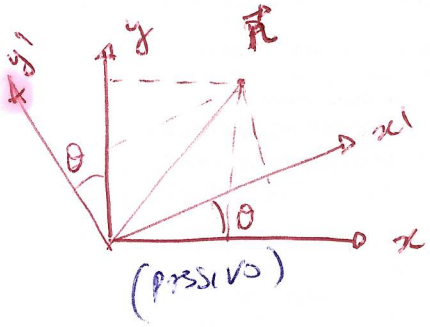
MOV. GERAL = TRANSLAÇÃO + ROTAÇÃO (TEOREMA DE CHASLES)

TRANSLAÇÃO = 3 PARÂMETROS

ROTAÇÃO = 3 PARÂMETROS (1 ÂNGULO , 1 EIXO (2 PARÂMETROS))

*AQUI, VAMOS ESTUDAR SOMENTE AS ROTAÇÕES (3 PARÂMETROS)

VAMOS COMEÇAR COM AS "ROTAÇÕES EM 2D"



(PASSIVO)

$$\vec{R} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

COMO $\begin{cases} \hat{x}' = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y} \\ \hat{y}' = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y} \end{cases}$

ou INVERSA $\Rightarrow \vec{R} = x(\cos\theta\,\hat{x}' - \sin\theta\,\hat{y}') + y(\cos\theta\,\hat{y}' + \sin\theta\,\hat{x}')$

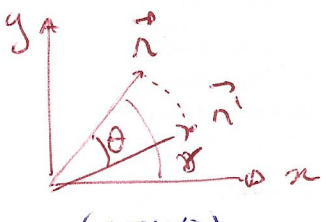
$$\vec{R} = (x\cos\theta + y\sin\theta)\hat{x}' + (-x\sin\theta + y\cos\theta)\hat{y}'$$

$$= x'\hat{x}' + y'\hat{y}'$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

→ PONTO DE VISTA PASSIVO (VETORES FIXOS, SISTEMA DE COORDENADAS ROTACIONA)

ALTERNATIVAMENTE, PODERÍAMOS ROTACIONAR O VETOR $\vec{R}$ MANTENDO O SISTEMA DE COORDENADAS FIXO



(ATIVO)

$$\vec{R} = R\cos\gamma\,\hat{x} + R\sin\gamma\,\hat{y} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{R}' = R\cos(\gamma-\theta)\,\hat{x} + R\sin(\gamma-\theta)\,\hat{y}$$

$$= R[\cos\gamma\cos\theta + \sin\gamma\sin\theta]\hat{x} + R[\sin\gamma\cos\theta - \cos\gamma\sin\theta]\hat{y}$$

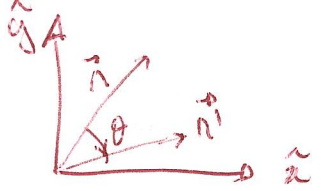
$$= (x\cos\theta + y\sin\theta)\hat{x} + (y\cos\theta - x\sin\theta)\hat{y}$$

$$= x'\hat{x} + y'\hat{y}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ → COMO ESPERADO

PONTO DE VISTA ATIVO (SIST. COORD. FIXO, VETORES ROTACIONADOS)

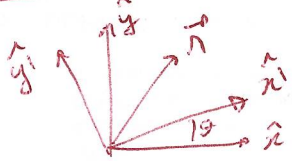
PONTO DE VISTA ATIVO



$$\boxed{\vec{n}' = IM\,\vec{n}} \quad \text{ONDE} \quad IM = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

MATRIZ IM "OPERA" NO VETOR $\vec{n}$ ROTACIONANDO-O SEM MUDAR A BASE (OU O SIST. DE COORDENADAS). EM OUTRAS PALAVRAS, IM TRANSFORMA $\vec{n}$ EM UM NOVO VETOR $\vec{n}'$

PONTO DE VISTA PASSIVO



$$\vec{n}_S = x\hat{x} + y\hat{y} = \vec{n}_{S'} = x'\hat{x}' + y'\hat{y}'$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = IM \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{n}_{S'} = IM\,\vec{n}_S}$$

$\vec{n}_{S'}$ $\qquad$ $\vec{n}_S$

DO PT DE VISTA MATEMÁTICO, AMBOS PTS DE VISTA SÃO EQUIVALENTES

MATRIZES ORTOGONAIS

NOTE QUE $$IM^T = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = IM^{-1}$$

QUE $IM^T = IM^{-1}$ $\Rightarrow$ DIZ-SE QUE IM É UMA MATRIZ ORTOGONAL

$\Rightarrow$ A TRANSF. REALIZADA POR IM É UMA TRANSF. ORTOGONAL

ALÉM DISSO, $IM\,IM^T = IM^T IM = \mathbb{1} \Rightarrow \det(MM^T) = \det(M)\det(M^T)$

$$= (\det(M))^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\det(IM) = \pm 1}$$

MATRIZES ORTOGONAIS PRÓPRIAS SÃO AQUELAS COM $\det(M) = +1$

" " IMPRÓPRIAS " " " " $= -1$

NOTE QUE $M M^T = \mathbb{1} \Rightarrow \sum_k M_{ik} (M_{kj})^T = \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_k M_{ik} M_{jk} = \delta_{ij}}$$

$$\boxed{\sum_k M_{ki} M_{kj} = \delta_{ij}}$$

ANALOGAMENTE ↙ $M^T M = \mathbb{1}$

DE MANEIRA GERAL $\vec{n} = \sum_{i=1}^{D} n_i \hat{e}_i = \sum_{i=1}^{D} n'_i \hat{e}'_i$

ONDE $n_i = \vec{n} \cdot \hat{e}_i$

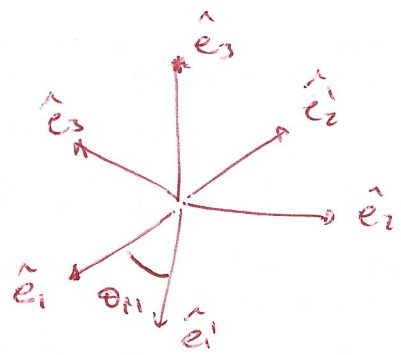
como $n'_i = \vec{n} \cdot \hat{e}'_i = \left(\sum_j n_j \hat{e}_j\right) \cdot \hat{e}'_i = \sum_j M_{ij} n_j$

OU SEJA $\vec{n}' = M \vec{n}$ com $M_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j = M_{ji} = \hat{e}'_j \cdot \hat{e}_i$

$= \cos\theta_{ij}$

= COSSENOS DIRETORES DE S' RELATIVO A S

EM 3D



$\vec{n}' \cdot \vec{n} = \sum_i n_i^2 = \sum_i n_i'^2$ → ROTAÇÕES PRESERVAM A NORMA

PROVA: $\sum_i n_i'^2 = \sum_i \left(\sum_j M_{ij} n_j\right)\left(\sum_k M_{ik} n_k\right) = \sum_{jk} \underbrace{\left(\sum_i M_{ij} M_{ik}\right)}_{\delta_{jk}} n_j n_k = \sum_j n_j^2$

GRUPO $O(n)$ ≡ GRUPO DE MATRIZES $n \times n$ ORTOGONAIS

$SO(n)$ = " " " " " com $\det = 1$

MATRIZ ORTOGONAL IMPRÓPRIA EM 3D

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ NOTE QUE $\mathbb{I}^T = \mathbb{I}^{-1}$ E $\det(\mathbb{I}) = -1$

$$\vec{r}' = \mathbb{I} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$ → INVERSÃO DOS EIXOS DE COORDENADAS

→ NÃO É POSSÍVEL OBTER ESTA TRANSF. POR ROTAÇÕES

NOTE QUE $\begin{cases} \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \\ \hat{x}' \times \hat{y}' = -\hat{z}' \end{cases}$

A ROTAÇÃO PRESERVA QUIRALIDADE

→ EM DIMENSÕES ÍMPARES, ROTAÇÕES SÓ PODEM SER REPRESENTADAS POR MATRIZES ORTOGONAIS PRÓPRIAS ($\det = +1$)

EM 3D → MATRIZES DO GRUPO SO(3)

TEOREMA DE EULER

O DESLOCAMENTO MAIS GERAL DE UM CORPO RÍGIDO (EM 3D) COM 1 PT FIXO É UMA ROTAÇÃO EM TORNO DE ALGUM EIXO PASSANDO PELO PT FIXO

PROVA: a) PRODUTO DE MATRIZES ORTOGONAIS É UMA MATRIZ ORTOGONAL

$$M_3 = M_1 M_2$$

$$M_3 M_3^T = M_1 M_2 (M_2^T M_1^T) = M_1 \underbrace{(M_2 M_2^T)}_{\mathbb{1}} M_1 = M_1 M_1^T = \mathbb{1}$$

→ A MATRIZ QUE FAZ O DESLOCAMENTO MAIS GERAL É ORTOGONAL

b) ELA PODE SER REPRESENTADA POR UMA ÚNICA ROTAÇÃO?

SE SIM → EXISTE VETORES PARALELOS AO EIXO DE ROTAÇÃO QUE PERMANECEM INVARIANTES, i.e., $\exists \vec{v} \neq 0$ TAL QUE $M\vec{v} = \vec{v}$

b) MOSTRAR QUE $\exists\, \vec{v} \neq 0$ tal que $M\vec{v} = \vec{v}$

$(M - \mathbb{1})\vec{v} = 0$ SE $M - \mathbb{1}$ FOR INVERSÍVEL $\Rightarrow (M-\mathbb{1})^{-1}(M-\mathbb{1})\vec{v} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = 0}$

ENTÃO PRECISAMOS MOSTRAR QUE $M - \mathbb{1}$ NÃO TEM INVERSA $\Rightarrow$ MOSTRAR QUE $\det(M - \mathbb{1}) = 0$

$$\det(M - \mathbb{1}) = \det(M - MM^T) = \det(M)\det(\mathbb{1} - M^T)$$

$$= \det(M)\det(\mathbb{1} - M)^T = \underbrace{\det(M)}_{=1\ (\text{PRÓPRIAS})}\det(\mathbb{1} - M)$$

$$= \det(-\mathbb{1})\det(M - 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(1 - \det(-\mathbb{1})\right)\det(M-1) = 0}$$

MAS $\det(-\mathbb{1}) = \begin{cases} 1 & \text{SE } d \text{ É PAR} \\ -1 & \text{SE } d \text{ É ÍMPAR} \end{cases}$

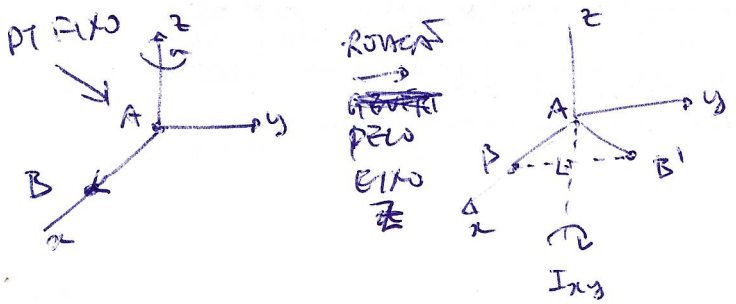
$\Rightarrow$ SE d É ÍMPAR $\Rightarrow 2\det(M-1) = 0 \Rightarrow$ $M-\mathbb{1}$ É NÃO-INVERSÍVEL

SE d É PAR $\rightarrow$ NÃO PROVAMOS NADA

(NOTE: EM 2D, O ÚNICO VETOR INVARIANTE É O VETOR NULO)

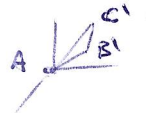
* PODE PARECER CONTRA-INTUITIVO QUE, EM 3D, O DESLOCAMENTO GENÉRICO COM UM PT FIXO POSSA SER REPRESENTADO POR UMA ÚNICA ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO.

PARA ENTENDER, NOTE QUE HÁ MAIS DE UM EIXO QUE LEVA UM VETOR A OUTRO (DE MESMA NORMA)



UMA ROT DE 180° EM TORNO DO EIXO I_{xy} TAMBÉM LEVA $B \rightarrow B'$. HÁ INFINITOS EIXOS (NO PLANO $\perp I_{xy}$) QUE FAZEM ISSO

ROTACIONAR O SÓLIDO É ROTACIONAR 2 VETORES



→ INTERSEÇÃO DE 2 PLANOS ⇒ 1 EIXO

ÂNGULOS DE EULER

EM 3D UMA MATRIZ DE ROTAÇÃO GENÉRICA M TEM QUANTOS PARÂMETROS?

$M \rightarrow$? PARÂMETROS

$M M^T = \mathbb{1} \rightarrow \sum_k M_{ik} M_{jk} = \delta_{ij}$ (6 EQS)

$M^T M = \mathbb{1} \rightarrow \sum_k M_{ki} M_{kj} = \delta_{ij}$ (6 EQS) → "MESMAS" DE ANTES EQUIVALENTES

$\Rightarrow 9 - 6 = 3$ PARÂMETROS INDEPENDENTES (1 ÂNGULO E 1 EIXO (2 PARÂMETROS))

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & I \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$A^2+B^2+C^2 = 1$
$D^2+E^2+F^2 = 1$
$G^2+H^2+I^2 = 1$

$AD + BE + CF = 0$
$DA + EB + FC = 0$
$AG + BH + CI = 0$
$GA + HB + IC = 0$
$BG + EH + FI = 0$
$GB + HE + IF = 0$

6 EQS P/ $MM^T = \mathbb{1}$

$$\begin{pmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$A^2+D^2+G^2 = 1$
$B^2+E^2+H^2 = 1$
$C^2+F^2+I^2 = 1$

$AB + DE + GH = 0$
$AC + DF + GI = 0$
$BC + EF + HI = 0$

6 EQS P/ $M^T M = \mathbb{1}$

MAS EQS SÃO INDEPENDENTES?

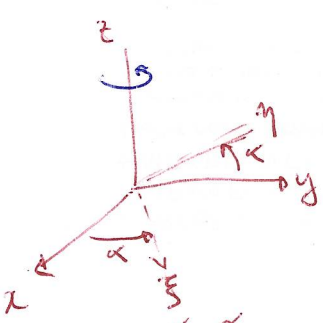
$M M^T = \mathbb{1} \Rightarrow M(M^T M) = M \Rightarrow M^T M = \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ **M TEM 3 PARÂMETROS LIVRES (INDEPENDENTES)**

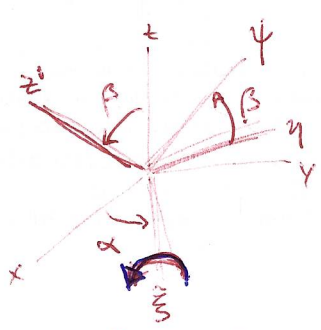
3 PARÂMETROS SÃO OS ÂNGULOS DE (EULER) 3 ROTAÇÕES

$(x,y,z) \xrightarrow[\text{ROT } \hat{z}]{A} (\xi,\eta,z) \xrightarrow[\text{ROT } \hat{\xi}]{B} (\xi,\psi,z') \xrightarrow[\text{ROT } \hat{z}']{C} (x',y',z')$

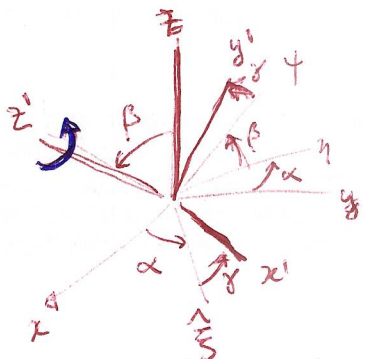
(α) (β) (γ)



$$A = \begin{pmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 \\ -s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\beta & s\beta \\ 0 & -s\beta & c\beta \end{pmatrix}$$



$$C = \begin{pmatrix} c\gamma & s\gamma & 0 \\ -s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

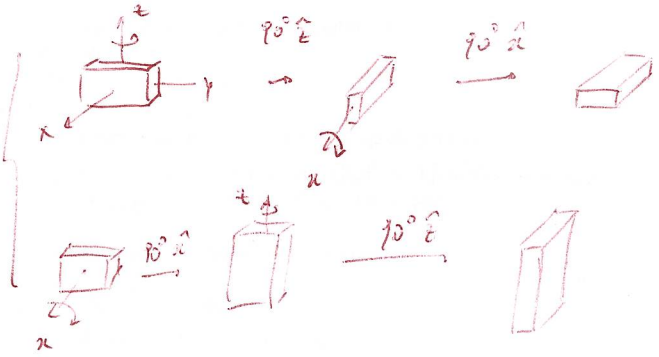
TEMOS, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \xi \\ \psi \\ \zeta \end{pmatrix} = C B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = C B A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M = CBA = C \begin{pmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 \\ -c\beta s\alpha & c\beta c\alpha & s\beta \\ s\beta s\alpha & -s\beta c\alpha & c\beta \end{pmatrix}$

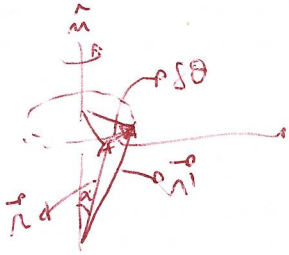
$= \begin{pmatrix} c\alpha c\gamma - c\beta s\alpha s\gamma & c\gamma s\alpha + c\alpha c\beta s\gamma & s\beta s\gamma \\ -s\alpha c\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & s\beta c\gamma \\ s\alpha s\beta & -c\alpha s\beta & c\beta \end{pmatrix}$

ROTAÇÕES INFINITESIMAIS

• ROTAÇÕES FINITAS NÃO COMUTAM:



ROT. INFINITESIMAIS



$\delta\vec{n} = \delta\vec{\theta} \times \vec{n}$, $\delta\vec{\theta} = \delta\theta\,\hat{n}$

$|\delta\vec{n}| = n \sin\alpha\, \delta\theta$

OU SEJA: $\vec{n}' = \vec{n} + \delta\vec{n} = \vec{n} + \delta\vec{\theta} \times \vec{n} \equiv (\mathbb{1} + \epsilon)\vec{n}$

2 ROTAÇÕES INFINITESIMAIS:

$\vec{n}'' = \vec{n}' + \delta\vec{\theta}_2 \times \vec{n}' = \vec{n} + \delta\vec{\theta}_1 \times \vec{n} + \delta\vec{\theta}_2 \times (\vec{n} + \delta\vec{\theta}_1 \times \vec{n})$

$= \vec{n} + (\delta\vec{\theta}_1 + \delta\vec{\theta}_2) \times \vec{n} + O(\delta\theta)^2$

$= (\mathbb{1} + \epsilon_1 + \epsilon_2 + O(\epsilon^2))\,\vec{n}$

$\Rightarrow$ DESPREZANDO INFINITÉSIMOS DE 2ª ORDEM (INFINITÉSIMOS AO QUADRADO)

TEM-SE QUE ROTAÇÕES INFINITESIMAIS COMUTAM ENTRE SI

COMO É A MATRIZ INFINITESIMAL DE ROTAÇÕES?

$M = \mathbb{1} + \epsilon$. COMO $M M^T = \mathbb{1} \Rightarrow \mathbb{1} + \epsilon + \epsilon^T \cong \mathbb{1}$

$\Rightarrow \epsilon = -\epsilon^T \Rightarrow$ MATRIZ ANTI-SIMÉTRICA $\begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ -\epsilon_{12} & 0 & \epsilon_{23} \\ -\epsilon_{13} & -\epsilon_{23} & 0 \end{pmatrix}$

COMPARANDO COM

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\theta} \times \vec{r} = (\delta\theta_y z - \delta\theta_z y)\hat{x} + (\delta\theta_z x - \delta\theta_x z)\hat{y} + (\delta\theta_x y - \delta\theta_y x)\hat{z}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta_z & \delta\theta_y \\ \delta\theta_z & 0 & -\delta\theta_x \\ -\delta\theta_y & \delta\theta_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta_z & \delta\theta_y \\ \delta\theta_z & 0 & -\delta\theta_x \\ -\delta\theta_y & \delta\theta_x & 0 \end{pmatrix}$$

É CONVENIENTE DEFINIR $\vec{J}_k$: $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{r}' = (\mathbb{1} + J_1\delta\theta_x + J_2\delta\theta_y + J_3\delta\theta_z)\vec{r} = (\mathbb{1} + \delta\vec{\theta}\cdot\vec{J})\vec{r}$$

DO GRUPO — ↳ VETOR DE MATRIZES

$J_{x,y,z}$ (i = 1,2,3) ≡ GERADORES INFINITESIMAIS DAS ROTAÇÕES SO(3)

ÁLGEBRA DOS OPERADORES: $[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} J_k$

ε_{ijk} = SÍMBOLO DE LEVI-CIVITA = $\begin{cases} 1 & \text{SE } (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1 & \text{SE } (i,j,k) = (1,3,2), (3,2,1), (2,1,3) \\ 0 & \text{NOS DEMAIS CASOS } (i=j \text{ OU } i=k \text{ OU } j=k) \end{cases}$

ROTAÇÃO FINITA: (EM TORNO DE UM EIXO FIXO)

$$\vec{r}' = \lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{1} + \frac{\theta}{N}\hat{n}\cdot\vec{J}\right)^N = e^{\theta\hat{n}\cdot\vec{J}}$$

ROTAÇÃO FINITA DE ÂNGULO θ EM TORNO DO EIXO $\hat{n}$ — VETOR DE MATRIZES

DEFINIÇÃO: $e^M = \mathbb{1} + M + \frac{1}{2!}M\cdot M + \frac{1}{3!}M\cdot M\cdot M + \cdots + \frac{1}{n!}M^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{M^k}{k!}$

* TODAS AS MATRIZES DO GRUPO SO(3) PODEM SER REPRESENTADAS NA FORMA $R(\vec{\theta}) = e^{\vec{\theta}\cdot\vec{J}}$, $\vec{\theta} = \theta\cdot\hat{n}$

→ FORMAM GRUPO DE LIE COM ÁLGEBRA DOS GERADORES $[J_i, J_j] = \sum \varepsilon_{ijk} J_k$

VETOR VELOCIDADE

REF. INERCIAL : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{I}} \vec{r}_{\text{I}}$, $\vec{r}_I = \sum_{j=1}^{3} r_{Ij}\, \hat{e}_{Ij}$

$= \vec{r}_{NI} = \sum_{j=1}^{3} r_{NI}\, \hat{e}_{NI,j}$

$$\vec{v}_I = \sum_{j=1}^{3} \frac{dr_{Ij}}{dt}\, \hat{e}_{Ij} = \sum_{j=1}^{3} \frac{dr_{NIj}}{dt}\, \hat{e}_{NIj} + \sum_{j=1}^{3} r_{NIj}\, \frac{d}{dt}\, \hat{e}_{NIj}$$

$\hat{e}_{NIj(0)} + \delta\vec{\theta} \times \hat{e}_{NIj(0)}$

$$= \vec{v}_{NI} + \frac{d}{dt}\left(\delta\vec{\theta} \times \sum_{j=1}^{3} r_{NI}\, \hat{e}_{NIj(0)}\right)$$

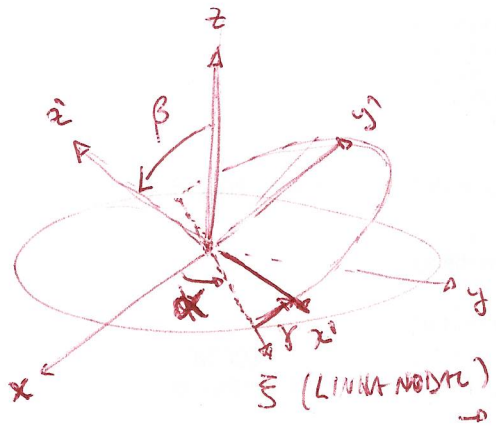
$$\boxed{\vec{v}_I = \vec{v}_{NI} + \frac{\delta\vec{\theta}}{\delta t} \times \vec{r}_{NI} \equiv \vec{v}_{NI} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{NI}}$$

NOTE QUE $\vec{\omega}$ NÃO É A DERIVADA $\frac{d\vec{\theta}}{dt} = \frac{d}{dt}(\theta\hat{n})$ DE 1 VETOR.

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{n} \quad \text{E NÃO} \quad \frac{d}{dt}(\theta\hat{n})$$

$\vec{\omega}$ EM TERMOS DOS ÂNGULOS DE EULER

ROT. INFINITESIMAIS $\Rightarrow$ $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\alpha + \vec{\omega}_\beta + \vec{\omega}_\gamma = \dot{\alpha}\hat{z} + \dot{\beta}\hat{\xi} + \dot{\gamma}\hat{z}'$



ESCREVER $\vec{\omega}_{\alpha\beta\gamma}$ EM RELAÇÃO AOS EIXOS DO CORPO x', y', z'

$\vec{\omega}_\alpha = \dot{\alpha}\hat{z}$

COMO ESCREVER $\hat{z}$ EM TERMOS DE $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ E $\hat{z}'$?

LEMBRE-SE QUE $\vec{r}' = IM\,\vec{r} = \underbrace{C\,B\,A}_{IM}\,\vec{r}_0 \Rightarrow IM = \begin{pmatrix} c\alpha c\gamma - c\beta s\alpha s\gamma & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}$

PÁGINA 166

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (\omega_\alpha)_{x'} \\ (\omega_\alpha)_{y'} \\ (\omega_\alpha)_{z'} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}\, s\beta\, s\gamma \\ \dot{\alpha}\, s\beta\, c\gamma \\ \dot{\alpha}\, c\beta \end{pmatrix} \leftarrow \Rightarrow \hat{z} = \begin{pmatrix} s\beta s\gamma \\ s\beta c\gamma \\ c\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{j} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = IM^T \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \end{pmatrix}$$

$\vec{\omega}_\beta = \dot{\beta}\,\hat{\xi}$, MAS $\hat{\xi} = \mathbb{C}\,\hat{x}'$

$$= \begin{pmatrix} c\gamma & s\gamma & 0 \\ -s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ -s\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (\omega_\beta)_{x'} \\ (\omega_\beta)_{y'} \\ (\omega_\beta)_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\beta}\,c\gamma \\ \dot{\beta}\,(-s\gamma) \\ 0 \end{pmatrix}$$

FINALMENTE $\vec{\omega}_\gamma = \dot{\gamma}\,\hat{z}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}$

FINALMENTE $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}\,s\beta\,s\gamma + \dot{\beta}\,c\gamma \\ \dot{\alpha}\,s\beta\,c\gamma - \dot{\beta}\,s\gamma \\ \dot{\alpha}\,c\beta + \dot{\gamma} \end{pmatrix}$

~~VOLTANDO À DISCUSSÃO DE QUE $\vec{\omega}$ NÃO É DERIVADA DE UM VETOR~~

~~MAS SE FOSSE $\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{d}{dt}(\Theta_x \hat{x}' + \dots$~~

$$\text{dt}$$

COMO FICA $\vec{\omega}$ EM TERMOS DOS EIXOS FIXOS INERCIAIS?

$\vec{\omega}_\alpha = \dot{\alpha}\,\hat{z}$, $\vec{\omega}_\beta = \dot{\beta}\,\hat{\xi} = \dot{\beta}(\cos\alpha\,\hat{x} + \sin\alpha\,\hat{y})$, $\vec{\omega}_\gamma = \dot{\gamma}\,\hat{z}'$

$= \dot{\gamma}\,\mathrm{IM}\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \dot{\gamma}\begin{pmatrix} s\alpha\,s\beta \\ -c\alpha\,s\beta \\ c\beta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\beta}\cos\alpha + \dot{\gamma}\,s\alpha\,s\beta \\ \dot{\beta}\,s\alpha - \dot{\gamma}\cos\alpha\,s\beta \\ \dot{\alpha} + \dot{\gamma}\cos\beta \end{pmatrix}$$

*OBS:

~~VOLTANDO À~~ VOLTANDO À DISCUSSÃO DE QUE $\vec{\omega}$ NÃO É DERIVADA DE UM VETOR

SE FOSSE $\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{d}{dt}\left(\Theta_x \hat{x} + \Theta_y \hat{y} + \Theta_z \hat{z}\right)$

$$\Rightarrow \omega_z = \frac{d\Theta_z}{dt} = \frac{d}{dt}\Theta_z(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\partial\Theta_z}{\partial\alpha}\dot{\alpha} + \frac{\partial\Theta_z}{\partial\beta}\dot{\beta} + \frac{\partial\Theta_z}{\partial\gamma}\dot{\gamma}$$

MAS $\omega_z = \dot{\alpha} + \dot{\gamma}\cos\beta$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Theta_z}{\partial\alpha} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Theta_z = \alpha + f(\beta,\gamma)$$

COMO $\begin{cases} \dfrac{\partial\Theta_z}{\partial\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta_z = \alpha + f(\gamma) \\ \dfrac{\partial\Theta_z}{\partial\gamma} = \cos\beta = \dfrac{\partial f(\gamma)}{\partial\gamma} \quad \rightarrow \text{INCONSISTENTE} \end{cases}$

VETOR ACELERAÇÃO

$$\vec{a}_I = \frac{d\vec{v}_I}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{NI} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{NI}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{d}{dt}r_{NIj}\right)\hat{e}_{NIj} + \omega\hat{n}\times\vec{r}_I\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\frac{d^2 r_{NIj}}{dt^2}\hat{e}_{NIj} + \sum_{j=1}^{3} v_{NIj}\left(\frac{d}{dt}\hat{e}_{NIj}\right) + \dot{\omega}\hat{n}\times\vec{r}_I + \omega\dot{\hat{n}}\times\vec{r}_I + \omega\hat{n}\times\vec{v}_I$$

$$= \vec{a}_{NI} + \underbrace{\sum_{j=1}^{3}\vec{v}_{NIj}\left(\vec{\omega}\times\hat{e}_{NIj}\right)}_{\vec{\omega}\times\vec{v}_{NI}} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{NI} + \vec{\omega}\times\left(\vec{v}_{NI} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{NI}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_I = \vec{a}_{NI} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{NI} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{NI}\right) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{NI}}$$

- $2\vec{\omega}\times\vec{v}_{NI}$ — CORIOLIS
- $\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{NI}\right)$ — CENTRÍFUGA
- $\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{NI}$ — ACELERAÇÃO DE EULER

DE FORMA COMPACTA

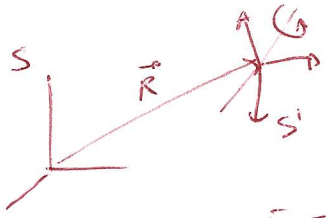
$$\left(\frac{d}{dt}\right)_I = \left(\frac{d}{dt}\right)_{NI} + \vec{\omega}\times \quad \rightarrow$$

$$\vec{v}_I = \vec{v}_{NI} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{NI}$$

$$\vec{a}_I = \vec{a}_{NI} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{NI} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{NI} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{NI} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{NI}\right)$$

$$= a_{NI} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{NI} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{NI}\right) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{NI}$$

NO CASO GERAL DE REF NÃO-INERCIAIS

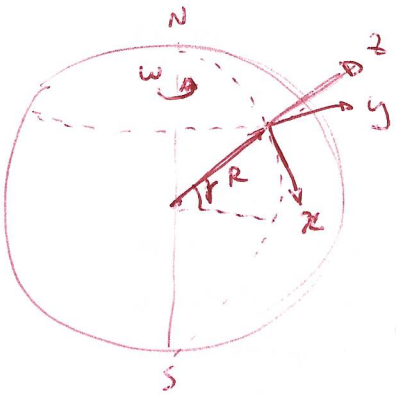


$$\Rightarrow \vec{a}_I = \vec{a}_{NI} + \ddot{\vec{R}} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{NI} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{NI}) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{NI}$$

INERCIAL NÃO-INERCIAL

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{NI} = m\vec{a}_{NI} = \vec{F}_I - m\ddot{\vec{R}} + 2m\vec{v}_{NI}\times\vec{\omega} + m\vec{\omega}\times(\vec{r}_{NI}\times\vec{\omega}) + m\vec{r}_{NI}\times\frac{d\vec{\omega}}{dt}}$$

DINÂMICA NO REF DA TERRA



$$m\vec{a}_{NI} = \vec{F}_I + m\vec{g} - m\ddot{\vec{R}} + 2m\vec{v}_{NI}\times\vec{\omega} + m\vec{\omega}\times(\vec{r}_{NI}\times\vec{\omega}) + m\vec{r}_{NI}\times\dot{\vec{\omega}}$$

TOMANDO $\dot{\vec{\omega}} \cong 0$

$$\ddot{\vec{R}} = \left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{NI} + \omega\times\right)\vec{R} = \left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{NI} + \vec{\omega}\times\right)\left(\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{NI} + \vec{\omega}\times\vec{R}\right)$$

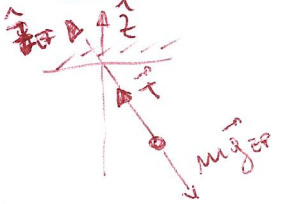
$$= \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})$$

$$\Rightarrow m\vec{a}_{NI} = \vec{F}_I + m\vec{g}_{EF} + 2m\vec{v}_{NI}\times\vec{\omega} + m\vec{\omega}\times(\vec{r}_{NI}\times\vec{\omega})$$

ONDE $\vec{g}_{EF} = \vec{g} + \vec{\omega}\times(\vec{R}\times\vec{\omega})$ = ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE VISTA PELO REF. GIRANTE COM A TERRA NA SUP. DA TERRA

$\vec{\omega} = \omega(\sin\gamma\,\hat{z} - \cos\gamma\,\hat{x})$, $\vec{R} = R\hat{z}$

EX: FIO DE PRUMO



$m\vec{a}_{NI} = 0$, $\vec{F}_I = \vec{T}$, $\vec{v}_{NI} = \vec{r}_{NI} = 0$

$$\Rightarrow \vec{T} + m\vec{g}_{EF} = 0$$

DIMINUIÇÃO DE $\vec{g}$ NA VERTICAL

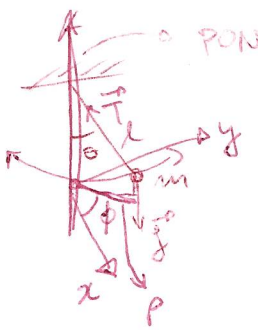
COMPONENTE NORTE-SUL

$$\vec{g}_{EF} = -g\hat{z} + \vec{\omega}\times(-R\omega\cos\gamma\,\hat{y}) = -\left(g - R\omega^2\cos^2\gamma\right)\hat{z} + \frac{R\omega^2}{2}\sin 2\gamma\,\hat{x}$$

$$R\omega^2 \simeq (6400.000\ m) \times \left(\frac{2\pi}{24\times 3600\ s}\right)^2 \simeq 6{,}4\times 10^6\ m \times \left(\frac{7{,}3\ 10^{-5}}{s}\right)^2$$

$$\simeq 3{,}4\cdot 10^{-2}\ \frac{m}{s^2}$$

EX: PÊNDULO DE FOUCAULT



O PONTO DE SUSPENSÃO PODE GIRAR LIVREMENTE

DESPREZAR TERMOS MUITO PEQUENOS

$$\vec{g}_{ef} \approx \vec{g} = -g\hat{z}$$

PEQUENAS OSCILAÇÕES: $\theta \ll 1$

$$z = l(1-\cos\theta) \approx \frac{l\theta^2}{2}$$

$$\rho = l\sin\theta \approx l\theta$$

$$m\vec{a}_{NI} = \vec{T} + m\vec{g} + 2m\vec{v}_{NI}\times\vec{\omega}$$

FORÇA DE CORIOLIS TRANSVERSA AO PLANO DE OSCILAÇÃO

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T\sin\theta\cos\phi + 2m\dot{y}\omega_z \\ m\ddot{y} = -T\sin\theta\sin\phi - 2m\dot{x}\omega_z \end{cases}$$

$\omega_z = \omega\sin\lambda$

$T\cos\theta \simeq mg \Rightarrow T \approx mg$

$\rho = l\sin\theta$

$x = \rho\cos\phi$

$y = \rho\sin\phi$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{g}{l}l\sin\theta\cos\phi + 2\dot{y}\omega_z \\ \ddot{y} = -\frac{g}{l}l\sin\theta\sin\phi - 2\dot{x}\omega_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\omega_z\dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\omega_z\dot{x} \end{cases} \qquad \xi = x + iy \longrightarrow \boxed{\ddot{\xi} + 2i\omega_z\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0}$$

SOLUÇÃO: $\xi = e^{ipt}$

$$-p^2 + 2\omega_z p + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow p = \omega_z \pm \sqrt{\omega_z^2 + \omega_0^2} \approx \omega_z \pm \omega_0$$

$$\Rightarrow \xi = Ae^{-i(\omega_z+\omega_0)t} + Be^{-i(\omega_z-\omega_0)t} = \xi_{MAX}\cos\omega_0 t\ e^{-i\omega_z t}$$

$\Rightarrow$ PLANO DE OSCILAÇÃO GIRA COM VELOCIDADE $-\omega_z = -\omega\sin\lambda$ $\Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = -\omega_z = -\omega\sin\lambda}$