

COORDENADAS GENERALIZADAS

146

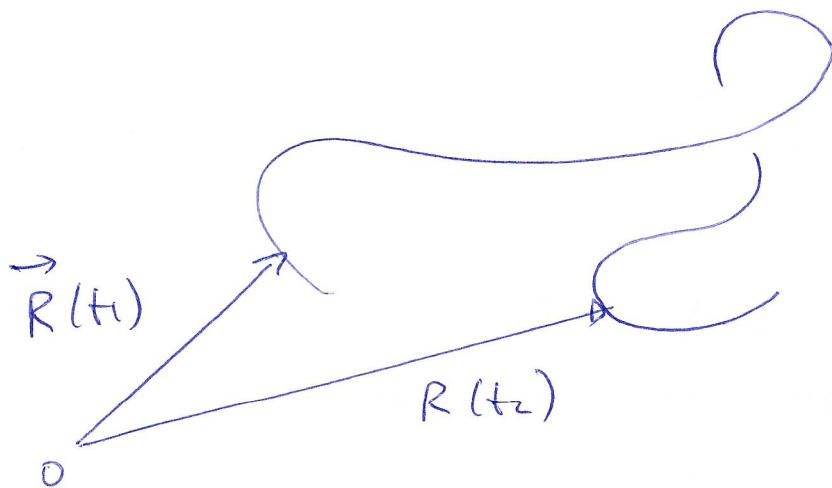
- SISTEMA FÍSICO DE N PARTÍCULAS

$$\Rightarrow 3N \text{ COORDENADAS: } \left\{ \begin{array}{l} x_1(t), y_1(t), z_1(t) \\ x_2(t), y_2(t), z_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t), y_N(t), z_N(t) \end{array} \right\}$$

MOVIMENTO DO SISTEMA

$$\vec{R}(t) = (x_1(t), y_1(t), \dots, y_N(t), z_N(t))$$

$\equiv$ VETOR $3N$ -DIMENSIONAL



PODEMOS DESCREVER ESSE MESMO MOVIMENTO
CONSIDERANDO UMA OUTRA BASE DE
COORDENADAS GENERALIZADAS

$$(q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N}(t))$$

DEVE HAVER UMA RELAÇÃO ENTRE
ESSAS COORDENADAS

(147)

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 \equiv q_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \\ q_2 \equiv q_2(x_1, y_1, \dots, z_N, t) \\ \vdots \\ q_N \equiv q_N(x_1, y_1, \dots, z_N, t) \end{array} \right.$$

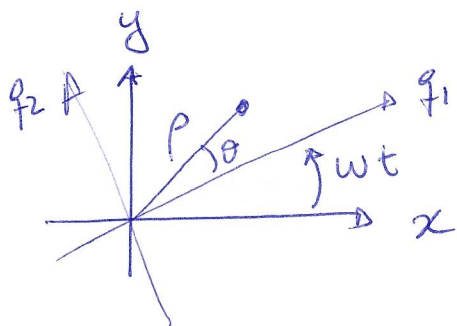
E, NATURALMENTE, A RELAÇÃO INVERSA

$$x_1 \equiv x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t)$$

$\vdots$

$$z_N \equiv z_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t)$$

EXEMPLO: 1 PARTÍCULA NO PLANO



$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos(\theta + \omega t) \\ y = \rho \sin(\theta + \omega t) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \omega t \end{array} \right.$$

PARA QUE HAJA UMA TRANSFORMAÇÃO (E SUA INVERSA)

DE $(x_1, \dots, z_N) \rightarrow (q_1, \dots, q_{3N})$, É NECESSÁRIO

QUE O JACOBIANO DA TRANSFORMAÇÃO SEJA NÃO-NULO

JACOBIANO $\equiv \frac{\partial (q_1 \dots q_{3N})}{\partial (x_1 \dots z_N)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial y_1} & \frac{\partial q_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial y_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_1}{\partial z_N} & \frac{\partial q_2}{\partial z_N} & \dots & \frac{\partial q_{3N}}{\partial z_N} \end{vmatrix} \neq 0$ (148)

COMO FICAM AS VELOCIDADES?

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ \vdots \\ \dot{z}_N = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_N}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial z_N}{\partial t} \end{cases}$$

LOGO, A ENERGIA CINÉTICA FICA

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

$$\left(\sum_{l=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \left(\sum_{m=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)$$

$$= \sum_{l=1}^{3N} \sum_{m=1}^{3N} \dot{q}_l A_{lm} \dot{q}_m + \sum_{l=1}^{3N} B_l \dot{q}_l + T_0$$

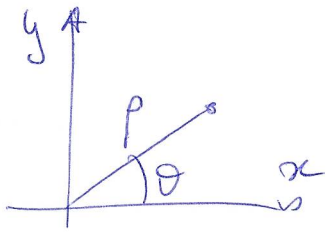
ONDE $A_{lm} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_l} \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial y_i}{\partial q_l} \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial z_i}{\partial q_l} \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right)$

$$B_l = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_l} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_l} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_l} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right)$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left(\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right)$$

EXEMPLO: 1 PARTÍCULA NO PLANO

(149)



$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \left((\dot{\rho} \cos \theta - \rho \sin \theta \dot{\theta})^2 + (\dot{\rho} \sin \theta + \rho \cos \theta \dot{\theta})^2 \right)$$
$$= \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2)$$

MOMENTO GENERALIZADO

$$P_{ix} = m_i \dot{x}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} T$$

ANÁLOGAMENTE, $P_{iy} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i} T$, $P_{iz} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}_i} T$

MOMENTO GENERALIZADO $\equiv P_k \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T$

EXEMPLO = 1 PARTÍCULA NO PLANO

$$P_\rho = \frac{\partial}{\partial \dot{\rho}} \left[\frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) \right] = m \dot{\rho}$$

$$P_\theta = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[\frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) \right] = m \rho^2 \dot{\theta} = m \rho (p \dot{\theta}) = \text{MOMENTO ANGULAR}$$

FORÇA GENERALIZADA

(150)

TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA SOBRE A i -ÉSIMA PARTÍCULA

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i)$$

ONDE $\delta x_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k$, ..., $\delta z_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k$

EM TERMOS DOS DESLOCAMENTOS GENERALIZADOS δq_k

$$\delta W = \sum_{k=1}^{3N} Q_k \delta q_k$$

FORÇA GENERALIZADA $\Rightarrow \delta W_k = Q_k \delta q_k$

PORTANTO,

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{i=1}^N F_{ix} \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \delta q_k + \dots + F_{iz} \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \delta q_k \\ &= \sum_{k=1}^{3N} \left(\sum_{i=1}^N F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{Q_k} \end{aligned}$$

Exemplo: $\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y}$
 $= F_p \hat{p} + F_\theta \hat{\theta}$

(151)

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_p = F_x \frac{\partial x}{\partial p} + F_y \frac{\partial y}{\partial p} = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta = F_p \\ Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} = F_x (-p \sin \theta) + F_y (p \cos \theta) \\ = p F_\theta \end{array} \right.$$

OU SEJA, $\left\{ \begin{array}{l} Q_p \equiv \text{COMPONENTE DA FORÇA NA DIREÇÃO } \hat{p} \\ Q_\theta \equiv \text{TORÇÃO ATUANDO NO AUMENTO DE } \theta \end{array} \right.$

FORÇAS CONSERVATIVAS

CASO AS FORÇAS $F_{1x}, F_{1y}, \dots, F_{Nx}$ SÃ
 DERIVADAS DE UM POTENCIAL $V(x_1, y_1, \dots, z_N)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta W &= - \delta V \\ &= - \sum_{i=1}^N \left(\overset{F_{1x}}{\frac{\partial V}{\partial x_i}} \delta x_i + \overset{F_{1y}}{\frac{\partial V}{\partial y_i}} \delta y_i + \overset{F_{1z}}{\frac{\partial V}{\partial z_i}} \delta z_i \right) \\ &= - \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k \end{aligned} \Rightarrow \boxed{Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}}$$

EQUAÇÕES DE ~~LAGRANGE~~ LAGRANGE

(152)

COMO ^{VISTO} ~~VISTO~~ NA PAG 149:

$$\frac{dP_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

O LADO DIREITO É A FORÇA GENERALIZADA?

OU SEJA, HÁ UMA ~~2ª~~ 2ª LEI DE NEWTON PARA AS COORD. GENERALIZADAS? SIM!

VAMOS COMEÇAR DA LEI DE NEWTON USUAL

$$\begin{cases} m \ddot{x}_i = F_{ix} \\ m \ddot{y}_i = F_{iy} \\ m \ddot{z}_i = F_{iz} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{MAS } \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) \end{aligned}$$

$$\text{MAS } \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad (\text{ANÁLOGO A } y_i \text{ E } z_i)$$

NOTE QUE $x_i = x_i(\{q_i\}, t)$

$\Rightarrow \dot{x}_i = \dot{x}_i(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) \rightarrow$ VIDE PÁGINA 148

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

↳ FUNÇÃO DE $\{q_k\}$ E t

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dots + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_i m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dots + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

$$+ \sum_i m_i \left(\dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dots + \dot{z}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

$$= \sum_i \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right)$$

Q_k (Pr. 150)

$$+ \sum_i m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_k} \right)$$

$$= Q_k + \sum_i m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_k} \right)$$

$$+ \sum_i \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right)$$

$$= Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

OU SEJA,

(154)

$$\frac{d p_k}{d t} = Q_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

↓
FORÇA GENERALIZADA

→ TERMO EXTRA

(QUE VEM DE

REFERENCIAIS NÃO-INERTIAIS

OU DE REFERENCIAIS

COM VETORES DEPENDENTES

DA POSIÇÃO)

Exemplo: 1 PARTÍCULA
em COORD. POLARES

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \rho} = m \rho \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow 2^a \text{ LEI DE NEWTON} = m \ddot{\rho} = F_\rho + m \rho \dot{\theta}^2$$



FORÇA CENTRÍFUGA

VER PÁG 37

E/OU 103

como $p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$

$$\Rightarrow \frac{d}{d t} p_k = \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

FICA

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

SE AS FORÇAS GENERALIZADAS SÃO

CONSERVATIVAS $\Rightarrow Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$

ONDE $V \equiv V(q_1, q_2, \dots, q_N)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

INTRODUZENDO A FUNÇÃO LAGRANGIANA

$$L = T - V = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}}^0 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \right] \quad \begin{array}{l} \text{EQUAÇÃO} \\ \text{DE} \\ \text{LAGRANGE} \end{array}$$

AS EQUAÇÕES DE LAGRANGE SÃO

DERIVADAS A PARTIR DAS EDS. DE NEWTON

$\Rightarrow$ NÃO É UMA NOVA TEORIA DA
MECÂNICA CLÁSSICA, MAS UMA
FORMULAÇÃO ALTERNATIVA QUE
PODE SER MUITO CONVENIENTE

NOTE QUE A EQ. DE LAGRANGE TEM
A MESMA FORMA QUE A EQ. DE
EULER-LAGRANGE DA PÁGINA 146

SE IDENTIFICARMOS f COMO A
LAGRANGIANA, AS VÁRIAS FUNÇÕES y_i
COM AS COORD. GENERALIZADAS q_i , E
A VARIÁVEL INDEPENDENTE x COM O

TEMPO $t \Rightarrow$ ESSA FORMULAÇÃO LAGRANGIANA
DA MECÂNICA CLÁSSICA É OBTIDA A PARTIR
DA EXTREMIZAÇÃO DE UM FUNCIONAL
QUE CHAMAMOS DE AÇÃO (OU INTEGRAL
DE AÇÃO)

$$A\grave{C}\grave{A} \equiv S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) dt \quad (15)$$

ONDE A FUNÇÃO LAGRANGIANA É

$$L = T - V$$

*NOTE QUE $L \neq T+V \equiv$ ENERGIA TOTAL

NESTA FORMULAÇÃO, AS TRAJETÓRIAS CLÁSSICAS VEM DE UM PRINCÍPIO

VARIACIONAL CHAMADO PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO (QUE DEVERIA SER CHAMADO DE PRINCÍPIO DA AÇÃO EXTREMA)

ESSE PRINCÍPIO É TAMBÉM CONHECIDO

COMO PRINCÍPIO DE HAMILTON

$$\delta S = 0$$

ECÉ É MAIS GERAL NO SENTIDO DE QUE

TRANSCENDE OS PROBLEMAS DA MECÂNICA CLÁSSICA E SE APLICA NA FÍSICA INTEIRA COMO NA MEC. CLÁSSICA, QUÂNTICA, RELATIVÍSTICA E NO ELETROMAGNETISMO

DERIVAÇÃO ALTERNATIVA DAS

(158)

EQUAÇÕES DE LAGRANGE

SEJA $I = \int_{t_1}^{t_2} T dt$

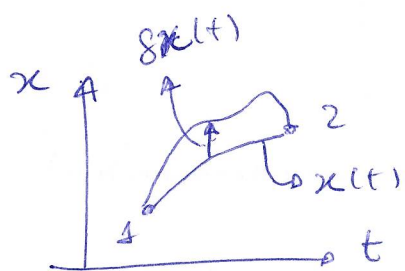
ONDE $T = \frac{1}{2} m \dot{\sigma}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

(VAMOS, POR SIMPLICIDADE, CONSIDERAR APENAS 1 PARTÍCULA,
É FÁCIL GENERALIZAR PARA MUITAS)

VAMOS AGORA FAZER UMA PEQUENA VARIAÇÃO

NA TRAJETÓRIA $\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}(t) + \delta \vec{r}$
 $(\delta x, \delta y, \delta z)$

TAL QUE $\delta \vec{r}(t_1) = \delta \vec{r}(t_2) = 0$



~~ANÁLOGO~~

GRÁFICO ANÁLOGO P/ y E $z(t)$

LOGO, $\delta I = \int \delta T dt$

ONDE $\delta T = m (\dot{x} \delta \dot{x} + \dot{y} \delta \dot{y} + \dot{z} \delta \dot{z})$

INTEGRANDO POR PARTES E USANDO QUE

$\delta \dot{x} = \frac{d}{dt} \delta x$ E QUE $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = \dots = \delta x(t_2) = 0$

MAS, $\delta I = - \int m(\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z) dt$ (159)

MAS $m \ddot{x} \delta x \equiv F_x \delta x \Rightarrow \delta I = - \int \underbrace{\vec{F} \cdot \delta \vec{r}}_{\delta W} dt$

TRABALHO
DA FORÇA
~~(159)~~

MAS O TRABALHO PODE
SER ESCRITO EM COORDENADAS
GENERALIZADAS COMO

$$\delta W = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3$$

E, PARA UM NÚMERO N DE PARTÍCULAS,

$$\delta W = \sum_{k=1}^{3N} Q_k \delta q_k$$

$$\Rightarrow \delta I = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{3N} Q_k \delta q_k dt$$

MAS, DO CÁLCULO VARIACIONAL,

$$\delta I = \int \delta T dt = \int \sum_k \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \right) \delta q_k dt$$

OU SEJA, TEMOS QUE

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k}$$

→ RECUPERAMOS
A DERIVADA
DA PÁGINA 155

DE ONDE SEGUE QUE, PARA FORÇAS
GENERALIZADAS CONSERVATIVAS,

(160)

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad \text{com } V \equiv V(q_1, \dots, q_{3N})$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad L = T - V}$$

EQ. DE LAGRANGE

FORÇA CUJOS POTENCIAIS DEPENDEM DA VELOCIDADE

NOTE QUE SE A FORÇA GENERALIZADA
É TAL QUE

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

ONDE $V \equiv V(q_1, \dots, q_{3N}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}, t)$

$$\text{ENTÃO, } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right)$$

E, PORTANTO,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0}$$

EQ. LAGRANGE
MESMO PARA
FORÇA NÃO-
CONSERVATIVA

* MAS NÃO É
UMA FORÇA NÃO-CONSERV. GÊNICA.

EXISTE ALGUMA FORÇA NÃO-CONSERVATIVA

(161)

QUE SE ENCAIXE NA FORMA

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad \text{É SEMPRE DE}$$

INTERESSE FÍSICO?

R: SIM. PARTÍCULA NUM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

DAS EQS. DE MAXWELL $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$\Rightarrow$ PODE-SE ESCREVER $\vec{B}$ COMO O ROTACIONAL DE UM VETOR: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$\vec{A}$ É CHAMADO DE POTENCIAL VETOR, $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$

DA 3ª EQ. DE MAXWELL $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

COMO O ROTACIONAL DE UM GRADIENTE

É SEMPRE NULO, i.e., $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0$

ENTÃO ESCREVE-SE QUE $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi$

OU SEJA,

(162)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ϕ É CHAMADO DE POTENCIAL ESCALAR

$$\phi = \phi(\vec{r}, t)$$

LOGO,

$$\vec{F} = q \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right)$$

ENTÃO $\vec{F}$ É FORÇA DA POSIÇÃO, VELOCIDADE É TEMPO

AGORA VAMOS SIMPLIFICAR

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

ALÉM DISSO,

VIDE AULA 33

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{A} &= \frac{d\vec{A}}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \left(\frac{\partial A_x}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{\partial A_y}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{\partial A_z}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Volando A força,

(163)

$$\vec{F} = q \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \right)$$

$$= q \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{d}{dt} \vec{A} + \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right)$$

$$= q \left(-\vec{\nabla} (\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d}{dt} \vec{A} \right)$$

note que $\frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_x} \vec{v} \cdot \vec{A}, \frac{\partial}{\partial v_y} \vec{v} \cdot \vec{A}, \frac{\partial}{\partial v_z} \vec{v} \cdot \vec{A} \right)$$

onde $\vec{A} = A(\vec{r}, t)$

como $\phi = \phi(\vec{r}, t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial v_x}, \frac{\partial \phi}{\partial v_y}, \frac{\partial \phi}{\partial v_z} \right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{v}} (-\phi + \vec{v} \cdot \vec{A}) \right]$$

ou seja, $\vec{F} = q \left(-\vec{\nabla} (\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{v}} (\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \right] \right)$

$$= -\vec{\nabla} V + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{v}} V \right)$$

ONDE $V = q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$

(164)

SENDO ASSIM, VOLTANDO À PÁGINA 160,

OBTENEMOS A LAGRANGIANA CORRESPONDENTE

$$\boxed{L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - q(\phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})}$$

FORÇAS NÃO-CONSERVATIVAS GÊNERICAS

EQS. DE ~~LAGRANGE~~ ^{LAGRANGE}

PARA O CASO GERAL (PÁG 155)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k = Q_k^{(\text{CONSERV})} + Q_k^{(\text{N-CONSERV})}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$Q_k^{\text{N-cons}} \equiv$ FORÇA GENERALIZADA NÃO CONSERVATIVA
 * SE ELA FOR DO TIPO $-\frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right)$

$\Rightarrow$ AGRUPA-SE COM O POTENCIAL CONSERVATIVO - CASO CONTRÁRIO, DEIXA COMO ESTÁ

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^{(\text{N-cons})}} \quad \text{COM } L = T - V$$

$$\vec{B} = B \hat{z}, \quad \vec{E} = 0$$

Qto vale os potenciais vetor $\vec{A}$ e escalar ϕ ?

$$\vec{B} = B \hat{z} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$

PROVA: $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \right) = \frac{1}{2} \left[\vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} \right]$

where $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$ and $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

PROVA DE UM PRODUTO VETORIAL

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \left(\sum_i \hat{e}_i \times \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left[\left(\sum_j A_j \hat{e}_j \right) \times \left(\sum_k B_k \hat{e}_k \right) \right] \\ &= \sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_j B_k) \underbrace{\hat{e}_i \times (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)}_{\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} B_k + A_j \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \right) \hat{e}_j (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_k) - \hat{e}_k (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j)} \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) B_i \hat{e}_j + \sum_{i,j} A_j \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_i} \right) \hat{e}_j - \sum_{i,k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right) B_k \hat{e}_k - \sum_{i,k} A_i \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \hat{e}_k \\ &= (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B}$$

como $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi = 0$

(166)

$\Rightarrow \phi = \text{const}$ e us ESCOLHEMOS $= 0$

DA PÁGINA 164, $L = T - V$

$= \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q \left(\phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} \right)$

MOMENTO CANÔNICO: $P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x$

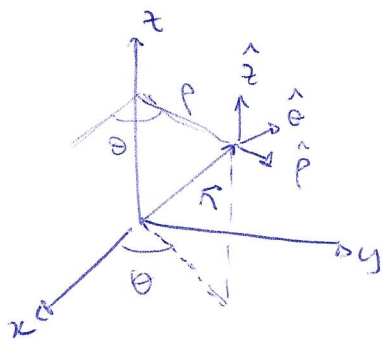
$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + qA_y$

$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + qA_z$

$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}}$

NESTE CASO, O MOMENTO CANÔNICO $\vec{p}$ É DIFERENTE
DO MOMENTO CINÉTICO $m\dot{\vec{r}}$

EM COORD. CILÍNDRICAS



$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} = \frac{B}{2} \hat{z} \times (\rho \hat{\rho} + z \hat{z})$

$\vec{A} = \frac{1}{2} B \rho \hat{\theta}$, $\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{z}$

$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} q B \rho^2 \dot{\theta}}$

EQUAÇÃO DE LAGRANGE: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 = \frac{d}{dt} (P_k) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

$\Rightarrow m \ddot{\rho} = q B \rho \dot{\theta} + m \rho \ddot{\theta}$

$\frac{d}{dt} (m \rho^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} q B \rho^2) = 0 \Rightarrow P_{\theta} = m \rho^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} q B \rho^2 = \text{const}$

$m \ddot{z} = 0 \rightarrow z = z_0 + v_{z0} t$ (MOVIMENTO UNIFORME EM z)

$$\Rightarrow m \ddot{\rho} = \cancel{m \rho \dot{\theta}^2} \quad \cancel{m \rho \dot{\theta}^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \dot{\rho} \dot{\theta}^2$$

167

EM PRIMEIRA VISTA ESSA EQUAÇÃO PARECE DIFÍCIL DE RESOLVER, MAS NÃO É. SABEMOS QUE O MOVIMENTO É CIRCULAR UNIFORME NO PLANO XY. MAS O CENTRO DESSA ÓRBITA NÃO É NECESSARIAMENTE A ORIGEM DO PLANO XY. POR ISSO A EQUAÇÃO PARECE COMPLICADA.

A SOLUÇÃO DE MOV. CIRCULAR UNIFORME APARECE TRIVIALMENTE EM COORDENADAS CILÍNDRICAS E $\rho = \text{CONST}$, $\dot{\theta} = \text{CONST}$. QUEL O VALOR DESSAS CONSTANTES?

$$\text{DA 1ª EQUAÇÃO: } \ddot{\rho} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \dot{\rho} \dot{\theta}^2 + m \rho \dot{\theta}^2 \right) \dot{\rho} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \rho = 0 \\ \dot{\theta} = -\frac{1}{m} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \dot{\rho} \dot{\theta}^2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{SOLUÇÕES TRIVIAIS} \rightarrow \vec{v}_0 = v_0 \hat{z} \\ \text{SOLUÇÃO NÃO TRIVIAL} \\ \text{(MOV. CIRCULAR)} \end{array} \right.$$

A 2ª EQ. DIZ QUE

$$P_\theta = \rho^2 \left(m \dot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \dot{\rho} \dot{\theta}^2 \right) = -\frac{1}{2} m \rho^2 \ddot{\theta} = \text{CONST.}$$

COMO $\dot{\theta} = \text{CONSTANTE} \Rightarrow \rho$ TAMBÉM É CONSTANTE (CONFIRMA A HIPÓTESE)

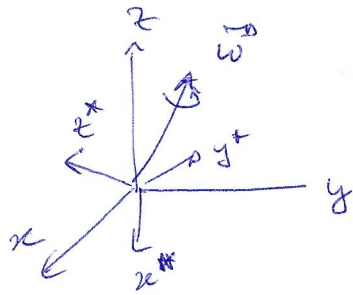
NOTE, ENTRETANTO, QUE $P_\theta \neq m \rho^2 \dot{\theta}$ (COMO VISTO NA PÁGINA 149)

POR QUE P_θ É DIFERENTE AQUI?

DICA: VIDE PÁGINA 166

EXEMPLO : 2 REFERENCIAIS GIRANTES COM A MESMA ORIGEM

(168)



NO REFERENCIAL S

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

COMO FICA NO REF S*?

$$\vec{r} = \vec{r}^* \quad \text{mas} \quad \vec{v} = \vec{v}^* + \vec{\omega} \times \vec{r}^*$$

↑
VIDE PÁGINA 102

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m \left(\dot{\vec{r}}^* + \vec{\omega} \times \vec{r}^* \right)^2 - V(\vec{r}^*)$$

EQS. DE LAGRANGE: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_k^*} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_k^*} = 0$

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$
(PÁGINA 33)

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{\vec{r}}^{*2} + 2 \dot{\vec{r}}^* \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) + |\vec{\omega} \times \vec{r}^*|^2 \right) - V(\vec{r}^*)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_k^*} = m \dot{r}_k^* + m (\vec{\omega} \times \vec{r}^*)_k, \quad \frac{\partial L}{\partial r_k^*} = \frac{\partial}{\partial r_k^*} \left[m \dot{\vec{r}}^* \cdot (\vec{r}^* \times \vec{\omega}) + \frac{m}{2} |\vec{\omega} \times \vec{r}^*|^2 - V(\vec{r}^*) \right]$$

$$= m \left(\dot{\vec{r}}^* \times \vec{\omega} \right)_k + m \left((\vec{\omega} \times \vec{r}^*) \times \vec{\omega} \right)_k - \frac{\partial V(\vec{r}^*)}{\partial r_k^*}$$

$$\Rightarrow m \ddot{r}_k^* + m \left(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}^* \right)_k + m \left(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^* \right)_k = m \left(\dot{\vec{r}}^* \times \vec{\omega} \right)_k + m \left((\vec{\omega} \times \vec{r}^*) \times \vec{\omega} \right)_k + F_k$$

OU SEJA

$$m \ddot{\vec{r}}^* = \vec{F} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) - 2m (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^*) = m (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}^*)$$

ESTE É O TEOREMA DE CORIOLIS → VIDE PÁGINA 103

SISTEMAS COM VÍNCULOS

169

SISTEMAS COM VÍNCULOS SÃO CONVENIENTEMENTE TRATADOS NO FORMALISMO LAGRANGEANO

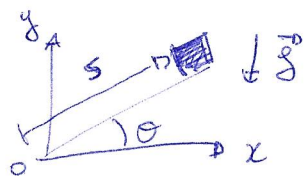
• SEJA UM SISTEMA DE N PARTÍCULAS $\Rightarrow 3N$ COORDENADAS CARTESIANAS

$$\{x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N\} \rightarrow 3N \text{ GRAUS DE LIBERDADE}$$

MAS SE EXISTEM M VÍNCULOS ENTRE ESSE $3N$ GRAUS DE LIBERDADE, ENTÃO A DINÂMICA É RESTRITA DE TAL MANEIRA A SATISFAZER OS VÍNCULOS $\Rightarrow$ EFETIVAMENTE, HÁ $3N - M$ GRAUS DE LIBERDADE

OU SEJA, HÁ EFETIVAMENTE $M = 3N - M$ COORDENADAS GENERALIZADAS

EXEMPLO:



$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

$$\text{EQS. LAGRANGE: } \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

O QUE HÁ DE ERRADO? $\rightarrow$ AS VARIAÇÕES DE x E y NÃO SÃO INDEPENDENTES $\Rightarrow$ O PRINCÍPIO VARIACIONAL TEM QUE SER FEITO COM CUIDADO PORQUE NEM TODAS AS VARIAÇÕES DE x E y SÃO COMPATÍVEIS COM O VÍNCULO $\Rightarrow$ A EXTREMIZAÇÃO DA AÇÃO TEM QUE SER FEITA RESPEITANDO O VÍNCULO

QUAL É O VÍNCULO? $y = \tan \theta x$

QUE PODE SER REESCRITO NA FORMA $f(x, y) = 0 = y - \tan \theta x$ NA FORMA DIFERENCIAL $\rightarrow dy = \tan \theta dx$

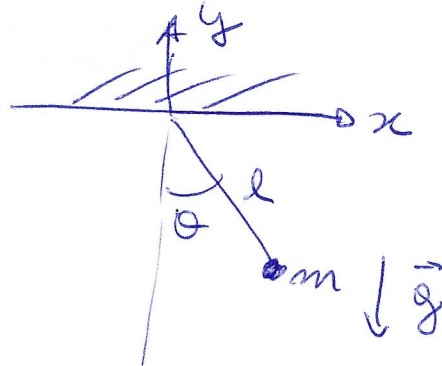
QUANTOS GRAUS DE LIBERDADE? 1 GRAU DE LIBERDADE

COORDENADA GENERALIZADA: $S \Rightarrow y = S \sin \theta$, $x = S \cos \theta$

$$\Rightarrow L(x, y) = L(S) = \frac{1}{2} m \dot{S}^2 - mg S \sin \theta$$

$$\text{EQ. LAGRANGE: } m \ddot{S} = -mg \sin \theta \Rightarrow \boxed{\ddot{S} = -g \sin \theta}$$

OUTRO EXEMPLO



(170)

Como no exemplo anterior

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Qual o vínculo? $x^2 + y^2 = l^2$

que pode ser reescrito como

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \\ y = -l \cos \theta \end{cases}$$

e $\theta \equiv$ coordenada generalizada

$$\Rightarrow L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m g l \cos \theta$$

Eq. Lagrange: $\frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\theta}) = -m g l \sin \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

NOTE QUE NÃO HOUVE NECESSIDADE DE FAZER DE TORQUE

O QUE É UM VÍNCULO?

R: É UMA RELAÇÃO ENTRE AS COORDENADAS DO SISTEMA E SUAS DERIVADAS

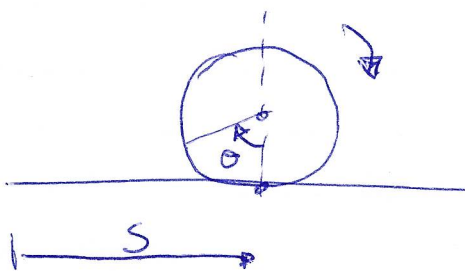
QDO O VÍNCULO PODE SER INTEGRADO E NOS PERMITE ESCREVER A LAGRANGIANA COM UM GRAU DE LIBERDADE A MENOS, ENTÃO DIZ-SE QUE ESSE VÍNCULO É

HOLONÔMICO.

OS 2 EXEMPLOS ANTERIORES
SÃO VÍNCULOS HOLONÔMICOS.

(172)

OUTRO EXEMPLO DE VÍNCULO HOLONÔMICO
É AQUELE DE UM CILÍNDRO ROLANDO
SEM DESLIZAR



CONDIÇÃO DE
NÃO DESLIZAMENTO
(VÍNCULO)

$$\dot{s} = R \dot{\theta}$$

ESTE VÍNCULO RELACIONA A VELOCIDADE
DO CENTRO DO CILÍNDRO COM SUA
VELOCIDADE ANGULAR. ENTRETANTO, ESSE
VÍNCULO PODE SER INTEGRADO:

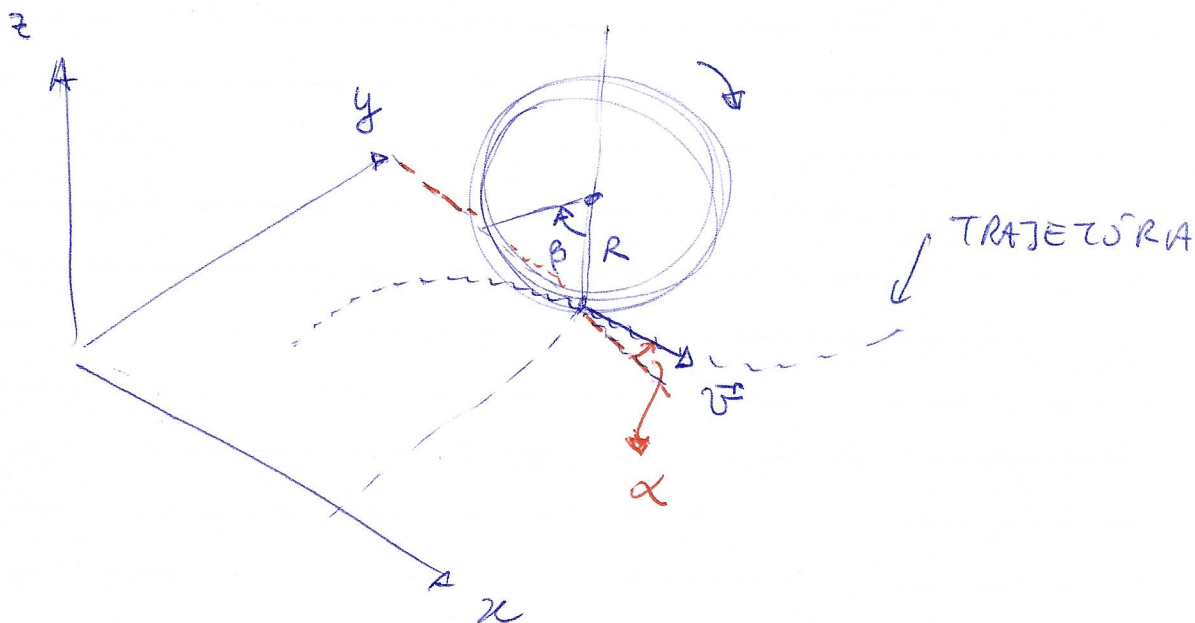
$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \rightarrow ds = R d\theta \Rightarrow \boxed{s = R\theta + \text{const}}$$

LOGO, PODEMOS ELIMINAR UM GRAU DE LIBERDADE
NA DESCRIÇÃO DO SISTEMA.

NESTE CURSO, VAMOS TRATAR APENAS
VÍNCULOS HOLONÔMICOS. VÍNCULOS
NÃO-HOLONÔMICOS SERÃO CONSIDERADOS EM MEC-2

AQUI, VAMOS APENAS DAR UM EXEMPLO (172)
DE VÍNCULO NÃO-HOLONÔMICO

- DISCO ROLANDO NO PLANO xy SEM DESLIZAR.
POR SIMPLICIDADE, VAMOS ASSUMIR QUE ESSE DISCO ESTÁ SEMPRE NA VERTICAL, OU SEJA, O PLANO DO DISCO É PERPENDICULAR AO PLANO xy .



COORDENADAS QUE DEFINEM A CONFIGURAÇÃO
DO SISTEMA (DO DISCO) : x, y, α, β

CONDIÇÃO (VÍNCULO) DE NÃO DESLIZAMENTO : $v = R\dot{\beta}$

$$\text{MAS } \vec{v} = v \cos \alpha \hat{x} + v \sin \alpha \hat{y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \cos \alpha = R \dot{\beta} \cos \alpha \\ \dot{y} = v \sin \alpha = R \dot{\beta} \sin \alpha \end{cases}$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} dx = R \cos \alpha \, d\beta \\ dy = R \sin \alpha \, d\beta \end{cases}$$

(173)

ESSAS EQUAÇÕES NÃO PODERAM SER INTEGRADAS
E FORNECER UMA RELAÇÃO ENTRE

x, y, α E β NA FORMA $f(x, y, \alpha, \beta) = 0$

COMO PROVAR ESSA AFIRMAÇÃO?

- SUPONHA QUE EXISTA $f(x, y, \alpha, \beta) = 0$

POR SIMPLICIDADE, VAMOS REESCREVER NA FORMA

$$f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_M, t) = 0, \quad M \equiv \text{NR TOTAL DE COORD. GENERALIZADAS}$$

(NOTE QUE ESTAMOS INCLUINDO O TEMPO, POR GENERALIDADE)
 $\alpha = 1, \dots, M \equiv \text{NR DE VÍNCULOS}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow df_\alpha = 0 &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt \\ &\equiv \sum_{j=1}^N g_{\alpha j} dq_j + g_{\alpha t} dt \end{aligned}$$

$$\text{ONDE } g_{\alpha j} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j}, \quad g_{\alpha t} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}$$

PARA QUE O VÍNCULO SEJA HOLONÔMICO, TEM-SE

$$\text{QUE } \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial q_k \partial q_j} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial q_j} g_{\alpha k} = \frac{\partial}{\partial q_k} g_{\alpha j}}$$

(174)

PARA O CASO DO DISCO VERTICAL

ROLANDO NO PLANO HORIZONTAL, UM DOS
~~VÍNCULOS~~ VÍNCULOS É $dx - R \cos \alpha d\beta = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_{1x} = 1 \\ g_{1y} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} g_{1\alpha} = 0 \\ g_{1\beta} = -R \cos \alpha \end{cases}$$

PARA SER HOLONÔMICO $\Rightarrow \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial \beta} = \frac{\partial g_{1\beta}}{\partial \alpha}$

MAS $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \beta} g_{1\alpha} = \frac{\partial}{\partial \beta} 0 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} g_{1\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (-R \cos \alpha) = R \sin \alpha \neq 0 \end{cases}$

 $\Rightarrow$ VÍNCULO É NÃO-HOLONÔMICO.



VÍNCULOS E MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

175

É COMUM QUE OS VÍNCULOS NÃO FORNEÇAM EXPRESSÕES SIMPLES ENTRE AS COORDENADAS GENERALIZADAS DE TAL MANEIRA QUE NÃO CONSEGUIMOS, DE MANEIRA PRÁTICA, REDUZIR O NR. DE GRAUS DE LIBERDADE. COMO PROCEDER NESSE CASO?

→ INTRODUIR MULTIPLICADORES DE LAGRANGE E FAZER A EXTREMIZAÇÃO DA AÇÃO

• $L = L(q_1 \dots q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t)$, $N \equiv \text{NR. DE COORD. GENER.}$

$f_\alpha(q_1 \dots q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) = 0$, $\alpha = 1, \dots, M \equiv \text{NR. DE VÍNCULOS}$

→ $N - M \equiv \text{NR. DE GRAUS DE LIBERDADE}$

(NÃO NECESSARIAMENTE
HOLONÔMICOS)

COMO $f_\alpha = 0$, ENTÃO A AÇÃO NÃO É ALTERADA SE SOMAMOS f_α A ELA.

OU SEJA $L \rightarrow L + \sum_{\alpha=1}^M \lambda_\alpha f_\alpha$

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

LOGO, $L \equiv L(q_1 \dots q_N, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_N, \lambda_1 \dots \lambda_M, t)$

AGORA DEVEMOS EXTREMIZAR A AÇÃO

$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f_{\alpha} \right) dt$

→ $N + M$ "FUNÇÕES INCOGNITAS"

* A EXTREMIZAÇÃO É FEITA EM RELAÇÃO ÀS COORDENADAS q_i E MULTIPLICADORES λ_α

VOLTANDO AO CÁLCULO VARIACIONAL

(176)

$$\delta S = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(L + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f_{\alpha} \right) dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(L + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f_{\alpha} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(L + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f_{\alpha} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j} \quad \text{onde}$$

$$Q_j \equiv \sum_{\alpha=1}^M \left\{ \lambda_{\alpha} \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) - \frac{d\lambda_{\alpha}}{dt} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \dot{q}_j} \right\}$$

"FORÇAS" DE VÍNCULO

ATÉ AQUI, TEMOS N EQUAÇÕES P/ $N+M$ INCÓGNITAS

AS OUTRAS M EQUAÇÕES VÊM DA EXTREMIZAÇÃO DE S COM RESPEITO AOS λ_{α} 's.

LEMBRANDO QUE $\frac{\partial L}{\partial \lambda_{\alpha}} = 0 = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \lambda_{\alpha}}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{\lambda}_{\beta}} \left(L + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f_{\alpha} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \lambda_{\beta}} \left(L + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f_{\alpha} \right) = 0$$

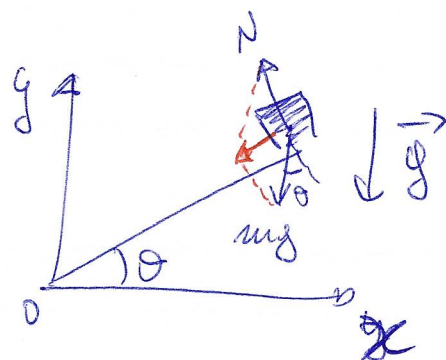
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda_{\beta}} \left(\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f_{\alpha} \right) = \boxed{0 = f_{\beta}}$$

AS OUTRAS M Eqs. SÃO OS M VÍNCULOS

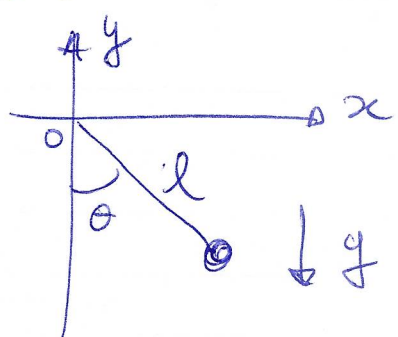
VOLTANDO AOS EXEMPLOS

(177)

①



②



Em AMBOS OS CASOS

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

VÍNCULO ①: $f = y - \tan \theta x = 0$

VÍNCULO ②: $f = \sqrt{x^2 + y^2} - l = 0$

① $m\ddot{x} = Q_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = -\lambda \tan \theta$

$m\ddot{y} = -mg + Q_y = -mg + \lambda$

Do VÍNCULO: $y = \tan \theta x$
 $\Rightarrow \ddot{y} = \tan \theta \ddot{x}$

$\Rightarrow m \tan \theta \ddot{x} = -mg + \lambda$

$\Rightarrow \tan \theta (-\lambda \tan \theta) = -mg + \lambda$

$\Rightarrow (\tan^2 \theta + 1) \lambda = \frac{mg}{\cos^2 \theta} = mg$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = mg \cos^2 \theta}$

$\Rightarrow m\ddot{x} = -mg \sin \theta \cos \theta$

$m\ddot{y} = -mg \sin^2 \theta$

SE TIVÉSSEMOS ESCOLHIDO

$f = \cos \theta y - \sin \theta x = 0$

OBTERÍAMOS OS MESMOS RESULTADOS

MAS COM $\lambda \Rightarrow \lambda = mg \cos \theta = \text{NORMAL}$
 peso

② É CONVENIENTE
 USAR ρ E θ NO LUGAR
 DE x E y

$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \\ y = -\rho \cos \theta \end{cases} \Rightarrow f = \rho - l = 0$

$\Rightarrow L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) + mg \rho \cos \theta$

$\rho: \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = Q_\rho = -\lambda$

$m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta = \lambda$

IMPONDO O VÍNCULO $\rightarrow \dot{\rho} = 0$

$\Rightarrow \lambda = mg \cos \theta + m\rho\dot{\theta}^2$

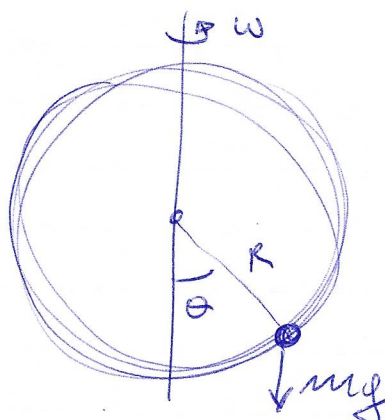
↓
 COMPONENTE DO PESO NA DIREÇÃO $(-\hat{\rho})$
 CENTRÍPETA

$\lambda = \text{TENSÃO NA CORDA}$

SE NÃO ESTAMOS INTERESSADOS NAS
FORÇAS DE VÍNCULO, BASTA SUBSTITUIR
O VÍNCULO HOLONÔMICO E DIMINUIR O NR.
DE GRAUS DE LIBERDADE.

(178)

EXEMPLO:



PARTÍCULA CONFINADA NUM ANEL GIRANTE COM
VELOCIDADE ANGULAR ω

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m g z$$

$$\text{VÍNCULOS: } \begin{cases} z = -R \cos \theta \\ x = R \sin \theta \cos \phi \\ y = R \sin \theta \sin \phi \\ \phi = \phi_0 + \omega t \\ r = R \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) + m g R \cos \theta$$

$$\text{IMPOANDO OS VÍNCULOS} \rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) + m g R \cos \theta}$$

1 GRAU DE LIBERDADE APENAS

$$\text{LAGRANGE: } \frac{d}{dt} \left(m R^2 \dot{\theta} \right) = m R^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta - m g R \sin \theta$$

$$\Rightarrow m R^2 \ddot{\theta} = - \frac{\partial U_{\text{eff}}(\theta)}{\partial \theta}$$

ONDE O POTENCIAL EFETIVO P/
COORDENADA θ É

(179)

$$U(\theta) = -\frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2 \theta - m g R \cos \theta$$

VAMOS ANALISAR $U(\theta)$ E, COM ISSO, OS
POSSÍVEIS MOVIMENTOS DA PARTÍCULA.

PTS DE EQUILÍBRIO: $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 = -mR(R\omega^2 \cos \theta - g) \sin \theta$
 $= -mR^2(\omega^2 \cos \theta - \omega_0^2) \sin \theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases}$$

$$\cos \theta = \frac{g}{R\omega^2} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \rightarrow \text{SOLUÇÃO SÓ É POSSÍVEL QUANDO } \omega > \omega_0 \rightarrow \theta^* = \arccos\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

ESTABILIDADE DOS PTS DE EQUILÍBRIO:

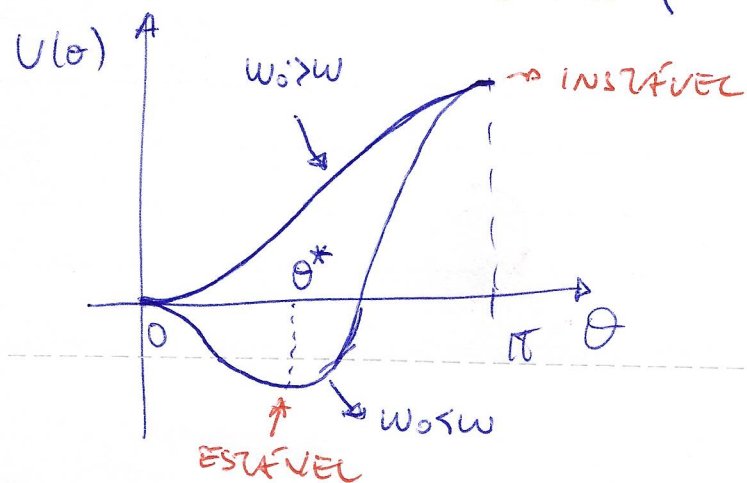
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -mR^2 \left[-\omega^2 \sin \theta \times \sin \theta + (\omega^2 \cos \theta - \omega_0^2) \cos \theta \right] = mR^2 \left(\omega^2 \cos 2\theta - \omega_0^2 \cos \theta \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\pi} = -mR^2(\omega^2 + \omega_0^2) < 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=0} = mR^2(\omega_0^2 - \omega^2)$$

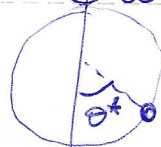
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta^*} = -mR^2 \left(\omega^2 \left(2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 - 1 \right) - \omega_0^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \right)$$

$$= mR^2(\omega^2 - \omega_0^2) > 0 \text{ POR } \omega > \omega_0$$



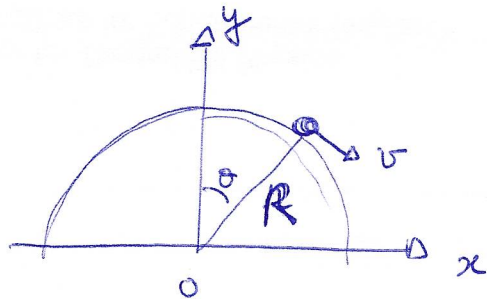
OR $\omega > \omega_0$
(GIRA MUITO RÁPIDO)

A POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO
DA PARTÍCULA É EM $\theta = \theta^*$
POR $\omega > \omega_0$



EXEMPLO 2

(18)



PARTÍCULA NO TOPO DE UM HEMISFÉRIO COMEÇA A DESLIZAR SEM ATRITO. QDO PERDE CONTATO?

QDO NORMAL = 0

NORMAL É A FORÇA DE VÍNCULO EM RELAÇÃO À COORD. $r \Rightarrow$ VÍNCULO: $f = r - R = 0$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - m g r \cos \theta$$

$$n: \frac{d}{dt} (m \dot{r}) = m r \dot{\theta}^2 - m g \cos \theta + \lambda$$

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA: $E = m g R$

IMPOANDO O VÍNCULO: $E = m g R = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m g R \cos \theta$

$$m \ddot{r} = 0 = m R \dot{\theta}^2 - m g \cos \theta + \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2g(1 - \cos \theta) = R \dot{\theta}^2 \\ \lambda = m(g \cos \theta - R \dot{\theta}^2) \end{cases} \quad \downarrow$$
$$\Rightarrow \lambda = m g (3 \cos \theta - 2)$$

PERDE-SE CONTATO QDO $\lambda = \text{NORMAL} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \theta = \frac{2}{3}} \rightarrow \theta \approx 48^\circ$$

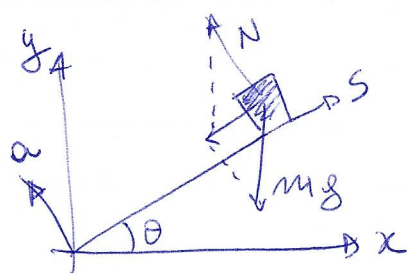
FORÇAS DE VÍNCULOS HOLONÔMICOS

(181)

NA PÁG. 176, OBTIVEMOS "FORÇAS" QUE SÃ PROPORCIONAIS ÀS FORÇAS DE VÍNCULO. COMO OBTER ESSAS FORÇAS DE VÍNCULO? PRECISAMOS VOLTAR À EQ. LAGRANGE DA PÁG. 155 E CALCULAR A FORÇA GENERALIZADA.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad \text{A FORÇA GENERALIZADA É MAIS FACILMENTE CALCULADA ADMITINDO DESLOCAMENTOS } \delta q_k \text{ QUE PRODUZEM TRABALHOS } \delta W_k = Q_k \delta q_k$$

VOLTANDO AO EXEMPLO ① DA PÁG. 177



EM RELAÇÃO ÀS COORDENADAS GENERALIZADAS s E q , TEMOS QUE

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + \dot{q}^2)$$

COMO CALCULAR AS FORÇAS GENERALIZADAS

$$Q_q: \delta W_q = Q_q \delta q = (N - mg \cos \theta) \delta q \Rightarrow Q_q = N - mg \cos \theta$$

$$Q_s: \delta W_s = Q_s \delta s = -mg \sin \theta \delta s \Rightarrow Q_s = -mg \sin \theta$$

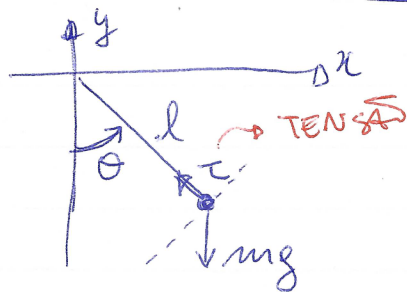
$$\text{Pelas LAGRANGE: } \begin{cases} m \ddot{s} = -mg \sin \theta \\ m \ddot{q} = N - mg \cos \theta \end{cases} \rightarrow \boxed{s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g \sin \theta t^2}$$

$$\text{AGORA, IMPOSMOS O VÍNCULO } q = \dot{q} = \ddot{q} = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg \cos \theta}$$

NOTE QUE, PARA OBTER A FORÇA DE VÍNCULO (AQUI É A NORMAL), PRECISAMOS VIOLAR O VÍNCULO.

ISTO É VERDADE MESMO EXPERIMENTALMENTE. PARA MEDIR A NORMAL, PRECISAMOS DEFORMAR LOCALMENTE A SUPERFÍCIE OU COLOCAR A SUPERFÍCIE SOBRE UMA MOLTA E DEFORMAR A MOLTA, OU SEJA, TRANSLADAR A SUPERFÍCIE. ~~DE~~ DE QUALQUER MANEIRA, O VÍNCULO DEVE SER VIOLADO. APENAS

NO FINAL, QDO JÁ TIVERMOS A EXPRESSÃO DA FORÇA DE VÍNCULO, É QUE IMPOSMOS O VÍNCULO E SIMPLIFICAMOS A EXPRESSÃO.



COORD. GENERALIZADAS: $\ell \in \theta$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \dot{\ell}^2 + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$$

VÍNCULO: $\ell = \text{const} = L$

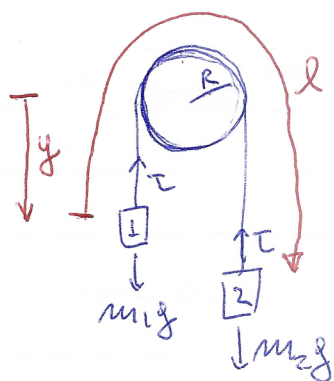
FORÇAS GENERALIZADAS: $\begin{cases} Q_\theta = -mgL \sin \theta \\ Q_\ell = mg \cos \theta - T \end{cases}$

EQS. LAGRANGE: $\begin{cases} m\ddot{\ell} = mg \cos \theta - T + m\ell \dot{\theta}^2 \\ m\ell^2 \ddot{\theta} + 2m\ell \dot{\ell} \dot{\theta} = -mgL \sin \theta \end{cases}$

IMPOND O VÍNCULO $\Rightarrow mL^2 \ddot{\theta} = -mgL \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta$

$$T = mg \cos \theta + m\ell \dot{\theta}^2$$

OUTRO EXEMPLO: MÁQUINA DE ATWOOD SEM ATRITO



FIO INEXTENSÍVEL $\rightarrow$ VÍNCULO: $\ell = L$

COORD. GENERALIZADAS: $y \in \ell$

COORD. CARTESIANAS:

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = \ell - \pi R - y \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\ell} - \dot{y})^2$$

FORÇAS GENERALIZADAS

$$\delta W_y = (m_1 g - T) \delta y - (m_2 g - T) \delta y = (m_1 - m_2) g \delta y$$

$$\delta W_\ell = (m_2 g - T) \delta \ell$$

EQS. LAGRANGE: $\begin{cases} m_1 \ddot{y} + m_2 (\ddot{y} - \ddot{\ell}) = (m_1 - m_2) g \\ m_2 (\ddot{\ell} - \ddot{y}) = m_2 g - T \end{cases}$

IMPOND O VÍNCULO $\ell = L = \text{const}$

$$\ddot{y} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

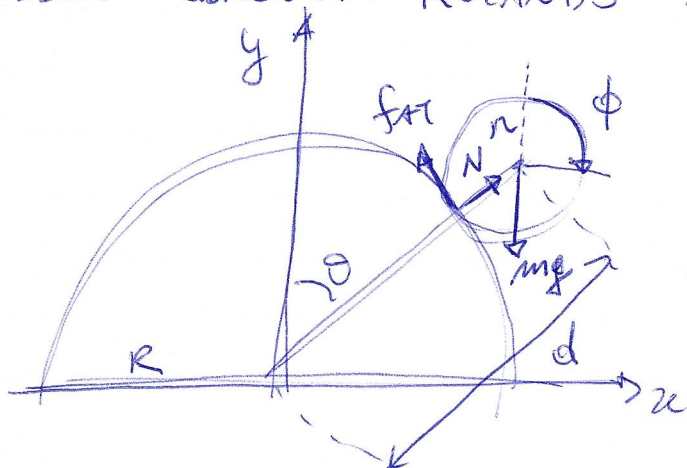
$$T = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

QUANDO CALCULAR O TRABALHO ASSOCIADO AO DESLOCAMENTO δq_k , LEMBRE-SE DE MANTER AS OUTRAS COORDENADAS GENERALIZADAS CONSTANTES.

MAIS OUTRO EXEMPLO:

189

OBJETO CIRCULAR ROLANDO SOBRE UM SEMI-CILÍNDRIO FIXO



VÍNCULOS:

① CONTATO: $d = R + r = \text{const}$

② NÃO DESLIZAMENTO:

$$R\dot{\theta} = r(\dot{\phi} - \dot{\theta})$$

INTEGRANDO $\rightarrow (R+r)\theta = r\phi$

RESOLVER POR NEWTON

$$\begin{cases} m\ddot{x} = N\sin\theta - f\cos\theta \\ m\ddot{y} = N\cos\theta + f\sin\theta - mg \\ I\ddot{\phi} = fr \end{cases}$$

DO VÍNCULO ① $\Rightarrow \begin{cases} x = d\sin\theta \\ y = d\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = d\cos\theta\dot{\theta} \\ \dot{y} = -d\sin\theta\dot{\theta} \end{cases}$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -d\sin\theta\dot{\theta}^2 + d\cos\theta\ddot{\theta} \\ \ddot{y} = -d\cos\theta\dot{\theta}^2 - d\sin\theta\ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -md\sin\theta\dot{\theta}^2 + md\cos\theta\ddot{\theta} = N\sin\theta - f\cos\theta \\ -md\cos\theta\dot{\theta}^2 - md\sin\theta\ddot{\theta} = N\cos\theta + f\sin\theta - mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow md\ddot{\theta} = -f + mg\sin\theta \quad \text{e} \quad -md\dot{\theta}^2 = N + mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{N = mg\cos\theta - md\dot{\theta}^2}$$

DO VÍNCULO ② $\rightarrow \ddot{\phi} = \frac{R+r}{r}\ddot{\theta} = \frac{d}{r}\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{f = I\frac{d}{r^2}\ddot{\theta}} \quad \text{e, FINALMENTE,} \quad \left(md + \frac{Id}{r^2}\right)\ddot{\theta} = mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)\ddot{\theta} = \frac{g}{d}\sin\theta}$$

CILÍNDRIO: $I = \frac{1}{2}mr^2$
MACIÇO

CILÍNDRIO: $I = mr^2$
OCO

ESFERA
MACIÇA: $I = \frac{2}{5}mr^2$

ESFERA: $I = \frac{2}{3}mr^2$
OCA

POR LAGRANGEANA UTILIZANDO TODOS OS VÍNCULOS: (184)

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} m d^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} \left(m d^2 + \frac{I}{n^2} \right) \dot{\theta}^2$$

$$V = mgy = mgd \cos \theta \quad \Rightarrow \quad L = \frac{1}{2} m d^2 \dot{\theta}^2 + \frac{I}{n^2} \dot{\theta}^2 - mgd \cos \theta$$

NOTE QUE HÁ APENAS 1 GRAU DE LIBERDADE

$$\text{EQ. LAGRANGE: } m d^2 \left(1 + \frac{I}{m n^2} \right) \ddot{\theta} = mgd \sin \theta \Rightarrow \left(1 + \frac{I}{m n^2} \right) \ddot{\theta} = \frac{g}{d} \sin \theta$$

SE QUEREMOS AS FORÇAS DE VÍNCULO f_{π} E N ENTÃO DEVEMOS RELAXAR (OU VIOLAR) OS VÍNCULOS

COORDENADAS GENERALIZADAS: d, θ, ϕ

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{d}^2 + d^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2$$

$$\text{FORÇAS GENERALIZADAS: } \begin{cases} Q_d = N - mg \cos \theta \\ Q_\theta = mgd \sin \theta - f_{\pi} d \\ Q_\phi = f_{\pi} R \end{cases}$$

$$\text{EQS LAGRANGE: } \begin{cases} m \ddot{d} - m d \dot{\theta}^2 = N - mg \cos \theta \\ m d^2 \ddot{\theta} + 2 m d \dot{d} \dot{\theta} = mgd \sin \theta - f_{\pi} d \\ I \ddot{\phi} = f_{\pi} R \end{cases}$$

IMPONDO OS VÍNCULOS:

$$f_{\pi} = \frac{I}{R} \ddot{\phi} = \frac{I}{n^2} d \ddot{\theta}$$

$$N = mg \cos \theta - m d \dot{\theta}^2$$

$$\begin{aligned} \text{E } m d \ddot{\theta} &= mg \sin \theta - f_{\pi} d \Rightarrow \left(m d + \frac{I d}{n^2} \right) \ddot{\theta} = mg \sin \theta \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{I}{m n^2} \right) \ddot{\theta} = \frac{g}{d} \sin \theta \end{aligned}$$

RECUPERAMOS TODAS AS EQUAÇÕES DERIVADAS PELO MÉTODO USUAL DE NEWTON

RESTA-NOS AGORA ANALISAR O PROBLEMA. (185)

O OBJETO ROLANTE VAI PERDER CONTATO COM A SUPERFÍCIE ANTES OU DEPOIS DE DESLIZAR?

PARA NÃO DESLIZAR $\Rightarrow f_{AT} \leq \mu N$

PARA NÃO PERDER CONTATO $\Rightarrow N > 0$

- A EQ. PARA θ , $(1+\alpha)\ddot{\theta} = g/d \sin \theta$, $\alpha \equiv \frac{I}{mr^2}$

PODE SER "RESOLVIDA" PELO MÉTODO DA ENERGIA

ENQUANTO NÃO HÁ DESLIZAMENTO (LOGO O ATRITO NÃO DISSIPA ENERGIA)

$$E = T + V = \frac{1}{2} m d^2 (1+\alpha) \dot{\theta}^2 + m g d \cos \theta = \text{const}$$

(ENQUANTO NÃO DESLIZAMENTO)

SUPONDO QUE O OBJETO COMEÇA NO TOPO

COM VELOCIDADE QUASE NULA (APENAS P/ NÃO FICAR NO TOPO INDEFINIDAMENTE)

$$\Rightarrow \theta_0 \approx \dot{\theta}_0 = 0 \Rightarrow E = m g d$$

$$\text{LOGO, } \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{(1+\alpha)d} (1 - \cos \theta) = \boxed{\frac{4g}{(1+\alpha)d} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \dot{\theta}^2}$$

AGORA PODEMOS FAZER A INTEGRAÇÃO AO TEMPO

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta/2} = \sqrt{\frac{4g}{(1+\alpha)d}} t = \ln \left(\tan \frac{\theta}{4} \right) \Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

OU SEJA,

$$\boxed{\tan \frac{\theta}{4} = \tan \frac{\theta_0}{4} \exp \left(\left(\frac{4g}{(1+\alpha)(R+r)} \right)^{\frac{1}{2}} t \right)}$$

$$\boxed{\tan \frac{\theta}{4} = \tan \frac{\theta_0}{4} \exp \left(\left(\frac{4g}{(1+\alpha)(R+r)} \right)^{\frac{1}{2}} t \right)}$$

EVIDENTEMENTE, ESSA EXPRESSÃO É VÁLIDA
ENQUANTO OS VÍNCULOS SÃO SATISFEITOS

(186)

① VÍNCULO DE CONTATO : $N > 0$

$$\text{como } N = mg \cos \theta - m d \ddot{\theta}^2 = mg \cos \theta - m d \left(\frac{2g}{(1+\alpha)} (1 - \cos \theta) \right)$$

$$\Rightarrow N = mg \left(\left(1 + \frac{2}{1+\alpha} \right) \cos \theta - \frac{2}{1+\alpha} \right)$$

$$N = 0 \Rightarrow \boxed{\cos \theta_N = \frac{2}{3+\alpha}}$$

② VÍNCULO DE NÃO DESLIZAMENTO : $f_{AT} \leq \mu N$

$$f_{AT} = \frac{I d \ddot{\theta}}{r^2} = \frac{I d}{r^2} \frac{g \sin \theta}{d(1+\alpha)} = mg \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right) \sin \theta \geq \mu mg \left(\frac{3+\alpha}{1+\alpha} \cos \theta - \frac{2}{1+\alpha} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha \sin \theta \leq \mu ((3+\alpha) \cos \theta - 2)$$

$$f_{AT} = \mu N \Rightarrow \alpha^2 (1 - \cos^2 \theta_{fAT}) = \mu^2 ((3+\alpha) \cos \theta_{fAT} - 2)^2$$

$$(\mu^2 (3+\alpha)^2 + \alpha^2) \cos^2 \theta_{fAT} - 4\mu^2 (3+\alpha) \cos \theta_{fAT} + 4\mu^2 - \alpha^2 = 0$$

$$\cos \theta_{fAT} = \frac{4\mu^2 (3+\alpha) + \sqrt{16\mu^4 (3+\alpha)^2 - 4(4\mu^2 - \alpha^2)(\mu^2 (3+\alpha)^2 + \alpha^2)}}{2(\mu^2 (3+\alpha)^2 + \alpha^2)}$$

$$\boxed{\cos \theta_{fAT} = \frac{4\mu^2 (3+\alpha) + \sqrt{4\alpha^2 (\mu^2 (3+\alpha)^2 + \alpha^2) - 16\mu^2 \alpha^2}}{2(\mu^2 (3+\alpha)^2 + \alpha^2)}}$$

EQUAÇÕES DE HAMILTON

187

~~EQUAÇÃO~~-LAGRANGE: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, $k=1, 2, \dots, N$

NR. DE

GRAUS DE LIBERDADE

$\Rightarrow$ N EQS DIFERENCIAIS DE 2ª ORDEM
QUE DETERMINAM N INCÓGNITAS $\{q_k\}$

(2N CONDIÇÕES INICIAIS NECESSÁRIAS)

NO FORMALISMO HAMILTONIANO, HÁ 2N EQS.
DIFERENCIAIS PARA 2N INCÓGNITAS $\{q_k, p_k\}$

MOMENTOS GENERALIZADOS

- * NENHUMA FÍSICA NOVA É ACRESCENTADA (TEORIAS EQUIVALENTES)
- * VANTAGEM TÉCNICA APENAS: TRANSFORMAÇÕES CÂNONICAS, TEORIA DE PERTURBAÇÕES, SEMELHANÇA NA DESCRIÇÃO DAS MECÂNICAS CLÁSSICA E QUÂNTICA

- COMO IR DO FORMALISMO LAGRANGIANO PARA O HAMILTONIANO?

R: ATRAVÉS DE UMA TRANSFORMADA DE LEGENDRE.

ESSA TRANSFORMAÇÃO NÃO SERÁ FEITA NESTE CURSO.

AQUI, VAMOS APENAS DEFINIR A HAMILTONIANA
COMO

$$H \equiv \sum_k p_k \dot{q}_k - L \equiv H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$$

AQUI, $L \equiv L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \equiv \text{MOMENTO GENERALIZADO}$$

COMO CONSTRUIR FORMALMENTE A HAMILTONIANA?

① ESCOLHA $\{q_k\}$ E CONSTRUA $L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t)$ (188)

② DETERMINE OS MOMENTOS CONJUGADOS $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

③ CONSTRUA A HAMILTONIANA

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L \equiv H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$$

④ RESOLVA PARA AS VELOCIDADES $\dot{q}_k \equiv \dot{q}_k(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$
E SUBSTITUA EM H

⑤ COM $H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$ RESOLVA AS $2N$ Eqs DE HAMILTON.

QUAIS SÃO AS Eqs. DE HAMILTON?

$$L \equiv L(\{q_k\}, \{\dot{q}_k\}, t) \Rightarrow dL = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\text{MAS } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} (p_k) = \dot{p}_k$$

$$\text{LOGO, } dL = \sum_k \dot{p}_k dq_k + p_k d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

AGORA FAZAMOS O MESMO COM $H \equiv H(\{q_k\}, \{p_k\}, t)$

$$dH = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\text{PORÉM, } H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L$$

$$\Rightarrow dH = \sum_k (d\dot{q}_k) p_k + \dot{q}_k (dp_k) - dL$$

$$= \sum_k \cancel{p_k d\dot{q}_k} + \dot{q}_k dp_k - \left(\dot{p}_k dq_k + \cancel{p_k d\dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow dH = \sum_k \underbrace{\dot{q}_k}_{\frac{\partial H}{\partial p_k}} dp_k - \underbrace{\dot{p}_k}_{\frac{\partial H}{\partial q_k}} dq_k - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t}}_{\frac{\partial H}{\partial t}} dt$$

189

AS Eqs. DE HAMILTON Ss

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k, \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

EXEMPLO: 1 PARTÍCULA LIVRE EM 1D

① $L = T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

② $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

③ $H = \dot{x}p - L = \dot{x}p - \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

④ $\dot{x} = p/m \Rightarrow H = \frac{p}{m}p - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{1}{2m}p^2 = T$

⑤ $\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} \Rightarrow 0 = -\dot{p} \Rightarrow \boxed{p = p_0 = \text{const}}$

$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{d}{dt}x \Rightarrow \frac{p}{m} = \frac{p_0}{m} = \frac{d}{dt}x \Rightarrow \boxed{x = x_0 + \frac{p_0}{m}t}$

OUTRO EXEMPLO: O.H. 1D $\rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2 \Rightarrow p = m\dot{x}$

$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = T + V$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \rightarrow \text{DEFINIÇÃO DE MOMENTO} \Rightarrow \dot{p} = m\ddot{x} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Kx \rightarrow \text{2ª LEI DE NEWTON} \Rightarrow m\ddot{x} = -Kx \end{cases}$

DO EXEMPLO ANTERIOR, HÁ A INDICAÇÃO DE (190)
QUE $H = T + V$. VAMOS INVESTIGAR SE ESSA
AFIRMAÇÃO É GERAL.

MAS ANTES, É INSTRUCTIVO SABER SE H
É CONSTANTE NO TEMPO,

DA PÁGINA ANTERIOR, $dH = \sum_k \dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} H = \underbrace{\sum_k \dot{q}_k \frac{dp_k}{dt} - \dot{p}_k \frac{dq_k}{dt}}_{=0} - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} H = - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}}$$

LOGO, SE $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H \equiv \text{CONSTANTE NO TEMPO}$

MAS H É A ENERGIA ^{MECÂNICA} TOTAL?

RESPOSTA: NEM SEMPRE.

QD POTENCIAIS DEPENDENTE DA VELOCIDADE ESTIVEREM
PRESENTES (FORÇA DE LORENZ), H É CONSERVADA
MAS NÃO É A ENERGIA MECÂNICA TOTAL.

EVIDENTEMENTE, ESSA H NÃO É CONSERVADA QD

HÁ FORÇAS DISSIPATIVAS PORQUE NEM PODEMOS

ESCREVER $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ (UTILIZADO NESTA
DERIVAÇÃO NA PÁG. 188)

FINALMENTE, SE $\frac{\partial L}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow H$ NÃO É CONSERVADA

$$\text{SE } L = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{kl} \dot{q}_k A_{kl} \dot{q}_l}_{= T} - V(\{q_k\}) \quad (191)$$

OU SEJA, $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$, E T É UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA PURA DAS VELOCIDADES $\dot{q}_k$

ENTÃO $H = T + V \equiv$ ENERGIA MECÂNICA TOTAL

PROVA: $H = \sum_k \dot{q}_k \dot{p}_k - L = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - (T - V)$

MAS $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\underbrace{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k}}_{\delta_{ki}} A_{ij} \dot{q}_j + \dot{q}_i A_{ij} \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}}_{\delta_{jk}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j A_{kj} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_i \dot{q}_i A_{ik}$$

$$\Rightarrow H = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{kj} \dot{q}_k A_{kj} \dot{q}_j}_T + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{ik} \dot{q}_i A_{ik} \dot{q}_k}_T = (T + V)$$

$$\Rightarrow H = 2T - (T - V)$$

$$\Rightarrow \boxed{H = T + V}$$