LAGRANGEANOS EQUIVALENTES

$$\tilde{L}(\{q\},\{\dot{q}\},t) = L(\{q\},\{\dot{q}\},t) + \frac{d}{dt}G(\{q\},t)$$

MODIFICAÇÃO DE L

TAL MODIFICAÇÃO NÃO ALTERA A EXTREMIZAÇÃO DE L
E, PORTANTO, NÃO MUDA AS EQS. DE MOVIMENTO

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}\,dt \Rightarrow S + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}G\,dt = S + G(\{q(t_2)\},t_2) - G(\{q(t_1)\},t_1)$$

$\Rightarrow \delta\tilde{S} = \delta S$ PORQUE δG EM t_1 E t_2 SÃO NULAS PORQUE AS VARIAÇÕES δq_i SÃO NULAS NOS EXTREMOS t_1 E t_2

$\Rightarrow \boxed{\delta\tilde{S} = 0 = \delta S}$

EX: $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $G = m v_0 x + \frac{1}{2}m v_0^2 t$ $\Rightarrow$ $d/dt\, G = m\left(v_0\dot{x} + \frac{v_0^2}{2}\right)$

$\Rightarrow \tilde{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2v_0\dot{x} + v_0^2)$

$= \frac{1}{2}m(\dot{x}+v_0)^2$ → INTERPRETAÇÃO, MUDANÇA DE REF. INERCIAL

SIMETRIAS E LEIS DE CONSERVAÇÃO

- CONSTANTES DE MOVIMENTO: OU INTEGRAL PRIMEIRA

$f = f(q_1 \cdots q_N, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N, t) =$ CONSTANTE

OU $\frac{d}{dt}f = 0$

- MOMENTO CONJUGADO (OU MOMENTO CANÔNICO CONJUGADO)

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

* SE $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ $\Rightarrow$ $p_k \equiv$ CONST. DO MOVIMENTO E q_k É DITA COORDENADA CÍCLICA OU IGNORÁVEL

← VÍNCULOS HOLONÔMICOS E $\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} = 0$

PROVA: E-L: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$ (2ª)

$= \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_\alpha}$

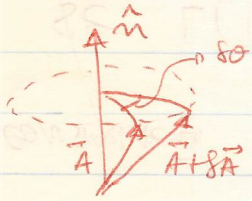
$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(P_k) = 0}$

TRANSLAÇÕES E ROTAÇÕES INFINITESIMAIS

$$\begin{cases} \vec{r}_i' = \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i \\ \vec{v}_i' = \vec{v}_i + \delta\vec{v}_i \end{cases}$$

TRANSLAÇÃO RÍGIDA: $\delta\vec{r}_i = \delta\lambda\,\hat{n}$ e $\delta\vec{v}_i = 0$

ROTAÇÃO RÍGIDA: $\delta\vec{r}_i = \delta\vec{\theta} \times \vec{r}_i$ e $\delta\vec{v}_i = \delta\vec{\theta} \times \vec{v}_i$



$$\delta\vec{A} = \delta\theta\,\hat{n} \times \vec{A} + O(\delta\theta)^2 \cong \delta\vec{\theta} \times \vec{A}$$

- SE L E OS VÍNCULOS (HOLONÔMICOS) SÃO INVARIANTES POR UMA TRANSLAÇÃO RÍGIDA $\Rightarrow$ MOMENTO TOTAL NA DIREÇÃO DA TRANSLAÇÃO É CONSERVADO

$$\delta L = L + \sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha$$

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta\vec{r}_i\right) = \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\right) \cdot \hat{n}\,\delta\lambda = 0$$

MAS $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \hat{n} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \hat{n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\right) \cdot \hat{n}$

$\Rightarrow \sum_i \frac{d}{dt} \vec{p}_i \cdot \hat{n}\,\delta\lambda = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\hat{n} \cdot \vec{P}_T\right) = 0$

$\vec{P}_T = \sum_i \vec{p}_i$

ANALOGAMENTE, P/ ROTAÇÕES

$$0 = \delta \mathcal{L} = \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} \cdot (\delta\vec{\theta} \times \vec{r}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} \cdot (\delta\vec{\theta} \times \vec{v}_i) \right]$$

COMO $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

$$\Rightarrow 0 = \delta\vec{\theta} \cdot \sum_i \left(\vec{r}_i \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} + \vec{v}_i \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_i} \right)$$

$$= \delta\vec{\theta} \cdot \sum_i \left(\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i \right)$$

$$= \delta\vec{\theta} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_T \right) = 0}$$

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA (COM VÍNCULOS DO TIPO $\sum_j a_{\alpha j}\dot{q}_j + a_{\alpha t} = 0$)

~~VÍNCULOS INDEPENDENTES DO TEMPO~~

~~$\delta \mathcal{L} = \frac{d\mathcal{L}}{dt}$~~

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \qquad -\sum_\alpha a_{\alpha t}\lambda_\alpha$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \sum_i \sum_\alpha \lambda_\alpha a_{\alpha i}\dot{q}_i$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt}\left[\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \sum_\alpha \lambda_\alpha a_{\alpha t} = \sum_i \frac{d}{dt}\dot{q}_i p_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \mathcal{L} \right] = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \sum_\alpha \lambda_\alpha a_{\alpha t}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} H = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \sum_\alpha \lambda_\alpha a_{\alpha t}}$$ SE $\mathcal{L}$ NÃO DEPENDE EXPLICITAMENTE DO TEMPO

NA AUSÊNCIA DE VÍNCULOS

$\Rightarrow H = cte \equiv$ INTEGRAL DE JACOBI OU FUNÇÃO ENERGIA

TEOREMA DE NOETHER

SEJA A TRANSF. INFINITESIMAL $\begin{cases} t' = t + \epsilon X(q, t) \\ q_i' = q_i + \epsilon \psi_i(q, t) \end{cases}$

COM ϵ INFINITESIMAL

SE UM SISTEMA MECÂNICO COM N GRAUS DE LIBERDADE É INVARIANTE SOB ESSAS TRANSFORMAÇÕES, ENTÃO C É CONSTANTE DO MOVIMENTO ONDE

$$C = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\dot{q}_i X - \psi_i \right) - LX$$

DIZ-SE QUE A AÇÃO É INVARIANTE SOB ESSAS TRANSFORMAÇÕES SE

$$0 = \Delta S = \int_{t_1'}^{t_2'} L\left(q', \frac{dq'}{dt'}, t'\right) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt$$

PROVA:

$$\frac{dq'}{dt'} = \left(\frac{dt}{dt'}\right)\left(\frac{dq'}{dt}\right) = \frac{1}{1+\epsilon \dot{X}} \left(\dot{q} + \epsilon \dot{\psi}\right) \approx \left(1 - \epsilon \dot{X}\right)\left(\dot{q} + \epsilon \dot{\psi}\right) \quad (+O(\epsilon^2))$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dq_i'}{dt'} = \dot{q}_i + \epsilon\left(\dot{\psi} - \dot{q}\dot{X}\right)} + O(\epsilon^2)$$

$$L\left(q', \frac{dq'}{dt'}, t'\right) = L\left(q + \epsilon\psi,\ \dot{q} + \epsilon\left(\dot{\psi} - \dot{X}\dot{q}\right),\ t + \epsilon X\right)$$

$$= L(q, \dot{q}, t) + \epsilon \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_i} \psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\dot{\psi}_i - \dot{X}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} X \right] + O(\epsilon^2)$$

$$\Rightarrow \Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \epsilon [\ ] \right)(1 + \epsilon \dot{X})\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

$$\Delta S = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left([\,] + \dot{X} L \right) + O(\epsilon^2) = 0$$

$$\Rightarrow [\,] + \dot{X} L = 0$$

- $$\psi_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{\psi}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \psi \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{d}{dt}(\psi) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\left(\psi \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(\psi_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{q}_i \dot{X} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] + X \frac{\partial L}{\partial t} + \dot{X} L = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{d}{dt}\left(\psi_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\left(\sum_i \dot{q}_i \dot{X} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + X \frac{dH}{dt} \right) + \dot{X} L = 0$$

$$\dot{X}(H + L) + X \frac{dH}{dt}$$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{d}{dt}\left(\psi_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d}{dt}(HX) = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\psi_i - \dot{q}_i X \right) + LX \right] = 0}$$

EX: TRANSLAÇÃO TEMPORAL: $\vec{r}' = \vec{r}$ e $t' = t + \epsilon$

$\Rightarrow \psi_i = 0$; $X = 1$ $\Rightarrow \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = cte = H$