TEOREMA DE ARNOLD-LIOUVILLE

- A TEORIA DE H-J PODE DAR A IMPRESSÃO DE QUE A SOLUÇÃO DE QUALQUER PROBLEMA HAMILTONIANO PODE SER REDUZIDA A UMA TRANSFORMAÇÃO CANÔNICA.
- MAS ESSA TRANSF. CANÔNICA, E A FUNÇÃO GERATRIZ, SÓ PODE SER OBTIDA COM OPERAÇÕES DE INVERSÃO E INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES CONHECIDAS EM SISTEMAS DITOS INTEGRÁVEIS.

- SISTEMA INTEGRÁVEL (A DEFINIÇÃO NÃO É ÚNICA NA LITERATURA) É AQUELE SISTEMA HAMILTONIANO CONSERVATIVO (COM N GRAUS DE LIBERDADE) EM QUE EXISTEM N CONSTANTES DO MOVIMENTO INDEPENDENTES E EM INVOLUÇÃO.

*OBS: O MOVIMENTO (TRAJETÓRIA) DE $\vec{\eta}$ EM F^{2N} (DE $\dim(F^{2N}) = 2N$) É CONFINADA A UM SUBESPAÇO DE DIMENSÃO $2N-1$ POR CAUSA DE UMA CONSTANTE DO MOVIMENTO

$C \equiv C(\vec{\eta}) = cte$

$\Rightarrow$ HAVENDO M CONST. DE MOVIMENTO $C_j(\vec{\eta}) = cte_j$

$j = 1 \cdots M \Rightarrow \vec{\eta}$ FICA CONFINADO A UM SUBESPAÇO DE DIMENSÃO $2N-M$ QUE É A INTERSEÇÃO DE TODOS OS HIPERPLANOS $C_j(\vec{\eta}) = cte_j$

EXEMPLO:

① PARTÍCULA EM 1D: $\begin{cases} \dim(F^{2N}) = 2 \\ M = 1 \; ; \; C_1 = H \end{cases}$ INTERSEÇÃO DIM = 1

② FORÇA CENTRAL: $\begin{cases} \dim(F^{2N}) = 6 \\ M = 4 \; ; \; C_1 = H, \; C_{234} = \vec{L} \end{cases}$ → INTERSEÇÃO DIM = 2

DEFINIÇÕES:

$F_j \equiv F_j(\vec{\eta})$

- M VARIÁVEIS DINÂMICAS $\{F_j\}$, $j=1,\dots,M$ ESTÃO EM INVOLUÇÃO SE $\{F_i, F_j\} = 0 \quad \forall i,j$

- DUAS FUNÇÕES $A(\vec{\eta})$ E $B(\vec{\eta})$ SÃO INDEPENDENTES SE OS VETORES $\vec{G}_A$ E $\vec{G}_B$ FOREM LINEARMENTE INDEPENDENTES

ONDE $\vec{G}_A \equiv \mathbb{J} \dfrac{\partial A}{\partial \vec{\eta}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A}{\partial \vec{p}} \\ -\frac{\partial A}{\partial \vec{q}} \end{pmatrix}$

{LEMBRE-SE QUE $\mathbb{J} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{1} \\ \hline -\mathbb{1} & 0 \end{array}\right)$}

$\dot{\vec{\eta}} = \mathbb{J} \dfrac{\partial H}{\partial \vec{\eta}}$

LEMBRE-SE QUE 2 VETORES $\vec{u}$ E $\vec{v}$ SÃO LI ENTÃO $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ APENAS SE $\alpha = \beta = 0$

i.e., $\vec{u}$ E $\vec{v}$ NÃO SÃO PARALELOS (OU ANTI-PARALELOS)

- O FLUXO DE H SERÁ DENOTADO POR g_H^t. ENTÃO A DINÂMICA (EVOLUÇÃO TEMPORAL) DE $\vec{\eta}(t)$ É $\vec{\eta}(t) = g_H^t \vec{\eta}_0 = \vec{\eta}_t$

TEOREMA (ARNOLD-LIOUVILLE):

SE EXISTEM N FUNÇÕES $F_i(\vec{\eta})$, $i=1,\dots,N$, $\vec{\eta} \in \mathbb{F}^{2N}$, INDEPENDENTES E EM INVOLUÇÃO, ENTÃO:

1- A HIPERSUPERFÍCIE $\mathcal{M}_{\vec{f}} = \{ \vec{\eta}(\vec{q},\vec{p}) \mid F_i(\vec{\eta}) = f_i, i=1\dots N \}$ ONDE $\vec{f} = (f_1,\dots,f_N)$ É UM VETOR CONSTANTE, É INVARIANTE PELO FLUXO DE H.

2- SE $\mathcal{M}_{\vec{f}}$ FOR LIMITADA E CONEXA (FINITA E NÃO-DISJUNTA) ENTÃO $\mathcal{M}_{\vec{f}}$ É DIFEOMORFA A UM TORO N-DIMENSIONAL DEFINIDO COMO O PRODUTO DIRETO DE N-CÍRCULOS

③ – SE ②, ENTÃO EXISTEM COORDENADAS $\vec{\phi} = (\phi_1 \dots \phi_N)$ SOBRE $M_{\vec{f}}$ TAIS QUE

$$\frac{d\vec{\phi}}{dt} = \vec{\omega}(\vec{f}) = cte$$

OU SEJA, O MOVIMENTO GERADO POR H É PERIÓDICO.

④ – AS EQS. DE MOVIMENTO PODEM SER INTEGRADAS POR QUADRATURAS, i.e., POR OPERAÇÕES QUE ENVOLVEM APENAS INVERSÃO E/OU INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES CONHECIDAS. EM OUTRAS PALAVRAS, AS EQS DE MOV. PODEM SER INTEGRADAS POR UMA TRANSF. CANÔNICA $(\vec{q},\vec{P}) \to (\vec{\phi},\vec{J})$ TAL QUE $H = H(\vec{J})$

PROVA DE ① – MOSTRAR QUE OS ÍNDICES f_i (QUE INDEXAM $M_{\vec{f}}$) SÃO ctes.

ESCOLHA $F_1 = H$. SE $\vec{\eta}_0 \in M_{\vec{f}}$ $\Rightarrow$ $\vec{F}(\vec{\eta}_0) = \vec{f}_0 = \vec{f}$

$$\Rightarrow \frac{dF_i}{dt} = \{F_i, H\} = \{F_i, F_1\} = 0$$

(EM INVOLUÇÃO; POR HIPÓTESE $\{F_i, F_j\} = 0$)

$\Rightarrow$ $F_i(\vec{\eta}) = F_i(\vec{\eta}_0) =$ ctes DO MOVIMENTO

$\Rightarrow$ TRAJETÓRIA DE $\vec{\eta}$ NÃO SAI DE $M_{\vec{f}}$

$\Rightarrow$ $M_{\vec{f}}$ É INVARIANTE PELO FLUXO DE H.

LEMA: SE UM SISTEMA HAMILTONIANO CONSERVATIVO DE N GRAUS DE LIBERDADE ADMITE N ctes DO MOVIMENTO $F_i(\vec{\eta})$, $i = 1 \dots N$ EM INVOLUÇÃO E A MATRIZ W COM

$$W_{ke} = \frac{\partial F_k}{\partial P_e}$$ É NÃO-SINGULAR (i.e., INVERSÍVEL)

$\Rightarrow$ $\exists$ TRANSF. CANÔNICA $(\vec{q},\vec{P}) \to (\vec{\phi},\vec{J})$ TAL QUE $H = H(\vec{J})$.

PROVA DO LEMA:

IDÉIA: REFAZER A TRANSF. CANÔNICA PARA VARIÁVEIS DE AÇÃO E ÂNGULO JÁ QUE EXISTEM N CONSTANTES DO MOVIMENTO

$$(\vec{q}, \vec{p}) \xrightarrow{S(\vec{q}, \vec{J})} (\vec{\phi}, \vec{J})$$

- $\vec{p} = \dfrac{\partial S}{\partial \vec{q}} = \vec{\psi}(\vec{q}, \vec{J})$

- IDENTIFICANDO $\vec{J} = \vec{F}(\vec{\eta})$ ⇒ $J_K = F_K(\vec{q}, \vec{\psi}(\vec{q}, \vec{J}))$

  = CONSTANTES DO MOV.

  FUNÇÃO IMPLÍCITA

⇒ DIFERENCIANDO $\dfrac{\partial}{\partial q_\ell}$

$$\frac{\partial J_K}{\partial q_\ell} = 0 = \frac{\partial f_K}{\partial q_\ell} + \sum_m \frac{\partial F_K}{\partial \psi_m} \frac{\partial \psi_m}{\partial q_\ell}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_K}{\partial q_\ell} = -\sum_m \frac{\partial F_K}{\partial P_m} \frac{\partial \psi_m}{\partial q_\ell} = -\sum_m W_{Km} \frac{\partial \psi_m}{\partial q_\ell}$$

DA HIPÓTESE: $\{F_K, F_\ell\} = 0$

$$\Rightarrow \sum_j \left(\frac{\partial F_K}{\partial q_j} \frac{\partial F_\ell}{\partial P_j} - \frac{\partial F_K}{\partial P_j} \frac{\partial F_\ell}{\partial q_j} \right) = 0 = \sum_{jm} -W_{Km} \frac{\partial \psi_m}{\partial q_j} W_{\ell j} + W_{Kj} \frac{\partial \psi_m}{\partial q_j} W_{\ell m}$$

↓ TROCAR ÍNDICES MUDOS $j \leftrightarrow m$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{jm} W_{Km} \left(-\frac{\partial \psi_m}{\partial q_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial q_m} \right) W_{\ell j} = 0}$$

DEFININDO $\chi_{jm} = \dfrac{\partial \psi_j}{\partial q_m} - \dfrac{\partial \psi_m}{\partial q_j}$

ENTÃO $\sum_{jm} W_{km} X_{mj} W_{lj} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{W X W^T = 0}$$

COMO W TEM INVERSA, W^{-1}

$$\Rightarrow W^{-1} W X W^T = 0 \Rightarrow X W^T = 0 \Rightarrow X W^T (W^T)^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{X = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \psi_j}{\partial q_m} = \frac{\partial \psi_m}{\partial q_j}}$$

$\Rightarrow$ HÁ UMA FUNÇÃO Φ

TAL QUE $\psi_k = \frac{\partial \Phi}{\partial q_k}$

$\Rightarrow P_k = \psi_k = \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \Rightarrow \Phi = S \Rightarrow$ EXISTE A FUNÇÃO GERATRIZ

QUE NOS LEVA DE $(\vec{q}, \vec{P}) \rightarrow (\vec{\phi}, \vec{J})$ VARIÁVEIS DE AÇÃO E ÂNGULO

PROVA DA EXISTENCIA DE Φ

A QUANTIDADE $\Omega = \sum_i f_i \, dx_i$ É DIFERENCIAL EXATA SE $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

SE Ω É DIF. EXATA $\Rightarrow \exists \, F(\vec{x})$ TAL QUE $dF = \Omega = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$

$$\Rightarrow f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

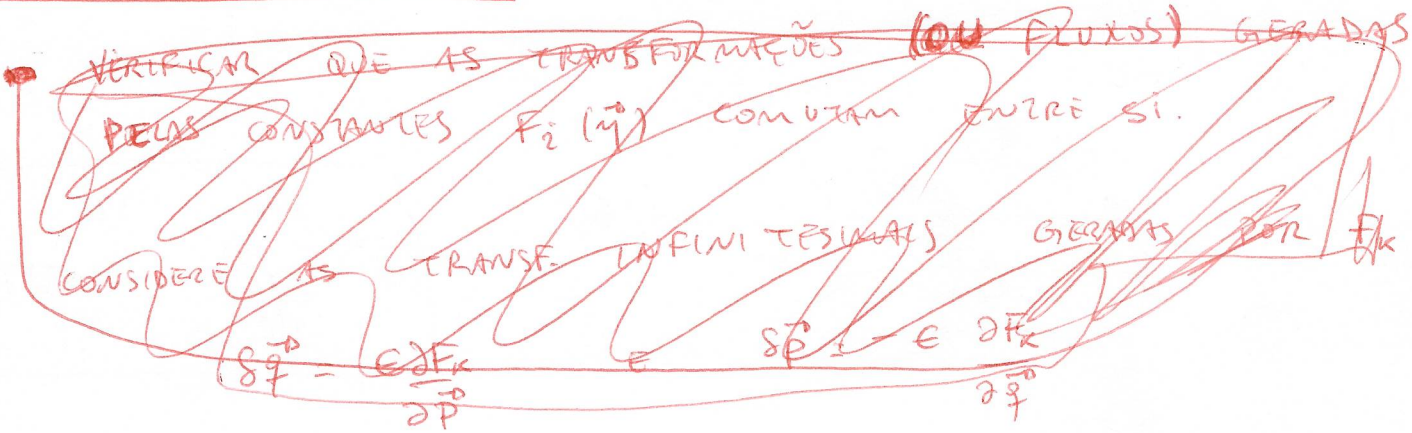
MAS $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$

PROVA DE (4)

DADO (1) ⇒ TEM-SE AS HIPÓTESES DO LEMA.

COM A PROVA DO LEMA ⇒ TEM-SE (4)

PROVA DE (2) E (3)



- NOTE QUE OS VETORES $\vec{G}_i = \mathbb{J}\frac{\partial F_i}{\partial \vec{\eta}}$ SÃO PARALELOS (TANGENTES) AO HIPERPLANO $\mathcal{M}_{\vec{f}}$

⇒ $\vec{G}_i$ GERAM UM CAMPO VETORIAL SOBRE $\mathcal{M}_{\vec{f}}$

⇒ EM CADA PONTO $\vec{\eta} \in \mathcal{M}_{\vec{f}}$ TEMOS N VETORES L.I.

$\vec{G}_1(\vec{\eta}), \vec{G}_2(\vec{\eta}), \cdots, \vec{G}_N(\vec{\eta})$

PROVA: PARA MOSTRAR QUE $\vec{G}_i$ É TANGENTE À $\mathcal{M}_{\vec{f}}$, BASTA MOSTRAR QUE $\vec{G}_i \cdot \vec{\mu}_j = 0$ ONDE $\vec{\mu}_j$ É PERPENDICULAR À $\mathcal{M}_{\vec{f}}$

QUEM É $\vec{\mu}_j$? $\vec{\mu}_j = \nabla_{\vec{\eta}} F_j$ GRADIENTE DE F_j NO ESPAÇO DE FASE

$= \begin{pmatrix} \partial F_j/\partial \vec{q} \\ \partial F_j/\partial \vec{p} \end{pmatrix}$

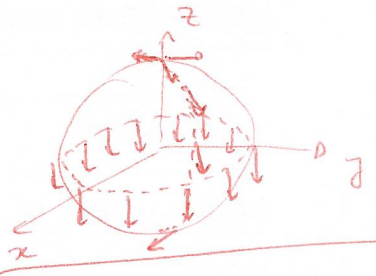
⇒ $\vec{\mu}_i \cdot \vec{G}_j = \sum_k \frac{\partial F_i}{\partial q_k}\frac{\partial F_j}{\partial p_k} - \frac{\partial F_i}{\partial p_k}\frac{\partial F_j}{\partial q_k} = \{F_i, F_j\}$

POR HIPÓTESE, TODAS AS CONST. ESTÃO EM INVOLUÇÃO,

⇒ $\vec{\mu}_i \cdot \vec{G}_j = 0 \quad \forall\, i,j$

EXEMPLOS DE CAMPOS VETORIAIS SOBRE UMA HIPERSUPERFÍCIE QUE SÃO TANGENTES À MESMA

a) $\vec{G} = \hat{\theta}$ SOBRE UMA ESFERA



PROBLEMAS NOS PÓLOS $\nabla\vec{G} = \infty$

$$\nabla\cdot\vec{G} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 G_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, G_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}G_\phi$$

b) $\vec{G} = \hat{\phi}$ SOBRE UMA ESFERA

TAMBÉM HÁ PROBLEMAS NOS PÓLOS

$\nabla\times\vec{G} = \infty$

$$\nabla\times\vec{G} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(G_\phi\sin\theta) - \frac{\partial G_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial G_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r G_\phi)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r G_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}G_r\right)\hat{\phi}$$

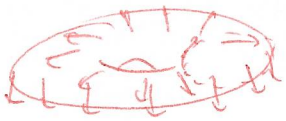
ESSES PROBLEMAS SÃO PQ OS CAMPOS VETORIAIS NÃO SÃO BEM COMPORTADOS SOBRE A ESFERA, APRESENTANDO SINGULARIDADES.

~~POR TRÁS DISSO~~, ESTE RESULTADO É CONHECIDO COMO "NÃO SE PODE PENTEAR UMA ESFERA".

TEREMOS ESSE PROBLEMA SOBRE A SUPERFÍCIE $M_f^{\vec{G}}$?

DE ACORDO COM A (2) DO TEOREMA DE ARNOLD-LIOUVILLE, $M_f^{\vec{G}}$ É DIFEOMORFA A UM TORO ⇒ NÃO HÁ PÓLOS ⇒ NÃO HÁ PROBLEMAS

c)



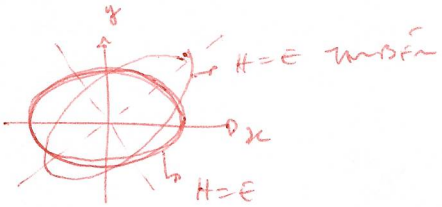
$\nabla\cdot\vec{G}$ E $\nabla\times\vec{G}$ FINITOS

COMO MOSTRAR QUE $\mathcal{M}_f^{\rightarrow}$ É DIFEOMORFA A UM TORO E NÃO A UM OBJETO COMPACTO COMO UMA ESFERA?

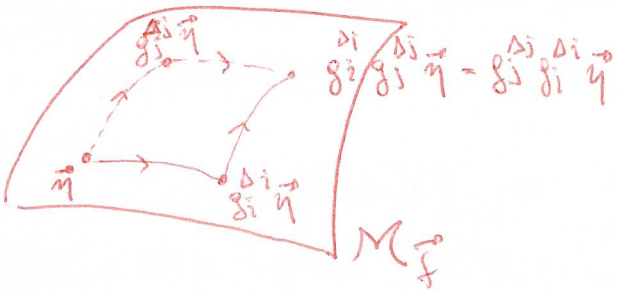
TEMOS QUE "ANDAR" SOBRE $\mathcal{M}_f^{\rightarrow}$ E MAPEÁ-LA

DADO $\vec{\eta}_0$ PODEMOS ANDAR POR TRANS. DE TRANSLAÇÃO TEMPORAL GERADAS POR $F_i = H$, MAS ISSO NÃO COBRE NECESSARIAMENTE TODA A SUPERFÍCIE $\mathcal{M}_f^{\rightarrow}$

EX:



COMO MAPEAR $\mathcal{M}_f^{\rightarrow}$? USAR OS VETORES TANGENTES $\vec{G}_i$



LEMA:

AS TRANSFORMAÇÕES (OU FLUXOS) GERADAS POR $\{\vec{F}_i\}$ COMUTAM

(PROVA MAIS ADIANTE)

$$g_i^{\Delta_i}\, g_j^{\Delta_j} = g_j^{\Delta_j}\, g_i^{\Delta_i}$$

ONDE $g_i^{\Delta_i} = g_{F_i}^{\Delta_i}$

DADO O LEMA, PODEMOS DEFINIR UM "SUPER FLUXO" SOBRE $\mathcal{M}_f^{\rightarrow}$ QUE COMBINA TODAS AS POSSÍVEIS "DINÂMICAS" GERADAS POR $\{F_i\}$

$$g^{\vec{\Delta}} = g_1^{\Delta_1} g_2^{\Delta_2} \cdots g_N^{\Delta_N} = g_2^{\Delta_2} g_1^{\Delta_1} \cdots g_N^{\Delta_N} \quad \text{(NÃO IMPORTA A ORDEM)}$$

ONDE $\vec{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$

$\Rightarrow$ DADO $\vec{\eta}_0 \in \mathcal{M}_f^{\rightarrow}$, $g^{\vec{\Delta}}\vec{\eta}_0$ "PASSEIA" SOBRE $\mathcal{M}_f^{\rightarrow}$, ASSIM COMO $\vec{\Delta}$ "PASSEIA" SOBRE $\mathbb{R}^N$ $\rightarrow$ ESTE É O NOSSO MAPA

PARA CADA $\vec{\Delta}$, TEMOS $\vec{\eta} = g^{\vec{\Delta}} \vec{\eta}_0$

OU SEJA, O MAPA DE $\mathbb{R}^N \to M_f$ É UM-A-UM.

MAS $\mathbb{R}^N$ NÃO É COMPACTO (LIMITADO).

QUEREMOS PROVAR (2) NO CASO EM QUE M_f É LIMITADA E CONEXA. COMO FICA ESSE MAPA?

COMO OS VETORES $\vec{G}_i$ SÃO L.I. (SE NÃO FOREM $\Rightarrow$ NÃO CONSEGUIMOS EXPANDIR M_f), ENTÃO PODEMOS INVERTER O FLUXO (A TRANSFORMAÇÃO) $g^{\vec{\Delta}}$

PARA $\Delta_i << 1$ (TRANSFORMAÇÕES LOCAIS)

$$\Rightarrow \vec{\eta} = \vec{\eta}_0 + \sum_k \vec{G}_k(\vec{\eta}_0)\Delta_k = \vec{\eta}_0 + \mathbb{G}\vec{\Delta}$$

ONDE $\mathbb{G}$ É MATRIZ CUJAS LINHAS SÃO OS VETORES $\vec{G}_k$

COMO OS VETORES SÃO LI $\Rightarrow$ $\det(\mathbb{G}) \neq 0$

$\Rightarrow$ $\mathbb{G}$ POSSUI INVERSA

$$\Rightarrow \vec{\Delta} = \mathbb{G}^{-1}(\vec{\eta} - \vec{\eta}_0) \Rightarrow$$ MAPA LOCAL UM-A-UM $M_f \to \mathbb{R}^N$

POR HIPÓTESE $\vec{\eta}$ NÃO DIVERGE (M_f É LIMITADO). COMO OBTER $\vec{\Delta}$ ILIMITADO? (DIVERGENTE) $\vec{\Delta} \in \mathbb{R}^N$

$\Rightarrow$ O MAPA NÃO PODE SER UM-A-UM GLOBALMENTE

$\Rightarrow$ DEVE EXISTIR VALORES DE $\vec{\Delta}$ TAIS QUE $g^{\vec{\Delta}} \vec{\eta}_0 = \vec{\eta}_0$

$\Rightarrow$ $\vec{\Delta}$ PODE SER ILIMITADO, MAS $\vec{\eta}$ É LIMITADO

O CONJUNTO DE $\vec{\Delta}$'S TAIS QUE $g^{\vec{\Delta}}\vec{\eta}_0 = \eta_0$

FORMA O GRUPO ESTACIONÁRIO Γ DE $\mathcal{M}_f$

PROPRIEDADES: . $\vec{\Delta} = 0 \in \Gamma$

. Γ INDEPENDE DE $\vec{\eta}_0$

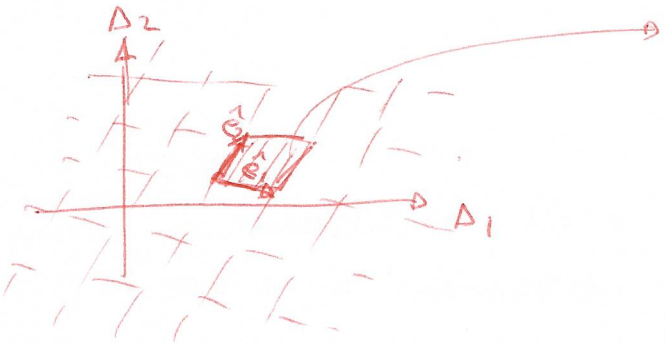
. $\vec{\Delta}_1 \in \vec{\Delta}_2 \in \Gamma \Rightarrow \vec{\Delta}_1 + \vec{\Delta}_2 \in \Gamma$

. $\exists$ VIZINHANÇA DE $\vec{\Delta} = 0$ ONDE $g^{\vec{\Delta}}\vec{\eta}_0 \neq \vec{\eta}_0$, COM $\vec{\eta}_0$ NÃO SENDO UM PT DE EQUILÍBRIO.

$\Rightarrow$ O FLUXO DESLOCA $\vec{\eta}_0$ AO LONGO DE SUA TRAJETÓRIA

$\Rightarrow \Gamma$ É GRUPO DISCRETO

COMO É O MAPA?

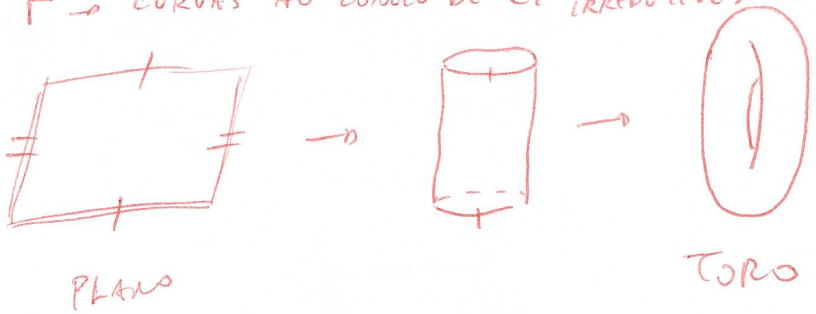


CÉLULA UNITÁRIA É O MAPA DE $\mathcal{M}_f$.

VÁRIAS CÓPIAS DESSE MAPA COBREM O $\mathbb{R}^N$

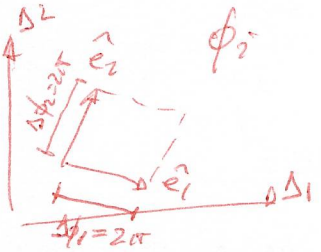
$\hat{e}_i$ = GERADORES DO GRUPO Γ → CURVAS AO LONGO DE $\hat{e}_i$ SÃO OS CIRCUITOS IRREDUTÍVEIS DO TORO

CÉLULA UNITÁRIA:



FIM DA PROVA DE (2)

FINALMENTE, FAZENDO UMA MUDANÇA LINEAR DE $\vec{\Delta}$ PARA $\vec{\phi}$ ONDE



ϕ_i VARIA DE 0 A 2π NA DIREÇÃO $\hat{e}_i$

OU SEJA, $\Delta\vec{\phi} = A\,\vec{\Delta}$

$\Rightarrow$ SOB O FLUXO DE $H = f_i$ $\Rightarrow$ $\vec{\Delta} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

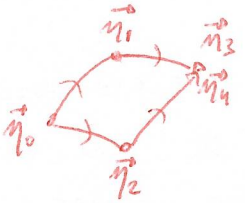
TEMOS QUE $\Delta\vec{\phi} = A\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\Delta\phi_k = A_{k1}\,t = \omega_k t}$

$\Rightarrow \dfrac{d\phi_k}{dt} = \omega_k$

FIM DA PROVA DE (3)

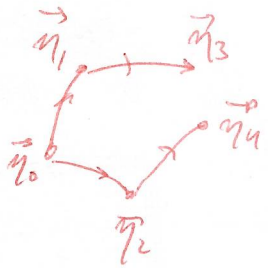
PROVA DO LEMA DE QUE OS FLUXOS COMUTAM

QUEREMOS MOSTRAR QUE



$\vec{\eta}_3 = \vec{\eta}_4$

E NÃO



PRIMEIRAMENTE,

VAMOS CONSIDERAR TRANSFORMAÇÕES INFINITESIMAIS

$$\delta\vec{q} = \delta\,\frac{\partial F}{\partial \vec{p}} \quad \text{e} \quad \delta\vec{p} = -\delta\,\frac{\partial F}{\partial \vec{q}}, \qquad \delta \to 0$$

$$g_k^{\delta}(\vec{\eta}) = \vec{\eta} + \delta\begin{pmatrix} \frac{\partial F_k}{\partial \vec{p}} \\ -\frac{\partial F_k}{\partial \vec{q}} \end{pmatrix} = \vec{\eta} + \delta\,\vec{J}\,\frac{\partial F_k}{\partial \vec{\eta}} = \vec{\eta} + \delta\,\vec{G}_k(\vec{\eta})$$

CAMINHO $i\,j$: $\vec{\eta}_0 \to \vec{\eta}_1 = g_i^{\delta_i}(\vec{\eta}_0)$

$$\vec{\eta}_1 \to \vec{\eta}_3 = g_j^{\delta_j}(\vec{\eta}_1) = g_j^{\delta_j}\left(g_i^{\delta_i}(\vec{\eta}_0)\right)$$

CAMINHO δ_i : $\vec{\eta}_0 \to \vec{\eta}_2 = g_j^{\delta_j}(\vec{\eta}_0)$

$\vec{\eta}_2 \to \vec{\eta}_4 = g_i^{\delta_i}\left(g_j^{\delta_j}(\vec{\eta}_0)\right)$

QUE VALE $\delta\vec{\eta} = \vec{\eta}_4 - \vec{\eta}_3$?

TAYLOR : $\delta\vec{\eta} = \delta\vec{\eta}(\delta_i, \delta_j) = A_1\delta_i + A_2\delta_j + A_3\delta_i\delta_j + A_4\delta_i^2 + A_5\delta_j^2 + O(\delta^3)$

- DE $\delta_i = 0 \Rightarrow \delta\vec{\eta} = 0 = A_2\delta_j + A_5\delta_j^2 \Rightarrow A_2 = A_5 = 0$
- DE $\delta_j = 0 \Rightarrow \delta\vec{\eta} = 0 = A_1\delta_i + A_4\delta_i^2 \Rightarrow A_1 = A_4 = 0$

QUE VALE A_3 ?

$$g_i^{\delta_i}\left(g_j^{\delta_j}(\vec{\eta})\right) = g_i^{\delta_i}\left(\vec{\eta} + \delta_j\vec{G}_j(\vec{\eta})\right) = \vec{\eta} + \delta_j G_j(\vec{\eta}) + \delta_i\vec{G}_i\left(\vec{\eta} + \delta_j\vec{G}_j(\vec{\eta})\right)$$

$$\vec{G}_i\left(\vec{\eta} + \delta_j\vec{G}_j\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\vec{p}}\left(F_i(\vec{\eta} + \delta_i\vec{G}_i)\right) \\ -\frac{\partial}{\partial\vec{q}}\left(F_i(\vec{\eta} + \delta_j\vec{G}_j)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\vec{p}}\left(F_i(\vec{q} + \delta_j\frac{\partial F_j}{\partial\vec{p}}, \vec{p} - \delta_j\frac{\partial F_j}{\partial\vec{q}})\right) \\ -\frac{\partial}{\partial\vec{q}}\left(F_i(\vec{q} + \delta_j\frac{\partial F_j}{\partial\vec{p}}, \vec{p} - \delta_j\frac{\partial F_j}{\partial\vec{q}})\right) \end{pmatrix}$$

MAS (TAYLOR) $F_i(\vec{\eta} + \delta_i\vec{G}_j) = F_i(\vec{\eta}) + \delta_j\left(\frac{\partial F_i}{\partial\vec{q}}\frac{\partial F_j}{\partial\vec{p}} - \frac{\partial F_i}{\partial\vec{p}}\frac{\partial F_j}{\partial\vec{q}}\right) + \cdots$

$$= F_i(\vec{\eta}) + \delta_i\{F_i, F_j\}$$

$$\Rightarrow G_i(\vec{\eta} + \delta_j\vec{G}_j) \approx G_i(\vec{\eta}) + \delta_j\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\vec{p}}\{F_i, F_j\} \\ -\frac{\partial}{\partial\vec{q}}\{F_i, F_j\} \end{pmatrix}$$

$$= G_i(\vec{\eta}) + \delta_j\vec{G}_{\{F_i, F_j\}}(\vec{\eta})$$

CONSEQUENTEMENTE,

$$G_j(\vec{\eta} + \delta_i \vec{G}_i) = G_j(\vec{\eta}) + \delta_i \vec{G}_{\{F_i, F_j\}}$$

$$= G_j(\vec{\eta}) - \delta_i \vec{G}_{\{F_i, F_j\}}$$

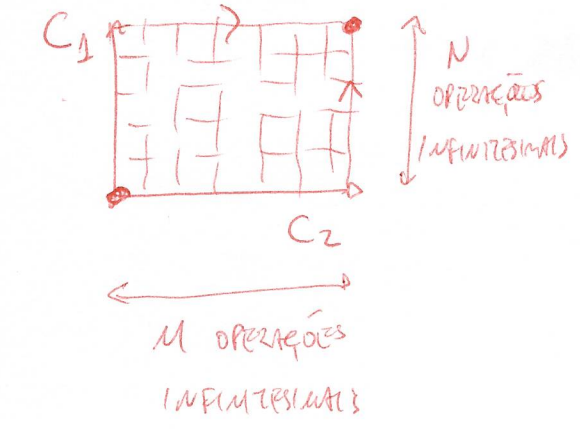
$$\Rightarrow \begin{cases} g_j^{\delta_i}(g_j^{\delta_j}(\vec{\eta})) = \vec{\eta} + \delta_j \vec{G}_j + \delta_i \left(\vec{G}_i + \delta_j \vec{G}_{\{F_i, F_j\}} \right) \\ g_j^{\delta_j}(g_i^{\delta_i}(\vec{\eta})) = \vec{\eta} + \delta_i \vec{G}_i + \delta_j \left(\vec{G}_j - \delta_i G_{\{F_i, F_j\}} \right) \end{cases}$$

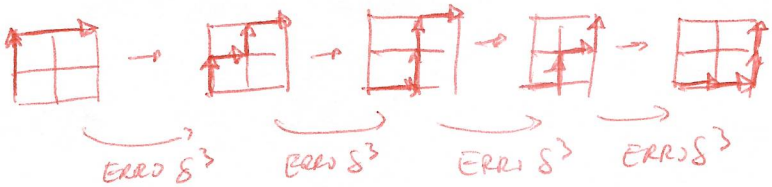
$$\Rightarrow \boxed{\delta\vec{\eta} = 2\delta_i \delta_j \vec{G}_{\{F_i, F_j\}}(\vec{\eta})}$$

SE $\{F_i, f_j\} = 0 \Rightarrow \vec{G}_{\{F_i, F_j\}}(\vec{\eta}) = 0$

$\Rightarrow \delta\vec{\eta} = 0 \Rightarrow$ TRANSF. INFINITESIMAIS COMUTAM ATÉ ORDEM δ^3

E TRANSF. FINITAS?





Q'TAS ~~DEFORMAÇÕES~~ (COMUTAÇÕES INFINITESIMAIS) TEMOS QUE FAZER P/ ~~DEFORMAR~~ $C_1 \to C_2$?

RESPOSTA: $M \times N$

ERRO TOTAL $= M \times N \times \delta^3 = (M\delta)(N\delta) \times \delta$

$= \underbrace{\Delta_1 \times \Delta_2}_{\text{FINITO}} \times \delta \to 0$

$\Rightarrow$ AS TRANSF. FINITAS TAMBÉM COMUTAM