TEORIA DE HAMILTON - JACOBI

VIMOS EXEMPLOS DE TRANSF. CANÔNICAS QUE NOS FORNECERAM COORDENADAS IGNORÁVEIS, I.E., $(\vec{q},\vec{p}) \to (\vec{Q},\vec{P})$ TAIS QUE

$$\begin{cases} \dot{\vec{P}} = -\dfrac{\partial K}{\partial \vec{Q}} = 0 \\ \dot{\vec{Q}} = \dfrac{\partial K}{\partial \vec{P}} = \vec{\omega}(\vec{P}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{P} = \vec{P}_0 \\ \vec{Q} = \vec{Q}_0 + \vec{\omega}(P_0)\,t \end{cases}$$

MAS NÃO TEMOS UM PROCEDIMENTO SISTEMÁTICO P/ OBTER A TRANSFORMAÇÃO QUE NOS LEVE A ESSA SIMPLIFICAÇÃO

A TEORIA DE HAMILTON-JACOBI NOS DÁ UM PROCEDIMENTO P/ SIMPLIFICAR A DINÂMICA DA SEGUINTE MANEIRA

$(\vec{q},\vec{p}) \xrightarrow{F} (\vec{Q},\vec{P})$ TAL QUE $K = 0$

A FUNÇÃO GERADORA (OU GERATRIZ) $F \equiv F_2(\vec{q},\vec{P},t) = S(\vec{q},\vec{P},t)$

É CONHECIDA COMO FUNÇÃO PRINCIPAL DE HAMILTON

*OBS: NEM SEMPRE UM SISTEMA PODE SER RESOLVIDO DESSA MANEIRA. NA VERDADE, O TEOREMA DE ARNOLD-LIOUVILLE NOS DÁ AS CONDIÇÕES EM QUE A TRANSF. S EXISTE. ESSAS CONDIÇÕES SÃO MUITO RESTRITAS, E DEFINEM O QUE CHAMAMOS DE SISTEMAS INTEGRÁVEIS (OU SOLÚVEIS)

(SISTEMAS CAÓTICOS SÃO O OPOSTO DISSO)

QUEM É A FUNÇÃO PRINCIPAL DE HAMILTON?

COMO $S = S(\vec{q}, \vec{P}, t)$ É (FUNÇÃO GERATRIZ DO TIPO F_2)

$$\Rightarrow K = H + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (\text{QUEREMOS} \to 0) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{Q}} = \dfrac{\partial K}{\partial \vec{P}} \to 0 \\ \dot{\vec{P}} = -\dfrac{\partial K}{\partial \vec{Q}} \to 0 \end{cases}$$

ONDE $\begin{cases} \vec{Q} = \dfrac{\partial F_2}{\partial \vec{P}} = \dfrac{\partial S}{\partial \vec{P}} \\ \vec{p} = \dfrac{\partial F_2}{\partial \vec{q}} = \dfrac{\partial S}{\partial \vec{q}} \end{cases}$ VIDE PÁGINA 42

LOGO,

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial P_i} \dot{P}_i \right\} + \frac{\partial S}{\partial t}$$

($\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$; $\dot{P}_i \to 0$; $\frac{\partial S}{\partial t} \to -H$)

$$= \sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - H = L \Rightarrow \boxed{S = \int_0^t dt\, L = \text{AÇÃO}}$$

$+ S_0$ (CTE IRRELEVANTE)

$\Rightarrow$ CONHECER A AÇÃO NOS RESOLVE O PROBLEMA

MAS, ATÉ AGORA, QUERÍAMOS RESOLVER O PROBLEMA P/ CALCULAR A AÇÃO

* NOTE QUE $S = S(q_i, P_f, t) = S(Q, q, t)$ É UMA FUNÇÃO DO GERATRIZ DO TIPO F_1

COMO SABEMOS, COM UMA TRANSF. DE LEGENDRE PODEMOS MUDAR A FUNÇÃO GERATRIZ DE UM TIPO P/ O OUTRO

COMO OBTER A AÇÃO?

NOTE QUE QUEREMOS $K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

com $H = H(\vec{q}, \vec{P}, t) = H(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t)$

⇒ QUEREMOS S TAL QUE

$$\boxed{H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

EQ. DE HAMILTON-JACOBI

A EQ. DE H-J É UMA EQ. DIFERENCIAL PARCIAL DE 1ª ORDEM NAS N+1 VARIÁVEIS INDEPENDENTES

(NOTE QUE $S = S(\vec{q}, \vec{P}, t)$ MAS $\vec{P} = \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{P} = \vec{P}_0 = cte$ ⇒ N+1 VARIÁVEIS)

⇒ SOLUÇÃO GERAL DIFÍCIL POR SE TRATAR DE UMA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR EM GERAL

MAS NÃO NECESSITAMOS DE UMA SOLUÇÃO GERAL, APENAS UMA POSSÍVEL SOLUÇÃO OU SOLUÇÃO PARTICULAR

* COMO S NUNCA APARECE NA EQ. H-J, MAS APENAS SUAS DERIVADAS ⇒ [illegible]

DEVE HAVER N+1 CTES DE INTEGRAÇÃO.

1 DELAS É TRIVIAL, i.e., É UMA SIMPLES ADIÇÃO $S = S + cte$ QUE NÃO ALTERA A TRANSF. CANÔNICA ⇒ DESPREZAR

⇒ HÁ N CTES DE INTEGRAÇÃO NÃO-TRIVIAIS

ESSAS N cts ~~DE INTEGRAÇÃO~~ DEVEM ESTAR LIGADAS AOS N MOMENTOS CONSERVADOS $\vec{P} = \vec{P}_0$ (JP)

$\Rightarrow$ POR SIMPLICIDADE VAMOS ESCOLHER AS N cts DE INTEGRAÇÃO $(\alpha_1 \cdots \alpha_N)$ COMO SENDO OS MOMENTOS $(P_{01}, \cdots, P_{0N})$

i.e., $\vec{P} = \vec{P}_0 = \vec{\alpha}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{P} = \dfrac{\partial S(\vec{q}, \vec{\alpha}, t)}{\partial \vec{q}} \\ \vec{Q} = \vec{\beta} = \dfrac{\partial S}{\partial \vec{P}} = \dfrac{\partial S(\vec{q}, \vec{\alpha}, t)}{\partial \vec{\alpha}} \end{cases}$$

$\vec{Q}$ ↓ TAMBÉM CONSTANTES

AS cts $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ SÃO DETERMINADAS PELAS 2N CONDIÇÕES INICIAIS

$$\vec{P} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}(\vec{q}, \vec{\alpha}, t) \Rightarrow \vec{q} \equiv \vec{q}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, t)$$

$$\vec{P} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}(\vec{q}, \vec{\alpha}, t) \Rightarrow \vec{P} = \vec{P}(\vec{q}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, t), \vec{\alpha}, t) = \vec{P}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{q}_0 = \vec{q}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, 0) \\ \vec{P}_0 = \vec{P}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\alpha} = \vec{\alpha}(\vec{q}_0, \vec{P}_0) \\ \vec{\beta} = \vec{\beta}(\vec{q}_0, \vec{P}_0) \end{cases}$$

HAMILTON - JACOBI INDEPENDENTE DO TEMPO

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = H(\vec{q}, \vec{p})$$

$$K \equiv H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS:

$$S(\vec{q}, \vec{\alpha}, t) = W(\vec{q}, \vec{\alpha}) + R(t)$$

W: SÓ DEPENDE DE $\vec{q}$ E $\vec{\alpha}$ — R: SÓ DEPENDE DO TEMPO

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t} = -H = \text{cte DE SEPARAÇÃO} = -\gamma$$

$$\Rightarrow \gamma = \text{ENERGIA}$$

COMO SÓ EXISTEM N cte DE INTEGRAÇÃO INDEPENDENTES

$$\Rightarrow \gamma \equiv \gamma(\vec{\alpha}) = \gamma(\vec{\alpha}(\vec{p})) = \gamma(\vec{p})$$

EX: PARTÍCULA LIVRE

$$H = \frac{1}{2m} p^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2$$

$$K = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\gamma \rightarrow S = W - \gamma t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 = \gamma \rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\gamma}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{2m\gamma}\, q - \gamma t + \cancel{S_0} \quad \text{DESCARTAR}$$

COMO $S = S(q, P, t) \Rightarrow$ IDENTIFICAMOS $\gamma = P$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2mP} \\ Q = \dfrac{\partial S}{\partial P} = \sqrt{\dfrac{m}{2P}}\, q - t \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} \sqrt{2mP} = p_0 \\ Q = \dfrac{m}{p_0} q_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2P}{m}}(Q+t) = \frac{p_0}{m}\left(\frac{m}{p_0} q_0 + t\right) = q_0 + \frac{p_0}{m} t \\ p(t) &= p_0 \end{aligned}}$$

EX: OSCILADOR HARMÔNICO

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

EQ. H-J: $\boxed{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$

$$\Rightarrow S = W - \gamma t \Rightarrow \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = \gamma$$

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\gamma}\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\gamma}}$$

$$= \sqrt{2m\gamma - m^2\omega^2 q^2}$$

LOGO, $W = \int \sqrt{2m\gamma - m^2\omega^2 q^2}\, dq$

COMO NO CASO DA PARTÍCULA LIVRE, IDENTIFICAMOS $P = \gamma$

AGORA, USAMOS QUE $Q = \text{CONST} = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial W}{\partial P} - \frac{\partial}{\partial P}(Pt)$

$$\Rightarrow Q = \int \frac{\frac{1}{2} \times 2m\, dq}{\sqrt{2m\gamma - m^2\omega^2 q^2}} - t$$

$$\Rightarrow Q + t = \int \frac{dq}{\omega \sqrt{\frac{2\gamma}{m\omega^2} - q^2}} \Rightarrow \boxed{\omega(t+Q) = \int \frac{dq}{\sqrt{A^2 - q^2}}}$$

ONDE $A^2 = \frac{2\gamma}{m\omega^2}$. MUDANÇA DE VARIÁVEL: $\sin u = q/A$

$$\Rightarrow +\cos u\, du = \frac{1}{A}\, dq$$

$$\Rightarrow \underbrace{\omega t + \omega Q}_{\phi} = \int \frac{+A\cos u\, du}{A\sqrt{1 - \sin^2 u}} = u$$

FINALMENTE, $\sin u = q/A = \sin(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow \boxed{q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \phi)} = A \sin(\omega t + \phi)$$

E $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mP - m^2\omega^2 q^2} = \sqrt{2mP - \frac{m^2\omega^2 2P}{m\omega^2}\sin^2(\,)}$

$$= \sqrt{2mP} \times \sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \phi)}$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \sqrt{2mP}\cos(\omega t + \phi)} = m\omega A \cos(\omega t + \phi)$$