TEORIA DE PERTURBAÇÃO INDEPENDENTE DO TEMPO CANÔNICA

OBJETIVO: OBTER SOLUÇÕES APROXIMADAS DE PROBLEMAS QUE NÃO POSSUEM SOLUÇÃO ANALÍTICA.

$$H(\vec{q},\vec{P};\epsilon) = H_0(\vec{q},\vec{P}) + \epsilon H_1(\vec{q},\vec{P}) + \epsilon^2 H_2(\vec{q},\vec{P}) + \cdots$$

$\epsilon \equiv$ PARÂMETRO PERTURBATIVO. $|\epsilon| \ll 1$

$H_0 \equiv$ HAMILTONIANO NÃO PERTURBADO

$H_j \equiv$ PERTURBAÇÕES DE H_0 $(j \geq 1)$

H_0 É INTEGRÁVEL (OU CONHECE-SE UMA SOLUÇÃO "SATISFATÓRIA")

$\Rightarrow$ USAMOS VARIÁVEIS DE AÇÃO/ÂNGULO $\vec{J}_0, \vec{\phi}_0$

$$K_0(\vec{\phi}_0,\vec{J}_0) = K_0(\vec{J}_0) = H_0(\vec{q},\vec{P}) + \cancel{\frac{\partial F_0}{\partial t}}$$

TRANSF. INDEPENDENTE DO TEMPO

OU SEJA $\boxed{H_0(\vec{q},\vec{P}) = K_0(\vec{J}_0)}$

ONDE $H_0(\vec{J}) = \vec{\omega}_0 \cdot \vec{J}_0$, $\boxed{\dot{\vec{\phi}}_0 = \frac{\partial K_0}{\partial \vec{J}_0} = \vec{\omega}_0}$

MAS O PROBLEMA QUE QUEREMOS RESOLVER É

$$H(\vec{q},\vec{P};\epsilon) = H(\vec{\phi}_0,\vec{J}_0;\epsilon) = H_0(\vec{J}_0) + \epsilon H_1(\vec{\phi}_0,\vec{J}_0) + \epsilon^2 H_2(\vec{\phi}_0,\vec{J}_0) + \cdots$$

TAREFA: ENCONTRAR UMA TRANSF. CANÔNICA $(\vec{\phi}_0,\vec{J}_0) \to (\vec{\phi},\vec{J})$ QUE FAÇA $H_m(\vec{\phi}_0,\vec{J}_0) = H_m(\vec{J})$ ATÉ UMA ORDEM m EM ϵ.

$\to$ FUNÇÃO GERATRIZ DO TIPO $F_2 : S \equiv S(\vec{\phi}_0,\vec{J})$

$$S(\vec{\phi}_0, \vec{J}) = \underbrace{\vec{\phi}_0 \cdot \vec{J}}_{\sim} + \epsilon S_1(\vec{\phi}_0, \vec{J}) + \epsilon^2 S_2(\vec{\phi}_0, \vec{J}) + \cdots$$

GERATRIZ DA IDENTIDADE

EQUAÇÕES DA TRANSFORMAÇÃO

$$\vec{J}_0 = \frac{\partial S}{\partial \vec{\phi}_0} = \vec{J} + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \vec{\phi}_0} + \cdots$$

$$\vec{\phi} = \frac{\partial S}{\partial \vec{J}} = \vec{\phi}_0 + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \vec{J}} + \cdots$$

EM 1ª ORDEM EM ϵ:

$$\begin{cases} \vec{J}_0 = \vec{J} + \epsilon \dfrac{\partial S_1(\vec{\phi}, \vec{J})}{\partial \vec{\phi}} + \cdots \\ \vec{\phi}_0 = \vec{\phi} - \epsilon \dfrac{\partial S_1(\vec{\phi}, \vec{J})}{\partial \vec{J}} + \cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow K(\vec{\phi}, \vec{J}) = H(\vec{\phi}_0(\vec{\phi}, \vec{J}), J_0(\vec{\phi}, \vec{J}))$$

$$= H_0\Big(\underbrace{J_0(\vec{\phi}, \vec{J})}_{J + \epsilon\, \partial S_1/\partial \phi}\Big) + \epsilon H_1\left(\vec{\phi}_0(\vec{\phi}, \vec{J}), \vec{J}_0(\vec{\phi}, \vec{J})\right) + \cdots$$

$$= H_0(\vec{J}) + \frac{\partial H_0}{\partial \vec{J}} \cdot \left(\epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \vec{\phi}}\right) + O(\epsilon^2) + \epsilon\left(H_1(\vec{\phi}, \vec{J}) + O(\epsilon)\right)$$

$$= K_0(\vec{J}) + \epsilon K_1(\vec{\phi}, \vec{J}) + O(\epsilon^2)$$

ONDE $\quad K_1(\vec{\phi}, \vec{J}) = H_1(\vec{\phi}, \vec{J}) + \dfrac{\partial H_0}{\partial \vec{J}} \cdot \dfrac{\partial S_1}{\partial \vec{\phi}}$

S_1 É TAL QUE FAZ $K_1(\vec{\phi}, \vec{J}) = K_1(\vec{J})$

$$\Rightarrow \boxed{K_1(\vec{J}) = H_1(\vec{\phi}, \vec{J}) + \vec{\omega}_0 \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \vec{\phi}}}$$

CASO UNIDIMENSIONAL

$$K_1(J) = H_1(\phi, J) + \omega_0 \frac{\partial S_1}{\partial \phi}$$

COMO RESOLVER? SÉRIE DE FOURIER (SE HOUVER)

$$\begin{cases} S_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{S}_{1n}(J)\, e^{in\phi} \\ H_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{H}_{1n}(J)\, e^{in\phi} \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{INVERSA}} \quad \begin{aligned} \tilde{S}_{1n} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_1\, e^{-in\phi}\, d\phi \\ \tilde{H}_{1n} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1\, e^{-in\phi}\, d\phi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\tilde{H}_{1n} + i\omega_0 n \tilde{S}_{1n}\right) e^{in\phi}$$

P/ QUE K_1 NÃO SEJA FUNÇÃO DE ϕ

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{S}_{1n} = \begin{cases} i\, \tilde{H}_{1n}/n\omega_0 & , n \neq 0 \\ 0 & , n = 0 \end{cases}}$$

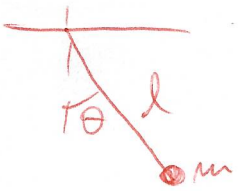
LOGO,

$$\boxed{K_1(J) = \tilde{H}_{1,0}(\phi, J) = \tilde{H}_{1,0}(J) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1(\phi, J)\, d\phi = \langle H_1(\phi, J)\rangle_\phi}$$

OU SEJA, A CORREÇÃO EM 1ª ORDEM P/ O HAMILTONIANO É O VALOR MÉDIO DA PERTURBAÇÃO EM 1 PERÍODO DO MOVIMENTO NÃO PERTURBADO.

$$K(J) = K_0(J) + \epsilon K_1(J) = H_0(J) + \epsilon \langle H_1 \rangle$$

EXEMPLO: PÊNDULO SIMPLES



$$H = \frac{1}{2I} p_\theta^2 + mgl(-\cos\theta)$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{mgl}{2}\left(\theta^2 - \frac{1}{12}\theta^4\right) + O(\theta^6)$$

OSCILADOR HARMÔNICO NÃO PERTURBADO

TERMO PERTURBATIVO

VARIÁVEIS DE AÇÃO E ÂNGULO DO SISTEMA NÃO PERTURBADO

$$2\pi J = \oint p\,dq = \pi ab \quad \text{(ÁREA DA ELIPSE)}$$

$$= \pi\sqrt{2ml^2E}\sqrt{2E/mgl} = 2E\sqrt{\frac{l}{g}}\pi \quad \Rightarrow \quad J = \sqrt{\frac{l}{g}}H_0 \rightarrow H_0 = \omega_0 J$$

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}$$

FUNÇÃO GERATRIZ

~~$$S(q,J) = \int p\,dq = \int \sqrt{2ml^2\left(E - \frac{mgl}{2}\theta^2\right)}\,d\theta$$~~

$$E = H_0 = \omega_0 J = \frac{I\dot\theta^2}{2} + \frac{mgl}{2}\theta^2$$

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t + \delta)$$

$$p_\theta(t) = I\dot\theta = ml^2\theta_0\omega_0\sin(\omega_0 t + \delta)$$

$$= \frac{I}{2}\omega_0^2\theta_0^2\sin^2\phi + \frac{I\omega_0^2\theta_0^2}{2}\cos^2\phi$$

$$= \frac{I}{2}\omega_0^2\theta_0^2$$

$$\Rightarrow \theta_0 = \sqrt{\frac{2J}{I\omega_0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \sqrt{\frac{2J}{ml^2\omega_0}}\cos\phi \qquad p_\theta(t) = -\sqrt{2Jml^2\omega_0}\sin\phi}$$

$$\Rightarrow H = \underbrace{\omega_0 J}_{H_0} \underbrace{- \frac{1}{24} mgl \left(\frac{2J}{ml^2\omega_0}\right)^2 \cos^4\phi}_{H_1 = -\frac{1}{6}\frac{J^2}{ml^2}\cos^4\phi}$$

EM 1ª ORDEM DE TEO. DE PERTURBAÇÕES, SUBSTITUIMOS H_1 POR

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{-J^2}{6ml^2}\right)\cos^4\phi \, d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-J^2}{6ml^2}\right)\frac{3\pi}{4} = \frac{-J^2}{16ml^2}$$

LOGO

$$\boxed{K = \omega_0 J - \frac{J^2}{16ml^2}}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\partial K}{\partial J} = \omega_0 - \frac{J}{8ml^2}$$

A FREQ. PERTURBADA DEPENDE DA AMPLITUDE DO MOVIMENTO $J \propto E$

COMO $E = \omega_0 J - \frac{J^2}{16ml^2}$

$$\Rightarrow E \approx \omega_0 J - \frac{(E/\omega_0)^2}{16ml^2} = \omega_0 J - \frac{E^2}{16mgl} \Rightarrow \boxed{J \approx \frac{E}{\omega_0}\left(1 + \frac{E}{16mgl}\right)}$$

$$\Rightarrow \omega \approx \omega_0 - \frac{E}{8ml^2\omega_0}\left(1 + \frac{E}{16mgl}\right)$$

Q.ª VALE A FUNÇÃO GERATRIZ S_1?

$$H_1 = -\frac{1}{6}\frac{J^2}{ml^2}\cos^4\phi = -\frac{1}{6}\frac{J^2}{ml^2}\left(\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}\right)^4$$

$$= \frac{-1}{96}\frac{J^2}{ml^2}\left(e^{i4\phi} + 4e^{i2\phi} + 6 + 4e^{-i2\phi} + e^{-i4\phi}\right)$$

COMO $\tilde{S}_{1m} = \begin{cases} i\tilde{H}_m/m\omega_0 & , m\neq 0 \\ 0 & , m=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{-iJ^2}{96ml^2\omega_0}\left(\frac{e^{i4\phi}-e^{-i4\phi}}{4} + 4\left(\frac{e^{i2\phi}-e^{-i2\phi}}{2}\right)\right)$$

$$\frac{e^{i4\phi}-e^{-i4\phi}}{4} \sim \frac{i}{2}\sin 4\phi \qquad \frac{e^{i2\phi}-e^{-i2\phi}}{2} \rightarrow 4i\sin 2\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{S_1 = \frac{J^2}{192ml^2\omega_0}\left(\sin 4\phi + 8\sin 2\phi\right)}$$

COMO $\begin{cases} J_0 \approx J + \frac{\partial S_1}{\partial \phi} \\ \phi_0 \approx \phi - \frac{\partial S_1}{\partial J} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_0 \approx J + \frac{J^2}{48ml^2\omega_0}\left(\cos 4\phi + 4\sin 2\phi\right) \\ \phi_0 \approx \phi - \frac{J}{96ml^2\omega_0}\left(\sin 4\phi + 8\sin 2\phi\right) \end{cases}$

ONDE $\begin{cases} J = cte \\ \phi = cte' + \omega t \end{cases}$

cte e cte' CONST. DE INTEGRAÇÃO

CASO N-DIMENSIONAL

VOLTANDO PARA $K_1(\vec{J}) = H_1(\vec{\phi}, \vec{J}) + \vec{\omega}_0 \cdot \frac{\partial S_1}{\partial \vec{\phi}}$

FAZEMOS A SÉRIE DE FOURIER

$$S_1(\vec{\phi}, \vec{J}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=-\infty}^{\infty} \tilde{S}_{i\vec{n}}\, e^{i\vec{n}\cdot\vec{\phi}} \quad , \quad \vec{n} = (n_1 \cdots n_N)$$

$$H_1(\vec{\phi}, \vec{J}) = \sum_{\vec{n}=-\vec{\infty}}^{\vec{\infty}} \tilde{H}_{1\vec{n}}\, e^{i\vec{n}\cdot\vec{\phi}}$$

$$\Rightarrow K_1 = \sum_{\vec{n}=-\vec{\infty}}^{\vec{\infty}} \left(i\,\vec{\omega}_0 \cdot \vec{n}\, \tilde{S}_{i\vec{n}} + \tilde{H}_{i\vec{n}} \right) e^{i\vec{n}\cdot\vec{\phi}}$$

$$\text{LOGO,} \quad \tilde{S}_{i\vec{n}} = \begin{cases} \dfrac{i\,\tilde{H}_{i\vec{n}}(\vec{J})}{\vec{\omega}_0 \cdot \vec{n}} & , \quad \vec{n} \neq 0 \\ 0 & , \quad \vec{n} = 0 \end{cases}$$

DESDE QUE $\vec{\omega}_0 \cdot \vec{n} = n_1 \omega_{01} + n_2 \omega_{02} + \cdots + n_N \omega_{0N} \neq 0$

DEFINIÇÃO: CONDIÇÃO DE RESSONÂNCIA

$$\vec{\omega}_0 \cdot \vec{n} = 0$$

VAMOS TER QUE TRATAR OS 2 CASOS

(i) DE NÃO-RESSONÂNCIA

(ii) DE RESSONÂNCIA

NO CASO (i) DE NÃO-RESSONÂNCIA

$$\Rightarrow K_1(\vec{J}) = \tilde{H}_{1,\vec{0}}(\vec{J}) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(\vec{\phi},\vec{J})\, d\phi_k$$

$$= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} H_1(\vec{\phi},\vec{J}) \frac{d\phi_1}{2\pi} \cdots \frac{d\phi_N}{2\pi} \equiv \langle H_1 \rangle_{\vec{\phi}}$$

$$\Rightarrow K(\vec{J}) = H_0(\vec{J}) + \epsilon \langle H_1 \rangle_{\vec{\phi}}$$

$$S(\vec{\phi},\vec{J}) = \vec{\phi}\cdot\vec{J} + \sum_{\vec{n}\neq 0} i \frac{\tilde{H}_{i\vec{n}}(J)}{\vec{\omega}_0\cdot\vec{n}} e^{i\vec{n}\cdot\vec{\phi}}$$

*OBS: O PROBLEMA É A CONVERGÊNCIA DA SÉRIE P/ S_1. POR CONCRETEZA, CONSIDERE O CASO DE $N=2$ GRAUS DE LIBERDADE.

$$n_1\omega_{01} + n_2\omega_{02} = n_1\omega_{02}\left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} - \left(-\frac{n_2}{n_1}\right)\right)$$

O CASO NÃO-RESSONANTE CORRESPONDE A $\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}$ IRRACIONAL. MAS SABEMOS QUE UM IRRACIONAL PODE SER APROXIMADO POR UM RACIONAL, i.e., $\exists\, n,s$ INTEIROS TAL QUE $\left|\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{n}{s}\right| < \epsilon \;\; \forall \epsilon > 0$

$\Rightarrow$ A CONVERGÊNCIA DEPENDE DOS COEFICIENTES DE FOURIER $\tilde{H}_{1,\vec{n}}$ IREM A ZERO MAIS RÁPIDO DO QUE $\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{n_2}{n_1}$ CORRESPONDENTE.

A DEMONSTRAÇÃO DA CONVERGÊNCIA É DADA PELO TEOREMA KAM

*OBS: ALÉM DA CONVERGÊNCIA P/ S_1, HÁ AINDA O PROBLEMA DA CONVERGÊNCIA DA SÉRIE PERTURBATIVA EM ϵ.

(NÃO VAMOS LIDAR COM ESSE PROBLEMA NESTE CURSO.)

NO CASO (ii) RESSONANTE

TEMOS QUE LIDAR COM O DENOMINADOR DIVERGENTE P/ ALGUNS VALORES DE $\vec{n}$ TAIS QUE $\vec{n}\cdot\vec{\omega}_0 = 0$

POR SIMPLICIDADE, VAMOS CONSIDERAR O CASO $N=2$ GRAUS DE LIBERDADE

SEJA $r = \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} = \frac{R}{S}$, $r \in \mathbb{Q}$ | INTEIROS E PRIMOS ENTRE SI

$\vec{n}\cdot\vec{\omega}_0 = 0 = n_1\omega_{01} + n_2\omega_{02}$ AQUI $n_1 = n_2 = 0$ É TAMBÉM

AQUI $n_1 = pS$ E $n_2 = -pR$, COM p INTEIRO (POSITIVO OU NEGATIVO) MAS NÃO-NULO

$\{\vec{n}_p\} \equiv$ CONJUNTO DE VETORES $\vec{n} = (n_1, n_2)$ DO TIPO $\vec{n} = p(R, -S)$

$$\Rightarrow K = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left(i\vec{\omega}_0\cdot\vec{n}\,\tilde{S}_{i\vec{n}} + \tilde{H}_{i\vec{n}}\right) e^{i\vec{n}\cdot\vec{\phi}}$$

$$= H_{i\vec{0}} + \sum_{p\neq 0} \tilde{H}_{i,pR,-pS}\, e^{ip(R\phi_1 - S\phi_2)} + \sum_{\substack{\vec{n}\neq\vec{0} \\ \vec{n}\neq\{\vec{n}_p\}}} \left(i\vec{\omega}_0\cdot\vec{n}\,\tilde{S}_{i\vec{n}} + \tilde{H}_{i\vec{n}}\right) e^{i\vec{n}\cdot\vec{\phi}}$$

ENTÃO ESCOLHEMOS S_i TAL QUE

$$S_{i\vec{n}} = \begin{cases} 0, & \text{SE } \vec{n} = \vec{0} \text{ OU } \vec{n} = \vec{n}_p \\ \dfrac{i\,\tilde{H}_{i,\vec{n}}}{\vec{\omega}_0\cdot\vec{n}}, & \text{SE } n \neq \vec{0} \text{ E } \vec{n} \neq \vec{n}_p \end{cases}$$

COM ISSO,

$$K = H_{i,\vec{0}} + \sum_{p\neq 0} \tilde{H}_{i,p(R,-S)}\, e^{ip(R\phi_1 - S\phi_2)}$$

$\Rightarrow$ K AINDA DEPENDE DE $\vec{\phi}$

COMO $H_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \tilde{H}_{1,\vec{n}} = \tilde{H}^{*}_{1,-\vec{n}}$

$$\Rightarrow K_1 = H_{1,\vec{0}} + \sum_{p=1}^{\infty} \underbrace{\tilde{H}_{1,p(n_1,-s)}}_{\equiv \alpha_p e^{i p \beta_p}} e^{i p (n\phi_1 - s\phi_2)} + e^{-i p (n\phi_1 - s\phi_2)}$$

$$, \quad \alpha_p = |\tilde{H}_{1,\vec{n}_p}|$$

$$\tan(p\beta_p) = \frac{\mathrm{Re}(\tilde{H}_{1,\vec{n}_p})}{\mathrm{Im}(\tilde{H}_{1,\vec{n}_p})}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 = H_{1,\vec{0}} + \sum_{p=1}^{\infty} 2\alpha_p \cos\left(p(n\phi_1 - s\phi_2 + \beta_p)\right)}$$

COMO PROCEDER ?

MAIS UMA TRANSF. CANÔNICA $(\vec{\phi}, \vec{I}) \xrightarrow{F_2(\vec{\phi}, \vec{I})} (\vec{\theta}, \vec{I})$

$$F_2(\vec{\phi}, \vec{I}) = (n\phi_1 - s\phi_2 + \beta_p) I_1 + \phi_2 I_2$$

EQS DA TRANSFORMAÇÃO

$$\vec{J} = \frac{\partial F_2}{\partial \vec{\phi}} \longrightarrow \begin{cases} J_1 = n I_1 \\ J_2 = -s I_1 + I_2 \end{cases}$$

$$\vec{\theta} = \frac{\partial F_2}{\partial \vec{I}} \longrightarrow \begin{cases} \theta_1 = n\phi_1 - s\phi_2 + \beta_p \\ \theta_2 = \phi_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{n} J_1 \\ I_2 &= \tfrac{s}{n} J_1 + J_2 \\ \theta_1 &= n\phi_1 - s\phi_2 + \beta_p \\ \theta_2 &= \phi_2 \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} J_1 &= n I_1 \\ J_2 &= -s I_1 + I_2 \\ \phi_1 &= \frac{\theta_1 + s\theta_2 - \beta_p}{n} \\ \phi_2 &= \theta_2 \end{aligned}}$$

NAS NOVAS VARIÁVEIS,

$$K_1 = H_{1\vec{0}}(\vec{I}) + \sum_{p=1}^{\infty} 2\alpha_p(\vec{I}) \cos(p\theta_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{K = H_0(\vec{I}) + \epsilon H_{1\vec{0}}(\vec{I}) + \sum_{p=1}^{\infty} 2\epsilon\alpha_p(\vec{I}) \cos(p\theta_1)}$$

K É DITA APROXIMAÇÃO INTEGRÁVEL DE H

- ϵ É CONSERVADA
- I_2 É CONSERVADA

MAS K AINDA DEPENDE DE θ_1

INTERPRETAÇÃO FÍSICA DE K

$H_0(\vec{I}) = H_0(I_1, I_2)$. EXPANDIR I_1 EM TORNO DO VALOR RESSONANTE $I_1^* = J_1(p/\epsilon=0)$

$\Rightarrow$ cte $= I_2^*$

$$\Rightarrow H_0(\vec{I}) \approx H_0(I_1^*, I_2) + \left.\frac{\partial H_0}{\partial I_1}\right|_{I_1=I_1^*} (I_1 - I_1^*) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_1^2}\right|_{I_1=I_1^*} (I_1 - I_1^*)^2 + \cdots$$

MAS

$$\left.\frac{\partial H_0}{\partial I_1}\right|_{I_1=I_1^*} = \left(\frac{\partial H_0}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial I_1} + \frac{\partial H_0}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial I_1}\right)\Big|_{I_1=I_1^*}$$

$$= \left(\omega_{01}\underbrace{\frac{\partial J_1}{\partial I_1}}_{\sim 1} + \omega_{02}\underbrace{\frac{\partial J_2}{\partial I_1}}_{\sim -S}\right)\Big|_{I_1=I_1^*}$$

$$= 0 \quad \text{(COND. DE RESSONÂNCIA)}$$

$$\Rightarrow H_0(\vec{I}) = H_0(I_1^*, I_2^*) + \frac{1}{2} G_1 (\Delta I_1)^2$$

~~$\Rightarrow K = H_0 + \frac{1}{2} G_1 (\Delta I_1)^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon H_{1p}(\vec{I})$~~

com $G_1 = \left.\frac{\partial^2}{\partial I_1^2} H_0\right|_{I_1=I_1^*, I_2=I_2^*}$

$\epsilon H_{10}(\vec{I}) = \epsilon H_{10}(\vec{I}^*) + O(\epsilon \Delta I_1)$ $\rightarrow$ DESPREZAR

$$\Rightarrow \Delta K = K - H_0(\vec{I}^*) - \epsilon H_{10}(\vec{I}^*) \approx \frac{1}{2} G_1 (\Delta I_1)^2 + \sum_{p=1}^{\infty} 2\alpha_p \epsilon \cos(p\theta_1)$$

FINALMENTE, α_p GERALMENTE VAI A ZERO MUITO RAPIDAMENTE COM p.

NESTE CASO, SÓ O 1º TERMO SE TORNA RELEVANTE $\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} \epsilon 2\alpha_p \cos(p\theta_1) \approx \epsilon 2\alpha_1 \cos\theta_1 \equiv -F\cos\theta_1$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta K = \frac{1}{2} G_1 (\Delta I_1)^2 - F\cos\theta_1} \Rightarrow \text{PÊNDULO SIMPLES P/ } \theta_1$$

DE MANEIRA GERAL, $\sum_{p=1}^{\infty} 2\epsilon\alpha_p \cos(p\theta) = C + \frac{F}{2}\theta_1^2 - \frac{B}{24}\theta_1^4 + \cdots$ (TERMOS ANARMÔNICOS)

$$\Rightarrow \boxed{\Delta K \equiv \text{OSCILADOR HARMÔNICO} + \text{TERMOS ANARMÔNICOS EM } \theta_1}$$

A CONDIÇÃO DE RESSONÂNCIA GERA UMA <u>INHA DE ESTABILIDADE</u> P/ ENERGIAS MENORES QUE $\Delta K = F$ (ENERGIA DO PT INSTÁVEL $\theta_1 = \pi$) QUE É A ENERGIA DA SEPARATRIZ

LEMBRE-SE QUE $\vec{I}$ | $\vec{\theta}$ SÃO VARIÁVEIS DE AÇÃO | ÂNGULO

P/ $\Delta K < F \Rightarrow$ MOV. OSCILATÓRIO P/ $\vec{I}, \vec{\theta}$

E NAS VARIÁVEIS ORIGINAIS $\vec{J}$ | $\vec{\phi}$?

$\phi_2 = \theta_2 \Rightarrow$ 1 PERÍODO em $\theta_2 \equiv$ 1 PERÍODO em ϕ_2

$\phi_1 = \frac{1}{n}\theta_1 + \frac{s}{n}\theta_2 \Rightarrow$ 1 PERÍODO em $\theta_1 \equiv \frac{1}{n}$ PERÍODO em ϕ_1

$\Rightarrow$ PRECISA-SE DE n PERÍODOS em θ_1 P/ 1 PERÍODO em ϕ_1

DIZ-SE QUE n É A ORDEM DA RESSONÂNCIA

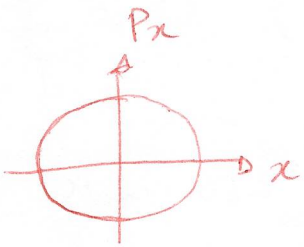
PARA MELHOR VISUALIZAR O SIGNIFICADO DESSAS AFIRMAÇÕES, É CONVENIENTE OLHAR A SEÇÃO DE POINCARÉ

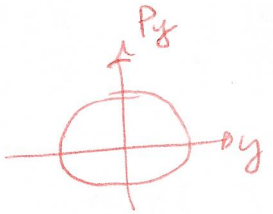
EX: $H = \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2\right) = H_1 + H_2$

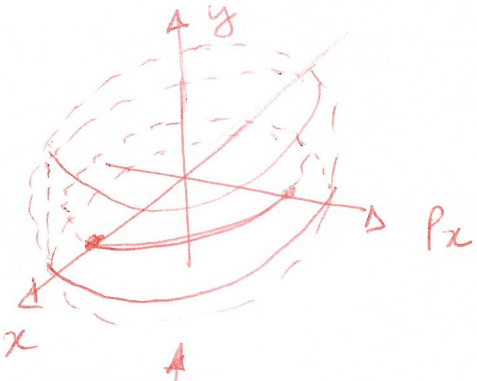
ONDE $H_i = \frac{1}{2m} P_i^2 + \frac{1}{2} m \omega_i^2 q_i^2$

$E = E_1 + E_2$, E_1 E E_2 SÃO CONSTANTES

TRAJETÓRIA NO ESPAÇO DE FASES → TORO







$E_1 = A P_x^2 + B x^2$

$E_2 = C P_y^2 + D y^2$

$E = E_1 + E_2$

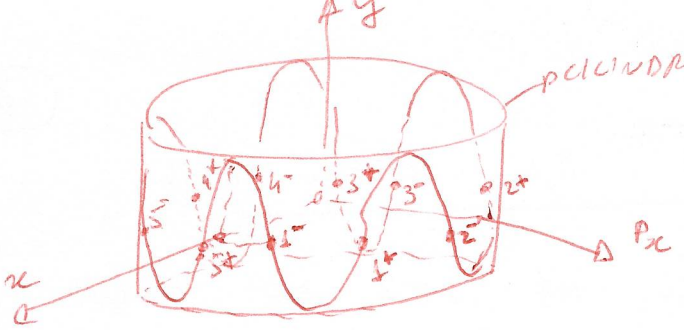
$= A P_x^2 + B x^2 + C P_y^2 + D y^2 = \boxed{A P_x^2 + B x^2 + E_2 = E}$

P/ $P_y = cte \Rightarrow E = A P_x^2 + B x^2 + D y^2 + F$

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{2E_1}{m\omega_x^2}} \cos(\omega_x t + \delta_x) = \sqrt{\frac{2(E-E_2)}{m\omega_x^2}} \cos(\omega_x t + \delta_x) \\ P_x = -\sqrt{2mE_1} \sin(\omega_x t + \delta_x) = -\sqrt{2m(E-E_2)} \sin(\omega_x t + \delta_x) \end{cases}$$

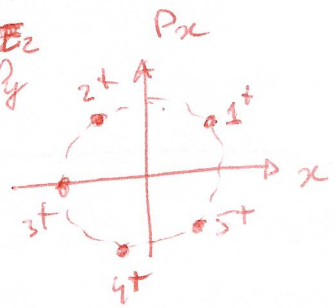
$$y = \sqrt{\frac{2E_2}{m\omega_y^2}} \cos(\omega_y t + \delta_y)$$

$$P_y = -\sqrt{2E_2 m} \sin(\omega_y t + \delta_y)$$



CILINDRO $\Sigma_E \cap \Sigma_{E_2}$

INTEGRADO EM P_y



PROJEÇÃO NO PLANO $x - P_x$

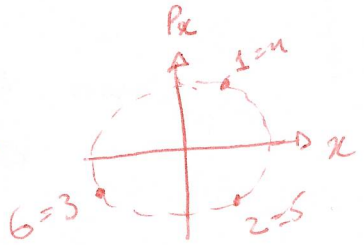
QDO $y = 0$ E $P_y > 0$ P/ $E_1 = cte$ E $E_2 = cte'$

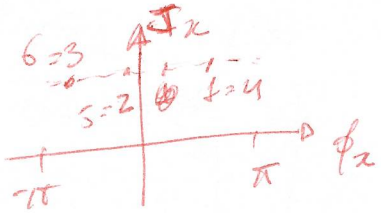
- SE $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ FOR RACIONAL UMA ÚNICA CONDIÇÃO INICIAL NÃO "FECHA" A ELIPSE NO PLANO $x - P_x$. MAS TODAS AS CONDIÇÕES INICIAIS, SIM.

- SE $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ FOR IRRACIONAL ⇒ UMA ÚNICA COND. INICIAL "PINTA" TODA A ELIPSE. (SUPERFÍCIE DE POINCARÉ)

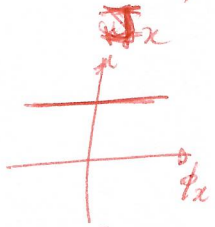
EX:

$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{2}{3}$ ⇒

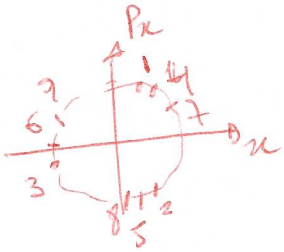




P/ TODAS AS C.I.

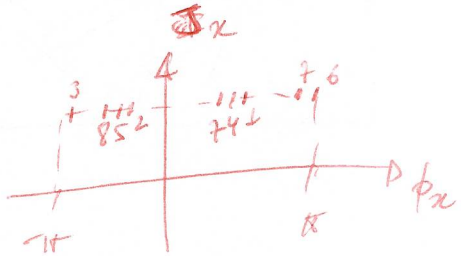


TORO É UMA LINHA RETA



$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{2}{3} + \delta$

$|\text{IRRACIONAL}| \ll 1$

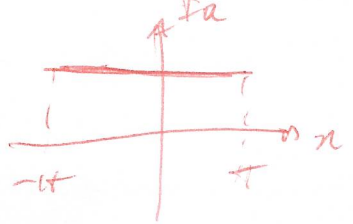


↳ P/ TEMPOS MUITO GRANDES

$x = \sqrt{\frac{2J_x}{m\omega_x}} \cos\phi_x$

$P_x = \ominus \sqrt{2m J_x \omega_x} \sin\phi_x$

MAPA DE POINCARÉ ⇒



TORO É LINHA RETA

NOTE QUE A SEÇÃO DE POINCARÉ É UM MAPA DINÂMICO DISCRETO (OU ESTROBOSCÓPICO)

DEFINIÇÕES: SUP. DE POINCARÉ: INTERSECÇÃO DE Σ_E COM Σ_{f_2}

$$\Sigma_P = \Sigma_E \cap \Sigma_{f_2} \quad \text{TAL QUE} \quad p_2 > 0$$

NÃO PRECISA SER $f_2 = 0$, APENAS $f_2 = cte$

MAPA DISCRETO:

$$y = \sqrt{\frac{2E_2}{m\omega_y^2}} \cos(\omega_y t + \delta_y) \underset{A}{=} y_0 \sin(\omega_y t)$$

POR SIMPLICIDADE, $\delta_y = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$ QDO $t = \frac{n\pi}{\omega_y}$

$\Rightarrow$ OS TEMPOS EM QUE A TRAJETÓRIA VOLTA À SUPERFÍCIE DE POINCARÉ (COM $p_y > 0$) SÃO $t_n = \frac{2n\pi}{\omega_y} = \ldots$, $n \in \mathbb{Z}$

COMO $\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_x t) + \frac{p_{x0}}{m\omega_x} \sin(\omega_x t) \\ p_x = p_{x0} \cos(\omega_x t) - m x_0 \omega_x \sin(\omega_x t) \end{cases}$

MAPA $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ p_{x1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha) & \frac{\sin(2\pi\alpha)}{m\omega_x} \\ -m\omega_x \sin(2\pi\alpha) & \cos(2\pi\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_{x0} \end{pmatrix}$$

ONDE $\alpha = \frac{\omega_x}{\omega_y}$ OU, EM NOTAÇÃO COMPACTA, $\vec{z}_1 = P_\alpha \vec{z}_0$

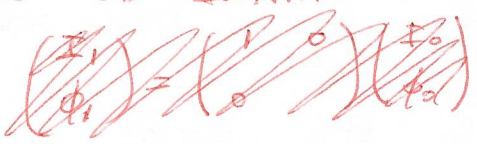
REPETINDO O PROCESSO K VEZES

$$\vec{S}_K = (P_\alpha)^K \vec{S}_0 = P_{K\alpha} \vec{S}_0$$

⇒ SE α É RACIONAL ⇒ $2\pi K\alpha$ É MULTIPLO DE 2π

P/ UM K INTEIRO ⇒ ~~MATRIZ VOLTA~~ $\vec{S}_K = \vec{S}_0$

NAS VARIÁVEIS AÇÃO/ÂNGULO



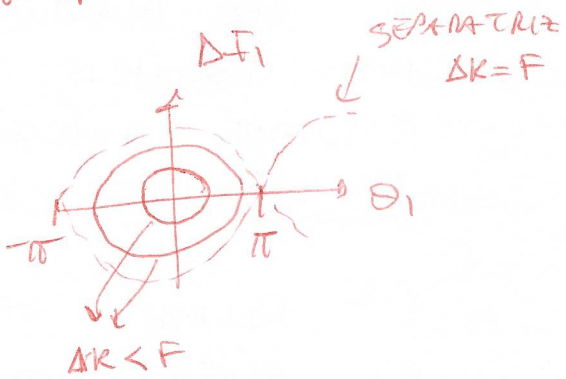
$I_n = I_{n-1} = I_0$

$\phi_n = \phi_{n-1} + 2\pi\alpha$

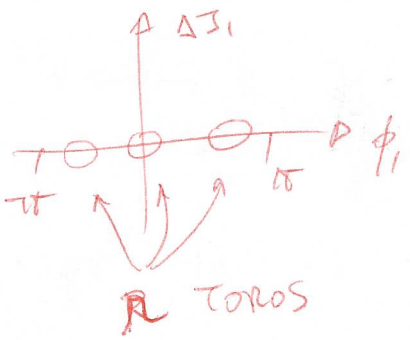
VOLTANDO PARA O CASO RESSONANTE

$$\Delta K = \frac{1}{2} G (\Delta I_1)^2 - F \cos\theta_1$$

⇒ SEÇÃO DE POINCARÉ



NAS VARIÁVEIS ORIGINAIS $\vec{J}, \vec{\phi}$



ESTRUTURAS FRACTAIS

$$\Delta K = \frac{G}{2}(\Delta I_1)^2 - F\cos\theta_1 = \underbrace{\frac{G}{2}(\Delta I_1)^2 - F + \frac{F\theta_1^2}{2}}_{\text{NO EIXO OSC-HARM.}} - \frac{F\theta_1^4}{24} + O(\epsilon^2, \theta^6)$$

NOVAS VARIÁVEIS DE AÇÃO/ÂNGULO L/ψ ; $(\theta, \Delta I) \to (\psi, L)$

$$\begin{cases} \Delta I_1 = \sqrt{\dfrac{2L\Omega}{G}} \sin\psi_1 \\ \theta_1 = \sqrt{\dfrac{2L\Omega}{F}} \cos\psi_0 \end{cases}$$

ONDE $\Omega = \sqrt{\dfrac{F}{I/G}} = \sqrt{FG}$

$$\Rightarrow \Delta K = \vec{\Omega}\cdot\vec{L} - \frac{F}{24}\left(\frac{2L\Omega}{F}\right)^2 \cos^4\psi$$

$$\boxed{\Delta K = \Omega L - \frac{L^2\Omega^2}{6F}\cos^4\psi}$$

$L_2 = \Delta I_2$
$\psi_2 = \theta_2$
INDEPENDENTE DE 2

↓ APLICANDO TEO. PERTURBAÇÕES

$$\langle \cos^4\psi \rangle = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \Delta K = \vec{\Omega}\cdot\vec{L} - \frac{\Omega^2 L^2}{16F} + O(\epsilon^4) = \Delta K_0 + \epsilon^2 \Delta K_2$$

⇒ NOVAS FREQUÊNCIAS :

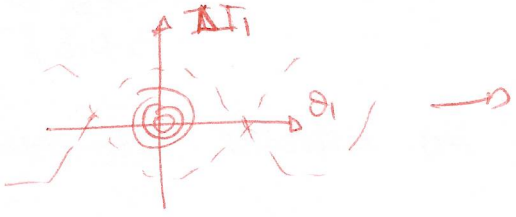
$$\omega_1 = \frac{\partial \Delta K_0}{\partial L_1} = \Omega_1 - \frac{\Omega^2 L_1}{8F}$$

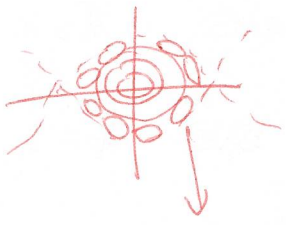
$$= \Omega_1 - \frac{G}{8} L_1$$

$$\omega_2 = \frac{\partial K_0}{\partial L_2} = \Omega_2 - \frac{L_1^2}{16}\frac{\partial G}{\partial L_2}$$

⇒ PODEM HAVER NOVAS RESSONÂNCIAS

⇒ NOVAS ILHAS DE ESTABILIDADE





TOROS SECUNDÁRIOS
(ILHAS DE ESTABILIDADE SECUNDÁRIAS)

ILHAS DENTRO DE ILHAS DE ESTABILIDADE