# 8

# Efeitos de borda e interferência

O capítulo anterior tratava de ondas que podiam ser imaginadas como trafegando sem interrupção em um meio particular. Este capítulo é basicamente sobre alguns dos efeitos que ocorrem quando uma onda progressiva se depara com barreira, ou meio diferente, ou pequenos obstáculos. Estes efeitos representam grande campo de estudo, e a exposição presente não pretende ser mais do que uma rápida primeira vista da análise destes fenômenos. Iremos começar com o nosso velho conhecido, o fio esticado, e iremos analisar o que acontece quando uma onda progressiva em um fio se depara com descontinuidade de alguma espécie.

## Reflexão de pulsos de onda

Ao discutir a ligação entre ondas estacionárias e ondas progressivas em um fio esticado, fizemos necessariamente alguma referência às condições que existiam nas duas extremidades de um fio de comprimento limitado. Mostramos que, como questão prática, podemos produzir uma onda estacionária agitando uma extremidade de um fio, assim gerando onda progressiva que sofre algum processo de reflexão na extremidade mais afastada. As ondas que estão partindo e as que estão chegando então concorrem para produzir uma figura de onda estacionária com nodos nos pontos fixos.

Mais quantitativamente, reconhecemos que um dado modo normal em um fio com as extremidades fixas pode ser observado como superposição de duas ondas seno de iguais amplitudes, comprimentos de onda e freqüências, trafegando em sentidos opostos. Para ser claro, notamos que as duas afirmativas seguintes são matematicamente equivalentes:

Modo normal:

$$y(x,t) = A\ sen\left(\frac{n\pi\, x}{L}\right)cos\ \omega\, t$$

As duas ondas progressivas:

$$y(x,t) = \frac{A}{2}sen\left(\frac{n\pi\, x}{L} - \omega\, t\right) + \frac{A}{2}sen\left(\frac{n\pi\, x}{L} + \omega\, t\right)$$

Se tomarmos a segunda destas afirmativas e dermos a atenção às condições em $x = 0$ ou $x = L$, teremos

$$y(0,t) = y(L,t) = \frac{A}{2}sen\left(-\omega\, t\right) + \frac{A}{2}sen\ \omega\, t$$

$$= -\frac{A}{2}\ sen\omega\, t + \frac{A}{2}\ sen\omega\, t$$

O que esta diz é que essas ondas trafegando em sentidos opostos devem, em todos os tempos, produzir deslocamentos iguais e opostos nas extremidades fixas – que é, na verdade, requisito necessário bastante óbvio. E o ponto principal é que esta mesma condição deve definir o processo de reflexão para qualquer onda progressiva quando se encontra com fronteira rígida.

Vamos dar uma segunda olhada em outro processo de superposição. Em relação à Fig. 7-15, discutimos a superposição de dois pulsos de deslocamentos opostos trafegando em sentidos opostos ao longo de um fio. Um fato interessante pode ser notado neste exemplo: o ponto no fio em que os dois pulsos se encontram fica em repouso em todos os tempos! As ondas atravessam em sentidos opostos sem produzir qualquer deslocamento do ponto em qualquer tempo. Poderíamos considerar o ponto como estando rigidamente fixo a uma parede sem alterar de maneira alguma a forma da onda. Esta nos dá pista com o que acontece quando um pulso de onda está incidindo na extremidade de um fio mantido imóvel: um pulso de deslocamento oposto é refletido da extremidade e trafega de volta em direção à fonte.

Esta reflexão invertida não é tão misteriosa quando consideramos que a chegada de um deslocamento positivo exercerá força para cima no suporte que mantém a extremidade fixa (*vide* Fig. 8-1). Pela terceira lei de Newton, o suporte exerce força de reação em sentido oposto no fio, assim gerando pulso de polaridade *oposta* que trafega em direção à fonte.



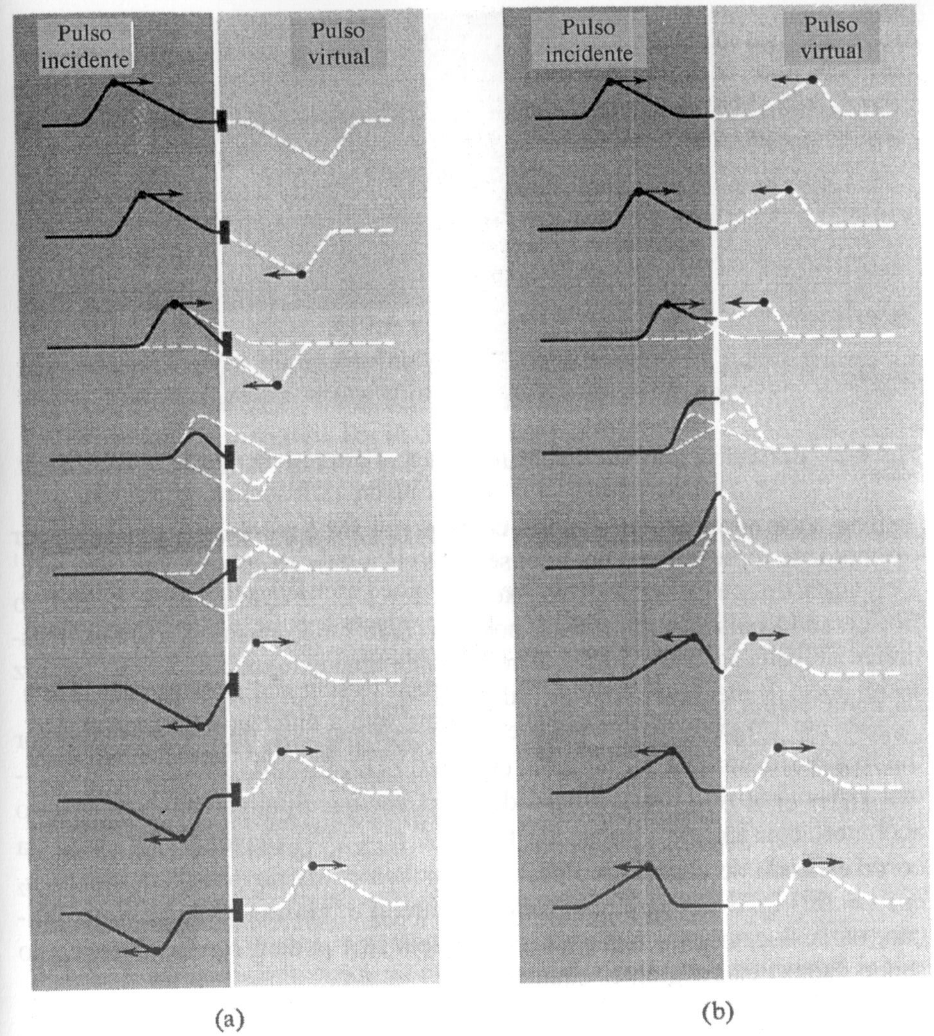


Fig. 8-1 – (a) Reflexão em extremidade fixa. (b) Reflexão em extremidade livre. Pode-se imaginar a reflexão como se o fio prolongasse indefinidamente para além de seu término real. O pulso pode ser considerado como continuando em porção imaginária como se o suporte não estivesse lá, enquanto no mesmo tempo um pulso "virtual" trafegando na porção imaginária se moveria para fora do fio real e formasse o pulso refletido. A natureza do pulso refletido depende se a extremidade é fixa ou livre. (Figura adaptada de F. W. Sears e M. W. Zemansky, *University Physics*, 3. ed., Part I, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1963.)

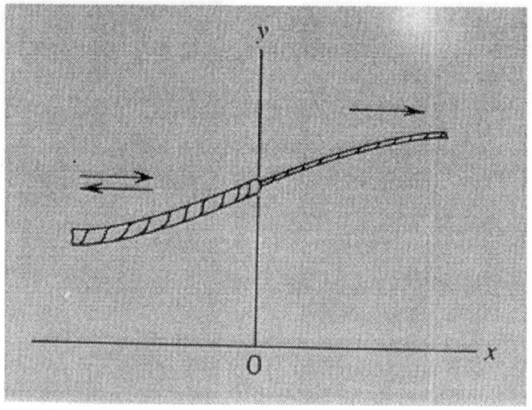


Fig. 8-2 – Reflexão e transmissão em uma junção entre fios diferentes.

Se a extremidade do fio for completamente livre para se mover (por exemplo, se fosse preso a um anel sem massa e sem atrito na haste vertical),[1] a chegada de um pulso positivo exercerá força de reação para cima sobre o fio, gerando pulso de polaridade positiva. Este pulso positivo é então transmitido de volta ao longo do fio. A reflexão de uma extremidade "livre" produz assim pulso de *mesma* polaridade trafegando de volta em direção à fonte.

Se um fio com certa tensão e massa por unidade de comprimento for unido a outro fio com $\mu$ diferente, em geral ocorrerá reflexão (também alguma transmissão) na descontinuidade. Para ver quantitativamente como isso acontece, considere um pulso da forma $f_1(t - x/v_1)$ movendo ao longo da corda esticada de densidade linear $\mu_1$, ligada à corda de densidade linear $\mu_2$ em $x = 0$ (Fig. 8-2).[2] Supondo reflexão parcial e transmissão parcial na junção, os deslocamentos transversais nos dois fios podem ser supostos como sendo dados pelas seguintes equações:

$$y_1(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right) + g\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$$

$$y_2(x,t) = f_2\left(t - \frac{x}{v_2}\right) \qquad (8\text{-}1)$$

[1] Outro método de obter uma extremidade "livre" é prendê-la a um fio muito menos maciço.

[2] Escrevendo o pulso como $f(t - x/v)$ em vez de nosso usual $f(x - vt)$ é mais adequado na análise, basicamente porque quando uma onda passa de um meio para outro o comprimento muda mas não a freqüência. Assim associamos o fator que mudou com a coordenada $x$ e não com $t$.



Porque as extremidades das duas cordas ficam em contato uma com a outra, os deslocamentos transversais $y$, no ponto $x = 0$, devem ser o mesmo para as duas cordas. Também, em cada instante as cordas devem se unir com inclinações iguais e ter tensões iguais; do contrário, o elemento de massa representado pela junção daria aceleração muito grande. Assim temos as duas condições seguintes:

$$y_1(0,t) = y_2(0,t)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial y_2}{\partial x}(0,t)$$

isto é,

$$f_1(t) + g_1(t) = f_2(t) \qquad (8\text{-}2)$$

$$\frac{1}{v_1} f'1(t) - \frac{1}{v_1} g'1(t) = \frac{1}{v_2} f'2(t) \qquad (8\text{-}3)$$

Integrando a Eq. (8-3), temos

$$v_2 f_1(t) - v_2 g_1(t) = v_1 f_2(t) \qquad (8\text{-}4)$$

Resolvendo as Eqs. (8-2) e (8-4) para $g_1$ e $f_2$ em termos de $f_1$, encontramos

$$g_1(t) = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} f_1(t)$$

$$f_2(t) = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} f_1(t) \qquad (8\text{-}5)$$

Do jeito que estão, as Equações (8-5) são simplesmente descrição da condição do problema em $x = 0$ em valor arbitrário de $t$. Agora, porém, iremos introduzir um pouco de argumentação um tanto sutil e também muito importante. O que as equações (8-5) fazem é relacionar os valores de $f_1$, $g_1$ e $f_2$ no mesmo valor de seus argumentos. Para qualquer valor dado, suponhamos $\tau$, de seu argumento, temos $g_1(\tau) = \text{const.} \times f_1(\tau)$ e $f_2(\tau) = \text{const.} \times f_1(\tau)$. Mas não se está restrito a interpretar $\tau$ como o valor de $t$ em $x = 0$. Ele pode ser usado para definir todos os outros valores de $x$ e $t$ relacionados à forma requerida para a condição básica de uma dada onda progressiva. Assim a função $f_1$ é definida como sendo função do argumento $t - x/v_1$. Suponha que cada um destes argumentos seja colocado igual ao mesmo valor $\tau$, como requerido pela Eq. (8-5). Claramente não podemos usar o mesmo par de valores de $x$ e $t$ para ambos; vamos portanto indicar os valores como $x_f$, $t_f$, e $x_g$, $t_g$. Temos então

$$\tau = t_f - \frac{x_f}{v_1} = t_g + \frac{x_g}{v_1}$$

Se colocarmos $t_f = t_g = t$, devemos ter

$$x_g = -x_f$$

e o que *isto* significa é que o deslocamento associado ao pulso $g_1$ para dado instante, para dado valor de $x$, está diretamente relacionado ao valor de $f_1$ quando calculado no *mesmo* tempo na posição $-x$. Particularmente, de acordo com a primeira das equações (8-5), temos

$$g_1\left(t + \frac{-x}{v_1}\right) = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right) \qquad \text{(8-6a)}$$

E o que esta diz é que o pulso refletido, além de ser reduzido pelo fator $(v_2 - v_1) / (v_2 + v_1)$, é invertido da direita à esquerda em relação ao pulso incidente. Se $v_2 < v_1$, ele fica com a crista para baixo.

De forma similar podemos relacionar a forma de onda transmitida $f_2$ à forma de onda incidente $f_1$. Para dado valor de $t$ os valores correspondentes de $x$ (chamaremo-los $x_1$ e $x_2$) são definidos pela relação

$$\tau = t - \frac{x_1}{v_1} = t - \frac{x_2}{v_2}$$

Conseqüentemente, $x_2 = (v_2/v_1)\, x_1$, e a segunda das equações (8-5) requer que coloquemos

$$f_2\left(t - \frac{v_2 x/v_1}{v_2}\right) = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} f_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right) \qquad \text{(8-6b)}$$



Esta nos diz que, comparada ao pulso incidente, o pulso transmitido sofrerá não somente mudança na altura como também mudança de escala ao longo de $x$.

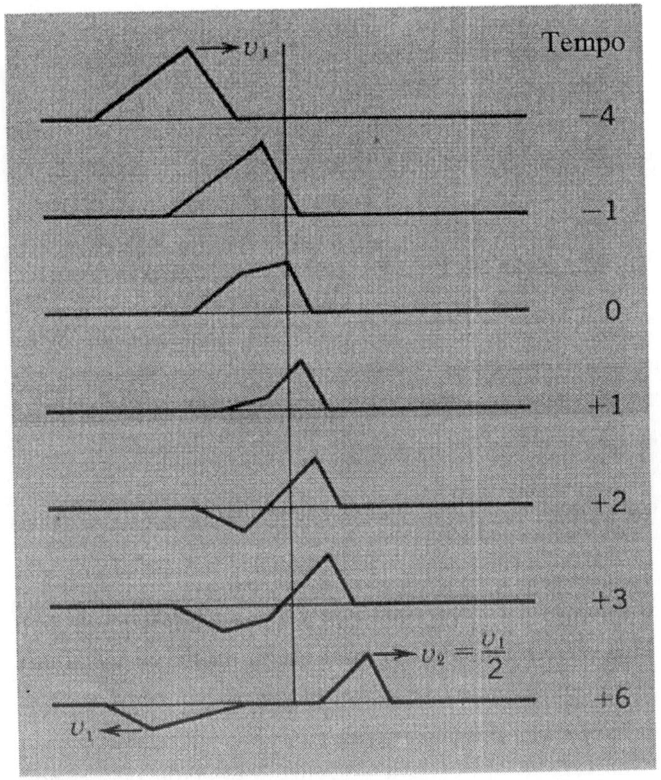


Fig. 8-3 – Reflexão e transmissão parciais de pulso de onda triangular na junção de dois fios. O pulso é incidente do fio com maior velocidade. ($v_2 = \frac{1}{2} v_1$.)

Ao usar as relações anteriores, devemos notar que se o pulso $f_1$ é incidente na direção $x$ negativa, e se a junção está em $x = 0$, então as funções $f_1$ e $g_1$ representam fisicamente os deslocamentos reais somente se $x \leq 0$, enquanto $f_2$ representa deslocamento fisicamente real somente se $x \geq 0$. Assim, por exemplo, ao usar a Eq. (8-6a), encontramos deslocamento real no pulso refletido $g_1$, em algum valor negativo de $x$, ao considerar o que o deslocamento do pulso incidente $f_1$ teria sido se tivesse continuado na região de $x$ positivo, e então multiplicando pelo fator $(v_2 - v_1) / (v_2 + v_1)$. Na Fig. 8-3 mostramos o desenvolvimento dos pulsos refletidos e transmitidos de um pulso incidente para o caso particular $v_2 = v_1/2$.

Como os casos extremos da Eq. (8-6a) temos os seguintes:

a. Fio 2 infinitamente maciço:
$v_2 = 0$

$$g\left(t+\frac{-x}{v_1}\right)=-f_1\left(t-\frac{x}{v_1}\right)$$

b. Fio 2 sem massa ou ausência de massa:
$v_2 = \infty$

$$g\left(t+\frac{-x}{v_1}\right)=f_1\left(t-\frac{x}{v_1}\right)$$

Estas representam então as duas situações mostradas na Fig. 8-1. A Fig. 8-4 mostra exemplo real da reflexão e transmissão de pulsos trafegando ao longo de molas.

## Impedâncias: extremidades sem reflexões[3]

O tipo de comportamento discutido na última seção pode ser tratado de forma mais clara ao introduzir o conceito de *impedância mecânica* em um sistema físico sujeito a forças motrizes. Esta impedância é definida como a razão da força motriz para a velocidade associada ao deslocamento. Você irá reconhecer aqui forte semelhança ao conceito elétrico de resistência, que é a razão de uma tensão aplicada à corrente associada (e a corrente é taxa do fluxo de carga). Mas de forma semelhante em sistemas mecânicos e elétricos, existe em geral diferença de fase entre força motriz e velocidade (ou entre tensão e corrente). A lei de Ohm expressa relação em que tensão e corrente estão sempre em fase. Assim, por exemplo, se aplicarmos entre os terminais de uma resistência tensão dada por

$$V = V_0 \cos \omega t$$

então a corrente resultante é dada por

$$I = I_0 \cos \omega t$$

[3] Essa seção pode ser omitida sem perda de continuidade. (Mas não é difícil e pode ser bastante instrutivo obter alguma familiaridade com as propriedades de elementos básicos do circuito elétrico.)



onde

$$I_0 = \frac{V_0}{R}$$

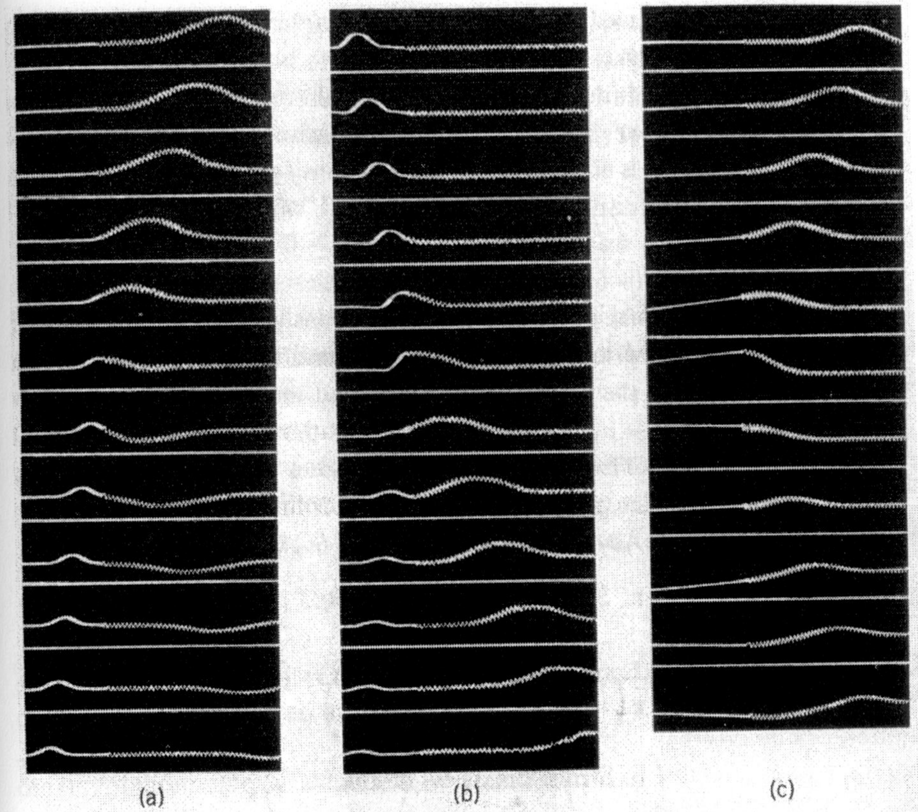


Fig. 8-4 – Fotografias do encontro de pulsos na fronteira entre dois meios. (a) Pulso passando de mola leve (direita) para mola pesada. Na junção o pulso é parcialmente transmitido e parcialmente refletido. Você notará que o pulso está com crista para baixo. (b) Pulso passando de mola pesada (esquerda) para mola leve. Na junção o pulso é parcialmente transmitido e parcialmente refletido. O pulso refletido está com crista para cima. (c) O pulso em mola refletido de junção com fio muito leve. O pulso como todo retorna com crista para cima. O borrado nas figuras indica que as partículas do fio estão se movendo em alta velocidade quando o pulso passa. Você pode determinar o sentido do movimento em cada uma das imagens? (Fotografias do Physical Science Study Committee, *Physics*, Heath, Boston, 1965.)