Mecânica Clássica Computacional - 7600033 - 1S/2026
Projeto 2: O Periélio de Mercúrio

Descrição

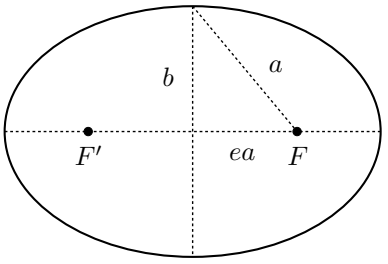
Discutiremos nesse projeto o movimento de "partículas" que interagem por uma força central $\mathbf{F}_{i,j} = F(\mathbf{r}_{i,j})\,\hat{r}_{i,j}$, onde $\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ e $\mathbf{r}_\alpha$ é a posição da α-ésima partícula. Em particular, estaremos interessados na lei de Gravitação de Newton (e correções relativísticas) que é um caso específico desse tipo de força:

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\frac{Gm_1m_2}{|r_{1,2}|^3}\mathbf{r}_{1,2}, \tag{1}$$

onde $m_{1(2)}$ é a massa do planeta/astro/partícula 1 (2), G é a constante gravitacional e $r = |\mathbf{r}|$ é o módulo do vetor $\mathbf{r}$. Nesse caso, consideraremos os planetas se movendo em um plano, o que é uma excelente aproximação para o sistema solar, e, portanto, uma simulação bidimensional será suficiente. Como as órbitas dos planetas são periódicas, o método de Euler é desaconselhável, uma vez que ele não conserva energia e leva a órbitas instáveis. Por isso, utilizaremos o método de Euler-Cromer. Além disso, utilizaremos também um método importante de integração numérica conhecido por método de Runge-Kutta. Como referência, veja as seções 4.3 e 4.4 do Giordano & Nakanishi.

1. **O problema de dois corpos: órbitas limitadas**

   Desde os trabalhos pioneiros de Kepler, sabemos que os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos. Na figura ao lado, mostramos uma elipse com seus focos F e F', semieixos maior a e menor b, e excentricidade $e = \sqrt{1-(b/a)^2}$. Quando $e = 0$, tem-se uma órbita circular. Sabemos que esse resultado segue da lei da gravitação de Newton, Eq. (1), e queremos aqui recuperar essa solução de modo numérico. Antes de discutirmos o método numérico, contudo, vamos estabelecer as unidades mais convenientes para estudarmos o problema. Por se tratar de um problema astronômico, utilizaremos, não muito surpreendentemente, a chamada Unidade Astronômica (UA) como unidade de comprimento.

   Uma unidade astronômica, ou simplesmente 1 UA, é definida como a distância média Terra-Sol $\left(\approx 1.5\times10^{11}\text{ m}\right)$. O tempo é convenientemente medido em anos $\left(1\text{ ano }\approx 3.2\times10^7\text{ s}\right)$ por 2π, o que corresponde, naturalmente, ao período de rotação da Terra ao redor do Sol dividido por 2π. Desejamos reescrever a lei de Newton nessas unidades. Definindo

   $$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}}{\text{UA}} \text{ e } \tau = \frac{t}{\text{ano}/2\pi}, \tag{2}$$

   então

   $$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM_\odot m}{r^3}\mathbf{r}, \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}\tau^2} = \ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{GM_\odot \text{ano}^2}{(2\pi)^2\,\text{UA}^3}\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^3}, \tag{3}$$

   onde, na última igualdade, usamos que $GM_\odot = 4\pi^2\text{UA}^3\text{ano}^{-2}$. Este resultado é obtido da seguinte maneira. Assumindo uma órbita circular para a Terra,

   $$\frac{M_{\earth}v^2}{r} = \frac{GM_{\earth}M_\odot}{r^2}, \tag{4}$$

   conclui-se que

   $$GM_\odot = v^2r = \left(\frac{2\pi r}{\text{ano}}\right)^2 r = (2\pi)^2\,\frac{(\text{UA})^3}{\text{ano}^2}. \tag{5}$$

   Vamos considerar inicialmente o problema de dois corpos, planeta + Sol. Pelo fato do Sol ser muito mais massivo

que os planetas, vamos tomar o Sol parado na origem: $v_\odot = 0$ e $\left(x_\odot, y_\odot\right) = (0,0)$. As equações de movimento para as coordenadas (x, y) de um dado planeta são

$$\frac{d^2\rho_x}{d\tau^2} = \ddot{\rho}_x = -\frac{\rho_x}{\rho^3} \text{ e } \frac{d^2\rho_y}{d\tau^2} = \ddot{\rho}_y = -\frac{\rho_y}{\rho^3}, \tag{6}$$

onde

$$\rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}, \tag{7}$$

é a distância instantânea entre o planeta e o Sol em unidades astronômicas. Para utilizarmos métodos de integração numérica, reescrevemos as duas equações diferenciais de segunda ordem como quatro equações diferenciais de primeira ordem, ou seja,

$$\dot{\rho}_x = v_x \quad \text{e} \quad \dot{v}_x = -\frac{\rho_x}{\rho^3}, \tag{8}$$

$$\dot{\rho}_y = v_y \quad \text{e} \quad \dot{v}_y = -\frac{\rho_y}{\rho^3}, \tag{9}$$

onde v_x e v_y são, respectivamente, as velocidades ao longo das direções x e y. Dentro do método de Euler-Cromer (EC), as quatro diferenciais em (8) e (9) são aproximadas por

$$v_{x,i+1} = v_{x,i} - \frac{\rho_{x,i}}{\rho_i^3}\Delta\tau, \tag{10}$$

$$\rho_{x,i+1} = \rho_{x,i} + v_{x,i+1}\Delta\tau, \tag{11}$$

$$v_{y,i+1} = v_{y,i} - \frac{\rho_{y,i}}{\rho_i^3}\Delta\tau, \tag{12}$$

$$\rho_{y,i+1} = \rho_{y,i} + v_{y,i+1}\Delta\tau, \tag{13}$$

onde $\Delta\tau$ é o passo temporal (em unidades de $\frac{\text{ano}}{2\pi}$).
Um outro importante método de integração numérica é o de Runge-Kutta. Para o caso em questão, o método em quarta ordem de aproximação em $\Delta\tau$ diz que deve-se iterar as seguintes equações:

$$\rho_{x,i+1} = \rho_{x,i} + \frac{\Delta\tau}{6}\left(F_{1,i}^{(1)} + 2F_{1,i}^{(2)} + 2F_{1,i}^{(3)} + F_{1,i}^{(4)}\right), \tag{14}$$

$$\rho_{y,i+1} = \rho_{y,i} + \frac{\Delta\tau}{6}\left(F_{2,i}^{(1)} + 2F_{2,i}^{(2)} + 2F_{2,i}^{(3)} + F_{2,i}^{(4)}\right), \tag{15}$$

$$v_{x,i+1} = v_{x,i} + \frac{\Delta\tau}{6}\left(F_{3,i}^{(1)} + 2F_{3,i}^{(2)} + 2F_{3,i}^{(3)} + F_{3,i}^{(4)}\right), \tag{16}$$

$$v_{y,i+1} = v_{y,i} + \frac{\Delta\tau}{6}\left(F_{4,i}^{(1)} + 2F_{4,i}^{(2)} + 2F_{4,i}^{(3)} + F_{4,i}^{(4)}\right), \tag{17}$$

onde

$$F_{1,i}^{(j)} = v_{x,i}^{(j)},\ F_{2,i}^{(j)} = v_{y,i}^{(j)},\ F_{3,i}^{(j)} = -\frac{\rho_{x,i}^{(j)}}{\rho_i^{(j)3}} \text{ e } F_{4,i}^{(j)} = -\frac{\rho_{y,i}^{(j)}}{\rho_i^{(j)3}},$$

com

$$\rho_{x,i}^{(j)} = \rho_{x,i} + C^{(j)}\Delta t F_{1,i}^{(j-1)},\ \rho_{y,i}^{(j)} = \rho_{y,i} + C^{(j)}\Delta t F_{2,i}^{(j-1)},$$

$$v_{x,i}^{(j)} = v_{x,i} + C^{(j)}\Delta t F_{3,i}^{(j-1)}, \text{ e } v_{y,i}^{(j)} = v_{y,i} + C^{(j)}\Delta t F_{4,i}^{(j-1)},$$

e $\rho_i^{(j)} = \sqrt{\rho_{x,i}^{(j)2} + \rho_{y,i}^{(j)2}}$, com $C^{(1)} = 0$, $C^{(2)} = C^{(3)} = \frac{1}{2}$, e $C^{(4)} = 1$. (Para $j = 1$, não se preocupe com $F^{(j-1)}$ porque $C^{(1)} = 0$.)

(a) Escreva um programa FORTRAN que calcula a posição $\boldsymbol{\rho}(\tau)$ e velocidade $\boldsymbol{v}(\tau)$ de um planeta como função do tempo implementando o método de EC por meio das Eqs. (10)-(13).

Planeta	massa ($M_{\oplus}$)	semieixo maior (UA)	excentricidade (e)
Mercúrio	0.055	0.39	0.206
Vênus	0.815	0.72	0.007
Terra	1	1.00	0.017
Marte	0.107	1.52	0.093
Júpiter	318	5.20	0.049
Saturno	95.2	9.58	0.057
Urano	14.5	19.2	0.046
Netuno	17.1	30.1	0.009

Tabela I: Dados planetários úteis. A massa do Sol é $M_{\odot} = 3.33 \times 10^5 M_{\oplus} = 1.99 \times 10^{30}$ Kg e a massa da Terra é $M_{\oplus} = 5.97 \times 10^{24}$ Kg.

(b) Considere a tabela I. Determine as condições iniciais de posição e velocidade correspondentes.

(c) Queremos quantificar o desvio à orbita elíptica correspondente. Para isso, definimos

$$\delta = \frac{1}{Nb} \sum_{i=1}^{N} \left| \rho_{y,i} - y_{\text{elipse}} \left(\rho_{x,i} \right) \right| , \tag{18}$$

onde $y_{\text{elipse}}(x) = \pm b\sqrt{1 - (x/a)^2}$ é a coordenada vertical da elipse na posição x, e N é o número de iterações do método para 5 revoluções do planeta em torno do Sol. Trace o gráfico de δ como função $\Delta\tau$. Definindo como uma boa escolha de passo temporal $\Delta\tau_{\max}$ como sendo aquele tal que $\delta \lessapprox 10^{-3}$ para todo $\Delta\tau < \Delta\tau_{\max}$, determine $\Delta\tau_{\max}$ como função de a. Verifique se $\Delta\tau_{\max} \propto a^{3/2}$.

(d) (Opcional) Em termos de coordenadas cilíndricas, as equações de movimento (6) são

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\rho = \frac{1 - e^2}{\rho^3}\left(\frac{a}{\text{UA}}\right) - \frac{1}{\rho^2}, \text{ e } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\theta = \frac{1}{\rho^2}\sqrt{\frac{a\left(1 - e^2\right)}{\text{UA}}}.$$

Adapte o método de Euler-Cromer para essas equações e refaça o item 1a. Analogamente, refaça os itens 1b e 1c para o planeta Mercúrio.

(e) Escreva um programa FORTRAN que calcula a posição $\boldsymbol{\rho}(\tau)$ e velocidade $\boldsymbol{\upsilon}(\tau)$ de um planeta como função do tempo implementando o método de Runge-Kutta em quarta ordem (RK4) por meio das Eqs. (14)-(17).

(f) Usando $\Delta\tau_{\max}$ para o planeta Terra encontrado no item 1c, trace num mesmo gráfico a energia mecânica total calculada pelos métodos de EC e de RK4. Compare também o desvio δ [vide Eq. (18)] para os dois métodos.

(g) Considere forças centrais iguais a $-\rho^{\phi}\hat{\rho}$, onde ϕ é um expoente. Usando o método RK4, verifique que, para $\phi = 1$ (oscilador harmônico) e $\phi = -2$ (Kepler), as órbitas limitadas são fechadas (evidentemente, não apenas as circulares).

(h) Existe alguma órbita ilimitada (onde $\rho \to \infty$ para algum instante de tempo τ e energia finita E) para $\phi > 0$? Existe alguma órbita limitada para $\phi \leq -3$? Faça algumas simulações variando ϕ.

(i) Compare o método de Euler-Cromer com o de Verlet. (Escolha uma quantidade para essa comparação e justifique.)

2. **Correções relativísticas para a órbita de Mercúrio**

Para a órbita de Mercúrio, os efeitos relativísticos da curvatura do espaço-tempo preditos pela Relatividade Geral são suficientemente fortes para serem medidos experimentalmente. Neste caso, podemos encarar os efeitos relativísticos como uma perturbação à lei da gravitação universal de Newton. Mais precisamente, a força gravitacional entre o Sol e Mercúrio torna-se

$$F \approx \frac{GM_{\odot}M_{\mercury}}{r^2}\left(1 + \frac{\alpha}{(r/\text{UA})^2}\right), \tag{19}$$

onde $\alpha \approx 1.1 \times 10^{-8}$ é deveras pequeno para os valores de r para Mercúrio.

(a) Usando $\alpha = 0.1$, utilize o método de RK4 para simular a órbita de Mercúrio corrigida de acordo com (19). Determine a precessão do periélio correspondente traçando o gráfico do ângulo de precessão do eixo como função do tempo. (Utilize unidades astronômicas.) Fazendo um ajuste de seus dados, determine a taxa de precessão do periélio correspondente.

(b) Repita o item anterior para outros valores menores de α e trace o gráfico da taxa de precessão correspondente. Fazendo um novo ajuste de seus dados, determine como a taxa de precessão varia com o valor de α. Finalmente, use seu resultado para calcular a taxa de precessão do periélio de Mercúrio (para $\alpha = 1.1 \times 10^{-8}$).

3. **Sol, Mercúrio e Júpiter**
Utilizando o método RK4, vamos considerar agora o problema no qual temos a Mercúrio, o Sol e Júpiter.[1] As equações de movimento são dadas por

$$\ddot{\rho}_{\odot,x} = \mu_{\mercury} a_{\odot,\mercury,x} + \mu_{\jupiter} a_{\odot,\jupiter,x} \quad \text{e} \quad \ddot{\rho}_{\odot,y} = \mu_{\mercury} a_{\odot,\mercury,y} + \mu_{\jupiter} a_{\odot,\jupiter,y}, \tag{20}$$

$$\ddot{\rho}_{\mercury,x} = -a_{\odot,\mercury,x} + \mu_{\jupiter} a_{\mercury,\jupiter,x} \quad \text{e} \quad \ddot{\rho}_{\mercury,y} = -a_{\odot,\mercury,y} + \mu_{\jupiter} a_{\mercury,\jupiter,y}, \tag{21}$$

$$\ddot{\rho}_{\jupiter,x} = -a_{\odot,\jupiter,x} - \mu_{\mercury} a_{\mercury,\jupiter,x} \quad \text{e} \quad \ddot{\rho}_{\jupiter,y} = -a_{\odot,\jupiter,y} - \mu_{\mercury} a_{\mercury,\jupiter,y}, \tag{22}$$

onde

$$a_{\hexagram,\maltese,\alpha} = -\frac{\left(\rho_{\hexagram,\alpha} - \rho_{\maltese,\alpha}\right)}{\left|\boldsymbol{\rho}_{\hexagram} - \boldsymbol{\rho}_{\maltese}\right|^3}, \tag{23}$$

$\mu_{\hexagram} = \frac{M_{\hexagram}}{M_{\odot}}$ é a razão entre a massa do planeta $\hexagram$ e a massa do Sol, e $\boldsymbol{\rho}_{\odot}$, $\boldsymbol{\rho}_{\mercury}$ e $\boldsymbol{\rho}_{\jupiter}$ são as posições do Sol, Mercúrio e Júpiter, respectivamente. [Note que estamos usando as variáveis definidas em (2), por isso $M_{\odot}$ no denominador de $\mu_{\hexagram}$.]

(a) Escreva explicitamente em seu relatório o análogo das Eqs. (14)-(17) para o movimento dos 3 corpos celestes das Eq. (20)-(22).

(b) Escreva um programa FORTRAN que calcula a órbita dos corpos celestes das Eq. (20)-(22) pelo método de RK4, admitindo como condição inicial aquelas do item 1b para os dois planetas. OBS: Calcule a posição e velocidade do centro de massa. A fim de mantê-lo parado na origem, translade as posições e velocidades dos planetas e do Sol de acordo.

(c) Trace a trajetória de Mercúrio e calcule a precessão de seu periélio. (Justifique muito bem sua escolha para o valor de $\Delta\tau$ para essa tarefa e o intervalo de tempo da simulação. Como o efeito da precessão é muito pequeno, aumente a massa de Júpiter para magnificá-lo. Refaça essa tarefa para outros valores e determine como a taxa de precessão do periélio de Mercúrio depende dessa massa e, finalmente, extrapole para o valor de 1 massa de Júpiter).

(d) Agora, vamos simplificar o problema considerando que o Sol está fixo na origem e substituindo Júpiter por um anel homogêneo de massa $M_{\jupiter}$ e raio 5.2 UA cujo centro também está na origem. Calcule a taxa de precessão do periélio de Mercúrio para diferentes massas de anel, determine a dependência dela com a massa e, finalmente, extrapole para o caso em que o anel tem apenas uma massa de Júpiter. Como valor da taxa de precessão se compara com aquele do item anterior?

---

[1] Note pela tabela I que Júpiter é o planeta que mais afeta Mercúrio.

Breve discussão sobre a execução dos problemas

O problema de dois corpos

Em muitos casos de interesse, é possível estudar o problema de dois corpos como se fosse apenas um corpo num potencial externo. Considere o caso de duas partículas interagindo via uma força central. Neste caso, a energia total do sistema é

$$E = \frac{1}{2} m_1 \left|\dot{\mathbf{r}}_1\right|^2 + \frac{1}{2} m_2 \left|\dot{\mathbf{r}}_2\right|^2 + V\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right). \tag{24}$$

Além disso, as equações de movimento são

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\nabla_1 V\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right) \text{ and } m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\nabla_2 V\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right), \tag{25}$$

onde ∇_i é o gradiente com relação à coordenada $\mathbf{r}_i$.

Como não há potencial externo, o momento total do sistema deve ser conservado. Isso indica que o momento do centro de massa é conservado. Sendo assim, seria interessante mudar das coordenadas originais $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ para novas $\mathbf{R}$ e $\mathbf{r}$ onde

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{26}$$

é a coordenada do centro de massa e $\mathbf{r}$ (a ser determinada) é dita a coordenada relativa. Para que as novas coordenadas sejam úteis, elas devem ser desacopladas entre si, i.e., as equações de movimento de uma coordenada deve ser independe da outra (que não é o caso de (25)). A resposta para tal é que

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \tag{27}$$

Invertendo as Eqs. (26) e (27), as coordenadas originais são

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Substituindo em (24), temos que a energia total pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\left(m_1\left(\left|\dot{\mathbf{R}}\right|^2 - 2\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{R}}\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{m_2^2}{M^2}\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^2\right) + m_2\left(\left|\dot{\mathbf{R}}\right|^2 + 2\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{R}}\cdot\dot{\mathbf{r}} + \frac{m_1^2}{M^2}\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^2\right)\right) + V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2}M\left|\dot{\mathbf{R}}\right|^2 + \frac{1}{2}\mu\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^2 + V\left(\mathbf{r}\right), \end{aligned} \tag{28}$$

onde $M = m_1 + m_2$ é a massa total do sistema e $\mu = m_1 m_2 / M$ (também chamada de massa reduzida). Note que (28) é a energia de duas partículas independentes. A primeira de coordenada $\mathbf{R}$ e massa M está livre e, portanto, só contribui com energia cinética para a energia total. A segunda de coordenada $\mathbf{r}$ tem massa μ e está sujeita ao potencial $V\left(\mathbf{r}\right)$. O problema então se reduz a resolver as seguintes equações de movimento:

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0 \text{ and } \mu\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V\left(\mathbf{r}\right) = \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

Neste caso, o problema se reduz a resolver essas duas equações diferenciais independentes. Como a solução de uma independe da outra, diz-se que a transformação (26)-(27) desacopla o sistema. Em suma, o centro de massa é livre e, portanto, descreve um movimento uniforme

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t,$$

enquanto a coordenada relativa descreve um movimento determinado pelo "potencial externo" ditado pela lei de Newton. Para forças centrais $V(\mathbf{r}) = V(r)$ ou $\mathbf{F} = F\left(r\right)\hat{r}$, então a

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = F(r)\hat{r}.$$

Para forças centrais do tipo $F = -Kr^{\phi}$, reescrevemos a equação de movimento como

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau^2} = -r^{\phi}, \text{ onde } \tau = \sqrt{\frac{K}{\mu}}t.$$

Para o caso gravitacional, isso quer dizer que $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GM\mu}{r^3}\mathbf{r}$. Ou seja, a coordenada relativa $\mathbf{r}$ representa uma partícula de massa μ orbitando uma outra partícula de massa M fixa na origem.

No limite em que $m_1 \gg m_2$, como no caso do Sol e um planeta, por exemplo, temos que

$$\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{R} \text{ e } \mathbf{r}_2 \approx \mathbf{R} + \mathbf{r}.$$

Tomando o referencial como o do centro de massa, então o Sol fica parado na origem enquanto o planeta $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ orbita em torno dele.

Órbitas planetárias em mecânica clássica

Para o caso de uma partícula num potencial central, o momento angular é conservado. Isso implica que a trajetória é planar. Por esse motivo, vamos considerar que ele se dá no plano xy. O momento angular é

$$\mathbf{L} = m\left|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\right| \hat{z} = mr^2\dot{\theta}\hat{z}.$$

Aqui, é mais conveniente usar coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta \text{ e } y = r\sin\theta.$$

A energia total é

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \tilde{V}(r),$$

onde $\tilde{V} = V + L^2/\left(2mr^2\right)$ é dito o potencial efetivo para a coordenada r.

A equação do movimento correspondente é

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(mr) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\tilde{V}(r)\right).$$

Da conservação do momento angular, temos que $L\mathrm{d}t = mr^2\mathrm{d}\theta$. Logo,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(mr) = \frac{L}{mr^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{L}{mr^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(mr)\right) = \frac{L^2}{mr^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}r\right) = -\frac{L^2}{mr^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right).$$

Donde obtemos que

$$-\frac{L^2}{mr^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(V(r)) + \frac{L^2}{mr^3}, \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{L^2}F(r).$$

Para o caso gravitacional, $F = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}r = -GMm/r^2$, e portanto, a equação de trajetória simplifica para

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2}.$$

A solução é do tipo

$$\frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{GMm^2}{L^2} = \frac{GMm^2}{L^2}\left[1 - e\cos(\theta - \theta_0)\right],$$

que é a equação de uma cônica de excentricidade e e $\theta = \theta_0$ sendo o afélio. Escolhendo x como o eixo do semieixo maior e o foco do centro atrator estando a esquerda do afélio, então $\theta_0 = 0$. É interessante escrever a excentricidade

como função das constantes do movimento. A partir daqui, vamos considerar o caso de órbitas elípticas e circulares. Note que no afélio, $r = a\,(1+e)$ e $\dot{r} = 0$, onde a é o semieixo maior. Neste caso, a energia total é

$$E = \frac{L^2}{2ma^2\,(1+e)^2} - \frac{GMm}{a\,(1+e)}.$$

Como o afélio acontece para $\theta = 0$, temos que

$$\frac{1}{a\,(1+e)} = \frac{GMm^2}{L^2}\,(1-e)\,.$$

Logo,

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(\frac{GMm^2}{L^2}\,(1-e)\right)^2 - GMm\frac{GMm^2}{L^2}\,(1-e) = -\frac{G^2M^2m^3}{2L^2}\left(1-e^2\right),$$

e

$$a = \frac{L^2}{GMm^2\,(1-e^2)} = -\frac{GMm}{2E}.$$

Com isso, a equação da trajetória se reduz a

$$\frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}\cos\theta\right) = \frac{1-e\cos\theta}{a\,(1-e^2)}.$$

Com relação à dependência temporal, temos que

$$\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\tilde{V}\,(r)\right) = \frac{L^2}{m^2r^3} - \frac{GM}{r^2},\ \text{e}\ \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}.$$

Potencial gravitacional de um anel

Considere um anel homogêneo de massa M e raio R. Desejamos calcular a força gravitacional entre esse anel e uma partícula de prova de massa m que se encontra no plano do anel.

Uma possível estratégia é localizar o centro desse anel na origem do sistema e calcular a energia potencial corresponde sendo que a partícula se encontra a uma distância zR da origem.

Dessa maneira, a energia potencial pode ser obtida via simples integração:

$$\mathrm{d}U = -G\left(\frac{M}{2\pi R}R\mathrm{d}\theta\right)m \times \frac{1}{\sqrt{R^2\sin^2\theta + (zR - R\cos\theta)^2}},$$

onde um elemento de massa do anel tem comprimento $R\mathrm{d}\theta$ sendo θ o ângulo entre o vetor posição desse elemento de massa e o vetor posição da partícula de prova. Continuando com a integração,

$$U\,(z) = -\left(\frac{GMm}{\pi R}\right)\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}},$$

que resulta numa função elíptica. Para posições da partícula de prova próximas do centro do anel ($z \ll 1$), podemos expandir o integrando e obter o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}} \;\approx\; & 1 + z\cos\theta + \frac{1}{2^2}(1+3\cos 2\theta)z^2 + \frac{1}{2^3}(3\cos\theta + 5\cos 3\theta)z^3 + \frac{1}{2^6}(9 + 20\cos 2\theta + 35\cos 4\theta)z^4 \\
& + \frac{1}{2^3}\cos\theta(15 - 70\cos^2\theta + 63\cos^4\theta)z^5 + \frac{1}{2^9}(50 + 105\cos 2\theta + 126\cos 4\theta + 231\cos 6\theta)z^6 \\
& + \frac{1}{2^4}\cos\theta(-35 + 315\cos^2\theta - 693\cos^4\theta + 429\cos^6\theta)z^7 \\
& + \frac{1}{2^7}(35 - 1260\cos^2\theta + 6930\cos^4\theta - 12012\cos^6\theta + 6435\cos^8\theta)z^8.
\end{aligned}$$

Integrando em θ, note que apenas os termos proporcionais a potências pares de z não se anulam. O resultado é

$$U(z) = -\left(\frac{GMm}{\pi R}\right)\pi\left(1+\frac{z^2}{2^2}+\frac{9}{2^6}z^4+\frac{25}{2^8}z^6+\frac{1225}{2^{14}}z^8+\mathcal{O}\left(z^{10}\right)\right).$$

Logo, a força resultante sobre a partícula dentro (e no plano) do anel aponta radialmente para fora da origem (em direção ao anel) e tem magnitude

$$F = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}U(z) = \left(\frac{GMm}{2R^2}\right)\left(z+\frac{9}{2^3}z^3+\frac{75}{2^6}z^5+\frac{1225}{2^{10}}z^7+\mathcal{O}\left(z^9\right)\right).$$

O método de Runge-Kutta

Um importante método de integração numérica de equações diferenciais de primeira ordem é o de Runge-Kutta que explicamos a seguir.

Seja o sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}t} = f_\beta\left(x_1,\ldots,x_N,t\right) = f_\beta\left(\{x_\gamma\},t\right), \tag{29}$$

onde $x_\beta \equiv x_\beta(t)$ são funções do tempo e $\beta = 1,\ldots,N$. Por exemplo, no caso de uma partícula num potencial externo $V(\mathbf{r},t)$ (dependente da posição e do tempo), onde $\mathbf{r}(t)$ é a posição da mesma no instante t, tem-se o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
\dot{r}_x(t) = v_x(t), &\;\Rightarrow\; \dot{x}_1 = f_1(x_1,\ldots,x_6,t) = x_4,\\
\dot{r}_y(t) = v_y(t), &\;\Rightarrow\; \dot{x}_2 = f_2(x_1,\ldots,x_6,t) = x_5,\\
\dot{r}_z(t) = v_z(t), &\;\Rightarrow\; \dot{x}_3 = f_3(x_1,\ldots,x_6,t) = x_6,\\
\dot{v}_x(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{V(\mathbf{r},t)}{m}\right), &\;\Rightarrow\; \dot{x}_4 = f_4(x_1,\ldots,x_6,t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}\left(\frac{V(x_1,x_2,x_3,t)}{m}\right),\\
\dot{v}_y(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{V(\mathbf{r},t)}{m}\right), &\;\Rightarrow\; \dot{x}_5 = f_5(x_1,\ldots,x_6,t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2}\left(\frac{V(x_1,x_2,x_3,t)}{m}\right),\\
\dot{v}_z(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{V(\mathbf{r},t)}{m}\right), &\;\Rightarrow\; \dot{x}_6 = f_6(x_1,\ldots,x_6,t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3}\left(\frac{V(x_1,x_2,x_3,t)}{m}\right).
\end{aligned}$$

O método diz que uma solução numérica do sistema (29) é dada pela iteração de

$$x_{\beta,k+1} = x_{\beta,k} + \Delta t\sum_{j=1}^{m} A^{(j)}F^{(j)}_{\beta,k} + \mathcal{O}\left(f^{(m)}_{\beta,k}\Delta t^{m+1}\right). \tag{30}$$

Ou seja, a correção é da ordem de Δt^{m+1} multiplicada pela m-ésima derivada de f_β no instante $t = t_k = k\Delta t$. As funções $F^{(j)}_{\beta,k}$ dependem das funções em ordem mais baixa:

$$F^{(j)}_{\beta,k} = f_\beta\left(\left\{x_{\gamma,k}+\frac{\Delta t}{B^{(j)}}F^{(j-1)}_{\gamma,k}\right\},t_k+\frac{\Delta t}{B^{(j)}}\right), \tag{31}$$

com $F^{(1)}_{\beta,k} = f_\beta\left(\{x_{\gamma,k}\},t_k\right)$ (o que define $B^{(1)}\to\infty$). Os coeficientes $A^{(j)}$ e $B^{(j)}$ são independentes de β mas dependem da ordem da aproximação m. Para $m=4$, que é comumente usado, os coeficientes são iguais a

$$2A^{(1)} = 2A^{(4)} = A^{(2)} = A^{(3)} = \frac{1}{3} \text{ e } B^{(2)} = B^{(3)} = 2B^{(4)} = 2. \tag{32}$$

Como pode o incremento dado em (30) ser de precisão $f^{(m)}_\beta\Delta t^{m+1}$? Note que as funções em (31) são calculadas em tempos intermediárias $t_k + \frac{\Delta t}{B^{(k)}}$. Dessa forma, instantes de tempo entre t_k e t_{k+1} são considerados. Além disso, note que o método considera as funções f_β calculadas em pontos intermediárias $x_{\gamma,k}+\frac{\Delta t}{B^{(j)}}F^{(j-1)}_{\gamma,k}$. Dessa maneira, outras derivadas de f_β estão sendo calculadas pelo método.

Vamos derivar agora os coeficientes $A^{(j)}$ e $B^{(j)}$ para ordem $m=2$.

Neste caso, considere a expansão

$$\begin{aligned} x_{\beta,k+1} &= x_{\beta,k} + \frac{\mathrm{d}x_{\beta,k}}{\mathrm{d}t}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 x_{\beta,k}}{\mathrm{d}t^2}(\Delta t)^2 + \dots \\ &= x_{\beta,k} + f_{\beta,k}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}f_{\beta,k}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}\left(f_{\beta,k}^{(2)}(\Delta t)^3\right), \end{aligned}$$

onde usamos que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_\beta f_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}$. Logo,

$$x_{\beta,k+1} = x_{\beta,k} + f_{\beta,k}\Delta t + \frac{1}{2}\left(\partial_t f_{\beta,k} + \sum_\gamma f_{\gamma,k}\partial_\gamma f_{\beta,k}\right)(\Delta t)^2 + \mathcal{O}\left(f_{\beta,k}^{(2)}(\Delta t)^3\right). \tag{33}$$

Agora comparamos a série de Taylor (33) com a seguinte expressão do método de Runge-Kutta

$$x_{\beta,k+1} = x_{\beta,k} + \Delta t\left(A_\beta^{(1)}F_{\beta,k}^{(1)} + A_\beta^{(2)}F_{\beta,k}^{(2)}\right) + \mathcal{O}\left(f_{\beta,k}^{(2)}(\Delta t)^3\right), \tag{34}$$

com

$$F_{\beta,k}^{(1)} = f_{\beta,k} = f_\beta\left(x_{1,k},\dots,x_{N,k},t_k\right) \text{ e } F_{\beta,k}^{(2)} = f_\beta\left(\left\{x_{\gamma,k} + \frac{\Delta t}{B^{(2)}}f_{\gamma,k}\right\}, t_k + \frac{\Delta t}{B^{(2)}}\right).$$

(Note que estamos abrindo a possibilidade de que os coeficientes $A_\beta^{(j)}$ sejam dependentes de β.) Para que possamos comparar (33) com (34), precisamos expandir

$$\begin{aligned} F_{\beta,k}^{(2)} = f_\beta\left(\left\{x_{\gamma,k} + \frac{\Delta t}{B^{(2)}}f_{\gamma,k}\right\}, t_k + \frac{\Delta t}{B_2}\right) &= f_\beta\left(\{x_{\gamma,k}\}, t_k\right) + \sum_\gamma \partial_\gamma f_{\beta,k}\left(\frac{\Delta t}{B^{(2)}}f_{\gamma,k}\right) + \partial_t f_{\beta,k}\left(\frac{\Delta t}{B^{(2)}}\right) + \mathcal{O}\left(f_\beta^{(2)}(\Delta t)^2\right) \\ &= f_\beta\left(\{x_{\gamma,k}\}, t_k\right) + \frac{\Delta t}{B^{(2)}}\left(\sum_\gamma f_{\gamma,k}\partial_\gamma + \partial_t\right) f_{\beta,k} + \mathcal{O}\left(f_\beta^{(2)}(\Delta t)^2\right) \\ &= f_\beta\left(\{x_{\gamma,k}\}, t_k\right) + \frac{\Delta t}{B^{(2)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{\beta,k} + \mathcal{O}\left(f_\beta^{(2)}(\Delta t)^2\right). \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado em (34), então

$$x_{\beta,k+1} = x_{\beta,k} + \Delta t\left(A_\beta^{(1)} + A_\beta^{(2)}\right)f_{\beta,k} + \frac{A_\beta^{(2)}}{B^{(2)}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{\beta,k}\right)(\Delta t)^2 + \mathcal{O}\left(f_{\beta,k}^{(2)}(\Delta t)^3\right),$$

de onde concluímos que

$$A_\beta^{(1)} + A_\beta^{(2)} = 1 \text{ and } \frac{A_\beta^{(2)}}{B^{(2)}} = \frac{1}{2}. \tag{35}$$

Note que esse sistema tem mais de uma solução. Mais importante, note que os coeficientes $A_\beta^{(j)}$ não dependem de β e, por esse motivo, não vamos mais escrever o sub-índice β.

Como exemplo, considere o caso em que $\dot{x} = f_x(x,v,t) = v$, e $\dot{v} = f_v(x,v,t)$. Portanto, até segunda ordem

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta t\left(A^{(1)}v_k + A^{(2)}\left(v_k + \frac{\Delta t}{B^{(2)}}f_{v,k}\right)\right) \\ &= x_k + \Delta t\left(A^{(1)} + A^{(2)}\right)v_k + (\Delta t)^2\frac{A^{(2)}}{B^{(2)}}f_{v,k} \\ &= x_k + \Delta t v_k + \frac{(\Delta t)^2}{2}f_{v,k}, \end{aligned}$$

para qualquer solução de (35). Note que esta é a equação de movimento de uma partícula com aceleração constante. Ou seja, aprendemos aqui que o método de Runge-Kutta na aproximação de segunda ordem considera o movimento como sendo uniformemente acelerado entre os instantes t_k e t_{k+1}. Isso já é uma aproximação melhor do que a do

método de Euler, que considera que o movimento é uniforme entre esses instantes de tempo. A atualização para a velocidade é

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t \left[A^{(1)} f_{v,k} + A^{(2)} f_v \left(x_k + \frac{\Delta t}{B^{(2)}} v_k, v_k + \frac{\Delta t}{B^{(2)}} f_{v,k}, t_k + \frac{\Delta t}{B^{(2)}} \right) \right].$$

Para o caso em que $f_v(x, v, t) = f_v(t)$, e usando a solução $A^{(1)} = A^{(2)} = \frac{1}{2}$, e $B^{(2)} = 1$, então

$$v_{k+1} - v_k = \frac{\Delta t}{2} \left[f_{v,k} + f_v \left(t_k + \Delta t \right) \right] = \frac{\Delta t}{2} \left[f_{v,k} + f_{v,k+1} \right],$$

que simplesmente é a regra de integração numérica Trapezoidal.

Em suma, o método de Runge-Kutta é uma maneira de implementar as regras numéricas de integração para sistemas de equações diferenciais.

Em ordem $m = 3$, encontramos que

$$\left(A_\beta^{(1)} + A_\beta^{(2)} + A_\beta^{(3)} \right) = 1, \ \left(\frac{A_\beta^{(2)}}{B^{(2)}} + \frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(3)}} \right) = \frac{1}{2!}, \text{ e } \frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(2)} B^{(3)}} = \frac{1}{3!} = \left(\frac{A_\beta^{(2)}}{2B^{(2)2}} + \frac{A_\beta^{(3)}}{2B^{(3)2}} \right).$$

Novamente, os coeficientes não dependem de β. Como no caso de segunda ordem, há mais de uma solução. Uma delas (talvez uma das mais simples) é tal que $A_\beta^{(2)} = 0$. Neste caso,

$$A^{(1)} = \frac{1}{4}, \ A^{(2)} = 0, \ A_3^{(3)} = \frac{3}{4}, \ B^{(2)} = 3, \text{ e } B^{(3)} = \frac{3}{2}.$$

Para o caso de quarta ordem $m = 4$, após uma tediosa manipulação algébrica, encontramos que

$$A_\beta^{(1)} + \cdots + A_\beta^{(4)} = 1, \ \frac{A_\beta^{(2)}}{B^{(2)}} + \frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(3)}} + \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(4)}} = \frac{1}{2}, \ \frac{A_\beta^{(2)}}{B^{(2)2}} + \frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(3)2}} + \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(4)2}} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(2)} B^{(3)}} + \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(3)} B^{(4)}} = \frac{1}{3!}, \ \frac{A_\beta^{(2)}}{B^{(2)3}} + \frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(3)3}} + \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(4)3}} = \frac{1}{4}, \ \frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(2)2} B^{(3)}} + \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(3)2} B^{(4)}} = \frac{2!}{4!},$$

$$\frac{A_\beta^{(3)}}{B^{(2)} B^{(3)2}} + \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(3)} B^{(4)2}} = \frac{3}{4!} \text{ and } \frac{A_\beta^{(4)}}{B^{(2)} B^{(3)} B^{(4)}} = \frac{1}{4!}.$$

Novamente, os coeficientes não dependem de β. Entretanto, diferentemente dos casos $m = 2$ e $m = 3$, só há uma solução igual aquela apresentada em (32)

$$2A^{(1)} = 2A^{(4)} = A^{(2)} = A^{(3)} = \frac{1}{3} \text{ e } B^{(2)} = B^{(3)} = 2B^{(4)} = 2.$$

Em outras palavras,

$$x_{\beta,k+1} = x_{\beta,k} + \frac{\Delta t}{6} \left(F_{\beta,k}^{(1)} + 2F_{\beta,k}^{(2)} + 2F_{\beta,k}^{(3)} + F_{\beta,k}^{(4)} \right),$$

onde

$$F_{\beta,k}^{(1)} = f_{\beta,k}, \ F_{\beta,k}^{(2)} = f_\beta \left(\left\{ x_{\gamma,k} + \frac{\Delta t}{2} f_{\gamma,k} \right\}, t_k + \frac{\Delta t}{2} \right),$$

$$F_{\beta,k}^{(3)} = f_\beta \left(\left\{ x_{\gamma,k} + \frac{\Delta t}{2} F_{\gamma,k}^{(2)} \right\}, t_k + \frac{\Delta t}{2} \right) \text{ e } F_{\beta,k}^{(4)} = f_\beta \left(\left\{ x_{\gamma,k} + \Delta t F_{\gamma,k}^{(3)} \right\}, t_k + \Delta t \right).$$