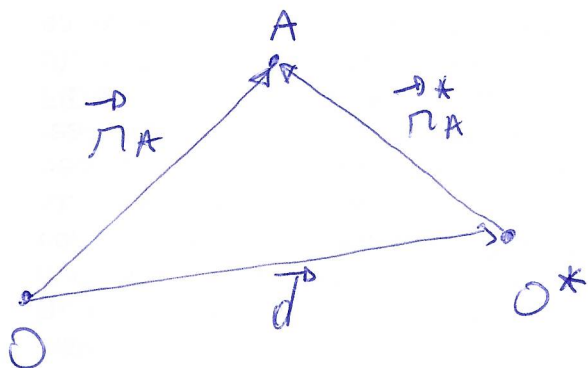


REFERENCIAIS NÃO INÉRCIAIS

(96)

- HIPÓTESES:
- REFERENCIAL S É INÉRCIAL
 - TEMPO ABSOLUTO $\Delta t = \Delta t^*$
 - ESPAÇO ABSOLUTO $\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}^*$
 - MASSA ABSOLUTA $m = m^*$



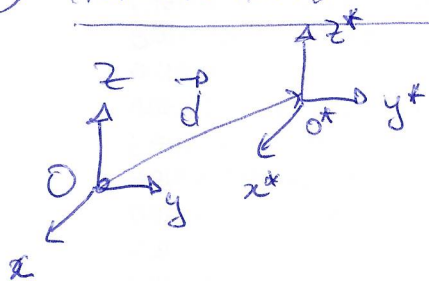
$\vec{r}_A \equiv$ POSIÇÃO DA PARTÍCULA A NO REF. S

$\vec{r}_A^* \equiv$ POSIÇÃO DA PARTÍCULA A NO REF. S^*

$\vec{d} \equiv$ POSIÇÃO DA ORIGEM DO REF. S^* EM RELAÇÃO AO REF. S

ATÉ AGORA, NÃO FIZEMOS NENHUMA SUPosição SOBRE OS EIXOS DE COORDENADAS DE S E S^*

① TRANSFORMAÇÃO ENTRE 2 REFERENCIAIS NÃO GIRANTES



$$\Rightarrow \begin{cases} x = x^* + d_x \\ y = y^* + d_y \\ z = z^* + d_z \end{cases}$$

$$\vec{d} = (d_x, d_y, d_z)$$

TRANSFORMAÇÃO DE POSIÇÃO: COMO RELACIONAR A POSIÇÃO DE UMA PARTÍCULA NOS 2 REFERENCIAIS?

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A^* + \vec{d}$$

TRANSFORMAÇÃO DE VELOCIDADE:

(97)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{r}_A &= \frac{d}{dt} (\vec{r}_A^* + \vec{d}) = \frac{d}{dt} \vec{r}_A^* + \frac{d}{dt} \vec{d} \\ &= \vec{v}_A^* + \vec{v}_d \\ &= \vec{v}_A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = \vec{v}_A^* + \vec{v}_d}$$

$\vec{v}_d \equiv$ VELOCIDADE DO
REF. S^* EM
RELACÃO AO
REF. S .

TRANSF. DE ACELERAÇÃO:

$$\frac{d}{dt} (\vec{v}_A) = \frac{d}{dt} (\vec{v}_A^* + \vec{v}_d)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = \vec{a}_A^* + \vec{a}_d}$$

TRANSF. DE FORÇAS: $\vec{F} = m \vec{a}_A = m \vec{a}_A^* + m \vec{a}_d$

$$= m^* \vec{a}_A^* = \vec{F}^*$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}^* = \vec{F} - m \vec{a}_d}$$

• A FORÇA SOBRE UMA PARTÍCULA NO REF. S^* É A FORÇA NO REF. S SUBTRAÍDA DE $m \vec{a}_d$ ONDE $\vec{a}_d$ É A ACELERAÇÃO DO REF. S^* EM RELAÇÃO AO REF. S .

• SE S É REF. INERCIAL $\Rightarrow \vec{F}$ É FORÇA INERCIAL.

• SE $\vec{a}_d = 0 \Rightarrow \vec{F}^* = \vec{F}$ (MESMA DINÂMICA)
 $\Rightarrow S^*$ TAMBÉM É REF. INERCIAL

• SE $\vec{a}_d \neq 0 \Rightarrow -m\vec{a}_d$ É DITA

98

FORÇA NÃO-INERCIAL É O REF S^*
(OU FORÇA FICTÍCIA)
É, PORTANTO, NÃO INERCIAL

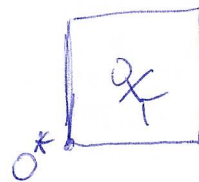
• NOTE QUE A FORÇA FICTÍCIA É PROPORCIONAL À MASSA INERCIAL DA PARTÍCULA. ASSIM, TODAS AS PARTÍCULAS TEM A MESMA ACELERAÇÃO FICTÍCIA NO REF. NÃO INERCIAL

EXEMPLO: QUEDA LIVRE

• NO REF- S , A PESSOA ESTÁ SOB A FORÇA PESO

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

• O REF. S^* ESTÁ CAINDO COM ACELERAÇÃO $\vec{g}$ EM RELAÇÃO AO REF- S

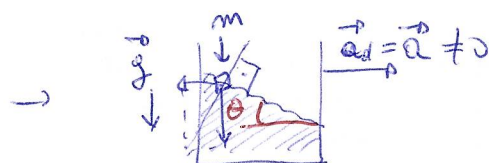
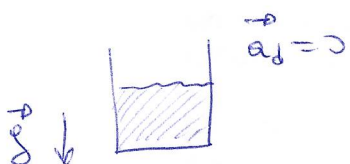


$$\Rightarrow \vec{F}^* = \vec{F} - m\vec{g}$$

$$m\vec{a}^* = m\vec{g} - m\vec{g} \Rightarrow \boxed{\vec{a}^* = 0}$$

→ EM RELAÇÃO AO REF S^* , A PESSOA NÃO ESTÁ ACELERADA

EXEMPLO: LÍQUIDO NUM RECIPIENTE ACELERADO

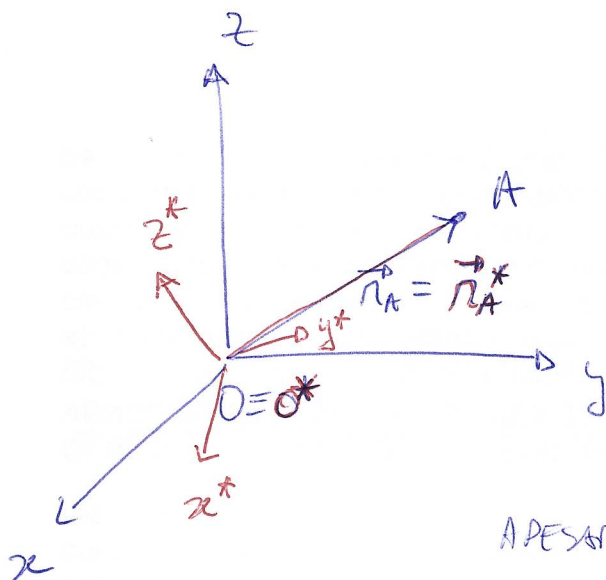


$$\vec{F}^* = m\vec{g} - m\vec{a} \\ \Rightarrow m(g\hat{y} + a\hat{x})$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan \theta = \frac{a}{g}}$$

② TRANSFORMAÇÃO ENTRE 2 REFS. GIRANTES (MESMA ORIGEM)

99



MESMA ORIGEM

$$\Rightarrow \vec{r}_A = \vec{r}_A^*$$

O QUE MUDA?

- AS DERIVADAS TEMPORAIS

APESAR DOS VETORES POSIÇÃO SEREM OS MESMOS, AS COORDENADAS NÂ SÂ PORQUE UM REF GIRA EM RELAÇÃO AO OUTRO

$$\vec{r}_A = x_A \hat{x} + y_A \hat{y} + z_A \hat{z} = x_A^* \hat{x}^* + y_A^* \hat{y}^* + z_A^* \hat{z}^* = \vec{r}_A^*$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = x_A^* (\hat{x} \cdot \hat{x}^*) + y_A^* (\hat{x} \cdot \hat{y}^*) + z_A^* (\hat{x} \cdot \hat{z}^*) \\ y_A = x_A^* (\hat{y} \cdot \hat{x}^*) + y_A^* (\hat{y} \cdot \hat{y}^*) + z_A^* (\hat{y} \cdot \hat{z}^*) \\ z_A = x_A^* (\hat{z} \cdot \hat{x}^*) + y_A^* (\hat{z} \cdot \hat{y}^*) + z_A^* (\hat{z} \cdot \hat{z}^*) \end{cases}$$

DERIVADA NO REF. PRÓPRIO

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_A = \frac{d}{dt} (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) = \dot{A}_x \hat{x} + \dot{A}_y \hat{y} + \dot{A}_z \hat{z}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_A^* = \frac{d}{dt} (A_x^* \hat{x}^* + A_y^* \hat{y}^* + A_z^* \hat{z}^*) = \dot{A}_x^* \hat{x}^* + \dot{A}_y^* \hat{y}^* + \dot{A}_z^* \hat{z}^*$$

OU SEJA, NO REF. PRÓPRIO, OS VERSORES (100)
DA BASE SÃO CONSTANTES

$$\frac{d}{dt}(\hat{x}) = \frac{d}{dt}(\hat{y}) = \frac{d}{dt}(\hat{z}) = \frac{d^*}{dt}(\hat{x}^*) = \frac{d^*}{dt}(\hat{y}^*) = \frac{d^*}{dt}(\hat{z}^*) = 0$$

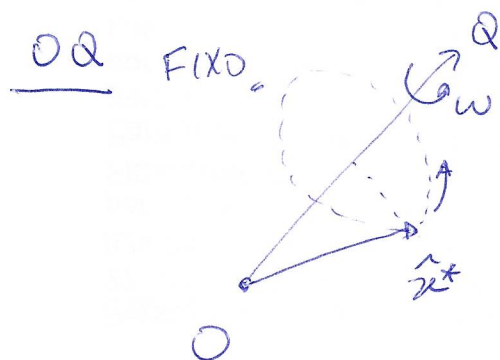
EVIDENTEMENTE, OS VERSORES DA BASE DE S^*
NÃO SÃO CONSTANTES EM RELAÇÃO AO REF S

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{A}^* &= \frac{d}{dt} (A_x^* \hat{x}^* + A_y^* \hat{y}^* + A_z^* \hat{z}^*) \\ &= \underbrace{\dot{A}_x^* \hat{x}^* + \dot{A}_y^* \hat{y}^* + \dot{A}_z^* \hat{z}^*}_{\frac{d^*}{dt} \vec{A}^*} + A_x^* \dot{\hat{x}}^* + A_y^* \dot{\hat{y}}^* + A_z^* \dot{\hat{z}}^* \end{aligned}$$

COMO CALCULAR $\dot{\hat{x}}^*$, $\dot{\hat{y}}^*$ E $\dot{\hat{z}}^*$?

$\hat{x}^*$, $\hat{y}^*$ E $\hat{z}^*$ SÃO FIXOS NO REF S^* .

VAMOS DEFINIR QUE NO INSTANTE t , O REF S^*
GIRA EM RELAÇÃO AO REF S COM VELOCIDADE
ANGULAR $\vec{\omega}$ EM TORNO DE UM EIXO QUALQUER

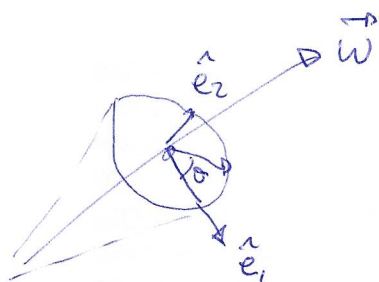


DEFINIÇÃO: O VETOR $\vec{\omega}$
É UM VETOR DE
MAGNITUDE ω QUE APONTA
NA DIREÇÃO OQ

Qto VALE $\hat{x}^*$?

(101)

NOTE QUE $\hat{x}^* = x_{||}^* \hat{w} + x_{\perp}^* \underbrace{\hat{w}_{\perp}}_{\cos\theta \hat{e}_1 + \sin\theta \hat{e}_2}$



$$\Rightarrow \hat{x}^* = x_{\perp}^* (-\sin\theta \hat{e}_1 + \cos\theta \hat{e}_2) \hat{\theta}$$

$$= w x_{\perp}^* (-\sin\theta \hat{e}_1 + \cos\theta \hat{e}_2)$$

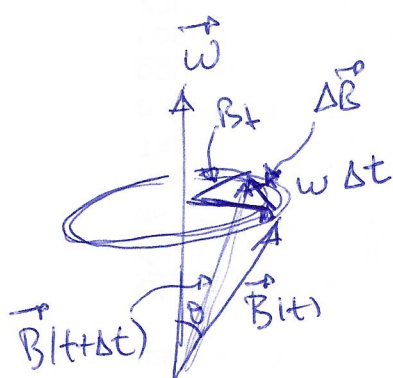
NOTE QUE $\vec{w} \times \hat{x}^* = \vec{w} \times (x_{||}^* \hat{w} + x_{\perp}^* \cos\theta \hat{e}_1 + \sin\theta \hat{e}_2)$

$$= 0 + x_{\perp}^* \cos\theta (\underbrace{\vec{w} \times \hat{e}_1}_{w \hat{e}_2}) + x_{\perp}^* \sin\theta \underbrace{\vec{w} \times \hat{e}_2}_{-w \hat{e}_1}$$

$$= \hat{x}^*$$

OU SEJA $\boxed{\frac{d}{dt} \hat{x}^* = \vec{w} \times \hat{x}^*}$

OUTRA MANEIRA:



$$\Rightarrow \vec{B}(t+\Delta t) - \vec{B}(t) = \Delta \vec{B}$$

mas $|\Delta \vec{B}| = B_{\perp} w \Delta t$

$\uparrow$
 $\Delta t \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{B}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{B}}{\Delta t} \right| = B_{\perp} w$$

$$= B \sin\theta w$$

$$= |\vec{B} \times \vec{w}|$$

NOTE QUE $\Delta \vec{B} \perp \vec{B}$
 $\in \Delta \vec{B} \perp \vec{w}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{w} \times \vec{B}}$$

FINALMENTE,

102

$$\frac{d}{dt} \vec{A}^* = \frac{d^*}{dt} \vec{A}^* + \underbrace{A_x^* \vec{\omega} \times \hat{x}^* + A_y^* \vec{\omega} \times \hat{y}^* + A_z^* \vec{\omega} \times \hat{z}^*}_{\vec{\omega} \times \vec{A}^*}$$

Logo, a transformação de velocidades é

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_A \equiv \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d^*}{dt} \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

ou ainda $\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{d^*}{dt} + \vec{\omega} \times}$

Essa transformação é válida mesmo quando o vetor $\vec{\omega}$ varia em magnitude e direção

TRANSFORMAÇÃO DE ACELERAÇÃO

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \right) = \left(\frac{d^*}{dt} + \vec{\omega} \times \right) \left(\frac{d^*}{dt} + \vec{\omega} \times \right) \\ &= \frac{d^2^*}{dt^2} + \frac{d^*}{dt} (\vec{\omega}) \times + \vec{\omega} \times \frac{d^*}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d^*}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times) \end{aligned}$$

ou seja,

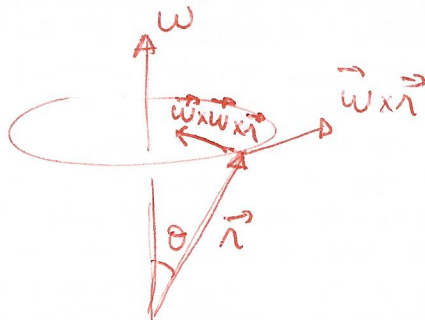
$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \frac{d^2^*}{dt^2} \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \frac{d^*}{dt} \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d^* \vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}$$

note que $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^* \vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{d^* \vec{\omega}}{dt}$

TEOREMA DE
CORIOLIS

$$\vec{F}^* = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt} - m \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) \times \vec{r}$$

FORÇA INÉRCIAL

FORÇA
CENTRÍFUGA
(PARA FORA)FORÇA DE
CORIOLISFORÇA DE
EULER

$$|\omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = \omega^2 r \sin \theta = \frac{v^2}{r \sin \theta} = \omega^2 (R \sin \theta) = \frac{v^2}{R \sin \theta}$$

③ TRANSFORMAÇÃO ENTRE 2 REFS. GÊNERICOS

- DE MANEIRA GÊNÉRICA, 2 REFS. SÃO LIGADOS POR
UMA TRANSLAÇÃO + UMA ROTAÇÃO

ENTÃO, BASTA "SOMAR" OS EFEITOS ATÉ AGORA ESTUDADOS

$$* \quad \vec{r} = \vec{r}^* + \vec{d}$$

$$* \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^* \vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}^* + \frac{d\vec{d}}{dt}$$

$$* \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) + 2\vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}^* + \frac{d^2 \vec{d}}{dt^2}$$

4) MOMENTO SOBRE A SUPERFÍCIE DA TERRA

104

• NO REF INERCIAL DAS ESTRELAS DISTANTES, A FORÇA SOBRE UMA PARTÍCULA NAS PROXIMIDADES DA SUPERFÍCIE TERRESTRE É

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g} + \vec{F}$$

↓
PESO

↳ OUTRAS FORÇAS INERCIAIS

NEGLEGENCIANDO A TRANSLAÇÃO DA TERRA EM TORNO DO SOL (OU QUALQUER OUTRO MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO ACELERADO)

TEMOS QUE $\Rightarrow \ddot{\vec{d}} = 0$

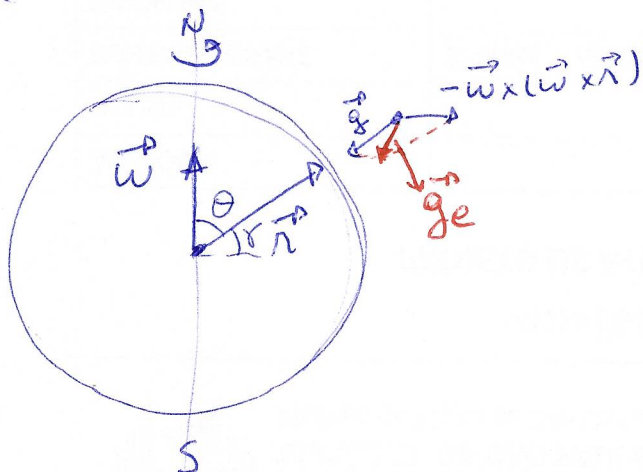
$$\vec{F} + m \vec{g} = m \frac{d^{*2}}{dt^2} \vec{r} + m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt}$$

ONDE ESTAMOS CONSIDERANDO QUE $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$ (NEGLEGENCIÁVEL)

Logo,

$$m \frac{d^{*2}}{dt^2} \vec{r} = \vec{F} + m \left(\vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right) - 2m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt}$$

GRAVIDADE EFETIVA: $\vec{g}_e = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$



PRIMO
Logo, um ~~plumb~~ ^{prumo} em REPOUSO NA SUP. DA TERRA NÃO APOIOTA EXATAMENTE P/ O CENTRO, MAS LIGEIRAMENTE PARA O SUL (NORTE) SE ESTIVER NO HEMISFÉRIO NORTE (SUL).

ENTRETANTO, A TERRA NÃO É PERFEITAMENTE ESFÉRICA. ELA É OBLATA PORQUE É BASICAMENTE UM FLUIDO GRAVITANTE EM ROTAÇÃO. A FORÇA CENTRÍFUGA É A RESPONSÁVEL PELO "ACHATAMENTO" DA FORMA ESFÉRICA

105

DESCONSIDERANDO A FORMA OBLATA DA TERRA,

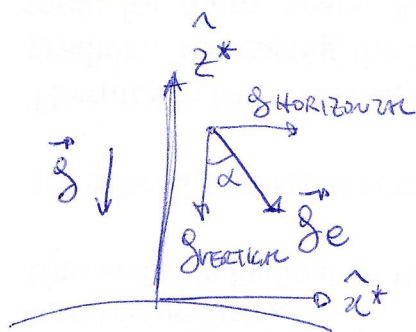
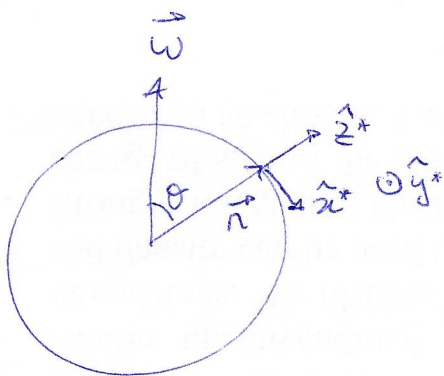
TEMOS QUE A CORREÇÃO À GRAVIDADE É

$$-\omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\left(\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \right) \quad \text{VDE PAG 33}$$

$$= -\omega r \cos \theta \vec{\omega} + \vec{r} \omega^2 = -\omega r \cos \theta (\omega \cos \theta \hat{z}^* - \omega \sin \theta \hat{x}^*) + \omega^2 r \hat{z}^*$$

$$= \omega^2 r \sin^2 \theta \hat{z}^* + \omega^2 r \cos \theta \sin \theta \hat{x}^*$$

$$\Rightarrow \vec{g}_e = \underbrace{(g - \omega^2 r \sin^2 \theta)}_{g_{\text{VERTICAL}}} (-\hat{z}^*) + \underbrace{\omega^2 r \sin \theta \cos \theta}_{g_{\text{HORIZONTAL}}} \hat{x}^*$$



TERRA

$$\tan \alpha = \frac{g_{\text{HOR}}}{g_{\text{VERT}}} = \frac{\omega^2 r \sin \theta \cos \theta}{g - \omega^2 r \sin^2 \theta}$$

$$\approx \frac{\sin \theta \cos \theta}{291 - \sin^2 \theta} = \frac{\sin 2\theta}{580 + \cos 2\theta}$$

$$g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$$

$$\omega = \frac{2\pi}{24\text{h}} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$r \approx 6378 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \alpha_{\text{max}} \approx \frac{1}{580} \quad \text{E OCORRE PARA}$$

$$\approx 0.1^\circ$$

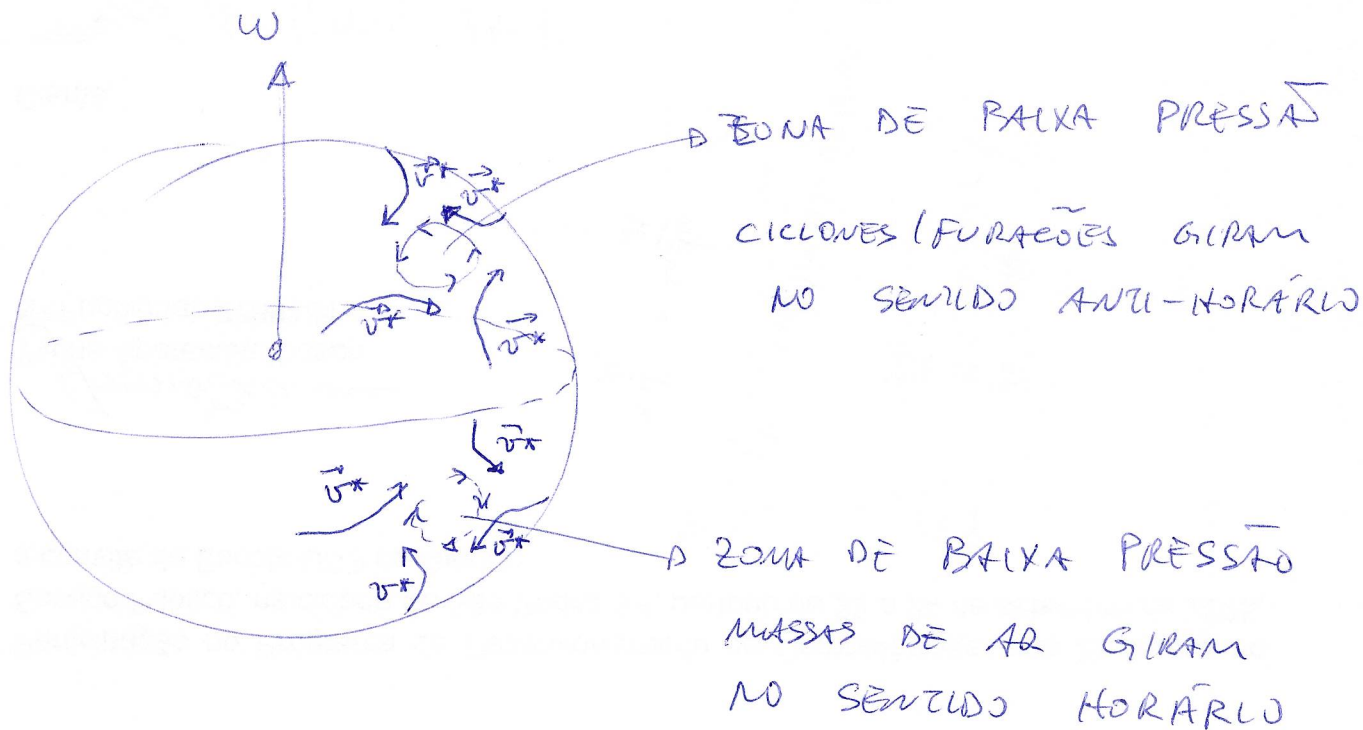
$$= 0^\circ 6'$$

$$\theta \approx \frac{\pi}{4} \quad \text{E} \quad \frac{3\pi}{4}$$

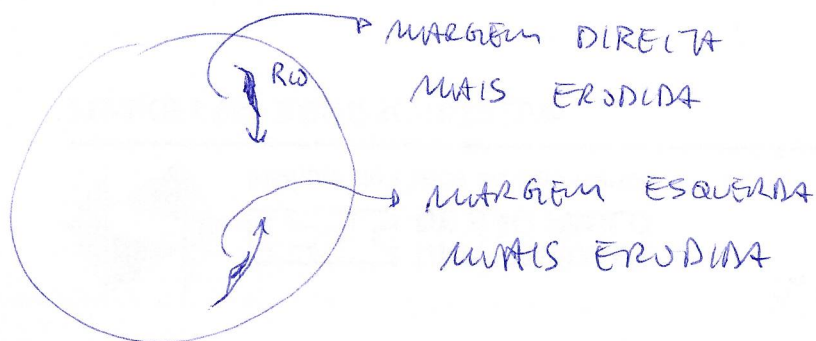
A EQUAÇÃO DE NEWTON, COMO VIMOS, É

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + m \vec{g} - 2m \vec{\omega} \times \frac{d \vec{r}}{dt}$$

PARA GRANDES MASSAS DE AR, A FORÇA DE CORIOLIS DESEMPENHA UM PAPEL IMPORTANTE: A DE DEFLÉTRIR AS ~~MASSAS~~ CORRENTES DE AR PARA A DIREITA (ESQUERDA) SE ESSAS CORRENTES ESTÃO SE MOVENDO NO HEMISFÉRIO NORTE (SUL)



O MESMO VALE PARA RIOS

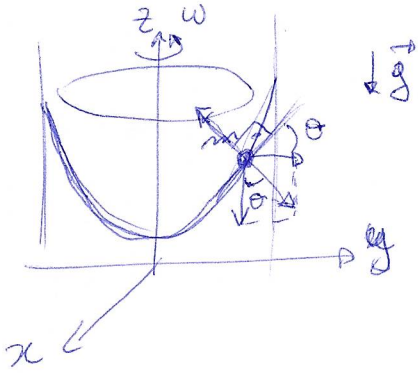


O MESMO VALE PARA PROJÉTEIS

(10)

⇒ AS TRAJETÓRIAS SÃ DEFEITIDAS P/
DIREITA (ESQUERDA) QDE DISPARADOS NO
HEMISFÉRIO NORTE (SUL)

EXEMPLO: BALDE DE NEWTON



NO REF GIRANTE → LÍQUIDO ESTÁTICO

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0 = m \vec{g} - \rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\text{GRAVIDADE EFETIVA: } -g \hat{z} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= -g \hat{z} - \omega^2 \rho, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{dz}{d\rho} = \frac{\omega^2 \rho}{g}$$

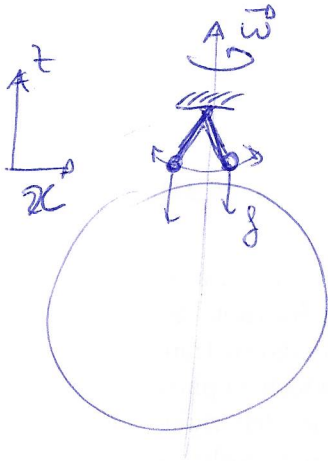
$$\Rightarrow \boxed{z = z_0 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \rho^2}{g}} \rightarrow \text{PARABOLOÍDE DE REVOLUÇÃO}$$

PÊNDULO DE FOUCAULT

108

- UM PÊNDULO OSCILANTE NA SUPERFÍCIE DA TERRA MUDA SUA DIREÇÃO DE OSCILAÇÃO AO LONGO DO TEMPO.

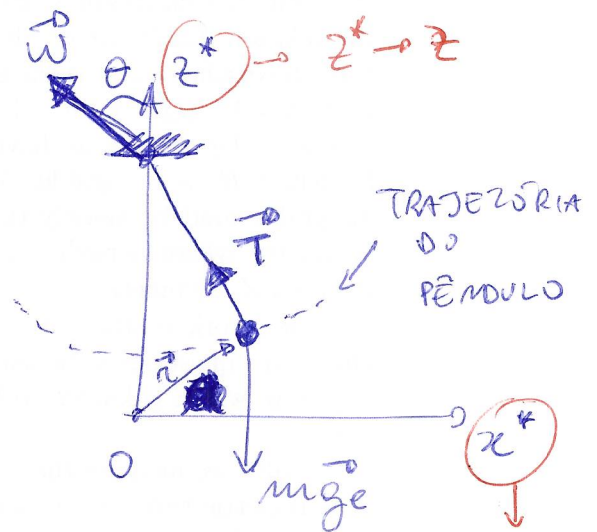
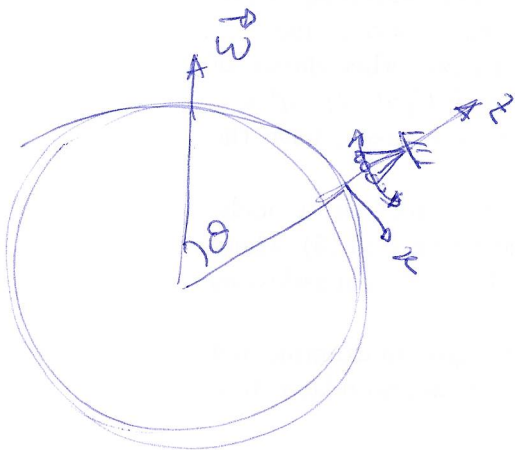
IMAGINE UM PÊNDULO NO PÓLO NORTE



→ EM RELAÇÃO AO REF. DAS ESTRELAS DISTANTES, O PÊNDULO OSCILA NO PLANO XZ (DO REF. INÉRCIAL)

EM RELAÇÃO AO REF DA TERRA (QUE GIRA COM $\vec{\omega}$), O PLANO DE OSCILAÇÃO DO PÊNDULO MUDA COM VELOCIDADE ÂNGULAR $-\vec{\omega}$

COMO ANALISAR ESSE PROBLEMA P/ UMA LATITUDE QUALQUER?



AGORA, $\hat{z}$ É O EIXO VERTICAL LOCAL (QUE GIRA COM A TERRA

VAMOS ABRIR A ESQUERDA
*
⇒ $x^* = x$

A EQUAÇÃO DE MOVIMENTO É (VIRE PAR 106)

(109)

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + m \vec{g}_e - 2m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt}$$

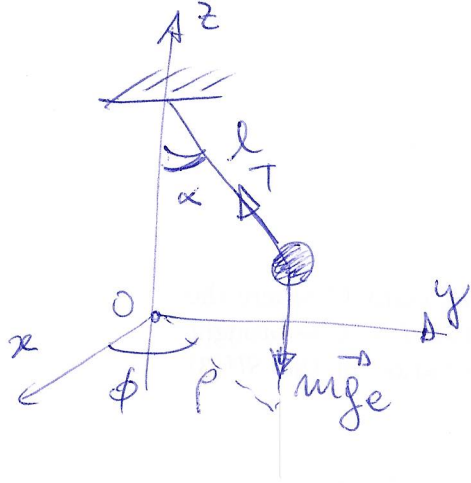
ONDE $\vec{r}$ É MEDIDO A PARTIR DO CENTRO DA TERRA, ENTRETANTO, UMA VEZ CALCULADO $\vec{g}_e$, A EQUAÇÃO DEPENDE APENAS DE DERIVADAS NO REF GIRANTE. ENTA, PODEREMOS DESLOCAR A ORIGEM DO REF. GIRANTE DO CENTRO DA TERRA ATÉ A SUPERFÍCIE ~~QUE A EQ. NÃO MUDA~~ PORQUE ESSE VETOR DESLOCAMENTO É CONSTANTE NO REF GIRANTE S^*

• PARA O PÊNDULO DE FOUCAULT, A FORÇA INERCIAL $\vec{F}$ É A TENSÃO $\vec{T}$

$$\Rightarrow m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{T} + m \vec{g}_e - 2m \vec{\omega} \times \frac{d^* \vec{r}}{dt}$$

VELOCIDADE

A FORÇA DE CORIOLIS É RESPONSÁVEL PELO IMPOSSIBILIDADE DO PÊNDULO PENDULAR SEMPRE AO MESMO PLANO



$$\vec{g}_e \simeq -g \hat{z}$$

(110)

Pequenas amplitudes: $\alpha \ll 1$

$$\Rightarrow z \simeq 0$$

$$T \simeq mg$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} \simeq -T \sin \alpha \cos \phi - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \hat{x} \\ m \ddot{y} \simeq -T \sin \alpha \sin \phi - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \hat{y} \end{cases}$$

$$\text{MAS } \sin \alpha \simeq \tan \alpha = \frac{f}{l} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{l}$$

$$\text{MAS AINDA } \begin{cases} \sin \alpha \cos \phi \simeq \frac{f}{l} \cos \phi = \frac{x}{l} \\ \sin \alpha \sin \phi \simeq \frac{f}{l} \sin \phi = \frac{y}{l} \end{cases}$$

$$\vec{\omega} = \omega \cos \theta \hat{z} + \omega \sin \theta \hat{x} \rightarrow \text{scribbles}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{v} = (\omega \cos \theta \hat{z} + \omega \sin \theta \hat{x}) \times (\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y})$$

$$= \omega \cos \theta \dot{x} \hat{y} - \omega \cos \theta \dot{y} \hat{x} + \omega \sin \theta \dot{y} \hat{z}$$

~~scribbles~~

$$\Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} \simeq -T \frac{x}{l} + 2m\omega \dot{y} \cos \theta \\ m \ddot{y} \simeq -T \frac{y}{l} - 2m\omega \dot{x} \cos \theta \end{cases}$$

Como $T \simeq mg$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} \simeq -\frac{g}{l} x + 2\omega \cos \theta \dot{y} \\ \ddot{y} \simeq -\frac{g}{l} y - 2\omega \cos \theta \dot{x} \end{cases}$$

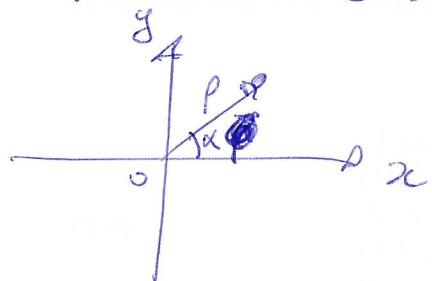
ESSAS 2 EDS PODEM SER ESCRITAS
COMPACTAMENTE COMO

(III)

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{g}{l} \vec{r} - 2\omega \cos\theta \hat{z} \times \dot{\vec{r}}$$

ONDE A
DERIVADA
TEMPORAL
É $\frac{d^*}{dt}$

COM RESOLVER ESSAS EQUAÇÕES?



EM COORDENADAS POLARES
(VÍDEO PAG 3+)

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\alpha}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\alpha} + 2\dot{\rho} \dot{\alpha}) \hat{\alpha}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \ddot{\alpha} \hat{\alpha}$$

$$\text{ENTÃO: } \begin{cases} \ddot{\rho} - \rho \dot{\alpha}^2 = -\frac{g}{l} \rho + 2\Omega \rho \dot{\alpha} \\ \rho \ddot{\alpha} + 2\dot{\rho} \dot{\alpha} = -2\Omega \dot{\rho} \end{cases}$$

ONDE $\Omega = \omega \cos\theta$

AGORA VAMOS APROXIMAR ESSAS EDS. P/ O LIMITE $\Omega \rightarrow 0$

$\Rightarrow \dot{\alpha}$ É PEQUENO E $\ddot{\alpha}$ MENOR AINDA

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\rho} \simeq -\frac{g}{l} \rho \rightarrow \text{OSCILADOR HARMÔNICO} \\ \dot{\alpha} \simeq -\Omega \rightarrow \alpha = \alpha_0 + \Omega t \end{cases}$$

$\rho = \rho_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \Phi\right)$

$\Rightarrow$ O PÊNDULO OSCILA COM FREQUÊNCIA $\sqrt{\frac{g}{l}}$

E SEU PLANO DE OSCILAÇÃO GIRA COM

VELOCIDADE ANGULAR $-\Omega = -\omega \cos\theta$

OUTRA MANEIRA DE RESOLVER ESSAS EQUAÇÕES.

(112)

VAMOS DEFINIR UMA VARIÁVEL $z = x + \overset{\sqrt{-1}}{\downarrow} i y$

$$\Rightarrow \dot{z} = \dot{x} + i \dot{y}$$

$$\ddot{z} = \ddot{x} + i \ddot{y}$$

$$\text{como } \begin{cases} \ddot{x} \approx -g/l x + 2\Omega \dot{y} \\ \ddot{y} \approx -g/l y - 2\Omega \dot{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + i \ddot{y} = -\frac{g}{l} (x + i y) - 2i\Omega (\dot{x} + i \dot{y})$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + 2i\Omega \dot{z} + g/l z = 0$$

SOLUÇÃO DO TIPO EXPONENCIAL $z = e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2i\Omega \lambda + g/l = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -i\Omega \pm \sqrt{-\Omega^2 + g/l} = -i\Omega \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{g}{l} + \Omega^2}}_{\omega_1 \approx \sqrt{g/l}}$$
$$= -i\Omega \pm i\omega_1$$

$$\Rightarrow z = A e^{-i(\Omega - \omega_1)t} + B e^{-i(\Omega + \omega_1)t}$$

$$= a e^{-i\Omega t} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$= a \cos(\omega_1 t + \phi) [\cos \Omega t - i \sin \Omega t]$$

$$\Rightarrow \boxed{x = a \cos(\omega_1 t + \phi) \cos \Omega t \quad y = -a \cos(\omega_1 t + \phi) \sin \Omega t}$$

QUE IDENTIFICAMOS

113

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \Omega \cos(\omega_e t + \phi) \\ \alpha = -\Omega t \end{array} \right.$$

COMO NA ANÁLISE
ANTERIOR

APRENDAMOS QUE, NO REF. DA TERRA, O
PÊNDULO DE FOUCAULT (OU QUALQUER OUTROS
PÊNDULOS QUE POSSAM GIRAR LIVREMENTE PELO
SEU PONTO DE APOIO) OSCILA COM SEU
PLANO DE OSCILAÇÃO GIRANDO EM TORNO
DO EIXO $\hat{z}$ LOCAL COM FREQ = ~~ω~~ $\cos \theta$

ESSA CONCLUSÃO PODE SER OBTIDA AINDA
DE OUTRA MANEIRA : VAMOS IMAGINAR

UM OUTRO REFERENCIAL QUE GIRA EM
RELAÇÃO AO REF. DA TERRA ^(LOCAL) COM VELOCIDADE
ANGULAR γ (A SER DETERMINADA) EM
TORNO DO EIXO $\hat{z}$ LOCAL DE TAL MANEIRA
QUE, NESTE NOVO REFERENCIAL, ~~O PÊNDULO~~
O PLANO DE OSCILAÇÃO DO PÊNDULO É
CONSTANTE. OU SEJA, γ É TAL QUE
NESTE NOVO REFERENCIAL O PÊNDULO OSCILA
SEMPRE NO MESMO PLANO.

COMO ~~REESCREVER~~ ESCREVER A EQUAÇÃO

(114)

DE MOVIMENTO NESTE NOVO

REFERENCIAL (QUE VAMOS CHAMAR DE S^{**})?

JÁ SABEMOS ESCREVER AS DERIVADAS ENTRE

REFERENCIAIS GIRANTES (VDE PAG 102)

Logo, $\boxed{\frac{d^*}{dt} = \frac{d^{**}}{dt} + \gamma \hat{z} \times}$

PORTANTO, $\frac{d^* \vec{r}}{dt} = \frac{d^{**} \vec{r}}{dt} + \gamma \hat{z} \times \vec{r}$

E $\frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^{**2} \vec{r}}{dt^2} + 2\gamma \hat{z} \times \frac{d^{**} \vec{r}}{dt} + \gamma \hat{z} \times (\gamma \hat{z} \times \vec{r}) + \cancel{\hat{z} \frac{d\gamma}{dt} \times \vec{r}}$

A EQUAÇÃO DO MOVIMENTO NO REF S^{**} FICA
(VDE PAG 109)

~~$m \left(\frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} + 2\gamma \hat{z} \times \frac{d^{**} \vec{r}}{dt} + \gamma^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{r}) \right) = \vec{T} + m \vec{g}_e - 2m \vec{\omega} \times \left(\frac{d^{**} \vec{r}}{dt} + \gamma \hat{z} \times \vec{r} \right)$~~

$m \left(\frac{d^{**2} \vec{r}}{dt^2} + 2\gamma \hat{z} \times \frac{d^{**} \vec{r}}{dt} + \gamma^2 \hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{r}) \right) = \vec{T} + m \vec{g}_e - 2m \vec{\omega} \times \left(\frac{d^{**} \vec{r}}{dt} + \gamma \hat{z} \times \vec{r} \right)$

REARRANJANDO OS TERMOS

$$m \frac{d^{**2}}{dt^2} \vec{r} = \vec{T} + m \vec{g}_e - 2m(\vec{\omega} + \gamma \hat{z}) \times \frac{d^{**}}{dt} \vec{r}$$

(115)

$$\Rightarrow (m\gamma \hat{z} + 2m\gamma \vec{\omega}) \times (\gamma \hat{z} \times \vec{r})$$

USANDO QUE $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{z} \times (\hat{z} \times \vec{r}) = (\vec{r} \cdot \hat{z}) \hat{z} - \vec{r} \\ \vec{\omega} \times (\hat{z} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \hat{z} - (\vec{\omega} \cdot \hat{z}) \vec{r} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} m \frac{d^{**2}}{dt^2} \vec{r} = & \vec{T} + m \vec{g}_e - 2m(\vec{\omega} + \gamma \hat{z}) \times \frac{d^{**}}{dt} \vec{r} \\ & + m\gamma^2 \vec{r} + 2m\gamma(\vec{\omega} \cdot \hat{z}) \vec{r} \\ & - m\gamma^2(\vec{r} \cdot \hat{z}) \hat{z} - 2m\gamma(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \hat{z} \end{aligned}$$

DO LADO DIREITO, TODOS OS TERMOS (FORÇAS) ESTÃO

NO PLANO VERTICAL DE OSCILAÇÃO EXCETO

O TERCEIRO TERMO $-2m(\vec{\omega} + \gamma \hat{z}) \times \frac{d^{**}}{dt} \vec{r}$

PARA QUE O PLANO VERTICAL DE OSCILAÇÃO SEJA

CONSTANTE $\Rightarrow$ FAZEMOS $(\vec{\omega} + \gamma \hat{z}) \times \frac{d^{**}}{dt} \vec{r} = 0$

COMO $\frac{d^{**}}{dt} \vec{r} \simeq$ HORIZONTAL $\Rightarrow$ FAZEMOS $\vec{\omega} + \gamma \hat{z}$ HORIZONTAL

ISSO QUER DIZER QUE A COMPONENTE VERTICAL DE $\vec{\omega} + \gamma \hat{z}$ DEVE SER NULA,

(116)

OU SEJA $\hat{z} \cdot (\vec{\omega} + \gamma \hat{z}) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = -\vec{\omega} \cdot \hat{z} = -\omega \cos \theta}$$

OU SEJA, EM UM REF. QUE GIRA EM TORNO DO EIXO Z LOCAL (FIJO NA TERRA) COM FREQ $\gamma = -\omega \cos \theta$, O PÊNULO DE FOUCAULT OSCILA EM UM PLANO VERTICAL CONSTANTE

TEOREMA DE LARMOR

117

UM SISTEMA DE PARTICULAS DE MASSAS m_k E CARGAS q_k , MAS TODAS COM A MESMA RAZÃO CARGA/MASSA $\frac{q_k}{m_k} = \alpha$ (INDEPENDENTE DE k),

SUJEITAS A UMA FORÇA CENTRAL E INTERAGINDO ENTRE SI APENAS POR FORÇAS CENTRAIS, E SUJEITAS A UM CAMPO MAGNÉTICO FRACO E CONSTANTE $\vec{B}$

TERÁ O MOVIMENTO IDÊNTICO ÀQUELE SEM O CAMPO $\vec{B}$ MAS SUPERIMPOSTO COM UMA LENTA PRECESSÃO DO SISTEMA INTEIRO POR UM EIXO QUE PASSA PELO CENTRO DE FORÇA E ESTÁ NA DIREÇÃO DE $\vec{B}$. A PRECESSÃO É DEFINIDA PELO

VEZOR $\vec{\omega} = -\frac{1}{2} \alpha \vec{B}$

PROVA:

118

EQ. DO MOVIMENTO NA AUSÊNCIA DE $\vec{B}$

$$m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \underbrace{\vec{F}_k^{(E)}}_{\downarrow} + \sum_{j \neq k} \underbrace{\vec{F}_{jk}^{(I)}}_{\downarrow} (|\vec{r}_k - \vec{r}_j|)$$

FORÇA EXTERNA
RESULTANTE CENTRAL
APONTANDO P/ A
ORIGEM DO EIXO
DE COORDENADAS
E É ISOTRÓPICA

FORÇA CENTRAL
DE INTERAÇÃO
ENTRE AS
PARTÍCULAS

$$\left(\sum_j \vec{F}_{jk}^{(I)} = \vec{F}_k^{(I)} \right)$$

NA PRESENÇA DE UM CAMPO MAGNÉTICO

EXTERNO CONSTANTE, A EQ. É MODIFICADA PARA

$$m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^{(E)} + \vec{F}_k^{(I)} + q_k \left(\frac{d \vec{r}_k}{dt} \right) \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \frac{\vec{F}_k^{(E)} + \vec{F}_k^{(I)}}{m_k} + \underbrace{\frac{q_k}{m_k}}_{\alpha} \left(\frac{d \vec{r}_k}{dt} \right) \times \vec{B}$$

VAMOS AGORA MUDAR PARA UM REF GIRANTE
COM A MESMA ORIGEM E QUE GIRA
COM VELOC. ANGULAR $\vec{\omega}$

$$\frac{d^{*2}}{dt^2} \vec{r}_k + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{\vec{F}_k^{(E)} + \vec{F}_k^{(I)}}{m_k} + \alpha \frac{d\vec{r}_k}{dt} \times \vec{B} + \alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \frac{d^{*2}}{dt^2} \vec{r}_k = \frac{\vec{F}_k^{(E)} + \vec{F}_k^{(I)}}{m_k} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) + \alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) \times \vec{B} + \left(\frac{d\vec{r}_k}{dt} \right) \times (\alpha \vec{B} + 2\vec{\omega})$$

ESCOLHEMOS $\alpha \vec{B} + 2\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = -\frac{1}{2} \alpha \vec{B}}$

O ÚLTIMO TERMO SE ANULA.

ALÉM DISSO,

$$\begin{cases} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \frac{\alpha^2}{4} \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r}_k) \\ \alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) \times \vec{B} = +\frac{\alpha^2}{2} \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r}_k) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d^{*2}}{dt^2} \vec{r}_k = \frac{\vec{F}_k^{(E)} + \vec{F}_k^{(I)}}{m_k} + \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r}_k)}$$

AGORA, A NOÇÃO DE CAMPO MAGNÉTICO

(120)

FRACO FICA CLARA.

$$\left| \left(\frac{\alpha}{Z} \right)^2 \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{p}_k) \right| \ll \left| \frac{\vec{F}_k^{(E)}}{m_k} \right| \text{ ou } \left| \frac{\vec{F}_k^{(I)}}{m_k} \right| \text{ ou } \ll \left| \frac{\vec{F}_k^{(E)} + \vec{F}_k^{(I)}}{m_k} \right|$$

SENDO ASSIM, PODEMOS DESPREZAR

O ÚLTIMO TERMO FRENTE

AS FORÇAS EXTERNAS E INTERNAS E,

PORTANTO,

$$\boxed{m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^{(E)} + \vec{F}_k^{(I)}}$$

QUE É A EQ. DE MOVIMENTO NA
AUSENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO

EXEMPLO: e^- + PRÓTONS NUM
CAMPO MAG. EXTERNO

(121)

COMO $m_p \gg m_e \Rightarrow$ PRÓTON PARADO
NO CENTRO É e^-

SEENDO ATRAÍDO POR UMA FORÇA CENTRAL

$$-\frac{K}{r^2} \hat{r}, \quad \vec{r} \equiv \text{POSICÃO DO } e^-$$

$$K = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

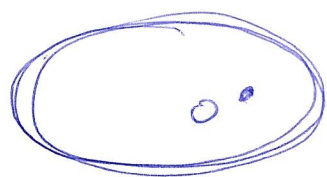
$$m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{K}{r^2} \hat{r} - e \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \times \vec{B}$$

↓ REF. GIRANTE COM $\vec{\omega} = -\frac{1}{2} \alpha \vec{B} = \frac{e}{2m_e} \vec{B}$

$$\boxed{m_e \frac{d^{*2} \vec{r}}{dt^2} = -\frac{K}{r^2} \hat{r}} \rightarrow \text{PROBLEMA DE KEPLER}$$

P/ ESTADOS LIGADOS ($E < 0$) $\rightarrow$ ELIPSE

REF S^*



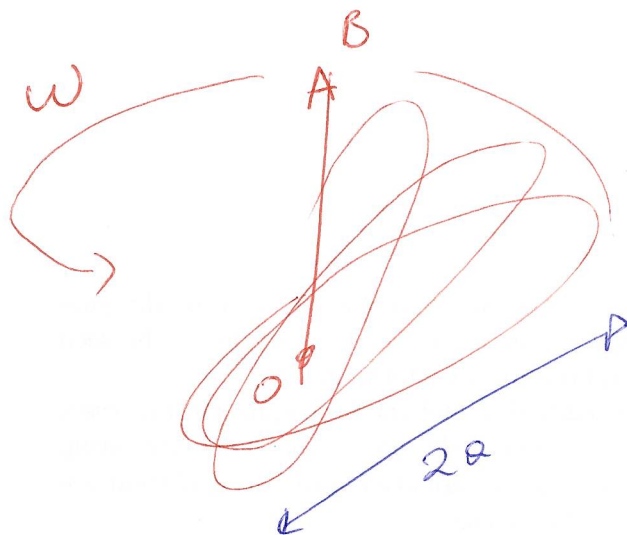
REF S

ELIPSE PRESSIONANDO



*OBS: A ELIPSE NÃO PRECISA ESTAR NO PLANO $\perp$ A $\vec{B}$





(122)

a = SEMI-AXO MAIOR

QDO A APROXIMAÇÃO DE CAMPO MAGNÉTICO
FRACO É VÁLIDA?

$$\frac{\alpha^2 B^2 a}{4} \ll \frac{K}{mea^2}$$

3ª LEI DE KEPLER
(VIDE PAG 71)

$$\frac{4\pi^2 m a^3}{|K|} = T^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha B}{2} \right)^2 \ll \frac{4\pi^2}{4\pi^2 m a^3} = 4\pi^2 \frac{1}{T^2}$$

↓
 ω

$$\Rightarrow \omega T \ll 2\pi$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\omega T \ll 1}$$

A VELOCIDADE ANGULAR DE PRECESSÃO ω É
MUITO MENOR QUE A FREQUÊNCIA CARACTERÍSTICA
DO MOVIMENTO NA AUSÊNCIA DO CAMPO.
AQUI, A FREQ. CARACTERÍSTICA É T^{-1}