \quad y(t + pT_x) = y(t + qT_y) = y(t)$$

PROJÉTEIS



(50)

NA AUSÊNCIA DE FORÇAS DISSIPATIVAS

$$\vec{F} = -mg\hat{z} = m\vec{\ddot{r}} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t \\ z = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

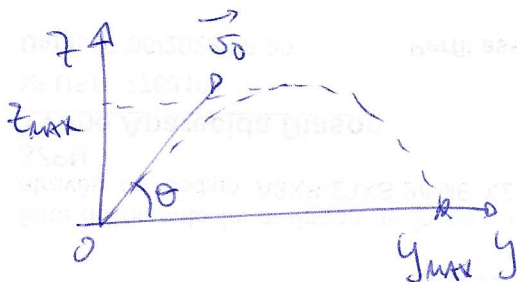
$$\Rightarrow \boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\hat{z}}$$

↓
TRAJETÓRIA É UMA PARÁBOLA

• TRAJETÓRIA É BIDIMENSIONAL → ESTÁ NO PLANO
QUAL PLANO? R: AQUELE DEFINIDO POR $\vec{v}_0$ E $\hat{z}$
PORQUE? R: $\vec{F}_R$ ESTÁ NO EIXO $\hat{z} \Rightarrow \Delta\vec{p}$ ESTÁ NO EIXO $\hat{z}$
como $\vec{v}_0$ E $\Delta\vec{p}$ SÃO CONSTANTES
~~ESTÃO~~ $\Rightarrow$ TRAJETÓRIA ESTÁ NO
PLANO FORMADO POR $\vec{v}_0$ E $\Delta\vec{p}$
 $\rightarrow$ PLANO $\vec{v}_0$ E $\hat{z}$

SEM PERDA DE GENERALIDADE, FAZAMOS $\vec{v}_0 = (0, v_{0y}, v_{0z})$
 $= v_0(0, \cos\theta, \sin\theta)$

$$\text{E } \vec{r}_0 = 0$$



$$\text{TRAJETÓRIA: } \begin{cases} y = v_0 \cos\theta t \\ z = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = v_0 \sin\theta \left(\frac{y}{v_0 \cos\theta} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{y}{v_0 \cos\theta} \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \tan\theta y - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} y^2} \rightarrow \text{PARÁBOLA}$$

(51)

$$y_{\max} = ? \rightarrow z = 0$$

$$\Rightarrow 0 = y \left(\tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} y_{\max} \right)$$

$$\Rightarrow y_{\max} = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta \tan \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$\boxed{y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}} = \frac{v_{0y} v_{0z}}{g}$$

$$z_{\max} = ? \rightarrow y = \frac{y_{\max}}{2}$$

$$\Rightarrow z = \tan \theta \times \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \frac{v_0^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{g^2}$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Rightarrow \boxed{z_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}}$$

$$= \frac{v_{0z}^2}{2g}$$

• NA PRESENÇA DE UMA FORÇA DE ARRASTE VISCOZA

$$\Rightarrow m \vec{\ddot{r}} = -mg\hat{z} - b\dot{\vec{r}}$$

NESTE CASO, O MOVIMENTO CONTINUA CONFINADO
 É 2D. ASSUMINDO QUE O PLANO DA
 TRAJETÓRIA É O PLANO yz
 (COMO NO CASO SEM FORÇA DE ARRASTE)

$$\text{ENTÃO, } \begin{cases} m \ddot{y} = -b \dot{y} \\ m \ddot{z} = -b \dot{z} - mg \end{cases}$$

(52)

2 E.D.O's DESACOPLADAS - ~~PROB.~~

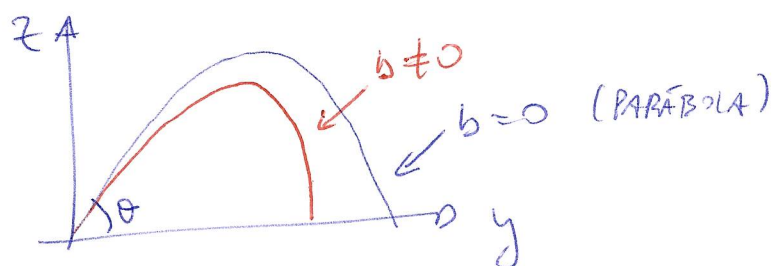
$\Rightarrow$ 2 PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS

ELES JÁ FORAM ESTUDADOS. VIDE PÁGINAS (11) e (18).

Logo, TOMANDO $\begin{cases} y_0 = z_0 = 0 \\ \vec{v}_0 = (0, v_{0y}, v_{0z}) = v_0 (0, \cos\theta, \sin\theta) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{m v_{0y}}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}} \right) \\ z = \left(\frac{m^2 g}{b^2} + \frac{m}{b} v_{0z} \right) \left(1 - e^{-\frac{bt}{m}} \right) - \frac{mg}{b} t \end{cases}$$

COMO É A TRAJETÓRIA?



DA EQUAÇÃO $y(t) \Rightarrow e^{-\frac{bt}{m}} = 1 - \frac{by}{m v_{0y}} = 1 - \frac{y}{y_{\infty}} = e^{-t/\tau}$

$$\Rightarrow \boxed{t = -\tau \ln \left(1 - \frac{y}{y_{\infty}} \right)}$$

MAS $z = (v_T \tau + y_{\infty} \tan\theta) (1 - e^{-t/\tau}) - v_T t$

ONDE $\tau = \frac{m}{b}$

$y_{\infty} = \frac{m v_{0y}}{b}$

ONDE $v_T = \frac{mg}{b}$

QUAL O SIGNIFICADO DE

(53)

y_{∞} , τ E V_T ?

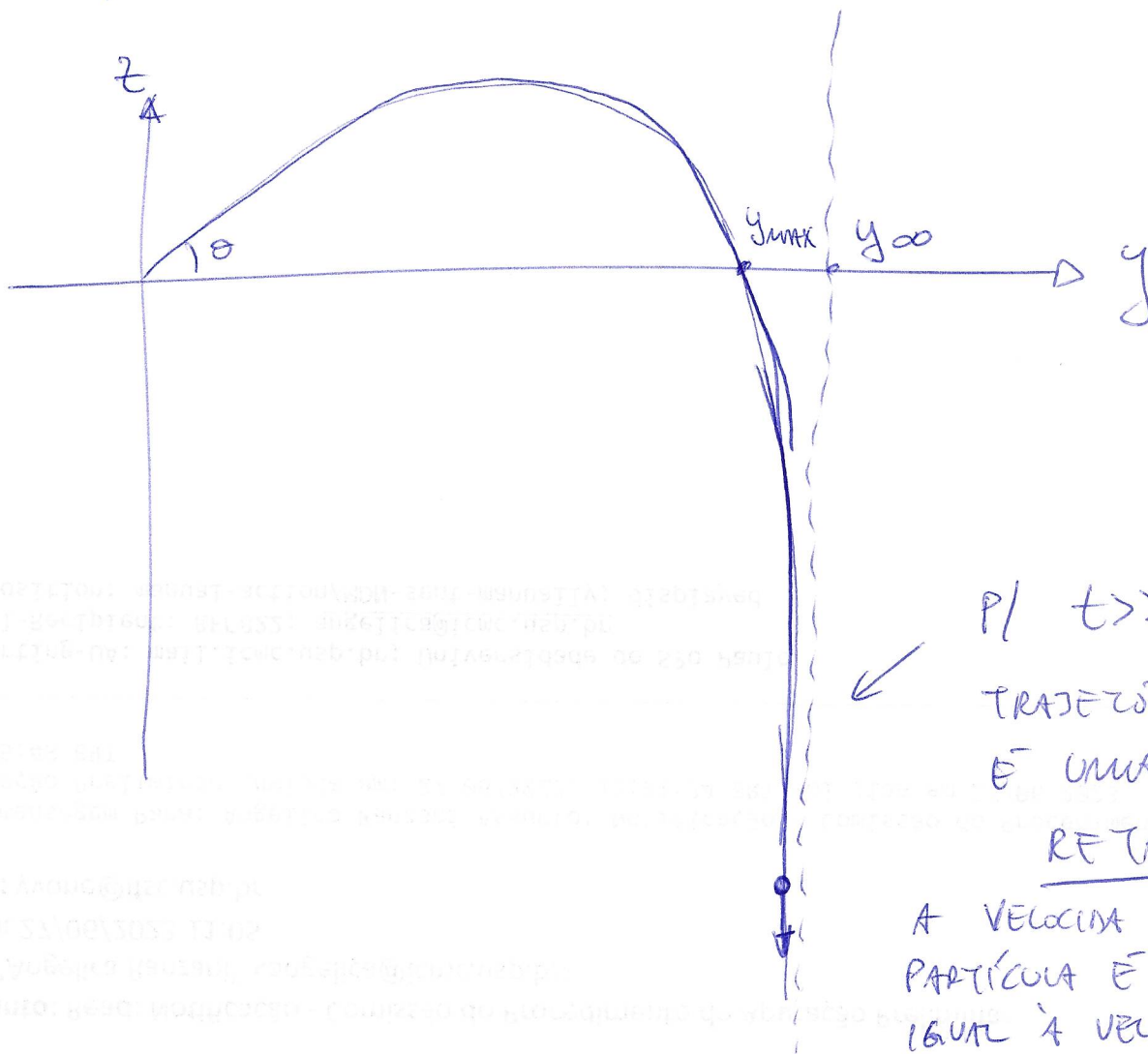
$\tau \rightarrow$ ESCALA DE TEMPO EM QUE A FORÇA VISCOSA ATUA P/ ~~DESACELERAR~~ FREAR A PARTÍCULA

QD $t \gg \tau \Rightarrow \begin{cases} y \rightarrow y_{\infty} \\ z \rightarrow \text{const} - V_T t \end{cases}$

VELOCIDADE TERMINAL

ONDE V_T É A VELOCIDADE TERMINAL

SE NÃO HOUVESSE O SOLO P/ PARAR O PROJÉTIL, SUA TRAJETÓRIA SERIA



P/ $t \gg \tau$

TRAJETÓRIA

É UMA LINHA

RETA E

A VELOCIDADE DA PARTÍCULA É CONSTANTE IGUAL À VELOCIDADE TERMINAL

como $t = -\tau \ln(1 - y/y_\infty) \Rightarrow t = t(y)$ (54)

$$\Rightarrow z(t) \rightarrow z(y) = \left(V_T \tau + \tan \theta y_\infty \right) \frac{y}{y_\infty} + V_T \tau \ln \left(1 - \frac{y}{y_\infty} \right)$$

PODE-SE AINDA SIMPLIFICAR PARA

$$z = \left(\frac{V_T \tau}{y_\infty} + \tan \theta \right) y + V_T \tau \ln \left(1 - y/y_\infty \right)$$

QPO A RESISTÊNCIA DO AR É PEQUENA,
PODEMOS EXPANDIR EM POTÊNCIAS DE b A
EXPRESSÃO ACIMA.

ISSO É VÁLIDO ENQUANTO $\frac{y}{y_\infty} \ll 1$, OU SEJA

$$by \ll m v_{0y}$$

$$\begin{aligned} \text{logo, } \ln \left(1 - \frac{y}{y_\infty} \right) &= \ln(1 - e) \approx -e - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^3 + \dots \\ &= -\frac{y}{y_\infty} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y_\infty} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{y_\infty} \right)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{portanto, } z &\approx \cancel{\frac{V_T \tau}{y_\infty} y} + \tan \theta y + V_T \tau \left(\cancel{-\frac{y}{y_\infty}} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{y_\infty^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{y}{y_\infty} \right)^3 \right) \\ &= \tan \theta y - \frac{1}{2} \frac{V_T \tau}{y_\infty^2} y^2 - \frac{1}{3} \frac{V_T \tau}{y_\infty^3} y^3 + \dots \\ &= \tan \theta y - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0y}^2} y^2 - \frac{1}{3} \frac{bg}{m v_{0y}^3} y^3 + \dots \end{aligned}$$

idênticos ao caso
 $b=0$ (vide página (50))

correta a parábola
em ordem mais
baixa em b .

Como DETERMINAR O ALCANCE DO PROJÉTILO?

55

QD $y_{\infty} \gg y_{\max}$ A APROXIMAÇÃO

ANTERIOR É VÁLIDA, OU SEJA,

$$z \approx \left(\tan \theta - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0y}^2} y - \frac{1}{3} \frac{b g}{m v_{0y}^3} y^2 \right) y$$

$$P/ z=0 \Rightarrow \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0y}^2} y_{\max} - \frac{1}{3} \frac{b g}{m v_{0y}^3} y_{\max}^2 = 0$$

$$\Rightarrow y_{\max} = \frac{2 v_{0y}^2 \tan \theta}{g} - \frac{2}{3} \frac{b}{m v_{0y}} y_{\max}^2$$

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} - \frac{2}{3} \frac{y_{\max}^2}{y_{\infty}}$$

$$y_{\max} = \frac{2 v_{0y} v_{0z}}{g} - \frac{2 b}{3 v_{0y} m} y_{\max}^2$$

ALCANCE SEM
FORÇA DE ARRASTE

CORREÇÃO AO
ALCANCE

$$\Rightarrow y_{\max} \approx \frac{2 v_{0y} v_{0z}}{g} - \frac{2 b}{3 v_{0y} m} \left(\frac{2 v_{0y} v_{0z}}{g} \right)^2$$

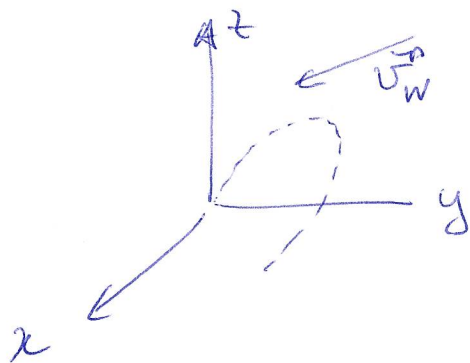
$$y_{\max} \approx \frac{2 v_{0y} v_{0z}}{g} - \frac{8}{3} \frac{b v_{0y} v_{0z}^2}{m g^2}$$

Registro de assinatura(s) eletrônica(s)

USPAssina - Autenticação digital de documentos da USP

PROJÉTIL COM VÊNTO

56



$$m \ddot{\vec{r}} = -mg \hat{z} - b(\dot{\vec{r}} - \vec{v}_w)$$

VELOCIDADE
DO
VÊNTO

SE $\vec{v}_w$ FOR CONSTANTE,
ENTÃO A FORÇA DE ARRASTE $b\vec{v}_w$ É
CONSTANTE E, PORTANTO, A SITUAÇÃO
É ANALÓGICA AO CASO ANTERIOR,
ENTRETANTO, O MOVIMENTO NÃO

MAIS É BIDIMENSIONAL SE

$\vec{v}_w$ NÃO ESTIVER NO PLANO
FORMADO POR $\vec{v}_0$ E $\vec{g}$



$$\begin{cases} m \ddot{x} = -b\dot{x} + b v_{wx} \\ m \ddot{y} = -b\dot{y} + b v_{wy} \\ m \ddot{z} = -b\dot{z} + b v_{wz} - mg \end{cases}$$

→ 3 PROBLEMAS
UNIDIMENSIONAIS

DATA: 21/08/2023 ÀS 14:24

LOCAL: LABORATÓRIO DE FÍSICA

N.º: 1856131020001

LABORATÓRIO DE FÍSICA

Este documento é uma reprodução fiel do original, não sendo responsável por danos ou prejuízos decorrentes de sua utilização. A UFRJ não se responsabiliza por danos ou prejuízos decorrentes de sua utilização.

Registro de assinatura(s) eletrônica(s)



UFRJ - Autenticação digital de documentos de UFRJ

PROJÉTEIS EM ALTITUDES ~~MUITO~~ MUITO GRANDES

(57)

NESSE CASO, A DENSIDADE DO AR É, PORTANTO,
A RESISTÊNCIA DO AR MUDA COM A ALTITUDE.
UMA MELHOR APROXIMAÇÃO DO PROBLEMA

SERIA FAZER $b \rightarrow b e^{-z/h}$, ONDE

h É DA ORDEM DE 8 KM.

Logo,

$$\vec{F}_R = m \ddot{\vec{r}} = -mg \hat{z} - b e^{-z/h} \dot{\vec{r}}$$

NESSE CASO,

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -b e^{-z/h} \dot{x} \\ m \ddot{y} = -b e^{-z/h} \dot{y} \\ m \ddot{z} = -b e^{-z/h} \dot{z} - mg \end{cases}$$

→ EQUAÇÕES
ACOPLADAS

↓
A FORÇA EM

1 DIREÇÃO DEPENDE DA
COMPONENTE DA POSIÇÃO NA
PARTÍCULA EM OUTRA
DIREÇÃO

ESTE PROBLEMA É MUITO
MAIS DIFÍCIL DE RESOLVER,

MAS É RELEVANTE P/ PROJÉTEIS DE LONGAS
DISTÂNCIAS, COMO AQUELES LANÇADOS NAS ^{GRANDES} GUERRAS
MUNDIAIS.

ENERGIA POTENCIAL E FORÇAS CONSERVATIVAS

58

COMO DISCUTIDO NA PÁGINA (14), FORÇA CONSERVATIVA É AQUELA CUJO TRABALHO NÃO DEPENDE DO CAMINHO $\Rightarrow$ PODE-SE ASSOCIAR UMA FUNÇÃO DO ESPAÇO (POTENCIAL OU ENERGIA POTENCIAL) $U(\vec{r})$ TAL QUE

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}U}$$

$$\begin{aligned}\text{OU SEJA, } dU \equiv dU(\vec{r}) &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

LOGO, A VARIACÃO DA ENERGIA POTENCIAL

$$\begin{aligned}\Delta U_{AB} &= \int_A^B dU = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\text{TRABALHO DE } \vec{F} \\ &= -W_{AB} = U_B - U_A \quad \Rightarrow W_{AB} = U_A - U_B\end{aligned}$$

SE A FORÇA RESULTANTE É CONSERVATIVA

$$\Rightarrow W_{R,AB} = U_A - U_B$$

MAS O TRABALHO DA FORÇA RESULTANTE É A VARIACÃO DA ENERGIA CINÉTICA $\Rightarrow W_{R,AB} = T_B - T_A$

$$\Rightarrow T_A + U_A = T_B + U_B = \text{ENERGIA MECÂNICA.}$$

LOGO, A ENERGIA MECÂNICA É CONSERVADA QDO $\vec{F}_R$ É CONSERVATIVA.

COMO SABER QDO UMA
FORÇA É CONSERVATIVA?

(59)

R: É UMA IDENTIDADE MATEMÁTICA
QUE O ROTACIONAL DO GRADIENTE
DE UMA FUNÇÃO QUE POSSUI A
PRIMEIRA E SEGUNDA DERIVADA
É NULO. OU SEJA

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U) = 0$$

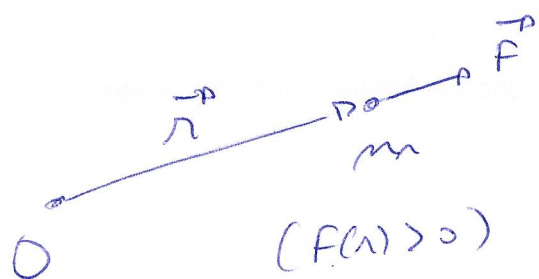
COMO UMA FORÇA CONSERVATIVA
É TAL QUE $\vec{F} = -\vec{\nabla} U(x)$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \text{QDO } \vec{F} \text{ É CONSERVATIVA}$$

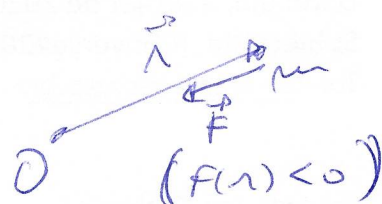
FORÇA CENTRAL

60

QUAL É O MOVIMENTO QD UMA
PARTÍCULA ESTÁ SUJEITA A UMA FORÇA
CENTRAL $\vec{F} = F(r) \hat{r}$?



OU



OU SEJA, $\vec{F}$ ESTÁ APONTANDO P/ A ORIGEM
(OU NO SENTIDO OPÓSTO) E

A MAGNITUDE DE $\vec{F}$, $|F(r)|$,
DEPENDE APENAS DA DISTÂNCIA
DA PARTÍCULA À ORIGEM.

NESTE CASO, A FORÇA É CONSERVATIVA

PROVA: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (F_\phi \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi} F_\theta \right) \hat{r}$

PÁGINA
44

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} F_r - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) \right) \hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} F_r \right) \hat{\phi}$$

$$= 0 \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} F_\theta - \frac{\partial}{\partial r} F_r \right) \hat{\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} F_\phi \hat{\phi}$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

$\Rightarrow$ FORÇA CONSERVATIVA

o POTENCIAL ASSOCIADO A ESSA FORÇA

(6)

$$\text{É TAL QUE } dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \\ = -F(r) dr$$

$$\Rightarrow U = -\int F(r) dr + \text{const}$$

NOTE QUE $U \equiv U(r)$, OU SEJA,
DEPENDE APENAS DA DISTÂNCIA DA PARTÍCULA
ATÉ A ORIGEM

$$\text{COMO } \vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = F(r) \hat{r} = -\vec{\nabla} U(r) = -\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) \hat{r}$$

$$\text{OU SEJA, } \boxed{F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{dU}{dr}}$$

PORQUE U DEPENDE
APENAS DE r

OUTRO FAZO IMPORTANTE PARA A NOSSA
ANÁLISE É QUE O MOMENTO ANGULAR
DA PARTÍCULA EM RELAÇÃO À ORIGEM
É CONSERVADO.

$$\text{PROVA? TORQUE } \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = F(r) \vec{r} \times \hat{r} = 0$$

$$\text{COMO } \vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \text{cte}}$$

COMO $\vec{L}$ É CONSERVADO

(62)

$\Rightarrow$ A DIREÇÃO DE $\vec{L}$ É TAMBÉM CONSERVADA.

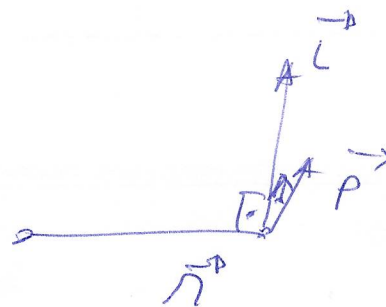
$$\text{COMO } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\Rightarrow \vec{r}$ E $\vec{p}$ ESTÃO

SEMPRE NO MESMO

PLANO, CASO CONTRÁRIO,

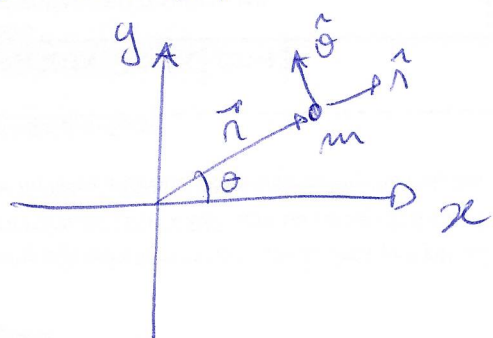
$\vec{L}$ MUDARIA DE DIREÇÃO.



COMO $\vec{r}$ E $\vec{p}$ ESTÃO SEMPRE NO MESMO PLANO $\Rightarrow$ MOVIMENTO É PLANAR

$\Rightarrow$ TRAJETÓRIA BIDIMENSIONAL (OU UNIDIMENSIONAL QUE $L = 0$)

SENDO O MOV. PLANAR E A FORÇA CENTRAL, É ENTÃO CONVENIENTE UTILIZAR COORDENADAS POLARES



LEMBRE-SE QUE

$$\vec{r} = r \hat{r} \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r} \hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta} \hat{\theta} + r\ddot{\theta} \hat{\theta} - r\dot{\theta}^2 \hat{r}$$

$$\text{COMO } \vec{F} = F(r) \hat{r} = m \vec{a}$$

$$\text{ENTÃO } \begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r) \\ m r \ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR, VIDE PÁGINA 63.

Além disso, $\vec{L} = L \hat{z}$

(63)

$$= \vec{r} \times m \vec{v}$$

$$= m (r \hat{n}) \times (\dot{r} \hat{n} + r \dot{\theta} \hat{\theta})$$

$$= 0 + m r^2 \dot{\theta} \underbrace{\hat{n} \times \hat{\theta}}_{\hat{z}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = m r^2 \dot{\theta} \hat{z}} \Rightarrow L = m r^2 \dot{\theta} = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) \hat{z} = 0$$

$$\text{mas } \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = m \left(\frac{d}{dt} (r^2) \right) \dot{\theta} + m r^2 \frac{d}{dt} (\dot{\theta})$$

$$= 2 m r \dot{r} \dot{\theta} + m r^2 \ddot{\theta}$$

$$= r (m r \ddot{\theta} + 2 m \dot{r} \dot{\theta}) = 0$$

ou seja, a 2ª equação

de movimento (aquela na direção θ)
(vide final da página 62)

é simplesmente a conservação

do momento angular

A ENERGIA MECÂNICA É

(64)

$$E = T + V(\lambda) = \frac{1}{2} m \dot{\lambda}^2 + U(\lambda)$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{\lambda}^2 + \lambda^2 \dot{\theta}^2) + U(\lambda)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} m \lambda^2 \dot{\theta}^2 + U(\lambda)$$

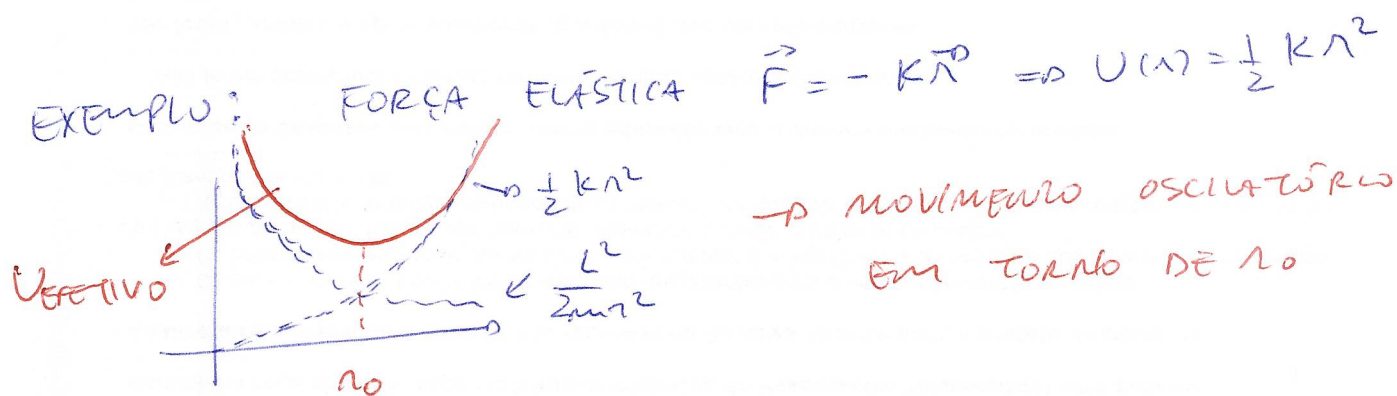
$\downarrow$
 $\left(\frac{L}{m\lambda^2}\right)^2$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{\lambda}^2 + \frac{L^2}{2m\lambda^2} + U(\lambda)$$

OU SEJA, $E = T + U_{\text{EFETIVO}}(\lambda) \rightarrow$ PROBLEMA UNIDIMENSIONAL

ONDE $T = \frac{1}{2} m \dot{\lambda}^2$, $U_{\text{EFET}} = \frac{L^2}{2m\lambda^2} + U(\lambda)$

= POTENCIAL EFETIVO



PODEMOS USAR O TRUQUE DA ENERGIA

$$\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(\lambda) - \frac{L^2}{2m\lambda^2} \right)}$$

$$\Rightarrow \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{E - U(\lambda) - \frac{L^2}{2m\lambda^2}}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

APÓS RESOLVER PARA $r(t)$

(65)

OBTEM-SE A VARIÁVEL ÂNGULO

A PARTIR DE $L = m r^2 \dot{\theta}$

$$\Rightarrow \theta = \theta_0 + \int_0^t \frac{L}{m r^2(t)} dt$$

ALTERNATIVAMENTE, PODEREMOS OLHAR A OUTRA

EQUAÇÃO DO MOVIMENTO (AQUELA NA DIREÇÃO r)

ONDE $m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 = F(r)$ COM $L = m r^2 \dot{\theta}$

$$\Rightarrow m \ddot{r} - \frac{L^2}{m r^3} = F(r)$$

OU SEJA, A E.D.O. CORRESPONDENTE É $\boxed{m \ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{m r^3}}$

QUE É COMPATÍVEL COM

$$\begin{aligned} m \ddot{r} &= - \frac{d}{dr} U_{\text{EFFECTIVO}} = - \frac{d}{dr} \left(U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right) \\ &= F(r) + \frac{L^2}{mr^3} \end{aligned}$$

COMO RESOLVER A E.D.O.?

MUDANÇA DE VARIÁVEL: $u = \frac{1}{r}$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u} \right) = - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = - \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = - r^2 \dot{\theta} \frac{du}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} = - \frac{m r^2 \dot{\theta}}{m} \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} = - \frac{L}{m} \frac{d\mathbf{u}}{d\theta}$$

(66)

$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} = - \frac{L}{m} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \right) = - \frac{L}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt}$$

$$= - \frac{L}{m} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\theta^2} \frac{L}{m r^2} = - \frac{L^2}{m^2} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\theta^2}$$

Logo, $m \ddot{\mathbf{r}} = F(r) + \frac{L^2}{m r^3} \Rightarrow - \frac{L^2}{m} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\theta^2} = F\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{L^2}{m} u^3$

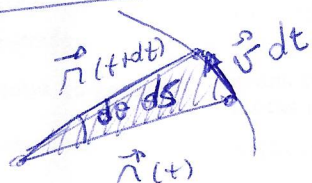
Então, $\boxed{\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right)}$

EQUAÇÃO DA TRAJETÓRIA $u = u(\theta)$
(NÃO TEM DEPENDÊNCIA TEMPORAL)

QDO SE RESOLVER ESSA EDO $\Rightarrow$ TEM-SE $u(\theta)$

como $\dot{\theta} = \frac{L^2}{m r^2} = \frac{L^2}{m} u^2 \Rightarrow \int \frac{d\theta}{u(\theta)} = \frac{L^2}{m} \int dt$

LEI DAS ÁREAS



$$dS = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt| \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{2} m |\vec{r} \times \vec{\omega}| \\ &= \frac{L}{2m} = \text{const} \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ A TAXA COM QUE A ÁREA É VARRIDA É CONSTANTE NO TEMPO 2ª LEI DE KEPLER

(2ª LEI DE KEPLER É CONSEQUÊNCIA DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR)

PARA RESOLVER A E.D.O., PRECISAMOS
DEFINIR $F(r)$.

(6)

O PROBLEMA DE KEPLER

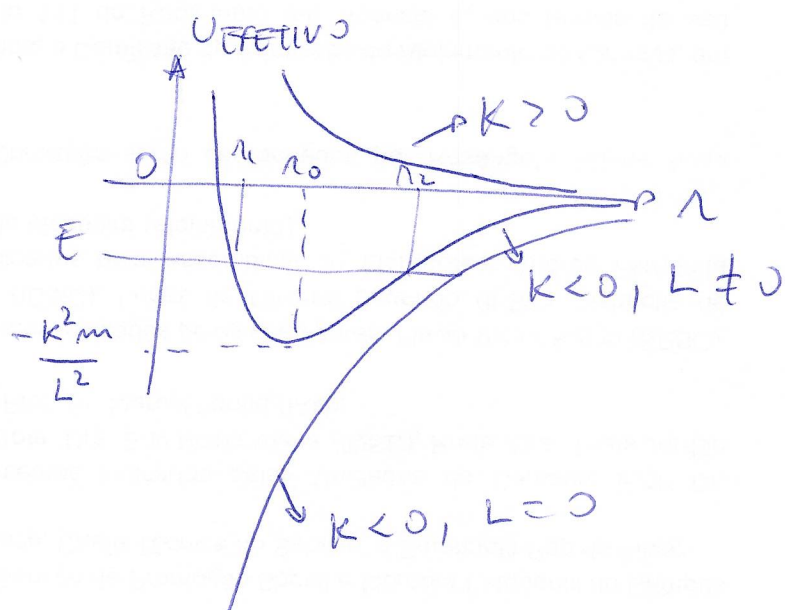
$$F = \frac{k}{r^2} \hat{r}$$

(FORÇA INVERSAMENTE
PROPORCIONAL AO
QUADRADO DA DISTÂNCIA)

* EM GRAVITAÇÃO

$$k = -GMm$$

$$U(r) = \frac{k}{r}$$

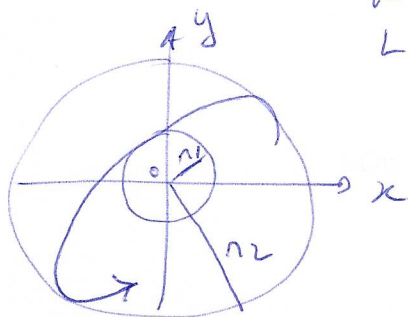


* FORÇA DE COULOMB

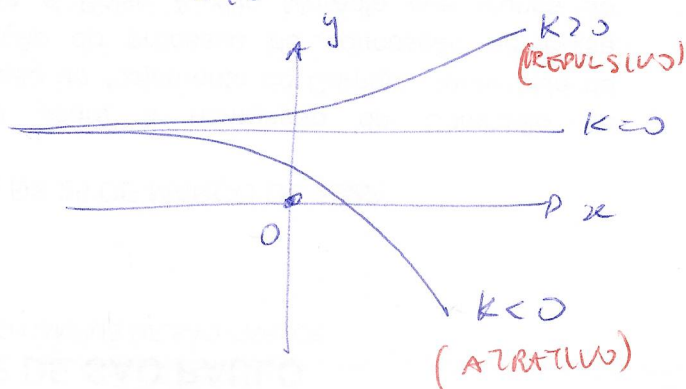
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2$$

$$U_{\text{EFETIVO}} = \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

TRAJETÓRIA com $E < 0$
 $k < 0$ (ATRATIVO)
 $L \neq 0$



TRAJETÓRIAS com $E > 0$
 $L \neq 0$



E.D.O DA TRAJETÓRIA

(68)

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$= -u - \frac{m}{L^2 u^2} k u^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{mk}{L^2}}$$

↓
OSCILADOR HARMÔNICO
COM FORÇA EXTERNA CONSTANTE

$$\Rightarrow u = u_{\text{HOMOGÊNEA}} + u_{\text{PARTICULAR}}$$

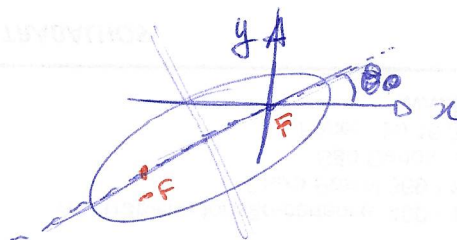
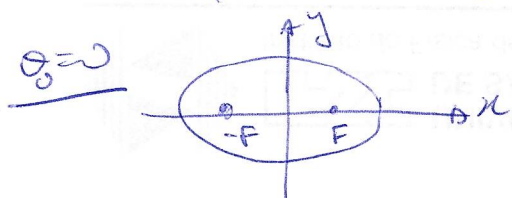
$$= \boxed{A \cos(\theta - \theta_0) - \frac{mk}{L^2} = \frac{1}{r}}$$

1ª LEI
DE
KEPLER

ESTA É A EQUAÇÃO DE UMA CÔNICA
(ELIPSE, PARÁBOLA OU HÍPERBOLE) COM FOCO EM $R=0$

PRECISAMOS DETERMINAR A E θ_0

θ_0 É APENAS A INCLINAÇÃO DA ÓRBITA EM
RESPEITO AO EIXO x

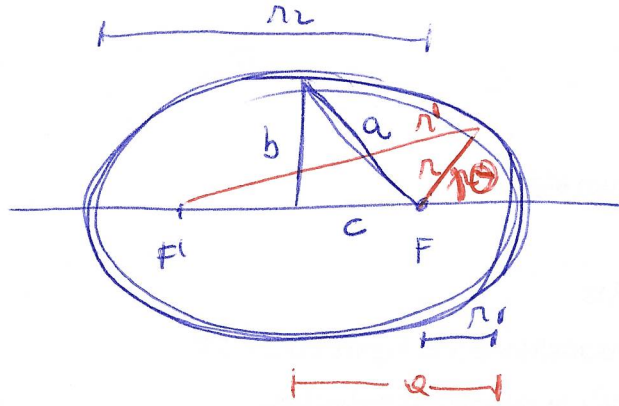


ELIPSE

(69)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$r + r' = 2a$$



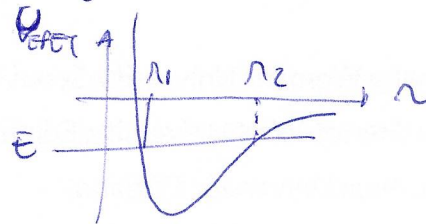
$$\text{EXCENTRICIDADE} \equiv e = \frac{c}{a}$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$\frac{1}{r} = A \cos \theta - \frac{mk}{L^2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r_1} = A - \frac{mk}{L^2} \\ \frac{1}{r_2} = -A - \frac{mk}{L^2} \end{cases}$$

• LEMBRE-SE QUE, PARA ÓRBITAS EM QUE r É FINITO

$$\Rightarrow E < 0 \quad \text{e} \quad K < 0$$



$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{EFFECTIVO}}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{|K|}{r}$$

$$\text{Em } r = r_{1,2}, \dot{r} = 0 \Rightarrow E = \frac{L^2}{2mr_{1,2}^2} - \frac{|K|}{r_{1,2}} = -|E|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_{1,2}} = \frac{m|K|}{L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{mk}{L^2}\right)^2 - \frac{2m|E|}{L^2}}$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2m|K|}{L^2} = -\frac{2mK}{L^2} \\ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 2A = 2\sqrt{\left(\frac{mk}{L^2}\right)^2 - \frac{2m|E|}{L^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\left(\frac{mk}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

EQUAÇÃO DA ELIPSE RELACIONANDO a, θ

70

O SEMI-ELIX MAIOR a , O SEMI-ELIX MENOR b ,

E A EXCÊNTRICIDADE $e = c/a$

LEI DOS COSSENOIS : $r^2 = (2c)^2 - 2(2c)r \cos(\pi - \theta) + a^2$
 $= 4c^2 + 4cr \cos \theta + a^2$

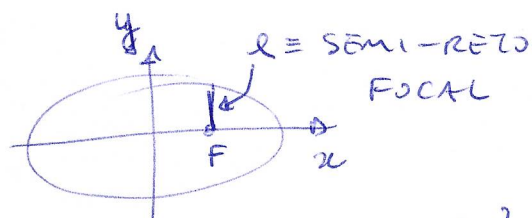
MAS $r = 2a - r \Rightarrow 4a^2 - 4ar + r^2 = 4c^2 + 4cr \cos \theta + a^2$

$\Rightarrow r(c \cos \theta + a) = a^2 - c^2 = b^2$

$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1 + \frac{c}{a} \cos \theta}{b^2/a}$

$= \frac{1 + e \cos \theta}{l}$

SEMI-RETO FOCAL

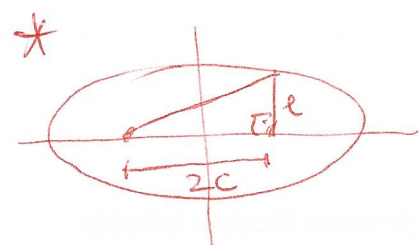


Logo $\frac{1}{r} = \frac{1 + \frac{AL^2}{m|k|} \cos \theta}{L^2/m|k|}$

$\Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$
 $= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

ALÉM DISSO, $\frac{b^2}{a} = \frac{L^2}{m|k|}$

$\Rightarrow \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\frac{L^2}{m|k|}}{\frac{-2EL^2}{mk^2}} = \frac{|k|}{2|E|} = a$



$(2c)^2 + l^2 = (2a - l)^2$
 $4c^2 + l^2 = 4a^2 - 4al + l^2$

$4c^2 = 4a^2 - 4al \Rightarrow al = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow l = \frac{b^2}{a}$

A TERCEIRA LEI DE KEPLER VEM

71

DA 2ª LEI COMBINADA COM A ÓRBITA

QUE ACABAMOS DE ANALISAR

$$2^{\text{a}} \text{ LEI (PÁGINA 66)} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} \Rightarrow S = \frac{L}{2m} T$$

↓
PERÍODO DA ÓRBITA

PORÉM, A ÁREA DA ÓRBITA ELÍPTICA

$$\text{É } S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

$$\Rightarrow S^2 = \pi^2 a^4 (1-e^2) = \frac{L^2}{4m^2} T^2$$

$$= \pi^2 a^4 \frac{2|E|L^2}{mk^2} = \frac{L^2}{4m^2} T^2$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^4 m (2|E|)}{k^2} = \frac{4\pi^2 a^4 m}{k^2} \left(\frac{|k|}{a} \right) = \boxed{\frac{4\pi^2 m a^3}{|k|} = T^2}$$

3ª LEI DE KEPLER

PARA O SISTEMA SOLAR $\left| \frac{m}{k} \right| = \frac{1}{GM_{\text{sol}}}$

$$\Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{sol}}} a^3}$$

HIPÉRBOLE: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \rightarrow$

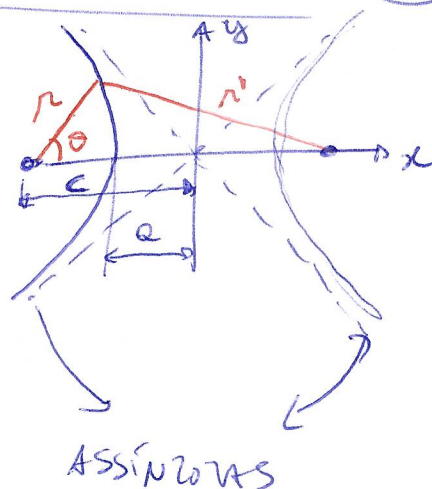
EXCENTRICIDADE $e \equiv \frac{c}{a}$

$c^2 = a^2 + b^2$

EM COORD. POLARES $(r' - r = 2a)$

$r'^2 = (r + 2a)^2 = r^2 - 2(2c)r \cos \theta + (2c)^2$

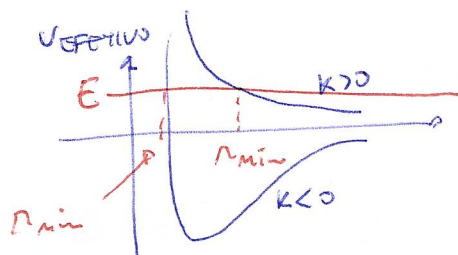
$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{e}} \rightarrow \text{MESMA EQ. DA ELIPSE (PAG. 70)}$
ENTRETANTO: $e = \frac{c}{a} > 1$



SOLUÇÃO DA EDO: $\frac{1}{r} = A \cos(\theta - \theta_0) - \frac{\mu k}{L^2}$ (VIDE PAG 68)

$\Rightarrow$ ~~PO~~ POR SIMPLICIDADE $\theta_0 = 0$

COMO $r > 0 \Rightarrow A \cos \theta - \frac{\mu k}{L^2} > 0 \rightarrow$ RESTRIÇÃO ~~ÂNGULO~~ θ



QUO $\theta = 0 \Rightarrow r = r_{\min}$

$\Rightarrow \frac{1}{r_{\min}} = A - \frac{\mu k}{L^2}$

ASSUMINDO $k < 0$

COMO $E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} \Rightarrow E = \frac{L^2}{2\mu r_{\min}^2} + \frac{k}{r_{\min}} = \frac{L^2 - |k|}{2\mu r_{\min}^2} \frac{1}{r_{\min}}$
U_EFFECTIVO

PORQUE $\dot{r} = 0$ EM $\theta = 0$ (PT DE RETORNO)

$\Rightarrow \frac{1}{r_{\min}} = \frac{|k| + \sqrt{k^2 + 4 \frac{L^2}{2\mu} E}}{2 \left(\frac{L^2}{2\mu} \right)} = A + \frac{\mu |k|}{L^2}$

Logo, $A = \frac{\sqrt{K^2 + \frac{2L^2 E}{m}}}{L^2/m} = \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + 2\frac{mE}{L^2}} \quad (73)$

MESMO RESULTADO QUE
A ELLIPSE (VDE PAG 69)

Logo, SEGUEM-SE OS MESMOS RESULTADOS

OBtidos ANTERIORMENTE $\rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

$$a = \frac{|K|}{2E}$$

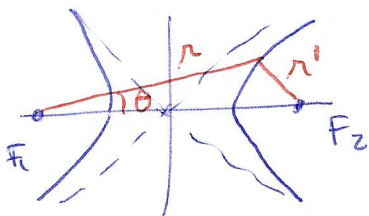
QUAL É A HIPERBOLE PARA $K > 0$?

LEMBRE-SE QUE $\frac{1}{r} = A \cos \theta - \frac{mK}{L^2} = \frac{e}{\ell} \cos \theta + \frac{1}{\ell}$

ONDE $\ell = \frac{b^2}{a} > 0$

P/ $K < 0$, JÁ TEMOS A RESPOSTA, MAS COMO
CONCILIAR O CASO $K > 0$. CERTAMENTE $\ell > 0$

A RESPOSTA É O OUTRO RAMO DA HIPERBOLE



$$r - r' = 2a \quad \text{e} \quad r'^2 = r^2 - 2(2c)r \cos \theta + (2c)^2 \\ = r^2 - 2(2a)r + (2a)^2$$

$$\Rightarrow c^2 - a^2 = b^2 = r a \left(\frac{c}{a} \cos \theta - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{e \cos \theta - 1}{\ell} = A \cos \theta - \frac{mK}{L^2} \quad \text{com } K > 0$$

Logo, SEGUEM-SE OS MESMOS RESULTADOS.

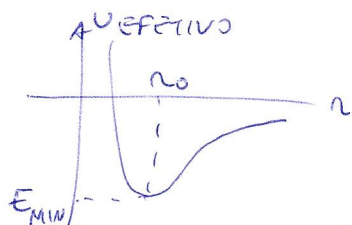
OU SEJA, O CÁLCULO DE A, e, a SÃO OS
MESMOS P/ AS ELLIPSES E HIPERBOLES (PARA $K > 0$ OU $K < 0$).

FINALMENTE, OS CASOS ESPECÍFICOS

(74)

DE PARÁBOLA ($e=1$) É CÍRCULO ($e=0$)

CÍRCULO:



$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{|k|}{r}$$

O MÍNIMO DE ENERGIA ACONTECE

$$\text{QDO } E = U_{\text{EFETIVO}}(r_0) = U_{\text{EFETIVO, MIN}}$$

$$\Rightarrow -\frac{L^2}{mr_0^3} + \frac{|k|}{r_0^2} = 0$$

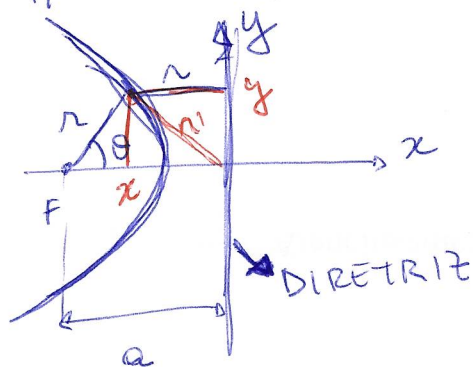
$$\Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{m|k|} \Rightarrow E_{\text{MIN}} = -\frac{mk^2}{2L^2}$$

$$\text{Como } e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{e=0 \quad \text{P/ } E=E_{\text{MIN}}}$$

$\Rightarrow$ CÍRCULO

P/ $E=0 \Rightarrow e=1 \Rightarrow$ PARÁBOLA



$$x = -a + r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$x = a + r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \frac{a}{1 + \cos \theta} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1 + \cos \theta}{a}$$

$$= A \cos \theta + \frac{m|k|}{L^2}$$

$$r^2 = r^2 - 2ar \cos \theta + a^2$$

$$= r^2 + y^2 = r^2 + (r \sin \theta)^2$$

$$= 2r^2 - r^2 \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow a = \frac{L^2}{m|k|} = \frac{1}{A}$$

IGUAL AO RESULTADO DA ELIPSE É PARÁBOLA COM $E=0$ ($k<0$)

$$\Rightarrow r^2(1 - \cos^2 \theta) + 2ar \cos \theta - a^2 = 0$$

$$r = \frac{-2a \cos \theta \pm \sqrt{4a^2 \cos^2 \theta + 4a^2 \sin^2 \theta}}{2 \sin^2 \theta} = \frac{2a - 2a \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} = \frac{a(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} = \frac{a}{1 + \cos \theta}$$

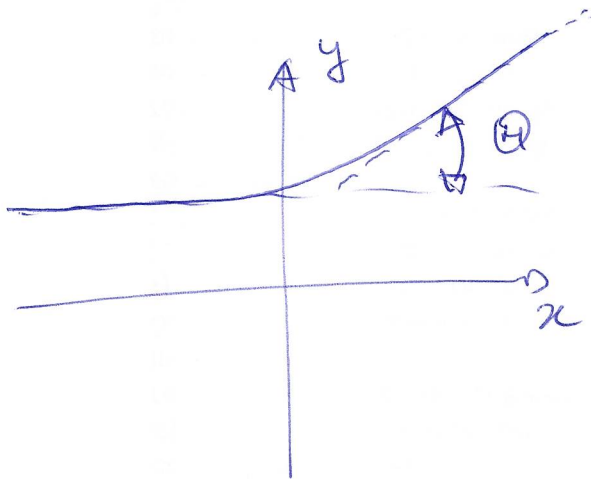
FINALMENTE, VAMOS NOS FOCAR

(75)

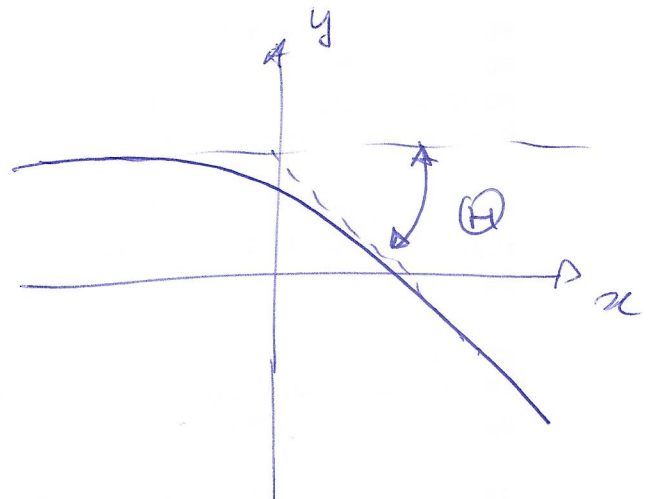
NO ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD

$\Rightarrow$ ÓRBITAS HIPERBÓLICAS

$\Rightarrow E > 0$ ($k > 0$ ou $k < 0$)



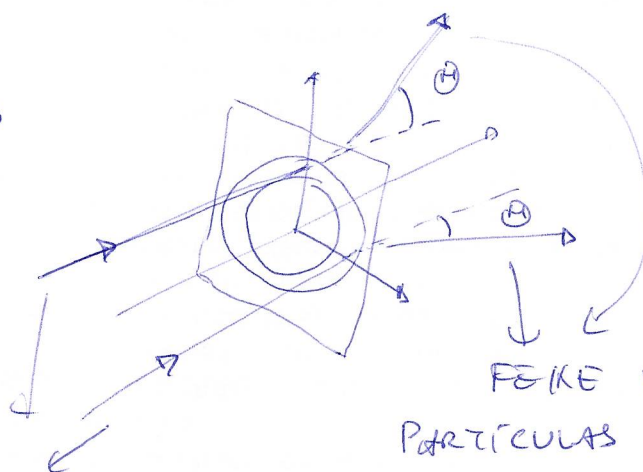
$k > 0$ (REPULSIVO)



$k < 0$ (ATRATIVO)

(H) $\rightarrow$ ÂNGULO DE ESPALHAMENTO

Em 3D



FEIXE DE
PARTÍCULAS INCIDENTE

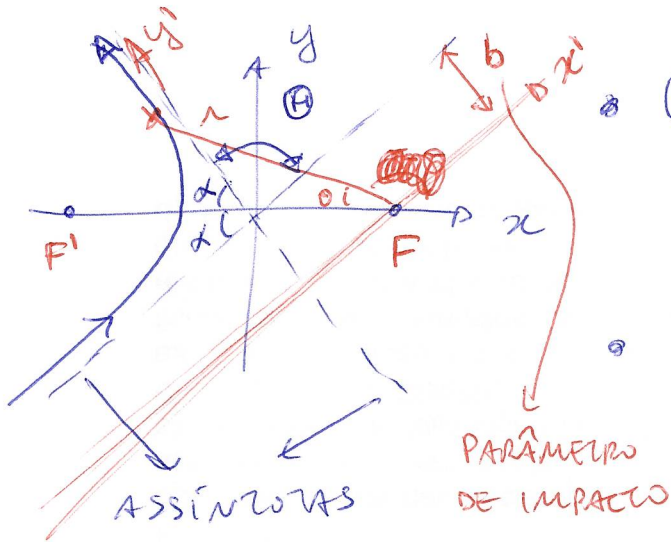
FEIXE DE
PARTÍCULAS ESPALHADO

NOTE A
SIMETRIA CILÍNDRICA
DO FEIXE ESPALHADO

COMO DETERMINAR O ÂNGULO DE

(26)

ESPALHAMENHO (H)?



(H) É O ÂNGULO ENTRE AS ASSÍNTOTAS

$$\frac{1}{r} = A \cos \theta - \frac{mk}{L^2}$$

CASO REPULSIVO ($k > 0$)

CENTRO REPULSIVO ESTÁ EM F

COMO $r > 0$ OS VALORES DE θ ESTÃO RESTRITOS ENTRE $-\alpha < \theta < \alpha$

$$P | \theta = \pm \alpha \Rightarrow r \rightarrow \infty \Rightarrow A \cos \alpha = \frac{mk}{L^2}$$

$$\text{com } A = \sqrt{\left(\frac{mk}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

$$\text{NOTE QUE } (H) + 2\alpha = \pi \Rightarrow (H) = \pi - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \tan \frac{(H)}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

$$\Rightarrow \tan^2 \frac{(H)}{2} = \cot^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\left(\frac{mk}{L^2 A}\right)^2}{1 - \left(\frac{mk}{L^2 A}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{2L^2 E}{mk^2}} = \frac{mk^2}{2L^2 E}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{(H)}{2} = \sqrt{\frac{mk^2}{2EL^2}}$$

MAS NOTE QUE, PARA $r \rightarrow \infty$

(77)

TEM-SE QUE

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{1}{2} m v_0^2 \\ \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \text{VELOCIDADE AO "INFINITO"} \\ L = m v_0 b \end{array} \right.$$

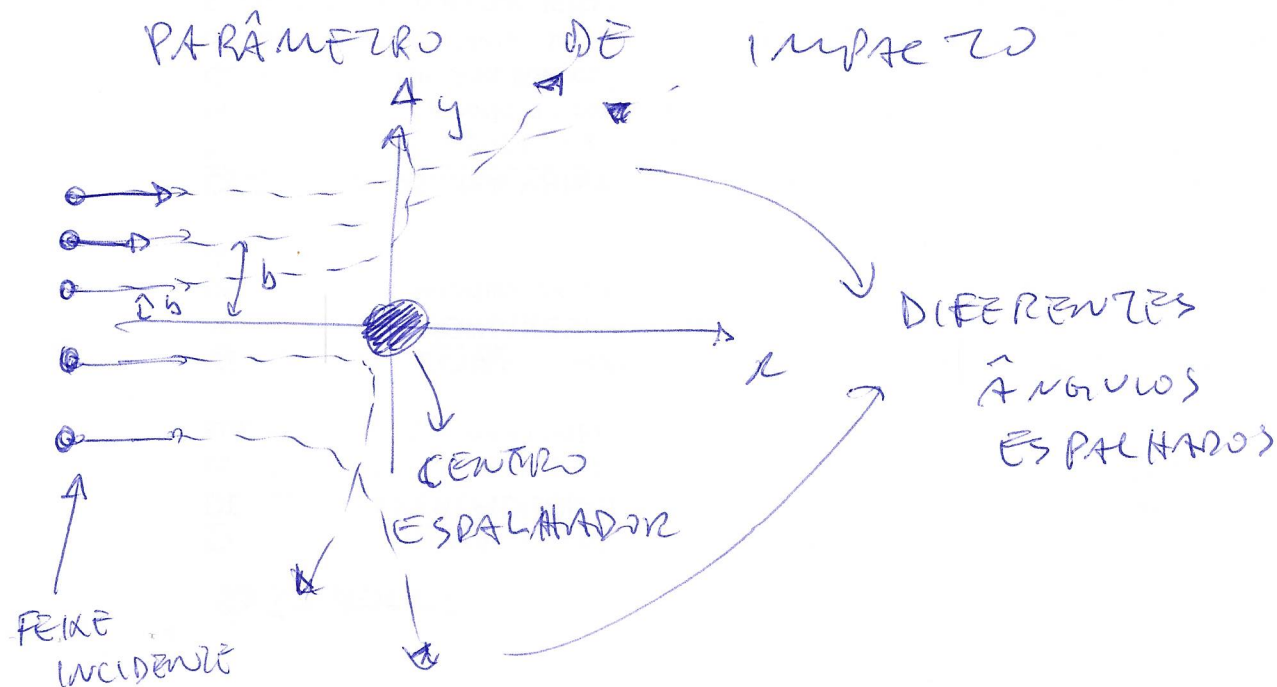
↓
CÁLCULOS EM RELAÇÃO AO
PONTO F

$$\Rightarrow \tan \frac{\theta}{2} = \frac{|k|}{v L} = \frac{|k|}{m v_0^2 b}$$

P/ O CASO DE RUTHERFORD (PARTÍCULAS
CARREGADAS), $K = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0}$

COMO COMPARAR COM OS EXPERIMENTOS?

- PARTÍCULAS INCIDENTES NÃO TÊM O MESMO
PARÂMETRO DE IMPACTO



COMO O FEIXE INCIDENTE É UNIFORME, (78)

ENTÃO PRECISAMOS RELACIONAR b COM

θ (QUE JÁ TOMAMOS NA PAG 77) E,

COM ISSO, DETERMINAR A DENSIDADE

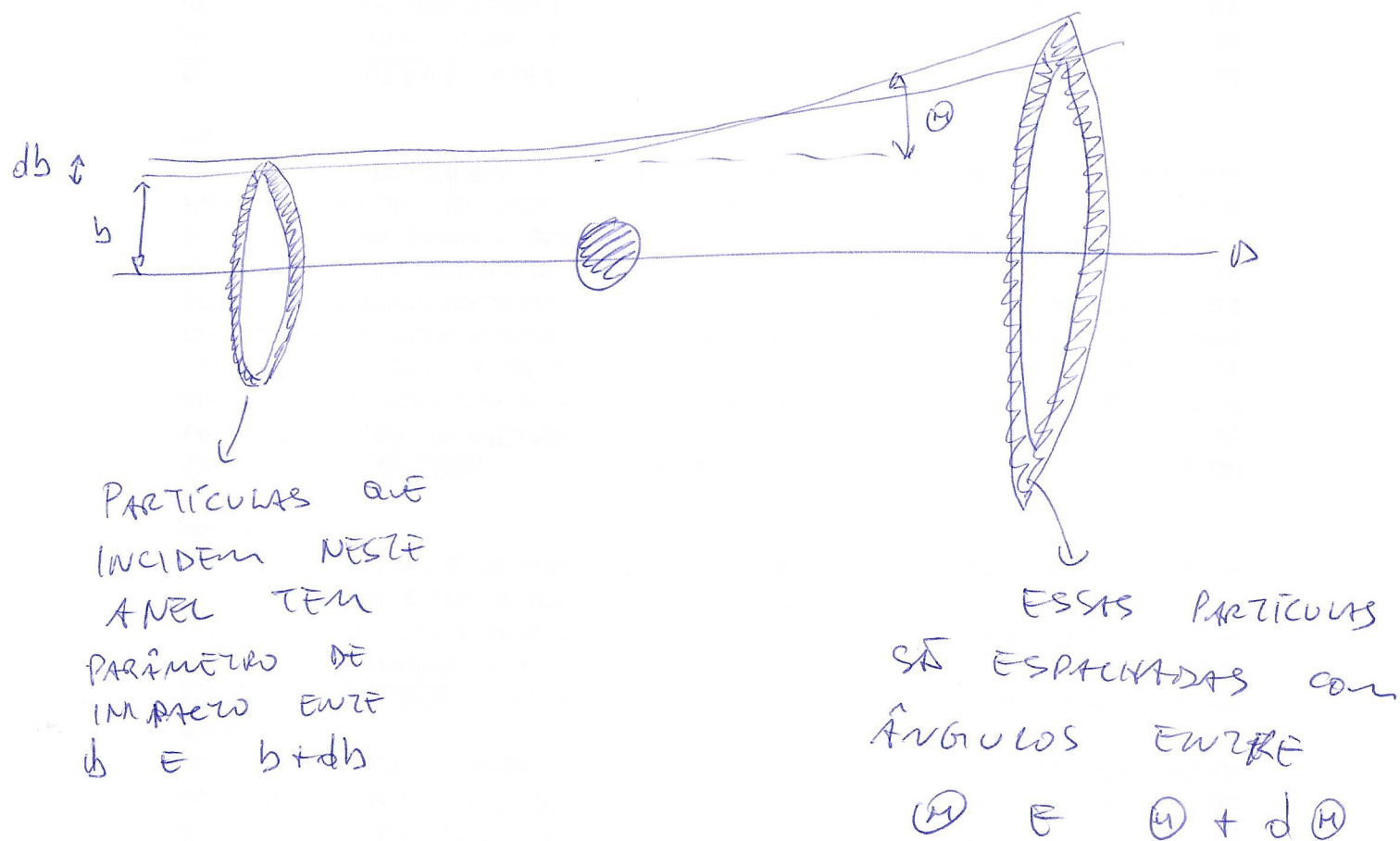
DE PARTÍCULAS ESPALHADAS EM

UM DETERMINADO ÂNGULO θ

EM SUMA, PRECISAMOS CONVERTER A

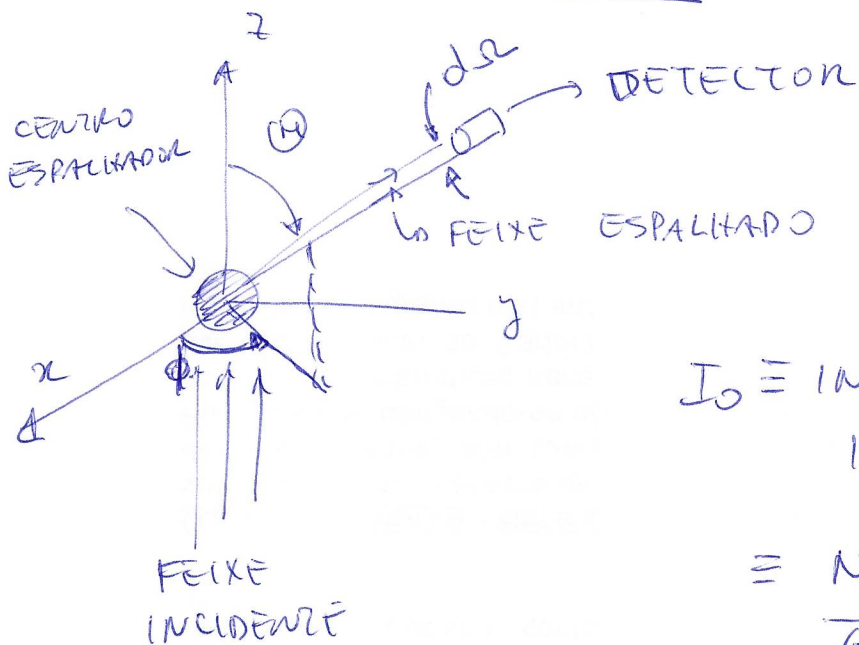
RELACÃO ENTRE b E θ EM

UMA RELACÃO ENTRE INTENSIDADE E θ



SEÇÃO DE CHOQUE

(79)



$I_0 \equiv$ INTENSIDADE DO FEIXE INCIDENTE

$$\equiv \frac{\text{NR. PARTÍCULAS INCIDENTES}}{(\text{TEMPO}) \times (\text{ÁREA} \perp \hat{z})}$$

$$dm \equiv \frac{\text{NR. PARTÍCULAS ATINGINDO O DETECTOR}}{\text{TEMPO}}$$

$d\Omega \equiv$ ÂNGULO SÓLIDO DO DETECTOR

SEÇÃO DE CHOQUE DIFERENCIAL $\equiv \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega}$ É TAL QUE

$$dm = \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} \times I_0 \times d\Omega$$

PARA O NOSSO CASO (RUTHERFORD), $\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$

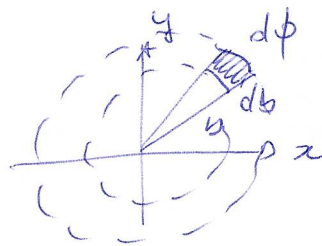
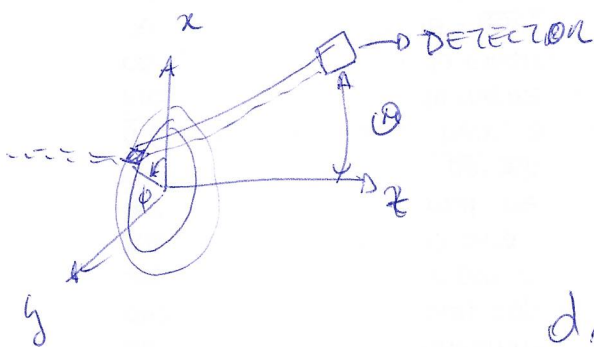
NÃO DEPENDE DE ϕ (SIMETRIA CILÍNDRICA)

$$\text{NOTE QUE } \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right] \equiv \text{ÁREA}$$

PODEMOS "INTEGRAR" ESSES CONCEITOS NO TEMPO. DESTA MANEIRA, AO INVÉS DE PENSAR EM INTENSIDADE DO FEIXE, PENSAMOS EM NÚMERO DE PARTÍCULAS ESPALHADAS

(80)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{dN}{N/A} = \frac{\text{NÚMERO DE PART. QUE ATINGIRAM O DETECTOR}}{\text{NÚMERO TOTAL DE PARTÍCULAS / ÁREA}}$$



$$dN = I_0 dA = I_0 b db d\phi$$

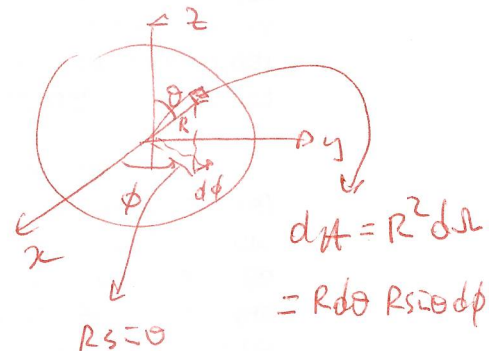
$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega = b db d\phi$$

$$\downarrow$$

$$\sin\theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \frac{db}{d\theta}}$$

ÂNGULO SÓLIDO
ÁREA DA ESFERA



$$\Rightarrow d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

NOTE ALSO

$$\int d\Omega = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi$$

Como $b = b(\theta) = \frac{D}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (Vide pág 77) (81)

com $\frac{D}{2} = \frac{|k|}{mv_0^2} \Rightarrow D = \frac{|k|}{\frac{mv_0^2}{2}} = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0 \frac{mv_0^2}{2}}$

Logo, a seção de choque diferencial é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{D}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{D}{2\sin\theta} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \left(-\frac{D}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \right)$$

$$= -\frac{D^2}{8} \frac{\cot\frac{\theta}{2}}{\sin\theta \sin^2\frac{\theta}{2}} = -\frac{D^2}{8} \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2} 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{-D^2}{8\sin^4\frac{\theta}{2}} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{D^2}{8\sin^4\frac{\theta}{2}}}$$

ou ainda

$$d\sigma = \frac{\pi D^2}{4} \left(\frac{\sin\theta d\theta}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \right)$$

NEGLIGENCIAR O SINAL NEGATIVO
PI CONECTAR COM O
RESULTADO EXPERIMENTAL

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dm}{I_0 d\Omega}$$

O ACORDO EXPERIMENTAL DEU INDÍCIOS DE QUE
AS CARGAS NA MATÉRIA ESTÃO CONCENTRADAS EM
PEQUENOS CENTROS $\rightarrow$ ORIGEM DA TEORIA NUCLEAR
DO ÁTOMO