Introdução à Física Computacional - 7600017 - 1S/2019
Projeto 5 — Dinâmica populacional

Descrição:

Discutiremos nesse problema o mapa logístico e o conceito de caos determinístico. Como motivação para o problema, vamos discutir o o crescimento populacional de uma espécie isolada e na ausência de predadores. Nesse modelo idealizado, faremos duas hipóteses:

1. Mais indivíduos implica em um mais descendentes;
2. Existe um limite superior para o número de indivíduos que podem habitar o ambiente de forma sustentável.

Para implementar essas hipóteses, considere a seguinte equação:

$$N_{i+1} = rN_i \left(1 - \frac{N_i}{N_{\max}}\right), \tag{1}$$

onde N_i é o número de indivíduos na i-ésima geração da população e $N_{\max}$ é o número máximo de indivíduos que podem coexistir de maneira sustentável naquele ambiente. Note que quando $N_i \ll N_{\max}$, a dinâmica da população é tal que $N_{i+1} \approx rN_i$. Ou seja, o primeiro termo do lado direito da Eq. (1) implementa a hipótese 1. Neste caso, r é um parâmetro proporcional à taxa de crescimento populacional. Quando $r > 1$, o crescimento é positivo. O segundo termo do lado direito da Eq. (1) implementa a hipótese 2. Quando N_i é próximo de $N_{\max}$, a taxa de crescimento populacional efetiva é $r\left(1 - \frac{N_i}{N_{\max}}\right)$. Ou seja, se N_i for muito próximo de $N_{\max}$ a taxa efetiva pode ser negativa ($r_{\text{efetivo}} < 1$).

É conveniente definir $x_i \equiv N_i/N_{\max}$, que pode ser interpretado como uma densidade populacional, sendo $x = 1$ a máxima densidade possível. A Eq. (1) pode então ser reescrita como

$$x_{i+1} = rx_i\left(1 - x_i\right), \tag{2}$$

onde assumimos que $x_i \in \Re$ (uma boa hipótese se $N_{\max} \gg 1$) e assume valores entre 0 e 1. Essa equação é conhecida como o *mapa logístico*.

Podemos reescrever a equação (2) como

$$x_{i+1} = G\left(x_i\right), \tag{3}$$

onde definimos o mapa $G\left(x_i\right)$ como

$$G\left(x_i\right) \equiv rx_i\left(1 - x_i\right). \tag{4}$$

Na linguagem de nosso modelo, podemos então procurar por valores estacionários (independentes do tempo) da densidade populacional para uma dado valor da taxa de crescimento r. Esses valores são conhecidos como pontos fixos do mapa x^*:

$$x^* \equiv G\left(x^*\right) = rx^*\left(1 - x^*\right), \tag{5}$$

com as solução trivial

$$x^* = 0 \tag{6}$$

e não-trivial

$$x^* = 1 - r^{-1}. \tag{7}$$

Note que apenas no caso de crescimento positivo $r > 1$ é que pode-se garantir uma possível solução $x^* \in]0, 1[$.

1. **Ponto fixo de período um**

   (a) Os pontos fixos podem ser entendidos graficamente como os pontos onde as curvas $f\left(x\right) = x$ e $g\left(x, r\right) = rx\left(1 - x\right)$ se cruzam. Num único gráfico, trace essas curvas para $r = 0.5$, 1 e 2 e explique com suas palavras o porquê da solução não-trivial existir apenas para $r > 1$.
   Responda as perguntas que se seguem através de um código FORTRAN.

(b) Implemente o mapa logístico, Eq. (2), e faça um gráfico de x_i como função de i, para $r = 1$, 2 e 2.5 considerando cinco diferentes valores iniciais de $0 < x_0 < 1$. Discuta seus resultados.

(c) No item 1b, vimos que o ponto fixo do mapa não depende do valor de x_0. Podemos formalizar esse ponto calculando a distância

$$d_i = \left| G^{(i)}\left(\tilde{x}_0\right) - G^{(i)}\left(x_0\right) \right|, \tag{8}$$

onde $\tilde{x}_0 = x_0 + \varepsilon$ e $G^{(i)}\left(x_0\right) = G\left(G^{(i-1)}\left(x_0\right)\right)$. Ou seja, $\tilde{x}_0$ e x_0 são duas condições iniciais muito próximas ($\varepsilon \ll 1$), e d_i mede, em módulo, a distância dessas duas populações na i-ésima geração. Considere $r = 1.5$, 2.5 e 2.7, cinco valores de x_0 e um pequeno valor de ε. Faça os gráficos de $d_i \times i$ e confirme que d_i decai exponencialmente com i em todos os casos, i.e., para $i \gg 1$, $d_i \sim e^{-\lambda i}$. Obtenha o valor do expoente de Lyapunov λ por meio de um ajuste, e discuta seus resultados.

(d) Uma maneira de formalizar o decaimento exponencial de d_i é por meio da seguinte estimativa do expoente de Lyapunov

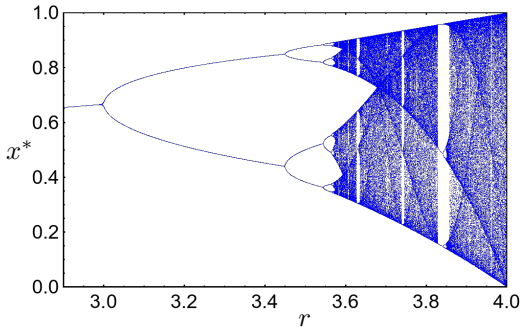
$$\lambda \equiv \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln\left|G'\left(x_j\right)\right| \to \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left|G'\left(x_j\right)\right|, \tag{9}$$

onde n é o número total de iterações, $G'\left(x_j\right)$ quer dizer que aplicamos a *derivada* do mapa (4) no ponto $x_j = G^{(j)}\left(x_0\right)$. Considere novamente $r = 2.5$ e cinco valores de x_0 e calcule λ para cada um deles. Certifique-se de que sua escolha de n produza o resultado assintótico correto. Compare o valor *médio* de λ obtido através de (9) com o expoente obtido graficamente no item 1c.

(e) Para $r = 2.9$, $x_0 = 0.1$, e $\varepsilon = 0.05$, faça um gráfico de $\ln\left|G'\left(x_j\right)\right|$ como função de j para $1 \leq j \leq 200$. Note que $\ln\left|G'\left(x_j\right)\right|$ se aproxima do valor assintótico esperado de λ para j grande. A partir deste gráfico, estime o valor de λ e o respectivo erro $\delta\lambda$.

2. **Dobras de período e caos**

Até agora, o mapa logístico tem se comportado exemplarmente e nada dramático parece acontecer. A situação fica mais interessante quanto $r \geq 3$ porque a solução de ponto fixo de período 1 (7) fica instável e novos pontos fixos estáveis não triviais (de período 2) aparecem, como ilustrado no *diagrama de bifurcação* ao lado. Aumentando r ainda mais, esses pontos fixos de período 2 se tornam instáveis e novos pontos fixos de períodos superiores aparecem como pontos fixos estáveis, e assim por diante.



Um ponto fixo de período 2 é definido como as soluções do mapa

$$x^* \equiv G^2\left(x^*\right) \equiv G\left(G\left(x^*\right)\right). \tag{10}$$

(a) Num mesmo gráfico, trace $f(x) = x$ e $g^2(x, r) = G\left(G\left(x\right)\right)$ para $r = 2.9$, 3 e 3.1 e verifique graficamente que, para $r > 3$, há 4 possíveis soluções para a Eq. (10).

(b) Para explorarmos em mais detalhes essas dobras de período, construa o diagrama de bifurcação, que é a figura clássica desse mapa. Esse diagrama mostra o valor dos pontos fixos x^* da Eq. (2) como função de r e podemos observar as seguidas dobras de período que, inexoravelmente, levam ao caos.

(c) Com os resultados do item anterior, encontre o valor de r_2, onde o período $2^2 = 4$ se inicia, e r_3, onde o período $2^3 = 8$ começa. Utilize esses valores para estimar a constante de Feigenbaum

$$\delta = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2}. \tag{11}$$

Discuta seus resultados.

(d) Acima de $r_c \approx 3.569946$, acessamos a região do chamado caos determinístico (em que o número de pontos fixos se tornou infinito). Para cinco valores de $r_c < r < 4$, faça um gráfico de $x_i \times i$ para cinco valores distintos de x_0. Para esses mesmos valores de x_0, faça também um gráfico da distância $d_i \times i$, Eq. (8), para $\varepsilon = 10^{-10}$, bem como estime o valor do expoente de Lyapunov λ nesse caso. Discuta cuidadosamente seus resultados e explique o porquê dessa região ser a de caos determinístico.

3. **Modelo predador-presa**
Considere agora um modelo ecológico onde há uma segunda espécie no ambiente que interage com a primeira espécie seu número. O modelo mais simples a ser considerado é o modelo predador-presa ou Lotka-Volterra. As populações dessas espécies obedecem às seguintes equações diferenciais

$$\dot{x} = ax - bxy, \tag{12}$$
$$\dot{y} = -cy + dxy, \tag{13}$$

onde x é a população de presas (por exemplo, lebre) em um dado instante de tempo t, y é a população de predadores (por exemplo, lince), e a, b, c e d são constantes caracterizando o acoplamento (interação) entre as elas. Embora pareça um pouco mais realístico que o mapa logístico, o modelo dado pelas equações (12) e (13) possui uma série de hipóteses restringentes:

- Sempre há comida para as presas;
- Os predadores nunca se saciam e alimentam-se a apenas das presas;
- As taxas de mudanças das populações só dependem do seu tamanho, ou seja, interações com e/ou mudanças do meio ambiente são desprezadas.

Consideraremos, inicialmente, o seguinte conjunto de parâmetros em nossa discussão $a = 2/3$, $b = 4/3$ e $c = d = 1$.

(a) Discuta brevemente qual é a interpretação de cada um dos parâmetros a, b, c e d dentro desse modelo. Quais são suas unidades?

(b) Escreva um programa FORTRAN para integrar as equações (12) e (13) por meio do método Runge-Kutta em ordem 4. Em sua discussão no relatório, você deve apresentar explicitamente a versão discreta dessas equações.

(c) Para um Δt cuidadosamente escolhido e diferentes condições iniciais x_0 e y_0, calcule como as populações da presa e do predador evoluem no tempo. Discuta seus resultados e contraste-os com aqueles esperados pelo mapa logístico (populações independentes).

(d) Construa o espaço de fase desse modelo, isso é trace a trajetória $y(t) \times x(t)$, para as curvas obtidas no item 3c. Qual é o ponto fixo nesse caso? Discuta seus resultados.

(e) Considere agora a tabela abaixo com a população de lebres e linces no Canadá no início do século XX, obtidas por meio de dados do comércio de suas peles. Compare esses dados com as predições do modelo predador-presa para $a = 0.481$, $b = 0.025$, $c = 0.927$ e $d = 0.028$. Naturalmente, você deve considerar $x_0 = 30$ e $y_0 = 4$ e trabalhar com as poluções em milhares. Faça um gráfico das duas populações como função do tempo e um gráfico da trajetória. Determine qual é o ponto fixo do modelo nesse caso. Você considera o modelo predador-presa descrito pelas equações (12) e (13) como um bom modelo para esse problema?

Ano	Lebre $(\times 10^3)$	Lince $(\times 10^3)$	Ano	Lebre $(\times 10^3)$	Lince $(\times 10^3)$	Ano	Lebre $(\times 10^3)$	Lince $(\times 10^3)$
1900	30	4	1907	21.4	13	1914	52.3	45.7
1901	47.2	6.1	1908	22	8.3	1915	19.5	51.1
1902	70.2	9.8	1909	25.4	9.1	1916	11.2	29.7
1903	77.4	35.2	1910	27.1	7.4	1917	7.6	15.8
1904	36.3	59.4	1911	40.3	8	1918	14.6	9.7
1905	20.6	41.7	1912	57	12.3	1919	16.2	10.1
1906	18.1	19	1913	76.6	19.5	1920	24.7	8.6

Breve discussão sobre a execução dos problemas

Estabilidade de um ponto fixo

Considere um determinado mapa $G(x)$ cujo ponto fixo é x^*. A estabilidade deste é determinada pela análise de como uma perturbação se comporta ao longo do tempo. Ou seja, seja $x_i = x^* + \varepsilon$ onde ε é tão pequeno quanto se queira. Logo,

$$\begin{aligned} x_{i+1} = G(x_i) = G(x^* + \varepsilon) &= G(x^*) + \left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x^*} \varepsilon + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \\ &\approx x^* + \left.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x^*} \varepsilon = x^* + G'(x^*)\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Essa equação nos diz se a trajetória está se afastando ou se aproximando do ponto fixo x^*. Reescrevendo-a da seguinte forma

$$\left|\frac{x_{i+1} - x^*}{x_i - x^*}\right| = \left|G'(x^*)\right|,$$

note que caso $|G'(x^*)| > 1$, então x_{i+1} está mais longe do ponto fixo do que x_i. Neste caso, a trajetória do mapa é para longo do ponto fixo e ele é dito ponto fixo instável. Caso contrário, para $|G'(x^*)| < 1$, o fluxo da trajetória é em direção ao ponto fixo e ele é dito ponto fixo estável.

Para o caso do mapa logístico (4), o ponto fixo trivial (6) é instável para $r > 1$, pois

$$G'(x) = r(1 - 2x), \;\Rightarrow\; G'(x^* = 0) = r.$$

O ponto fixo não trivial de período 1 (7) é tal que

$$G'\left(1 - r^{-1}\right) = r\left(1 - 2 + 2r^{-1}\right) = 2 - r.$$

Ou seja, ele é estável para $1 < r < 3$.

Ponto fixo de ordem 2

Definimos $x^\star = G^2(x^\star)$ como na Eq. (10). Da definição do mapa, temos que

$$x^* \;=\; G\left(rx^*\left(1 - x^*\right)\right) = r\left[rx^*\left(1 - x^*\right)\right]\left(1 - rx^*\left(1 - x^*\right)\right).$$

Descartando agora a solução trivial $x^* = 0$, vem que

$$rx^{*3} - 2rx^{*2} + (r+1)\,x^* + r^{-2} - 1 = 0.$$

Esta é uma equação cúbica que, em primeira vista, pode causar desânimo. Entretanto, note que um ponto fixo de período 1 também é ponto fixo de período 2. Ou seja, uma das raízes dessa equação é $x_1^* = 1 - r^{-1}$ (que sabemos ser estável para $r > 3$). Dividindo a cúbica por $x^* - 1 + r^{-1}$, encontramos o polinômio de segundo grau $rx^{*2} - (r+1)\,x^* + r^{-1} + 1 = 0$ e cujas soluções são

$$x_{2,\pm}^* = \frac{1 + r \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r}. \tag{14}$$

Note que as soluções $x_{2,\pm}^*$ são reais apenas para $r > 3$. É de se esperar então que para $r > 3$, a solução de período 1 se torne instável e essas duas soluções se tornem as novas soluções estáveis não triais do problema. Para confirmar essa intuição, devemos analizar a estabilidade desses novos pontos fixos. Como $G^{2\prime}(x) = -r^2(2x-1)\left(1 - 2rx\left(1-x\right)\right)$, então

$$G^{2\prime}\left(x_{2,\pm}^*\right) = 4 + r\left(2 - r\right).$$

Logo, a janela de estabilidade dessas soluções, $\left|G^{2\prime}\left(x_{2,\pm}^*\right)\right| < 1$, se dá quando $3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3.44949$. Esse resultado não só confirma nossa intuição de que $x_{2,\pm}^*$ são os novos pontos fixos para $r > 3$, mas também nos diz que eles são estáveis apenas até $r = 1 + \sqrt{6}$. A partir daí, podemos esperar novos pontos fixos de período maior.

Dado que agora tem-se dois pontos fixos estáveis para $3 < r < 1 + \sqrt{6}$, pergunta-se para qual deles o sistema vai fluir? Para os dois. Note que esses são pontos fixos de período 2. Após 1 período, o mapa G leva $x_{2,-}^* \to x_{2,+}^*$ e vice-versa, ou seja, $G\left(x_{2,\pm}^*\right) = x_{2,\mp}^*$.

Derivação simples do expoente de Lyapunov

Começamos pela definição da distância d_j definida em (8). Assumindo que $d_j = \varepsilon e^{\lambda j}$ para $j \to \infty$, então

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \ln\left[\frac{\left|G^{(j)}\left(x_0+\varepsilon\right) - G^{(j)}\left(x_0\right)\right|}{\varepsilon}\right], \\ &\approx \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \ln\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G^{(j)}\left(x\right)\Big|_{x=x_0}\right| = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \ln\left|G^{(j)\prime}\left(x\right)\Big|_{x=x_0}\right|. \end{aligned} \tag{15}$$

Precisamos agora avaliar a derivada da j-ésima aplicação do mapa. Faremos isso por meio do método da indução. Começamos com o caso $j = 2$

$$\begin{aligned} G^{(2)\prime}\left(x\right)\Big|_{x=x_0} &= \frac{d}{dx} G\left(G\left(x\right)\right)\Big|_{x=x_0}, \\ &= G'\left(G\left(x_0\right)\right) G'\left(x_0\right) = G'\left(x_1\right) G'\left(x_0\right), \end{aligned} \tag{16}$$

onde invocamos a definição $x_1 \equiv G\left(x_0\right)$. Vamos agora assumir que esse resultado seja válido para um j genérico

$$G^{(j)\prime}\left(x\right)\Big|_{x=x_0} = \prod_{k=0}^{j-1} G'\left(x_k\right), \tag{17}$$

novamente com $x_j \equiv G^{(j)}\left(x_0\right)$. Usando (17) como hipótese indutiva, o próximo passo é provar que ela é válida para $j+1$.

$$\begin{aligned} G^{(j+1)\prime}\left(x\right)\Big|_{x=x_0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G\left(G^{(j)}\left(x\right)\right)\Big|_{x=x_0}, \\ &= G'\left(x_i\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G^{(j)}\left(x\right)\Big|_{x=x_0}, \\ &= G'\left(x_i\right) \prod_{k=0}^{j-1} G'\left(x_k\right), \\ &= \prod_{k=0}^{j} G'\left(x_k\right), \end{aligned} \tag{18}$$

onde a hipótese indutiva foi utilizada na terceira passagem. Estabelecemos assim a igualdade (17) de forma genérica. Combinando agora as equações (15) e (17) escrevemos

$$\lambda = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \ln\left|\prod_{j=0}^{j-1} G'\left(x_j\right)\right| = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \sum_{j=0}^{j-1} \ln\left|G'\left(x_j\right)\right|,$$

e, com isso, justificamos a Eq. (9). Naturalmente, os valores de λ podem ser encontrados por meio de cálculos numéricos como discutimos nesses projeto. Contudo, como para o mapa logístico $G'\left(x\right) = r\left(1-2x\right)$, podemos também obter um valor analítico para o expoente de Lyapunov considerando seus diferentes pontos fixos:

- $0 < r < 1$: $\lambda = \ln r$;
- $1 < r < 3$: $\lambda = \ln\left|2 - r\right|$;
- $3 < r < 1+\sqrt{6}$: $\lambda = \frac{1}{2}\ln\left|r\left(1-2x^*_{2,+}\right)\right| + \frac{1}{2}\ln\left|r\left(1-2x^*_{2,-}\right)\right|$;
- $r = 4$: $\lambda = \ln 2$.

Esses valores podem ser obtidos da seguinte maneira. Após várias iterações ($j \gg 1$) ambas as trajetórias estão muito próximas do ponto fixo estável correspondente. Para os propósitos de encontrar λ, podemos considerar então que uma dessas trajetórias está suficientemente próxima do ponto fixo estável e, portanto, d_i simplesmente é a distância

da outra trajetória ao ponto fixo. Ou seja, $d_i = x_i - x^*$, e como x_i está muito próximo de x^*, então o estudo de d_i se reduz ao estudo da estabilidade do ponto fixo, i.e.,

$$\begin{aligned} d_{i+1} &= |G(x_i) - G(x^*)| = |G(x^* + d_i) - x^*| \\ &= \left|G(x^*) + G'(x^*)\, d_i - x^* + \mathcal{O}\left(d_i^2\right)\right|, \\ &\approx |G'(x^*)\, d_i| = |G'(x^*)|\, d_i. \end{aligned}$$

Com isso,

$$d_j = \left|\left(G'(x^*)\right)^j\right| d_0 = d_0 e^{\lambda j}, \tag{19}$$

com expoente de Lyapunov igual a

$$\lambda = \ln |G'(x^*)| = \ln |r(1 - 2x^*)|.$$

Quando $r < 1$, o ponto fixo estável é $r^* = 0$, e $G'(0) = r$. Quando $1 < r < 3$, o ponto fixo é $x^* = 1 - r^{-1}$ e $G' = 2 - r$.

Quando $3 < r < 1 + \sqrt{6}$, o ponto fixo é de período 2. Neste caso, a Eq. (19) se torna

$$d_j = \left|\left(G'\left(x^*_{2,+}\right)\right)^{\frac{j}{2}} \left(G'\left(x^*_{2,-}\right)\right)^{\frac{j}{2}}\right| d_0,$$

daí, temos que $\lambda = \ln \sqrt{r\left|1 - 2x^*_{2,+}\right| r\left|1 - 2x^*_{2,-}\right|}$.