

LEIS DE NEWTON

(1)

◦ CINEMÁTICA - DESCRIÇÃO DO MOVIMENTO

POSICÃO : VETOR POSIÇÃO $\vec{r} \equiv \vec{r}(t)$

DESCREVE A POSIÇÃO DE UMA PARTÍCULA OU PONTO MATERIAL

$$\vec{r}(t) \equiv (x(t), y(t), z(t)) \text{ em 3D}$$

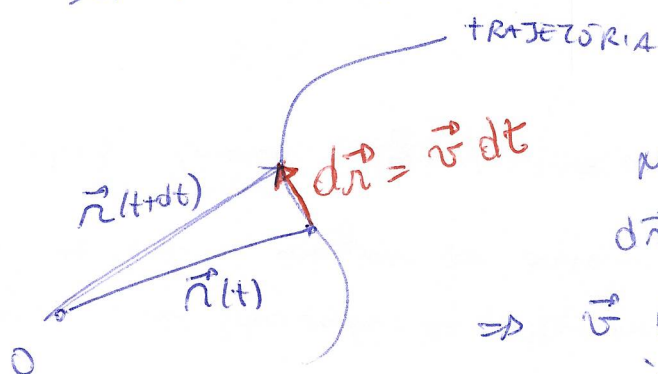
ONDE x, y, z SÃO FUNÇÕES DO TEMPO

VELOCIDADE : VETOR VELOCIDADE $\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r} = \dot{\vec{r}}$
(INSTANTÂNEA)

$$\vec{v}(t) \equiv (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) \equiv (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

ONDE $\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$ DERIVADA TEMPORAL

GRAFICAMENTE :



NOTE QUE
 $d\vec{r} \parallel \vec{v}$

$\Rightarrow \vec{v}$ É TANGENTE
À TRAJETÓRIA

INTEGRANDO : $\int d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v} dt' = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$
 $= \Delta \vec{r}$ VETOR DESLOCAMENTO

ACELERAÇÃO : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

ANALOGAMENTE $\Delta \vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt' = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)$
 $\equiv \left(\int a_x dt, \int a_y dt, \int a_z dt \right)$

DINÂMICA - DESCRIÇÃO + CAUSA DO MOVIMENTO

(2)

EXPERIÊNCIA - INTERAÇÃO ^{COM OUTROS} ~~CORPOS~~ CORPOS CAUSA ALTERAÇÃO DO MOVIMENTO

UM PONTO MATERIAL ISOLADO ~~DE OUTRO~~ (SEM INTERAÇÃO)

TERIA VELOCIDADE CONSTANTE.

EXPERIÊNCIA: DOIS CORPOS INTERAGINDO SOFREM ACELERAÇÕES OPOSTAS E DE MAGNITUDE

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \text{CONSTANTE} = \frac{\text{PESO 2}}{\text{PESO 1}}$$

DESSAS EXPERIÊNCIAS, VEM A FORMULAÇÃO DA MEC. NEWTONIANA EM 3 LEIS

1ª LEI (LEI DA INÉRCIA, OU PRINCÍPIO DE GALILEU)

→ CADA CORPO CONTINUA EM SEU ESTADO DE REPOUSO OU MOVIMENTO UNIFORME EM LINHA RETA, A MENOS QUE SEJA COMPELIDO A MUDAR ESSE ESTADO POR FORÇAS IMPRESSAS.

• NÃO HÁ DISTINÇÃO ENTRE REPOUSO E MOV. UNIFORME ($\vec{v} = \text{cte}$)

• COMO O MOV. DEPENDE DO REFERENCIAL $\Rightarrow$ A LEI SÓ É VÁLIDA EM REF. INÉRCIAIS

NÃO HAVENDO FORÇAS SOBRE UM ~~CORPO~~ PT. MATERIAL, REF. INÉRCIAL É TODO AQUELE EM QUE A ACELERAÇÃO É NULA.

EM UM REF. NÃO-INÉRCIAL, SURTIRIA FORÇAS NÃO-INÉRCIAIS OU FORÇAS FICTÍCIAS.

FORÇA INÉRCIAL É UM AGENTE EXTERNO CAUSANDO ACELERAÇÃO EM UM PT. MATERIAL RELATIVA A UM REF. INÉRCIAL COMO CONSEQUÊNCIA DA INTERAÇÃO COM ALGUM OUTRO PT. MATERIAL

2ª LEI (LEI DA SUPERPOSIÇÃO DE FORÇAS OU PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA DINÂMICA) (3)

⇒ A TAXA DE MUDANÇA DO MOMENTO (NO TEMPO) É IGUAL À FORÇA MOTRIZ RESULTANTE IMPRESSA E OCORRE NA DIREÇÃO EM QUE ESSA FORÇA ATUA

○ MOMENTO $\equiv$ MOMENTO LINEAR = QUANTIDADE DE MOVIMENTO $= \vec{p} = m\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m\vec{v})$$

PARA PONTOS MATERIAIS COM MASSA CONSTANTE $\Rightarrow \vec{F}_R = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

○ A FORÇA RESULTANTE É A SOMA VETORIAL DE TODAS AS FORÇAS (INÉRCIAS E NÃO-INÉRCIAS)

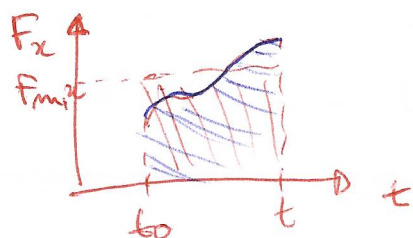
○ INÉRCIA = MASSA DA PARTÍCULA

$\equiv$ É A PROPRIEDADE DE TODO PT. MATERIAL DE "RESISTIR" À MUDANÇA DO "ESTADO NATURAL" DE MOV. UNIFORME. OU SEJA, DE RESISTIR À MUDANÇA DE MOMENTO LINEAR (OU QUANTIDADE DE MOVIMENTO)

$$[p] = \text{MASSA} \times \text{VELOCIDADE} \quad [F] = \text{MASSA} \times \text{ACELERAÇÃO}$$

$$d\vec{p} = \vec{F}_R dt \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^t \vec{F}_R(t') dt' = \underbrace{\vec{F}_m}_{\text{FORÇA MÉDIA}} \Delta t$$

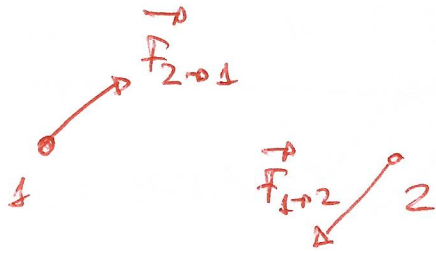
= VARIAÇÃO DO
MOMENTO $\equiv$ IMPULSO



3ª LEI (LEI DA AÇÃO E REAÇÃO)

(4)

→ A TODA AÇÃO HÁ SEMPRE UMA REAÇÃO OPOSTA E DE IGUAL INTENSIDADE



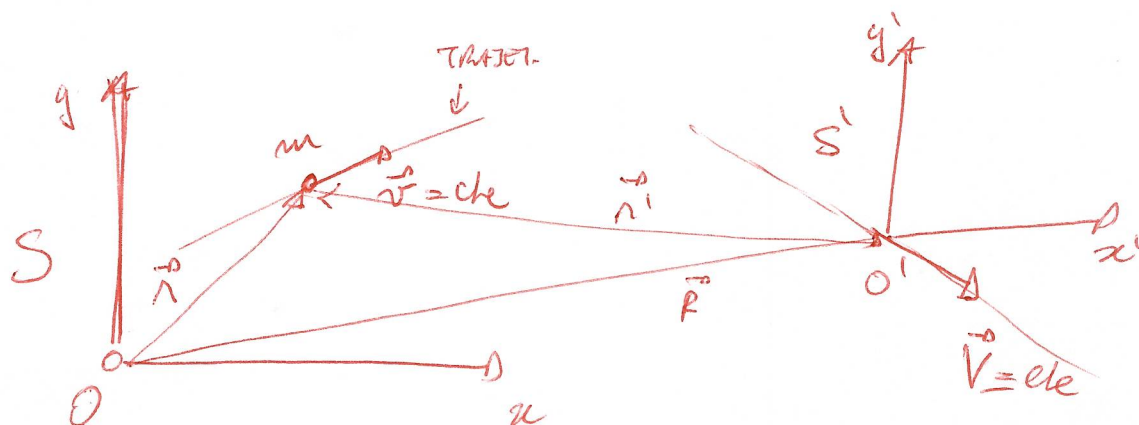
$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = 0$$

• INTERAÇÃO ACONTECE EM UM PAR DE PTS. MATERIAIS
(NÃO HÁ COMO INTERAGIR SEM
SER INTERAGIDO)

• NECESSARIAMENTE, ESSA LEI SE REFERE

A FORÇAS INTERCAIS.

Exercício: Sejam S um REF. INÉRCIAL e S' um outro REF. QUE ~~SE~~ MOVE com VELOCIDADE constante EM RELAÇÃO A S . MOSTRE QUE S' TAMBÉM É REF. INÉRCIAL



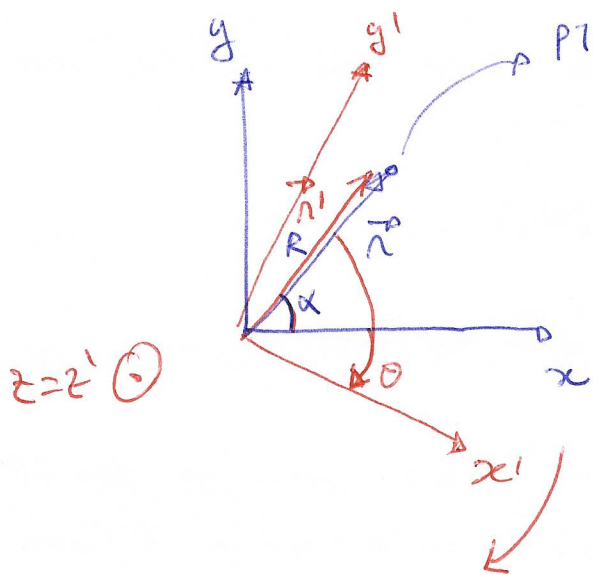
$$\vec{v}' = \frac{d\vec{n}'}{dt'} = \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d(\vec{n} - \vec{r})}{dt} = \vec{0} - \vec{V}$$

↑ ↑
 Tempo Absoluto Espaço Absoluto

como $\vec{0}$ e $\vec{V}$ sã constantes $\Rightarrow \vec{v}'$ é cte
 $\Rightarrow \vec{a}' = 0 \Rightarrow S'$ é REF. INÉRCIAL

EXERCÍCIO: Sejam S um RRF-ÍNZERUM e outro S' que gira em relação à S em torno do eixo z , MOSTRE QUE S' É NF-ÍNZERUM

(6)



PT MATERIAL PARADO EM RELACÃO À S

$$\vec{r} = R(\cos\alpha \hat{x} + \sin\alpha \hat{y})$$

$$\vec{r}' = R(\cos\theta \hat{x}' + \sin\theta \hat{y}')$$

$$\hat{x} = (1, 0, 0) = \text{ctes}$$

$$\hat{y} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} (R \cos\alpha \hat{x}) + \frac{d}{dt} (R \sin\alpha \hat{y}) = 0 + 0 = 0$$

$$\vec{v}' = \frac{d}{dt} \vec{r}' = R \frac{d}{dt} (\cos\theta' \hat{x}' + \sin\theta' \hat{y}')$$

$$= R \left(\frac{d}{dt} \cos\theta \right) \hat{x}' + R \frac{d}{dt} (\sin\theta) \hat{y}' \quad \hat{x} \text{ e } \hat{y} \text{ s\~ao constantes no RRF } S'$$

$$= -R \sin\theta' \dot{\theta} \hat{x}' + R \cos\theta' \dot{\theta} \hat{y}'$$

$$= R \dot{\theta} \hat{\theta}' = R \omega' \hat{\theta}'$$

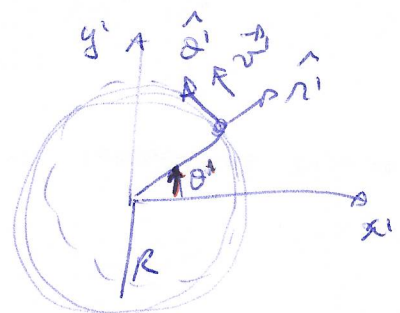
$$\vec{a}' = \frac{d}{dt} (R \omega' \hat{\theta}') = R \dot{\omega}' \hat{\theta}' + R \dot{\omega}' \left(\frac{d}{dt} \hat{\theta}' \right)$$

$$= R \ddot{\theta}' \hat{\theta}' - R \dot{\omega}'^2 \hat{r}' \neq 0 \Rightarrow S'$$

ACELERAÇÃO
TANGENCIAL

ACELERAÇÃO
CENTRÍFUGA (NORMA)

RF-ÍNZERUM



$$\vec{r}' = R \vec{r}$$

$$\hat{r}' = \cos\theta' \hat{x}' + \sin\theta' \hat{y}'$$

$$\hat{\theta}' = -\sin\theta' \hat{x}' + \cos\theta' \hat{y}'$$

$$\dot{\hat{\theta}}' = -\cos\theta' \dot{\theta}' \hat{x}' - \sin\theta' \dot{\theta}' \hat{y}' = -\dot{\theta}' \hat{r}'$$

DETERMINISMO DAS LEIS DA MECÂNICA

⊕

CONHECENDO A FORÇA RESULTANTE SOBRE UMA PARTÍCULA,
DETERMINAMOS SUA TRAJETÓRIA

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \frac{\vec{F}_R(t')}{m} dt'$$

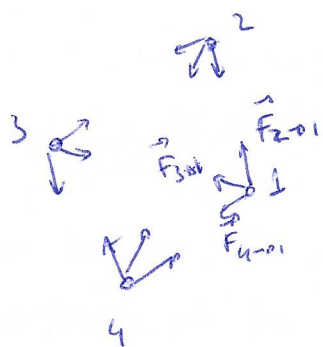
E COM ISSO,

$$d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \left(\int_0^{t'} \vec{F}_R(t'') dt'' \right) dt'}$$

↓ ↓

PRECISA-SE DAS POSIÇÃO E VELOCIDADE INICIAIS

EM UM SISTEMA DE MUITAS PARTÍCULAS



$$\begin{cases} \vec{v}_k(t+dt) = \vec{v}_k(t) + \frac{\vec{F}_{R,k}}{m_k} dt \\ \vec{r}_k(t+dt) = \vec{r}_k(t) + \vec{v}_k(t) dt \end{cases}$$

$$\vec{F}_{R,k} = \sum_{j \neq k} \vec{F}_{j \rightarrow k}(t)$$

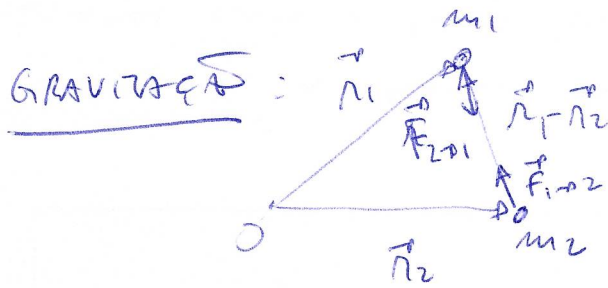
CONHECENDO-SE TODAS AS FORÇAS, MASSAS, POSIÇÕES E
VELOCIDADES INICIAIS, TODO O MOVIMENTO SUBSEQUENTE
DO SISTEMA É DETERMINADO EXATAMENTE

ISSO É CONSEQUÊNCIA DAS LEIS DA MECÂNICA NEWTONIANA
SEREM DETERMINÍSTICAS.

LIVRE ARBITRÁRIO?

INTERAÇÕES (FORÇAS) FUNDAMENTAIS

8



$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

~~INTERAÇÃO~~

ELETROMAGNETISMO :

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

+ EQUAÇÕES DE MAXWELL

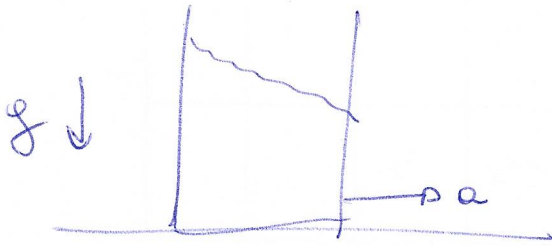
INTERAÇÕES NUCLEAR FORTE E FRACA $\rightarrow$ CURTO ALCANCE ~~($\sim 10^{-15}$ m)~~
(~ 1 fm e $\sim 10^{-2}$ fm RESPECTIVAMENTE)

$\Rightarrow$ REQUER TRATAMENTO QUÂNTICO

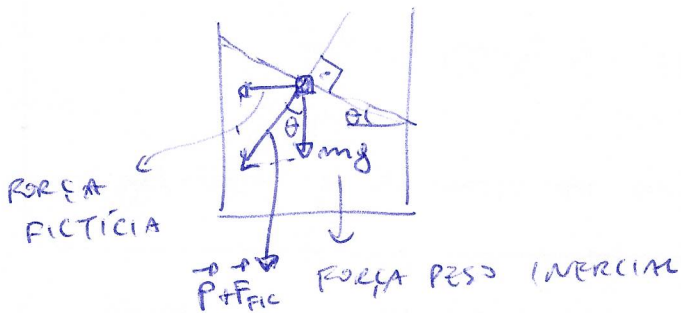
TODAS AS DEMAIS FORÇAS INERCIAIS SÃ
DERIVADAS DESTAS

EXERCÍCIO: UM RECIPIENTE DE ÁGUA SE
 MOVE EM LINHA RETA NA HORIZONTAL
 COM ACELERAÇÃO CONSTANTE a .
 QUAL A SUPERFÍCIE DO FLUIDO?

9



~~Em HIDROSTÁTICA~~, UM FLUIDO EM EQ. HIDROSTÁTICA
 NÃO SUPORTA TENSÃO DE CISALHAMENTO
 NO REF. DO RECIPIENTE (NÃO - INÉRCIA)



$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}$$

DE MANEIRA GERTZ

$$m \ddot{x} = F \equiv F(x, \dot{x}, t)$$

• FORÇA DEPENDENTE DO TEMPO: $F \equiv F(t)$

$$\text{como } dp = F dt = F(t) dt$$

$$\Rightarrow \Delta p = p(t) - p_0 = \int_{t_0}^t F(t') dt'$$

ESTA EQ., EM 3D, É

$$\Delta \vec{p} = \int_{t_0}^t \vec{F}(t') dt'$$

INTEGRANDO PARA ACHAR A POSIÇÃO

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t') dt' \Rightarrow$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{t'} F(t'') dt'' \right) dt'$$

EM 3D, ESTA EQ. TAMBÉM É FACILMENTE GENERALIZADA

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \Delta t + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{t'} \vec{F}(t'') dt'' \right) dt'$$

EX: $F = F_0 \cos(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = F_0 \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow v = v_0 + \frac{F_0}{m\omega} \sin(\omega t + \phi) - \frac{F_0}{m\omega} \sin \phi$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_0 t - \frac{F_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{m\omega^2} \cos \phi - \frac{F_0}{m\omega} \sin \phi t$$

• FORÇA DEPENDENTE DA VELOCIDADE $F \equiv F(v)$

(14)

como $m \frac{dv}{dt} = F(v)$

~~conveniente~~
~~em geral~~

FORÇA DISSIPATIVA

$$\Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv'}{F(v')} = \int \frac{dt}{m} = \frac{t-t_0}{m}$$

ARRASTE DE STOKES (ou viscoso)

$$\vec{F} = -b\vec{v}$$

ARRASTE DE ABEYON (ou de PRESS)

$$\vec{F} = -c|\vec{v}|\vec{v}$$

UMA VET. OBTIDO $v(t) \rightarrow$ OBTÊM-SE $x(t)$

Exemplo: $F = -bv \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -bv$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv'}{v'} = -\frac{b}{m}(t-t_0)$$

$$= \ln \frac{v}{v_0} \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}$$

Assumindo $t_0 = 0 \Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}}$

$$\Rightarrow x = x_0 + \int_0^t v(t') dt' = x_0 + \int_0^t v_0 e^{-\frac{b}{m}t'} dt'$$

$$\Rightarrow \boxed{x = x_0 - \frac{m}{b} v_0 \left(e^{-\frac{b}{m}t} - 1 \right)}$$

• FORÇA DEPENDENTE DA POSIÇÃO. $F \equiv F(x)$

$$m \frac{dx}{dt} = F(x)$$

ANTES DE ENTRAR EM DETALHES,

É CONVENIENTE DEFINIR O

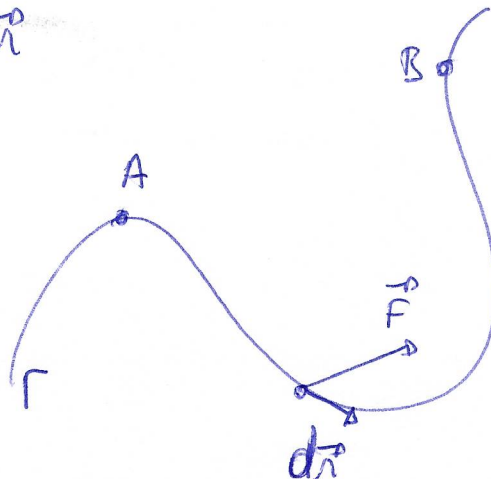
TRABALHO DE UMA FORÇA,
ENERGIA POTENCIAL E CINÉTICA, E A
RELACÃO ENTRE ESSAS QUANTIDADES.

TRABALHO DE UMA FORÇA

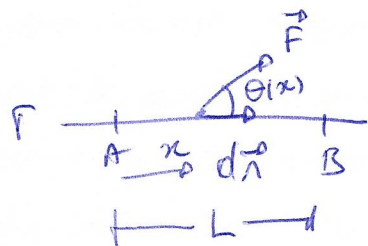
12

DEFINIÇÃO: $W_{AB, \vec{F}} = \int_{A, \vec{r}}^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$

GENERICAMENTE,
W DEPENDE DO CAMINHO



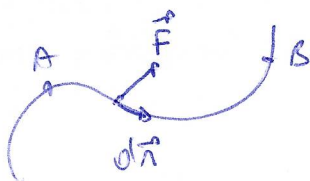
EX: CAMINHO É UMA LINHA RETA



$$\Rightarrow W_{AB, \vec{F}} = \int_0^L \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^L \underbrace{F(x) \cos \theta(x)}_{F_{||}} dx$$

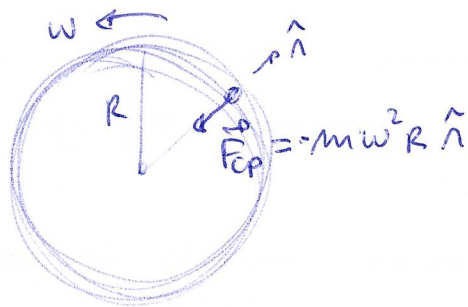
EX: FORÇA É CONSTANTE



$$W_{AB, \vec{F}} = \int_{A, \vec{r}}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{A, \vec{r}}^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot \underbrace{\Delta \vec{r}}_{\text{DESLOCAMENTO}}$$

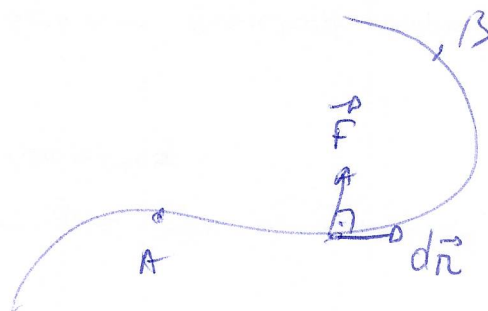
EX: FORÇA PERPENDICULAR À TRAJETÓRIA

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$



MOV. CIRCULAR UNIFORME

$$W_{F_{cp}} = 0$$



FORÇA DE LORENTZ: $\vec{F}_{lm} = q \vec{v} \times \vec{B}$

$$\Rightarrow W_{F_{lm}} = 0$$

$$W \equiv \int_{A, \Gamma}^B \vec{F}_R \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_R \cdot \vec{v} dt \quad \text{mas} \quad d\vec{p} = \vec{F}_R dt$$

$$= \int \vec{v} \cdot d\vec{p} = \int \vec{v} \cdot d(m\vec{v}) = \int_{A, \Gamma}^B d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

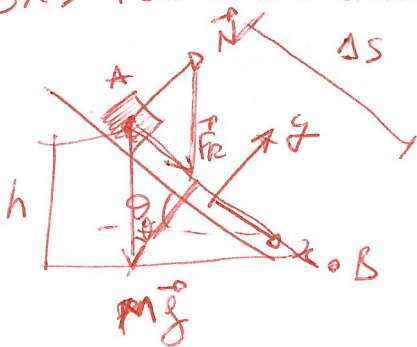
$$= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = T_B - T_A$$

ONDE $T = \frac{1}{2}mv^2 \equiv$ ENERGIA CINÉTICA

$$\Rightarrow \boxed{W_{FR} = \Delta T}$$

TRABALHO DA $\vec{F}_R$ É A
VARIAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA

EX: PLANO INCLINADO



USANDO NEWTON

$$\vec{F}_R = m\vec{g} + \vec{N} = mg(\sin\theta \hat{i} - \cos\theta \hat{j}) + N\hat{j}$$

$$= m\vec{a}$$

$$\text{como } \vec{a} = a\hat{i} \Rightarrow \vec{F}_R \cdot \hat{j} = 0 = -mg\cos\theta + N$$

$$\Rightarrow \boxed{N = mg\cos\theta}$$

USANDO O TEOREMA

$$W_R = \int_{A, \text{REN}}^B (m\vec{g} + \vec{N}) \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_a^b m\vec{g} \cdot \hat{i} dx$$

$$= \int_a^b mg\sin\theta dx$$

$$= mg\sin\theta \int_a^b dx$$

$$= mg\sin\theta \Delta S$$

$$\boxed{= mgh = T_B - T_A}$$

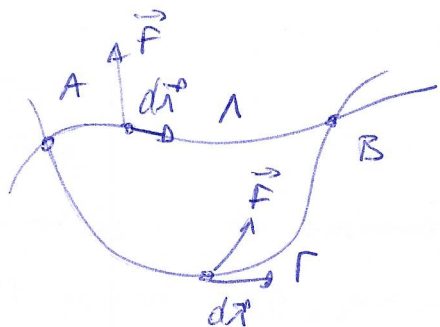
$$\Rightarrow ma = mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{a = g\sin\theta}$$

$$\Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2a\Delta S$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{m}{2}v_B^2 - \frac{m}{2}v_A^2 = mg\sin\theta \Delta S = mgh}$$

QDO O TRABALHO NAO DEPENDE DO CAMINHO, MAS APENAS DOS PTS FINAL E INICIAL, ENTÃO DIZ-SE QUE A FORÇA É CONSERVATIVA



$$\begin{aligned} W_{AB, \Gamma} &= \int_{A, \Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &\equiv W_{AB, A} \\ &= \int_{A, A}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Em AMBOS OS CASOS

$$W_{AB, \Gamma} = W_{AB, A} = \text{FUNÇÃO DO ESPAÇO}$$

$$= \int_{A, A}^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\equiv -\Delta U = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B)$$

↓
ENERGIA POTENCIAL

$\vec{F}$ DEVE SER UMA FUNÇÃO DERIVADA DO ESPAÇO

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right) = -\vec{\nabla} U$$

ONDE $U \equiv U(\vec{r})$ É FUNÇÃO DO ESPAÇO

EX: FORÇA PESO = ~~$\vec{P} = m\vec{g}$~~ $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{y}$

QUAL É A FUNÇÃO U CORRESPONDENTE? $U = mgy + \text{cte}$

$$\vec{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -(0, mg, 0) = -mg\hat{y}$$

TRABALHO DE UMA FORÇA CONSTANTE

(15)

$$W_{AB, \vec{F}} = \int_{A, \vec{F}}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{A, \vec{F}}^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

↑
INDEPENDENTE DO CAMINHO

MAS, POR DEFINIÇÃO, $W_{AB, \vec{F}} = W_{AB} = -\Delta U$

$$= U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B)$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{r}_B - \vec{F} \cdot \vec{r}_A$$

→ PARA UMA FORÇA CONSTANTE, A ENERGIA POTENCIAL ASSOCIADA É

$$U(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \vec{r} + \text{cte}$$

ENERGIA MECÂNICA $\equiv \bar{E} = T + U$

QDO A FORÇA RESULTANTE É UMA FORÇA CONSERVATIVA (OU A SOMA DE FORÇAS CONSERVATIVAS)

$$\Rightarrow W_{AB, \vec{F}} = W_{AB} = \Delta T \equiv T_B - T_A = -\Delta U = U_A - U_B$$

$$\Rightarrow T_A + U_A = T_B + U_B$$

$\Rightarrow E_A = E_B$ ENERGIA MECÂNICA É CONSERVADA

COMO USAR ESSE CONHECIMENTO P/ RESOLVER A EQ. DE NEWTON $m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$?

UMA POSSÍVEL SOLUÇÃO É USAR

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(x)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2}{m} [E - U(x)]$$

como

Q.B. $v > 0$ (PI FRENTE)

ou $v < 0$ (PI TRÁS)

(16)

$$\Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0$$

SE CONSEGUÍRMOS INTEGRAR $\int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$

E FOR POSSÍVEL INVERTER E RESOLVER PARA x ,
ENTÃO, TEM-SE $x \equiv x(t)$

EXEMPLO = OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

$$F = -Kx \Rightarrow U = \frac{1}{2} Kx^2 \text{ e } U = - \int F dx$$

VAMOS ADOPTAR $x_0 = 0$ E $t_0 = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - \frac{1}{2} Kx'^2}} = t$$

MUDAMOS DE VARIÁVEL

$$s = \theta = \sqrt{\frac{K}{2E}} x'$$

$$\Rightarrow \cos \theta d\theta = \sqrt{\frac{K}{2E}} dx'$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos \theta' \sqrt{\frac{2E}{K}} d\theta'}{\sqrt{E - E \sin^2 \theta'}} = t$$

$$= \sqrt{\frac{m}{K}} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \frac{1}{\omega_0} \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = t \Rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t}$$

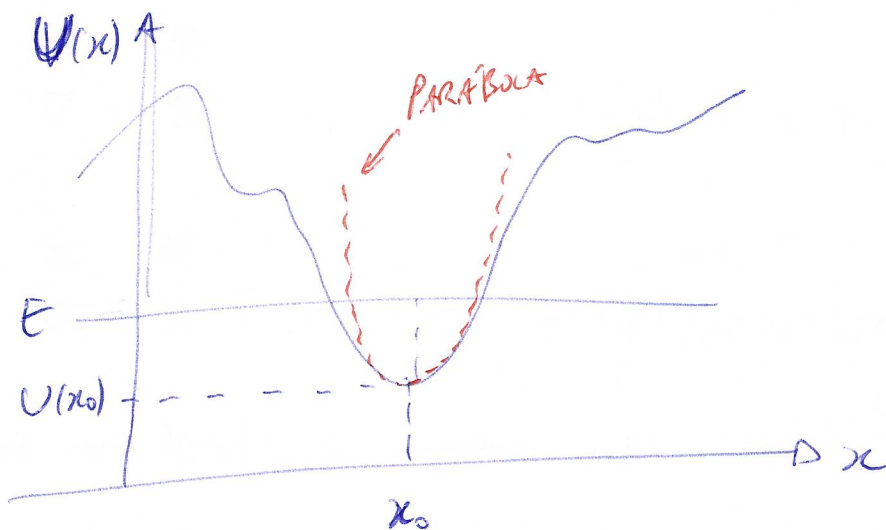
AMPLITUDE

$$A = \sqrt{\frac{2E}{K}}$$

$$\Rightarrow s = \theta = \omega_0 t + \theta_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2E}{K}} \sin(\omega_0 t + \theta_0)}$$

$$x_0 = A \sin \theta_0$$

CONSIDERE UM POTENCIAL GÊNÉRICO



QD E É TAL O POSSÍVEL MOVIMENTO SÓ APENAS OSCILAÇÕES PRÓXIMAS À $x_0 \Rightarrow$ PODEREMOS

APROXIMAR
$$U(x) = U(x_0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \dots$$

CAUO $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$ (~~MÍNIMO~~ ^{EXTREMO} LOCAL)

$$\Rightarrow U(x) \approx U(x_0) + \frac{1}{2} K (x-x_0)^2 = cte + \frac{1}{2} K y^2$$

ONDE $K = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} > 0$ (CONCAVIDADE P/ CIMA) $\Rightarrow$ MÍNIMO LOCAL

$y = x - x_0 \equiv$ DESLOCAMENTO A PARTIR DE x_0

$\Rightarrow$ POTENCIAL $\approx$ POTENCIAL DE UM OSCILADOR HARMÔNICO

$$\Rightarrow x = x_0 + A \sin(\omega_0 t + \phi_0), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$E - U(x_0) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) \equiv \text{ENERGIA DO Q.O.S.}$$

$$F_R = \text{PESO} + \text{FORÇA DE ARRASTE} \quad (\text{em 1D})$$

$$= -mg + F_{ARR}$$

ARRASTE VISCOSO: $F_{ARR} = -bv$
(ou DE STOKES)

ARRASTE DE NEWTON
(ou DE PRESSÃO) $F_{ARR} = -c|v|v \approx -\frac{1}{2}\rho A C_D |v|v$

PRECISAMENTE, A FORÇA DE ARRASTE É COMPLICADA.

MAS PARA VELOCIDADES SUFICIENTEMENTE BAIXAS,

$$F_{ARR} \approx -bv$$

E PARA VELOCIDADES MAIORES, $F_{ARR} \approx -c|v|v$

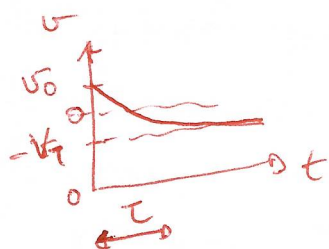
QUANDO HÁ TURBULÊNCIA, F_{ARR} É BEM COMPLICADA

EX: ARRASTE VISCOSO: $m \frac{dv}{dt} = -mg - bv \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv'}{v' + \frac{mg}{b}} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt'$

$v_0 > \frac{mg}{b}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{v + mg/b}{v_0 + mg/b}\right) = -\frac{b}{m}t \equiv -t/\tau \Rightarrow \frac{v + mg/b}{v_0 + mg/b} = e^{-t/\tau}$

$\Rightarrow v(t) = v_0 e^{-t/\tau} + V_T(1 - e^{-t/\tau})$, $-V_T = -\frac{mg}{b} = \text{VELOCIDADE TERMINAL}$



PARA TEMPOS CURTOS

$$e^{-t/\tau} \approx 1 - \frac{t}{\tau} = 1 - \frac{b}{m}t$$

$$\Rightarrow v \approx v_0 - gt = v_0 - \frac{b}{m}t$$

SINAL $\ominus \rightarrow$ PARA BAIXO

$\Rightarrow y = y_0 - \tau v_0(e^{-t/\tau} - 1) - V_T(t + \tau(e^{-t/\tau} - 1))$ $\xrightarrow{t \rightarrow \infty} y = \frac{mg}{b}t - \frac{1}{2}gt^2$

EX: $F_{\text{res}} = -bv^2 \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = -mg - bv^2$

$\Rightarrow$ VIDE LISTA DE EXERCÍCIOS

Assumindo $x_0 = v_0 = z_0 = 0 \Rightarrow v < 0 \Rightarrow F_{\text{res}} = bv^2$
(Pl c.m.a)

$$\Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{v^2 + \frac{mg}{b}} = \frac{+b}{m} t$$

mts $\frac{1}{v^2 + \frac{mg}{b}} = \left(\frac{-1}{v + \sqrt{\frac{mg}{b}}} + \frac{1}{v - \sqrt{\frac{mg}{b}}} \right) \frac{1}{2\sqrt{\frac{mg}{b}}}$

$$\Rightarrow -\ln\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{mg}{b}}} + 1\right) + \ln\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{mg}{b}}} - 1\right) = 2\sqrt{\frac{mg}{b}} \left(-\frac{b}{m} t\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{b}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{b}}}\right) = 2\sqrt{\frac{mg}{b}} \left(-\frac{b}{m} t\right) = -2\sqrt{\frac{bg}{m}} t = -2\frac{t}{\tau}$$

$$\frac{-v + \sqrt{\frac{mg}{b}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{b}}} = -e^{-2t/\tau} \Rightarrow -v + \sqrt{\frac{mg}{b}} = -v e^{-2t/\tau} - \sqrt{\frac{mg}{b}} e^{-2t/\tau}$$
$$v(e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}) = \sqrt{\frac{mg}{b}}(e^{t/\tau} - e^{-t/\tau})$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh\left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t\right)} \\ = -V_T \tanh(t/\tau)$$

$$\Rightarrow x = \int_0^t -\sqrt{\frac{mg}{b}} \tanh\left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t\right) dt$$

$$= -\frac{m}{b} \ln \cosh\left(\sqrt{\frac{bg}{m}} t\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{m}{b} \sqrt{\frac{bg}{m}} t = -V_T t$$

EX: ~~GMM~~ DISTÂNCIAS COMPARÁVEIS

AO RAIO DO ASTRO $\Rightarrow$ y MÅ É CHE

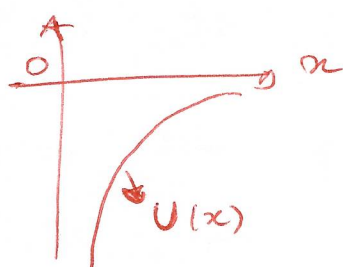
$$F = -\frac{G M m}{x^2}$$

(DESPREZAR RESISTÊNCIA DO AR)

$\Rightarrow$ FORÇA CONSERVATIVA $\rightarrow U(x) = \int F dx = -\frac{G M m}{x}$

$$\Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{G M m}{x} \right)}$$

+ ASCENDENTE, - DESCENDENTE



$E > 0 \rightarrow$ ESCAPA COM $v_{\text{limite}} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

$E < 0 \rightarrow$ RECORRO EM $x_{\text{max}} = -\frac{G M m}{E}$

CASO ASCENDENTE ($v_0 > 0$), QDO EM $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow x_0$ E $E < 0$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E + \frac{G M m}{x}}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{G M m}{x} - |E|}} = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$E < 0$ E 0
PT RETORNO

FAZENDO $\cos \theta = \sqrt{\frac{|E|}{G M m}} \sqrt{x} \Rightarrow -\sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|E|}{G M m}} dx$

$$\Rightarrow \int_{\infty}^{\theta} 2 \sqrt{\frac{G M m x}{|E|}} \frac{(-\sin \theta) d\theta}{\sqrt{\frac{G M m}{x} - |E|}} = \int_{\infty}^{\theta} 2 \frac{G M m}{|E|} \frac{\cos \theta (-\sin \theta) d\theta}{\sqrt{|E|} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1}}$$

$$= -2 \frac{G M m}{|E|^{3/2}} \int_{\infty}^{\theta} \cos^2 \theta d\theta$$

POR SIMPLIFICAÇÃO,

$\theta_0 = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0$
PR $v < 0$

$$\Rightarrow \frac{2 G M m}{|E|^{3/2}} \int_0^{\theta} \cos^2 \theta d\theta = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$

$$\Rightarrow \frac{G M m}{|E|^{3/2}} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) = \sqrt{\frac{2}{m}} t$$

como $\cos \theta = \sqrt{\frac{x}{x_{\text{max}}}} \Rightarrow x = x_{\text{max}} \cos^2 \theta$

OSCILADOR HARMÔNICO

- FORÇA ELÁSTICA + ARRASTE VISCOSO

$$F_R = m \ddot{x} = -b\dot{x} - kx$$

$$\Rightarrow \boxed{m \ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0}$$

- + FORÇA EXTERNA DEPENDENTE DO TEMPO

$$\Rightarrow F_R = -b\dot{x} - kx + f(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{m \ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)}$$

EDO COM COEFICIENTES CONSTANTES

* TEOREMA

SE $x(t)$ É SOLUÇÃO DA EDO HOMOGENEA
 $\Rightarrow Cx(t)$ TAMBÉM É SOLUÇÃO
C É UMA Cte

~~TEOREMA~~ SE $x_1(t)$ E $x_2(t)$ SÃO
SOLUÇÕES DA EDO. HOMOGENEA,
ENTÃO $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ COM $a_{1,2}$ CONSTANTES
TAMBÉM É SOLUÇÃO DA EDO. HOMOGENEA

PROVA: $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m \ddot{x} + b\dot{x} + kx &= m(a_1 \ddot{x}_1 + a_2 \ddot{x}_2) + b(a_1 \dot{x}_1 + a_2 \dot{x}_2) + k(a_1 x_1 + a_2 x_2) \\ &= a_1 [m \ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + kx_1] + a_2 [m \ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + kx_2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

C.Q.D.

PROVA: $x_p(t)$ é uma solução PARTICULAR

72

DA E.D.O. (NÃO HOMOGÊNEA), ENQUANTO

$q_1 x_1(t) + q_2 x_2(t) + x_p(t)$ é solução

DA E.D.O.

PROVA: $x = q_1 x_1 + q_2 x_2 + x_p = x_h + x_p$

$$\Rightarrow m \ddot{x}_h + b \dot{x}_h + k x_h + m \dot{x}_p + b \dot{x}_p + k x_p$$

$$= 0 + F(t)$$

C.Q.D.

OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

$$m \ddot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \text{SOLUÇÃO É DO TIPO } x = e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x} = \lambda^2 x$$

$$\Rightarrow (m \lambda^2 + k) e^{\lambda t} = 0 \quad \forall t \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda = \pm i \omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow 2 \text{ SOLUÇÕES: } x_1 = e^{i \omega_0 t}, \quad x_2 = e^{-i \omega_0 t}$$

$$\Rightarrow x = q_1 e^{i \omega_0 t} + q_2 e^{-i \omega_0 t}$$

$$\text{COND. INICIAIS: } x_0 = x(t=0) = q_1 + q_2$$

$$v_0 = \dot{x}(t=0) = i \omega_0 (q_1 - q_2)$$

$$q_1 = \frac{1}{2} (x_0 - i \omega_0 v_0)$$

$$q_2 = \frac{1}{2} (x_0 + i \omega_0 v_0)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} (x_0 + i \omega_0 v_0) (e^{i \omega_0 t} + e^{-i \omega_0 t}) + \frac{1}{2} (x_0 - i \omega_0 v_0) (e^{i \omega_0 t} - e^{-i \omega_0 t})$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \cos \omega_0 t - \omega_0 v_0 \sin \omega_0 t = \sqrt{x_0^2 + \omega_0^2 v_0^2} \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \omega_0^2 v_0^2}} \cos \omega_0 t + \frac{\omega_0 v_0}{\sqrt{x_0^2 + \omega_0^2 v_0^2}} \sin \omega_0 t \right)$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$$

AMPLITUDE

$\omega_0 \theta$

$\sin \theta$

FASE

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} k A^2 = \text{CONSTANTE}$$

* OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO

23

$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ → FORÇA VISCOSA → ENERGIA MEC. NÃO É CONSERVADA
→ NOVAMENTE, SOLUÇÕES DO TIPO $x = e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow (m\lambda^2 + b\lambda + k)e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

a) CASO SUPER-AMORTECIDO: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m} \Rightarrow \gamma = \frac{b}{2m} > \omega_0$

$\Rightarrow \lambda$ É REAL

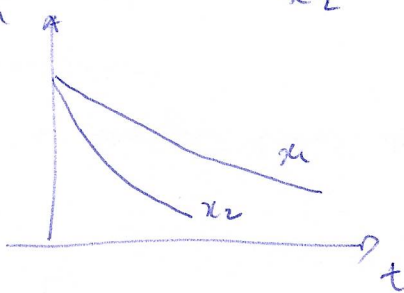
$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$|\lambda_2| > |\lambda_1|, \quad \boxed{\lambda_{1,2} < 0}$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{a_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}}_{x_1} + \underbrace{a_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}}_{x_2} = a_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

↑
 $t \rightarrow \infty$



$x \rightarrow 0$ SEM OSCILAÇÕES QD $t \rightarrow \infty$

b) CASO SUB-AMORTECIDO: $\gamma = \frac{b}{2m} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm i\omega \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$= -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

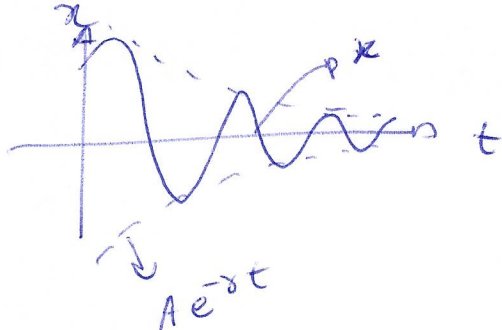
$$\Rightarrow x(t) = a_1 e^{(-\gamma + i\omega)t} + a_2 e^{(-\gamma - i\omega)t} = e^{-\gamma t} \left(a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t} \right)$$

$$= A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \theta)$$

↳ AMPLITUDE QUE $\rightarrow 0$ OSCILAÇÕES $\rightarrow$ MATE

QUE $\omega \neq \omega_0$

$A \cos(\omega t + \theta)$



(24)

ENERGIA: $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2)$

$$x = a_1 e^{+i\omega_1 t} + a_2 e^{+i\omega_2 t} \Rightarrow \dot{x} = i(a_1 \omega_1 e^{+i\omega_1 t} + a_2 \omega_2 e^{+i\omega_2 t})$$

$$\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = (a_1^2 \omega_1^2 + \omega_0^2 a_1^2) e^{2i\omega_1 t} + a_2^2 (\omega_2^2 + \omega_0^2) e^{2i\omega_2 t} + 2a_1 a_2 (\omega_1 \omega_2 + \omega_0^2) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}$$

MAS $\omega_{1,2}^2 = (-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})^2 = \gamma^2 \mp 2\gamma\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} + \gamma^2 - \omega_0^2$

$$\boxed{\omega_{1,2}^2 + \omega_0^2 = \gamma^2 \mp 2\gamma\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$

$$\omega_1 \omega_2 + \omega_0^2 = \gamma^2 - (\gamma^2 - \omega_0^2) + \omega_0^2 = 2\omega_0^2$$

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m (2\dot{x} \ddot{x} + 2\omega_0^2 x \dot{x}) = m \dot{x} (\ddot{x} + \omega_0^2 x)$$

MAS $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{b}{m} \dot{x}$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \dot{E} = -b \dot{x}^2 = -b \dot{x} \times \dot{x} = F_{\text{visc}} v$$

= POTÊNCIA DA FORÇA VISCOSA

c) CASO CRITICAMENTE AMORTECIDO: $\gamma = \frac{b}{2m} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (25)

NESSE CASO, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$

APENAS 1 SOLUÇÃO. QUAL É A OUTRA SOLUÇÃO?

$$x_1 = e^{-\gamma t}$$

RESPOSTA: $x_2 = t e^{-\gamma t}$

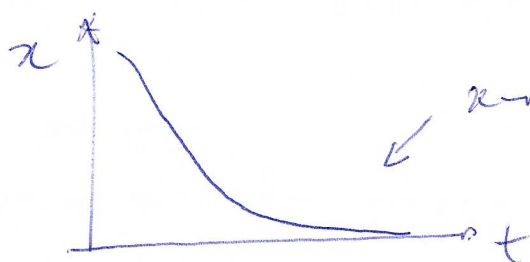
PROVA: $x_2 = t e^{-\gamma t}$, $\dot{x}_2 = e^{-\gamma t} - \gamma t e^{-\gamma t}$, $\ddot{x}_2 = -\gamma e^{-\gamma t} - \gamma e^{-\gamma t} + \gamma^2 t e^{-\gamma t}$

$$\Rightarrow m \ddot{x}_2 + b \dot{x}_2 + k x_2 = m \left(-\frac{b}{m} e^{-\gamma t} + \frac{b^2}{4m^2} t e^{-\gamma t} \right) + b \left(e^{-\gamma t} - \frac{b}{2m} t e^{-\gamma t} \right) + k t e^{-\gamma t}$$

$$= (-b + b) e^{-\gamma t} + t \left(\frac{b^2}{4m} - \frac{b^2}{2m} + k \right) e^{-\gamma t}$$

$$= 0 + t \left(-\frac{b^2}{2m} + \frac{b^2}{4m} \right) e^{-\gamma t} = 0$$

SOLUÇÃO GERAL: $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 = (a_1 + a_2 t) e^{-\gamma t}$



$x \rightarrow 0$ SEM OSCILAÇÕES (isto $a_{1,2} > 0$)

QUO a_1 E a_2 TEM SINAIS OPOSTOS, x MUDA DE SINAL APENAS 1 VEZ (ISSO NÃO É OSCILAÇÃO)

* OSCILADOR HARMÔNICO FORÇADO

a) FORÇA HARMÔNICA

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = F_0 \cos(\omega t + \phi) = F(t)$$

SOLUÇÃO GERAL: $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$

$$x_H = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t), \quad a_{1,2} \equiv \text{const de integração}$$

$x_p \equiv$ SOLUÇÃO PARTICULAR

$$= A \cos(\omega t + \Phi) = A' \cos(\omega t) + B' \sin(\omega t)$$

COMO ACHAR A' E B' ?

(26)

$\Rightarrow$ SUBSTITUIR-SE x_p NA EQ. DO MOVIMENTO

ALTERNATIVAMENTE, PODAMOS USAR QUE A EQ. DO MOVIMENTO É LINEAR E PERMITIR QUE AS SOLUÇÕES SEJAM COMPLEXAS. MAS, NO FIM, TOMA-SE A PARTE REAL.

$$x_p(t) = \text{RE}(X(t))$$

$$F(t) = \text{RE}(F(t)) \quad , \quad F(t) = F_0 e^{i(\Omega t + \phi)} = F_0 e^{i\phi} e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow m \ddot{X} + b \dot{X} + k X = F(t) = F_0 e^{i\phi} e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow X = X_0 e^{i\Omega t} \Rightarrow \dot{X} = i\Omega X \Rightarrow \ddot{X} = -\Omega^2 X$$

$$\Rightarrow (-m\Omega^2 + ib\Omega + k) X_0 e^{i\Omega t} = F_0 e^{i\phi} e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \Omega} \quad \text{E} \quad X_0 = \frac{F_0 e^{i\phi}}{-m\Omega^2 + k + ib\Omega}$$

$$X_0 = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right) e^{i\phi}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}$$

SOLUÇÃO PARTICULAR (ESTADO ESTACIONÁRIO) DEVEMOS TRABALHAR O

DENOMINADOR

$$x_p = \text{Re} \left(\frac{\left(\frac{F_0}{m}\right) e^{i(\Omega t + \phi)}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \right)$$

$$\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\gamma} + i \frac{2\gamma\Omega}{\gamma}}$$

$$\gamma = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}$$

$$\text{DENOMINADOR} = \sqrt{\cos \alpha + i \sin \alpha} \quad \text{ONDE} \quad \cos \alpha = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\gamma} \quad , \quad \sin \alpha = \frac{2\gamma\Omega}{\gamma}$$
$$= \sqrt{e^{i\alpha}}$$

Logo, $x_p = \text{Re} \left(\frac{\left(\frac{F_0}{m}\right) e^{i(2t + \phi - \alpha)}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} \right)$

(27)

$$= \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} \cos(\Omega t + \phi - \alpha)$$

NOTE QUE $x_H \rightarrow 0$ p/ $t \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow x(t) = x_H + x_p \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_p(t)$$

$\Rightarrow$ AMPLITUDE DO MOVIMENTO APÓS TRANSIENTE É

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}}$$

~~QDO~~ QDO A É MÁXIMO?

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0 = \frac{-F_0/m \times [2(\omega_0^2 - \Omega^2)2\Omega + 8\gamma^2 \Omega]}{4((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow -\omega_0^2 + \Omega^2 + 2\gamma^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\Omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 = \omega_0^2 - \gamma^2}$$

AMPLITUDE MÁXIMA OCORRE QDO ~~$\Omega = \omega_0$~~ $\downarrow$ FREQ. DO
 $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \neq \omega_0$ OH NÃO AMORTECIDO
 $\neq \omega$
 $\hookrightarrow$ FREQ. DE OSCILAÇÃO
DO OH AMORTECIDO

POTÊNCIA DISSIPADA

28

$$F_{\text{visc}} \cdot \dot{x} = -b \dot{x}^2 \rightarrow -b \dot{x}_p^2 = \frac{-b \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t + \phi - \alpha)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}$$

NA MÉDIA,

$$\langle P_{\text{visc}} \rangle = \frac{-b \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \Omega^2}{2((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2)}$$

QDO A POTÊNCIA DISSIPADA É MÁXIMA?

$$\frac{d\langle P \rangle}{d\Omega} = 0 = + \frac{b \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \Omega^2}{2((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2)^2} \left(2\Omega((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2) - \Omega^2(8\gamma^2 \Omega + 4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2)) \right)$$

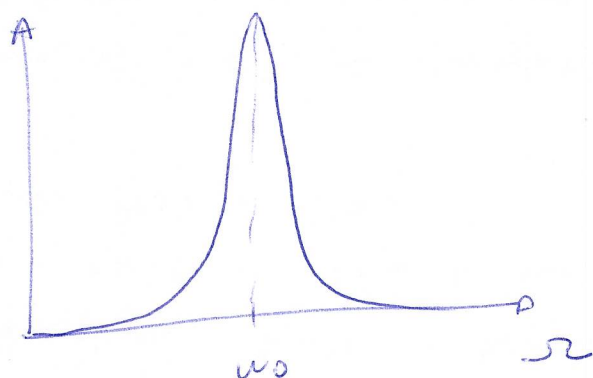
$$\Rightarrow 2\Omega((\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2 - \Omega^2(4\gamma^2 + 2(\Omega^2 - \omega_0^2))) = 0$$

$$\Rightarrow \Omega \Rightarrow \text{ou } (\Omega^2 - \omega_0^2)^2 - 2\Omega^2(\Omega^2 - \omega_0^2) = 0$$

$$\Rightarrow (\Omega^2 - \omega_0^2)(\Omega^2 - \omega_0^2 - 2\Omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \omega_0} \rightarrow \text{FREQ. DE OSC. DO OSCILADOR NÃO AMORTECIDO}$$

$|\langle P \rangle|$



NOTE QUE $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) = \frac{m}{2} (A^2 \Omega^2 \sin^2(\gamma) + A^2 \omega_0^2 \cos^2(\gamma)) \neq \text{cte}$

MAS SE TORNA CONSTANTE QDO $\Omega = \omega_0$

b) FORÇA IMPULSIVA

29

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

onde $F(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \frac{\Delta p}{\delta t}, & t_0 < t < t_0 + \delta t \\ 0, & t > t_0 + \delta t \end{cases}$ com $\delta t \rightarrow 0$

com $\delta t \rightarrow 0 \Rightarrow$ OSCILADOR M^{AS} TEM TEMPO DE SE MEXER

MAS A VELOC. VARIA POR CAUSA DO IMPULSO

$$\Delta p = p - p_0 = \int_{p_0}^p \frac{dp}{dt} dt = \frac{\Delta p}{\delta t} \times \delta t = \Delta p$$

Logo, $x = \begin{cases} x_0 = 0, & t < t_0 \\ \frac{\Delta p}{m\omega} e^{-\gamma(t-t_0)} \sin(\omega(t-t_0)), & t > t_0 \end{cases}$

(SUPERAM $x_0 > x_0 = 0$ E SUB-AMORTECIDA)

c) FORÇA ARBITRÁRIA

IDEIA: USAR O PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DAS AUT. A E.D.O. É LINEAR

$$\text{SEJA } m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) = \sum_n F_n(t)$$

$$\text{SE } x_n \text{ É SOLUÇÃO DE } m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n = F_n(t)$$

$$\Rightarrow x = \sum_n x_n(t) \text{ É SOLUÇÃO DA E.D.O.}$$

$$\text{PROVA: } m \sum_n \ddot{x}_n + b \sum_n \dot{x}_n + k \sum_n x_n = \sum_n (m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n)$$

$$= \sum_n F_n = F(t) \quad \text{C.Q.D.}$$

Em PARTICULAR, se $F(t) = \sum_n C_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$

Podemos usar as soluções x_n encontradas no caso de um forçado por uma força harmônica

$$\Rightarrow x_p(t) = \sum_n \frac{\left(\frac{C_n}{m}\right) \cos(\omega_n t + \phi_n - \alpha_n)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}}$$

$$\text{onde } \cos \alpha_n = \frac{\omega_0^2 - \omega_n^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}}, \quad \sin \alpha_n = \frac{2\gamma \omega_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}}$$

A solução geral sendo

$$x = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \theta) + x_p(t)$$

Esse método é particularmente interessante para forças periódicas no tempo, ou seja,

$$F(t) = F(t+T), \quad T \equiv \text{período}$$

Porque, neste caso,

$$F(t) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right) \equiv \text{SÉRIE DE FOURIER DE } F(t)$$

$$\text{onde } A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

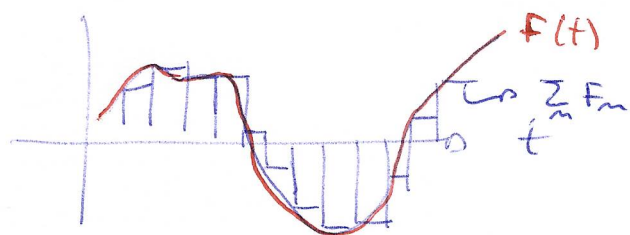
* PODE HAVER RESSONÂNCIAS QUANDO UMA DAS FREQ. DE FOURIER $\frac{2\pi n}{T}$ FOR IGUAL (OU MUITO PRÓXIMA) DA FREQ. NATURAL ω_0 DO D.N.

ALTERNATIVAMENTE, podemos pensar

(31)

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(t) \quad \text{onde}$$

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & t < t_n \\ F(t_n), & t_n < t < t_{n+1} \\ 0, & t > t_{n+1} \end{cases}$$



E tomando

$$t_{n+1} - t_n = \delta t \rightarrow 0$$

$$t_n = \delta t m$$

Como $\delta t \rightarrow 0 \Rightarrow F(t) \equiv$ SUPERPOSIÇÃO DE FORÇAS IMPULSIVAS

Logo, a solução é a superposição

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^m \frac{F(t_n) \delta t}{m \omega} e^{-\gamma(t-t_n)} \sin(\omega(t-t_n))$$

PARA $t_n < t < t_{n+1}$

no limite $\delta t \rightarrow 0$

$$\Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{F(t')}{m \omega} e^{-\gamma(t-t')} \sin(\omega(t-t')) dt'$$

DEFININDO A FUNÇÃO DE GREEN

$$G(t, t') = \begin{cases} e^{-\gamma(t-t')} \frac{\sin \omega(t-t')}{m \omega}, & t' < t \\ 0, & t' > t \end{cases}$$

• ESSA É A ASSUNÇÃO P!
No caso $\gamma = 0$, qualquer outra condição inicial, deve-se adotar a função de GREEN ASSOCIADA

$$\Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') F(t') dt'$$

note que $G(t, t') = G(t - t')$