Mecânica Clássica Computacional - 7600033 - 1S/2026
Projeto 3: Solução de equações diferenciais pelo método iterativo

Descrição

Discutiremos nesse projeto como solucionar equações diferenciais pelo método iterativo onde o espaço é discretizado numa grade. Em particular, vamos nos focar em equações elípticas. Como referência, veja o capítulo 6 do Koonin & Meredith.

1. **Equação de Poisson em** $d = 1$
   Considere a equação diferencial

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x) = S(x) = 6x, \tag{1}$$

definida em $x \in [0, 1]$, com a condição de contorno $\psi(0) = \psi(1) = 0$. A solução analítica é simples e igual a

$$\psi(x) = x\left(1 - x^2\right). \tag{2}$$

A equação (1) pode ser obtida da minimização do funcional

$$E = \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)\right)^2 - S(x)\,\psi(x)\right], \tag{3}$$

com respeito a todas as funções $\psi(x)$ que obedecem as mesmas condições de contorno (vide detalhes na seção A). (Para a solução (2), o valor mínimo do funcional é $E_{\min} = -2/5$.)
O nosso objetivo é encontrar uma solução numérica para $\psi(x)$ usando o método iterativo. Primeiramente, devemos discretizar o espaço em unidades de h de tal maneira que os pontos discretizados da rede são $x_j = jh$, com $j = 0, 1, \ldots, N+1$. Dessa maneira, temos N pontos entre $x = 0$ e $x = 1$. O campo $\psi(x)$ também se torna discretizado com $\psi(x_j) \to \psi_j$. Naturalmente, as condições de contorno se tornam $\psi_0 = \psi_{N+1} = 0$. O método iterativo tem por objetivo obter os outros N valores do campo $\{\psi_1, \ldots, \psi_N\}$. O método consiste em iterar a Eq. (1) até que um determinado critério de convergência seja satisfeito. Naturalmente, devemos discretizar a Eq. (1). Tal discretização não é única. Aqui, iremos utilizar a segunda derivada de 3 pontos (a mais simples e menos acurada). (Naturalmente, outras derivadas numéricas mais acuradas podem ser utilizadas resultando em convergências mais rápidas.) Logo, a Eq. (1) se torna

$$-\left(\frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{h^2}\right) = S_j, \;\Rightarrow\; \psi_j = \frac{1}{2}\left(\psi_{j+1} + \psi_{j-1} + h^2 S_j\right). \tag{4}$$

Iterando a Eq. (4) (sempre usando o valor de ψ_j atualizado) até que um critério de convergência seja satisfeito, nos fornece uma solução numérica para $\psi(x)$. Este é o método por iteração.

   (a) Como a solução analítica é conhecida, vamos iterar $M = 10^4$ vezes e comparar o resultado numérico com o analítico em cada uma dessas iterações. Aqui, cada iteração é definida como uma varrida completa por todos $\psi_{j=1,\ldots,N}$ fazendo a atualização (4). Após cada iteração, calcule o valor do funcional

$$E = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{1}{2h}\left(\psi_j - \psi_{j-1}\right)^2 + hS_j\psi_j \tag{5}$$

   e faça um gráfico de $\delta E = |E - E_{\min}|$ como função da k-ésima iteração $\{k = 1, \ldots, M\}$. Utilize como valor inicial $\psi_j = 0$, $\forall j$. Essa tarefa deve ser repetida para os seguintes valores de discretização $N = 10,\ 20,\ 30, \ldots,\ 100$. Os seus resultados para diferentes N devem ser apresentados num mesmo gráfico log-linear. Interprete o seu resultado. Por que δE satura em $\delta E_{\text{saturado}}$? Estude como $\delta E_{\text{saturado}}$ depende de N.

(b) Repita o exercício anterior mas para a quantidade

$$\delta\psi = h\sum_{j=1}^{N} \left|\psi\left(x_j\right) - \psi_j\right|, \tag{6}$$

onde $\psi\left(x_j\right)$ é o valor analítico (2) de ψ calculado em $x_j = hj$. Visualize ψ_j como função de jh e compare com o resultado analítico (2).

(c) O que se pode concluir sobre a relação entre o número de iterações requeridas para que uma determinada precisão seja alcançada e o valor da discretização N? Para isso, ajuste $\delta E \sim e^{-\lambda_E k}$ e $\delta\psi \sim e^{-\lambda_\psi k}$ para intervalos de iterações k cuidadosamente escolhidos e verifique a dependência de $\lambda_{E,\psi}$ com N.

(d) É bastante desejável diminuir o número de iterações necessárias para se alcançar um determinada precisão. Uma possível estratégia para tal é "misturar" o valor antigo do campo ψ_j com o atualizado. Pensando dessa maneira, vamos propor a seguinte generalização da Eq. (4):

$$\psi_j \to \left(1-\omega\right)\psi_j + \omega\frac{1}{2}\left(\psi_{j+1} + \psi_{j-1} + h^2 S_j\right). \tag{7}$$

A constante ω é conhecida por parâmetro de relaxação e controla a mistura entre o valor antigo do campo ψ_j e o valor atualizado $\frac{1}{2}\left(\psi_{j+1} + \psi_{j-1} + h^2 S_j\right)$. Ela deve ser escolhida a fim de maximizar a velocidade de convergência.
Desejamos agora estudar como o valor de ω muda a velocidade de convergência. Para isso, repita os itens 1a e 1b para vários valores de $\omega \in]0, 2[$ e faça um único gráfico de λ como função de ω para os diferentes valores de N. Sendo ω^* o valor de ω que maximiza λ, faça um gráfico de ω^* como função de N e discuta seus resultados.
(Outras estratégias para minimizar o número de iterações necessárias é utilizar um bom valor inicial para o valor do campo ψ_j. Para isso, costuma-se utilizar o método de iteração começando com uma rede de discretização pequena e de rápida convergência e aumenta-se o tamanho da rede (o valor de N) utilizando como valor inicial de ψ aquele obtido da rede menor interpolado para a rede maior.)

(e) Por fim, desejamos estudar um critério de convergência. Imagine que não conhecemos a solução analítica (2). Quando devemos parar o método iterativo neste caso? Uma possível escolha é a seguinte. Seja $\{\psi_{j,k}\}$ o campo discretizado após a k-ésima iteração. Podemos assumir que a solução convergiu caso o campo não tenha mudado apreciavelmente em relação a si mesma após algumas iterações. Essa ideia pode ser quantificada através de

$$\delta\tilde{\psi} = h\sum_{j=1}^{N} \left|\psi_{j,k} - \psi_{j,k-l}\right|, \tag{8}$$

onde compara-se o campo "antigo" $\psi_{j,k-l}$ com o "novo" $\psi_{j,k}$ distantes l iterações entre si. Um critério de parada ideal seria quando $\delta\tilde{\psi} \leq \epsilon$ com ϵ sendo a precisão de máquina. Entretanto, isso é raramente praticável. Aqui, usando $l = 20$ (ou seja, comparando os campos $l = 20$ iterações de distância entre si), calcule o número de iterações M necessárias para que o critério de parada (8) seja satisfeito com $\epsilon = 10^{-6}$ como função de ω para os diferentes valores de N. (Novamente, todos esses resultados devem estar no mesmo gráfico.) Finalmente, verifique se esse critério foi satisfatório calculando $\delta\psi$ em (6) para o campo convergido.

2. **Hidrodinâmica: fluxo viscoso estacionário em $d = 2$**
Desejamos agora estudar o fluxo de um líquido passando por um obstáculo como ilustrado na Fig. 1. Para isso, precisamos de algumas quantidades chaves como o campo de densidade $\rho\left(\mathbf{r}, t\right)$, de velocidades $\mathbf{v}\left(\mathbf{r}, t\right)$ e de pressão $P\left(\mathbf{r}, t\right)$. Essas quantidades estão relacionadas por duas equações fundamentais da hidrodinâmica:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\nabla\cdot\left(\rho\mathbf{v}\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = -\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v} - \rho^{-1}\nabla P + \eta\nabla^2\mathbf{v}. \tag{10}$$

A Eq. (9) é a equação de continuidade que traduz-se na conservação de massa ao longo do fluxo. A Eq. (10) é a famosa equação de Navier-Stokes que diz como a velocidade muda em resposta às forças convectivas $\left(-\left(\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}\right)$,

superficiais $\left(-\rho^{-1}\nabla P\right)$ e viscosas $\left(\eta\nabla^2\mathbf{v}\right)$. Aqui, η é a viscosidade cinética que assumiremos como constante. (Estaremos negligenciando os efeitos de forças volumétricas como, por exemplo, a força gravitacional.) Evidentemente, falta mais uma equação para a completa determinação desses campos. Esta é a equação de estado do fluido relacionando a pressão com a densidade e o campo de temperatura, se assim for. Caso, a temperatura não seja constante, uma outra equação de conservação/transporte de energia se faz necessária. Aqui, iremos estudar um fluido mais simples incompressível e cuja temperatura é uniforme. Além disso, iremos considerar o caso de um fluxo bidimensional estacionário como ilustra a Fig. 1. (Podemos pensar que estamos olhando um seção transversal a z onde o movimento nesta pode ser negligenciado. Também estamos considerando o caso estático longe do regime turbulento. Neste caso, os campo são estáticos.)
Dada essas simplificações, e definindo os campos de linhas de fluxo ψ e vorticidade ζ como

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ e } v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{11}$$

e

$$\zeta \equiv \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\nabla^2\psi, \tag{12}$$

as equações (9) e (10) simplificam para (vide detalhes na seção B)

$$\eta\nabla^2\zeta = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \tag{13}$$

$$\nabla^2 P = 2\rho_0\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2\right]. \tag{14}$$

As equações (12) e (13) definem o sistema de equações possibilitando a determinação do campo vetorial $\mathbf{v}$ independentemente do campo de pressão P. Uma vez que o campo de linhas de corrente ψ estiver determinado, a pressão é obtida via (14).
Pela simetria do nosso caso de interesse, o campo de velocidades é simétrico com relação a $y \to -y$ fazendo $v_y \to -v_y$ e mantendo v_x. Dessa maneira, é suficiente resolver as Eqs. (12) e (13) apenas no plano $y > 0$. Resta-nos agora definir as condições de contorno.
Contorno AH: vamos considerar que o fluxo de entrada está suficientemente longe do obstáculo é não é modificado pela presença do mesmo. Logo, $\mathbf{v} = v_0\hat{x}$ na linha AH (vide Fig. 1). Isso resulta em $\zeta = 0$ e $\psi = v_0 y + \text{const}$, onde podemos definir que const $= 0$. Podemos ser mais conservadores e admitir apenas que $\mathbf{v} = v\,(y)\,\hat{x}$. Dessa maneira, as condições de contorno tornam-se $\zeta = 0$ e $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$.
Contornos AB e EF: Por simetria, as linhas centrais AB e EF são linhas de fluxo e, portanto, ψ deve ser constante. Sem perda de generalidade, escolhemos $\psi = 0$. Por simetria, a vorticidade deve ser nula nas linhas de simetria. Logo, $\zeta = 0$.
Contornos BC, CD e DE: Nestes, o fluxo perpendicular a eles é nulo, ou seja, esses contornos são linhas de fluxo. Note desta maneira que a linha ABCDEF é uma única linha de fluxo e portanto, $\psi = 0$. Qual

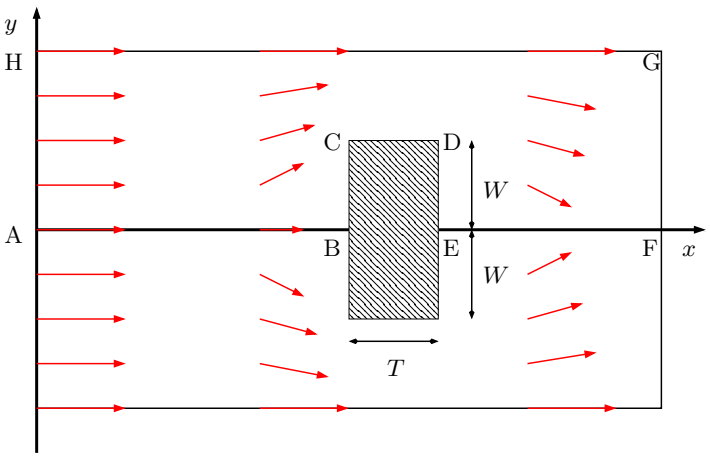

Figura 1: Fluxo de um fluído passando por um obstáculo fixo.

a condição para ζ? Como o fluxo é viscoso, temos que $\mathbf{v} = 0$ nestes contornos. Mas isso apenas define condições para ψ: $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$. Para obter a condição para ζ, vamos considerar o contorno superior CD. Neste, note que $\zeta = -\nabla^2 \psi = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ porque $\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$ significando que o fluxo é tangente à superfície (exceto nas quinas C e D). Logo, expandindo ψ perto desta superfície, temos que $\psi(x, y + \mathrm{d}y) = \psi(x, y) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \mathrm{d}y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) (\mathrm{d}y)^2 = -\frac{1}{2}\zeta (\mathrm{d}y)^2$, porque $\psi(x, y) = 0$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = v_x = 0$ e $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = -\zeta$. Finalmente, a condição de contorno se torna $\zeta = -2\psi(x, y + \mathrm{d}y) / (\mathrm{d}y)^2$. Analogamente, para o contorno BC, $\zeta = -2\psi(x - \mathrm{d}x, y) / (\mathrm{d}x)^2$, e para o contorno DE, $\zeta = -2\psi(x + \mathrm{d}x, y) / (\mathrm{d}x)^2$. Nas quinas C e D, a condição de contorno se torna ambígua.

Contorno GH: Considerando que este se encontra suficientemente longe do obstáculo, o fluxo é então inalterado e $\mathbf{v} = v_0 \hat{x}$. Portanto, $\zeta = 0$ e $\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_0$.

Contorno FG: Considerando que o obstáculo está longe, admitir as mesmas condições do fluxo de entrada em AH seria plausível. Entretanto, podemos admitir uma condição que minimiza os efeitos no fluxo. Esta é $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$ que significa que nada muda com relação à x além dessa fronteira.

Uma vez definida as equações diferenciais e suas condições de contorno, podemos agora aplicar o método de iteração. O primeiro passo é discretizar a rede. Definindo $h = \Delta x = \Delta y$ como sendo a distância entre pontos consecutivos da rede, podemos definir quantidades adimensionais onde comprimentos e velocidades estão em unidades de h e v_0, respectivamente. Dessa maneira, definindo $\mathbf{r} = h\tilde{\mathbf{r}}$ $\mathbf{v} = v_0 \tilde{\mathbf{v}}$, $\psi = v_0 h \tilde{\psi}$, $\zeta = v_0 \tilde{\zeta}/h$, e $P = \rho_0 v_0^2 \tilde{P}$ (as quantidades $\tilde{\cdot}$ são adimensionais), as equações se tornam

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}^2 \tilde{\psi} &= -\tilde{\zeta} \\
\tilde{\nabla}^2 \tilde{\zeta} &= R\left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \tilde{y}}\right), \\
\tilde{\nabla}^2 \tilde{P} &= 2\left[\left(\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}}\right)^2\right],
\end{aligned}$$

onde $R = v_0 h/\eta$ é o número de Reynolds da rede. Ele não é o número de Reynolds físico que pode ser definido como $\mathrm{Re} = 2W v_0/\eta$, onde $2W$ é uma medida da dimensão linear do obstáculo perpendicular ao fluxo. Dessa maneira, relacionamos os número de Reynolds físico e da rede através de $R = 2\frac{W}{h}\mathrm{Re}$, ou seja, a razão R/Re é tão maior quanto menor for a granulação da rede h em relação a W. Finalmente, as derivadas numéricas se tornam $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \to \frac{\tilde{\psi}_{i+1,j} - \tilde{\psi}_{i-1,j}}{2} \equiv \frac{1}{2}\left(\delta_i \tilde{\psi}\right)_{i,j}$ e $\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^2} \to \tilde{\psi}_{i+1,j} - 2\tilde{\psi}_{i,j} + \tilde{\psi}_{i-1,j} \equiv \left(\delta_i^2 \tilde{\psi}\right)_{i,j}$. Note que estamos utilizando derivadas centrais. Dessa maneira, ambas têm a mesma precisão da ordem de h^2. Portanto, as derivadas numéricas se tornam

$$\left(\delta_i^2 \tilde{\psi}\right)_{i,j} + \left(\delta_j^2 \tilde{\psi}\right)_{i,j} = -\tilde{\zeta}_{i,j} \tag{15}$$

$$\left(\delta_i^2 \tilde{\zeta}\right)_{i,j} + \left(\delta_j^2 \tilde{\zeta}\right)_{i,j} = \frac{1}{4} R\left[\left(\delta_j \tilde{\psi}\right)_{i,j}\left(\delta_i \tilde{\zeta}\right)_{i,j} - \left(\delta_i \tilde{\psi}\right)_{i,j}\left(\delta_j \tilde{\zeta}\right)_{i,j}\right], \tag{16}$$

$$\left(\delta_i^2 \tilde{P}\right)_{i,j} + \left(\delta_j^2 \tilde{P}\right)_{i,j} = 2\left[\left(\delta_i^2 \tilde{\psi}\right)_{i,j}\left(\delta_j^2 \tilde{\psi}\right)_{i,j} - \frac{1}{16}\left(\left(\delta_j \delta_i \tilde{\psi}\right)_{i,j}\right)^2\right]. \tag{17}$$

As condições de contorno são

$$\tilde{\psi}_{i,j} = 0 \text{ e } \tilde{\zeta}_{i,j} = 0 \text{ em AB e EF}, \tag{18}$$

$$\tilde{\psi}_{i,j} = 0 \text{ e } \tilde{\zeta}_{i,j} = -2\tilde{\psi}_{i-1,j} \text{ em BC}, \tag{19}$$

$$\tilde{\psi}_{i,j} = 0 \text{ e } \tilde{\zeta}_{i,j} = -2\tilde{\psi}_{i,j+1} \text{ em CD}, \tag{20}$$

$$\tilde{\psi}_{i,j} = 0 \text{ e } \tilde{\zeta}_{i,j} = -2\tilde{\psi}_{i+1,j} \text{ em DE}, \tag{21}$$

$$\tilde{\psi}_{i-1,j} = \tilde{\psi}_{i+1,j} \text{ e } \tilde{\zeta}_{i-1,j} = \tilde{\zeta}_{i+1,j} \text{ em FG}, \tag{22}$$

$$\tilde{\psi}_{i,j+1} = 2 + \tilde{\psi}_{i,j-1} \text{ e } \tilde{\zeta}_{i,j} = 0 \text{ em GH}, \tag{23}$$

$$\tilde{\psi}_{i-1,j} = \tilde{\psi}_{i+1,j} \text{ e } \tilde{\zeta}_{i,j} = 0 \text{ em HA}. \tag{24}$$

(a) Escreva um programa que resolva as Eqs. (15) e (16) iterativamente. Neste, faça uma atualização de ψ através de (15), que se torna

$$\tilde{\psi}_{i,j} = \frac{1}{4}\left(\tilde{\psi}_{i+1,j} + \tilde{\psi}_{i-1,j} + \tilde{\psi}_{i,j+1} + \tilde{\psi}_{i,j-1} + \tilde{\zeta}_{i,j}\right),$$

seguida de uma atualização de suas condições de contorno. Em seguida, admita uma atualização das condições de contorno (19)—(21) de ζ sobre o obstáculo. Finalmente, faça uma atualização do campo ζ através da Eq. (16), que se torna

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta}_{i,j} &= \frac{1}{4}\left(\tilde{\zeta}_{i+1,j}+\tilde{\zeta}_{i-1,j}+\tilde{\zeta}_{i,j+1}+\tilde{\zeta}_{i,j-1}\right)\\ &\quad+\frac{R}{16}\left[\left(\tilde{\psi}_{i+1,j}-\tilde{\psi}_{i-1,j}\right)\left(\tilde{\zeta}_{i,j+1}-\tilde{\zeta}_{i,j-1}\right)-\left(\tilde{\psi}_{i,j+1}-\tilde{\psi}_{i,j-1}\right)\left(\tilde{\zeta}_{i+1,j}-\tilde{\zeta}_{i-1,j}\right)\right].\end{aligned}$$

Por causa da não-linearidade das Eqs. (15) e (16), a implementação do método iterativo deve ser via um parâmetro de relaxação ω pequeno (não muito maior que 0.1).

(b) Utilizando redes não muito maiores que 70×30 e obstáculos não muito maiores que $W=6$ e $T=10$, calcule e faça um gráfico do campo vetorial $\mathbf{v}$ para número de Reynolds da rede R entre 0.01 e 8. Para melhor convergência, comece com R e W pequenos e a condição inicial de fluxo livre (sem obstáculo) $\tilde{\mathbf{v}}=\hat{x}$, $\tilde{\psi}=y$, $\tilde{\zeta}=0$ (mais as condições de contorno). Com isso, a convergência é rápida e o fluxo é suave em torno do obstáculo. Depois, aumente R e W utilizando como condição inicial o valor dos campos $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\zeta}$ obtidos anteriormente. Verifique como o fluxo muda para diferentes R e como um vórtice surge atrás do obstáculo para R maiores.

(c) Determine as condições de contorno para o campo de pressão P dado por (17).

(d) Calcule a força de arraste de pressão sobre o obstáculo definida como

$$F_P = 2\left(\int_{BC} P\,(x,y)\,\mathrm{d}y-\int_{DE} P\,(x,y)\,\mathrm{d}y\right),$$

onde as integrais são sobre as faces do obstáculo e o fator 2 é porque as integrais consideram apenas a parte superior dessas. Note de (27) que $\frac{\partial P}{\partial y}=\rho_0\eta\frac{\partial \zeta}{\partial x}$.

(e) Calcule a força de arrate viscoso

$$F_\eta = 2\rho_0\eta\int_{CD}\frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}x=-2\rho_0\eta\int_{CD}\zeta\mathrm{d}x,$$

onde, novamente o fator 2 é porque há outra face no plano inferior $y<0$, e a segunda igualdade vem do fato de que $\frac{\partial v_y}{\partial x}=0$ nas faces laterais do obstáculo.

(f) (Opcional) Calcule o campo $\mathbf{v}$ para outras geometrias como, por exemplo, dois obstáculos um atrás do outro, e um do lado do outro (como numa constrição).

Detalhes matemáticos

A. Cálculo variacional

Dado um funcional

$$E \equiv E\left[\psi\left(x\right)\right] = \int \mathrm{d}x \mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right),$$

desejamos achar a função $\psi\left(x\right)$ que extremiza E. Seja, ψ^* tal função. Logo,

$$E\left[\psi\left(x\right)\right] = E\left[\psi^*\left(x\right) + \epsilon\eta\left(x\right)\right] = E\left[\psi\right] + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right),$$

ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\epsilon} = 0 = \int \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right).$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right) &= \left(\frac{\partial\psi'}{\partial\epsilon}\right)\frac{\partial}{\partial\psi'}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\epsilon}\right)\frac{\partial}{\partial\psi}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial\epsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right) \\
&= \eta'\frac{\partial}{\partial\psi'}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right) + \eta\frac{\partial}{\partial\psi}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right),
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\epsilon} = 0 &= \int \mathrm{d}x\eta'\frac{\partial}{\partial\psi'}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right) + \eta\frac{\partial}{\partial\psi}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right) \\
&= \eta\frac{\partial}{\partial\psi'}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right)\Big|_{x_{\min}}^{x_{\max}} - \int \mathrm{d}x\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial\psi'}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right)\right) + \int \mathrm{d}x\eta\frac{\partial}{\partial\psi}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right) \\
&= \int \mathrm{d}x\eta\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial\psi'}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right)\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right)\right\},
\end{aligned}$$

onde usamos as condições de contorno $\eta\left(x_{\min}\right) = \eta\left(x_{\max}\right) = 0$. Finalmente, como o funcional é extremizado para qualquer $\eta\left(x\right)$ obedecendo as condições de contorno, temos necessariamente que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial}{\partial\psi'}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right)\right) - \frac{\partial}{\partial\psi}\mathcal{L}\left(\psi', \psi, x\right) = 0,$$

que é a equação de Euler-Lagrange. Para o funcional da Eq. (3), temos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\psi'\right) + S\left(x\right) = \psi'' + S\left(x\right) = 0,$$

que recupera a Eq. (3).

B. Fluxo bidimensional de um fluido incompressível

Para o caso de um fluido incompressível $\rho\left(r\right) = \rho_0$ num fluxo estacionário, as Eqs. (9) e (10) simplificam para

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \tag{25}$$

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\rho_0^{-1}\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right), \tag{26}$$

$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\rho_0^{-1}\frac{\partial P}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right). \tag{27}$$

Poderíamos discretizar essas equações e obter uma solução pelo método de iteração discretizando o plano xy em uma região de interesse do fluxo. Entretanto, podemos simplificar essas equações. A equação de continuidade (25) é trivialmente satisfeita admitindo um potencial vetor, i.e., sendo $\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{\Psi}$, a Eq. (25) é naturalmente satisfeita porque $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{\Psi}) = 0$ para todo $\mathbf{\Psi}$. Como $\mathbf{v} \cdot \hat{z} = 0$, então temos que $\mathbf{\Psi} = \psi \hat{z}$, onde o campo $\psi \equiv \psi(x, y)$. Logo,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ e } v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{28}$$

que justifica a definição (11). Note que $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ e, portanto, $\mathbf{v}$ é tangente às linhas de contorno de ψ. Ou seja, as linhas em que ψ é constante são as linhas de fluxo ("streamlines") do fluido. Por essa razão, ψ é conhecido por campo de linhas de fluxo.

É interessante notar que podemos excluir o campo P na determinação dos campos v_x e v_y manipulando as Eqs. (26) e (27). Derivando a primeira com relação a y e subtraindo desta a segunda quando derivada por x, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) &= \eta\left(\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 v_x - \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 v_y\right), \\
\Rightarrow \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &- \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) \\
+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) &= \eta\nabla^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = \eta\nabla^2\left(\nabla^2\psi\right) \\
\Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} &= \eta\nabla^2\zeta,
\end{aligned} \tag{29}$$

onde

$$\zeta \equiv \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\nabla^2\psi, \tag{30}$$

que recuperam as Eqs. (13) e (12), respectivamente. O campo ζ é conhecido como campo vorticidade porque $\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\partial v_y}{\partial z}\hat{x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{z} = \zeta\hat{z}$.

Manipulando as Eqs. (26) e (27), encontramos que

$$\begin{aligned}
\rho_0\nabla^2 P &= \eta\nabla^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) \\
&= \eta\nabla^2(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 - v_x\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) - v_y\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial y}\right) \\
&\quad - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) - v_x\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial y}\right) - \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 - v_y\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) \\
&= -\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right) \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}\right), \\
\Rightarrow \rho_0\nabla^2 P &= 2\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2\right],
\end{aligned} \tag{31}$$

que recupera a Eq. (14).