Gabarito

Mecânica Quântica II - FFI 0122

Prova I - 03/09/2015

Duração da Prova: 2 horas

Nome:

Número USP:

1.a

1. **(4,0)** Considere um sistema em um auto-estado $\mid l\,,\, m_z\rangle$ de L^2 e L_z

$$L^2 \mid l\,,\, m_z\rangle = \hbar^2\, l\,(l+1) \mid l\,,\, m_z\rangle \qquad\qquad L_z \mid l\,,\, m_z\rangle = \hbar\, m_z \mid l\,,\, m_z\rangle$$

   (a) Se um número muito grande de medidas de L_x e L_y forem feitas com o sistema neste estado, quais os valores médios das medidas de L_x e L_y?

   (b) Se um número muito grande de medidas de L_x^2 e L_y^2 forem feitas com o sistema neste estado, quais os valores médios das medidas de L_x^2 e L_y^2?

   (c) Determine os desvios padrões ΔL_x e ΔL_y das medidas de L_x e L_y naquele auto-estado.

   (d) Para qual valor de m_z os desvios ΔL_x e ΔL_y são mínimos?

   (e) Suponha agora que o sistema esteja no estado $\mid l = 1\,,\, m_z = 1\rangle$. Quais as probabilidades de uma medida de L_x encontrar os valores $\hbar$, 0 e $-\hbar$?

Da "colinha" temos que $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ e $L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$

Portanto

$$\langle l, m_z | (L_+ \pm L_-) | l\, m_z\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle L_x\rangle = \langle L_y\rangle = 0 \qquad (a)$$

Temos ainda que

$$L_x^2 = \frac{1}{4}\left(L_+^2 + L_-^2 + L_+L_- + L_-L_+\right) = \frac{1}{4}\left[L_+^2 + L_-^2 + 2(L^2 - L_z^2)\right]$$

$$L_y^2 = -\frac{1}{4}\left(L_+^2 + L_-^2 - L_+L_- - L_-L_+\right) = -\frac{1}{4}\left[L_+^2 + L_-^2 - 2(L^2 - L_z^2)\right]$$

e daí

$$\langle l\, m_z | L_x^2 | l\, m_z\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(l(l+1) - m_z^2\right) = \langle l\, m_z | L_y^2 | l\, m_z\rangle \qquad (b)$$

Daí

$$\Delta L_x = \Delta L_y = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left[l(l+1) - m_z^2\right]} \qquad (c)$$

Claramente ΔL_x e ΔL_y são mínimos para m_z^2 máximo. Ou seja para $m_z = \pm l$

1.6

Considere o estado $|\psi\rangle = a|1,1\rangle_z + b|1,0\rangle_z + c|1,-1\rangle_z$

Daí

$$L_x|\psi\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2}\Big[\sqrt{2}\, b|1,1\rangle_z + \sqrt{2}\, c\,|1,0\rangle_z + \sqrt{2}\, a\,|1,0\rangle_z + \sqrt{2}\, b\,|1,-1\rangle_z\Big] \equiv \lambda|\psi\rangle$$

Daí $\lambda a = \hbar\frac{\sqrt{2}}{2} b$, $\lambda b = \hbar\frac{\sqrt{2}}{2}(a+c)$, $\lambda c = \hbar\frac{\sqrt{2}}{2} b$

ou

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2}\hbar & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\hbar & \lambda & -\frac{\sqrt{2}\hbar}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}\hbar}{2} & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda\hbar^2 = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - \hbar^2) = 0$$

Soluções são $\lambda = 0, \pm\hbar$ e daí

p/ $\lambda = 0$ temos $b = 0$ e $a = -c$

$\lambda = \hbar$ " $a = c = \frac{\sqrt{2}}{2} b$

$\lambda = -\hbar$ " $a = c = -\frac{\sqrt{2}}{2} b$

Daí

$$|1,1\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}|1,1\rangle_z + |1,0\rangle_z + \frac{\sqrt{2}}{2}|1,-1\rangle_z\right]$$

$$|1,0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1,1\rangle_z - |1,-1\rangle_z\right]$$

$$|1,-1\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}|1,1\rangle_z + |1,0\rangle_z - \frac{\sqrt{2}}{2}|1,-1\rangle_z\right]$$

Logo:

$$|1,1\rangle_z = \frac{1}{2}\left[|1,1\rangle_x + \sqrt{2}\,|1,0\rangle_x - |1,-1\rangle_x\right]$$

Logo

$$P(L_x = \hbar) = \frac{1}{4}$$

$$P(L_x = 0) = \frac{1}{2} \qquad (E)$$

$$P(L_x = -\hbar) = \frac{1}{4}$$

1c

2.a

2. **(6,0)** Considere uma partícula de massa m movendo-se em tres dimensões espaciais sob ação do potencial

$$V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, e considere a equação de Schrödinger independent do tempo para este sistema

$$H\varphi = E\varphi \qquad H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)$$

Sabemos que devido à simetria do sistema por rotações, os operadores H, L^2 e L_z, formam um conjunto completo de observáveis que comutam entre si.

eq 1.0   2.0 (a) Encontre as auto-funções simultâneas de H, L^2 e L_z para este sistema.

fat. 1.0   2.0 (b) Encontre os possíveis valores da energia E, em função dos autovalores de L^2 e L_z, e de outro número quântico relevante ao problema..

su. 1.0

E 1.0   1.0 (c) Calcule a degenerecência dos auto-valores da energia.

1.0 (d) Apresente os níveis de energia agrupados em representações irredutíveis do grupo das rotações.

Dicas: Uma vez obtida a equação de Schrödinger para a função de onda radial $R(r)$ (onde $\varphi = R(r)\, Y(\theta, \phi)$), defina $u(r) = r\,R(r)$ tome o limite de $r \to \infty$ e obtenha a equação radial asintótica para $u(r)$, e encontre a solução asintótica fisicamente aceitável. Fatore a solução asintótica $u(r) = f_{\text{asint.}}(r)\; y(r)$, e resolva a equação para $y(r)$ (agora não asintótica) em série de potências.

Usando a "colinha" temos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r} + \frac{L^2}{2mr^2}\varphi + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\varphi = E\varphi$$

Fazendo $\varphi = R(r) Y_l^m(\theta,\phi) = \frac{u(r)}{r} Y_l^m(\theta,\phi)$

Com $L^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m$

e daí

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)u}{r^3} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \frac{u}{r} = E\frac{u}{r}$$

Definindo $\varepsilon = \frac{2m}{\hbar^2} E$ e $\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$

temos que a eq. radial fica

$$\boxed{\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \beta^4 r^2 + \varepsilon\right] u = 0}$$

Para $r \to \infty$ temos que

$$u'' - \beta^4 r^2 u \to 0$$

Temos duas soluções $u \sim e^{\pm \beta^2 r^2/2}$ pois

$$\frac{d}{dr} e^{\pm \beta^2 r^2/2} = \pm \beta^2 r \, e^{\pm \beta^2 r^2/2}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} e^{\pm \beta^2 r^2/2} = \left(\beta^4 r^2 \pm \beta^2\right) e^{\pm \beta^2 r^2/2} \approx \beta^4 r^2 e^{\pm \beta^2 r^2/2}$$

A solução aceitável é $e^{-\beta^2 r^2/2}$ e daí definimos

$$u(r) = e^{-\beta^2 r^2/2} \, y(r)$$

e

$$u' = e^{-\beta^2 r^2/2}\left[y' - \beta^2 r y\right]$$

$$u'' = e^{-\beta^2 r^2/2}\left[y'' - \beta^2 r y' - \beta^2 y - \beta^2 r y' + \beta^4 r^2 y\right]$$

A eq. p/ y fica

$$\boxed{y'' - 2\beta^2 r y' + \left[\varepsilon - \frac{l(l+1)}{r^2} - \beta^2\right] y = 0}$$

Resolvemos por série de potência:

$$Y = r^s \sum_{q=0}^{\infty} a_q r^q = a_0 r^s + a_1 r^{s+1} + \dots$$

O termo de menor potência fornece:

$$[s(s-1) - l(l+1)] a_0 = 0$$

Temos $s = l+1$ e $s = -l$. Mas s tem que ser positivo e daí

$$s = l+1$$

O próximo termo de maior potência é

$$[s(s+1) - l(l+1)] a_1 = 0 \implies a_1 = 0$$

Temos ainda que:

$$\sum_{q=0}^{\infty} a_q [(q+s)(q+s-1) - l(l+1)] r^{q+s-2}$$

$$+ \sum_{q=0}^{\infty} a_q [-2\beta^2(q+s) + \varepsilon - \beta^2] r^{q+s} = 0$$

que leva à relação de recorrência

$$a_{q+2}[(q+s+2)(q+s+1) - l(l+1)] + a_q[\varepsilon - \beta^2 - 2\beta^2(q+s)] = 0$$

Usando $s = l+1$

$$(q+l+3)(q+l+2) - l(l+1) = (q+2+l+1)(q+2+l) - l(l+1)$$

$$= (q+2)^2 + (q+2)(2l+1)$$

$$= (q+2)(q+2l+3)$$

Logo a relação de recorrência fica

$$\boxed{(q+2)(q+2l+3)\, a_{q+2} = \left[\beta^2(2q+2l+3) - \varepsilon\right] a_q}$$

$q = 0, 1, 2 \ldots$

Portanto $a_q = 0$ para q ímpar, pois $a_1 = 0$

Temos que para $q \to \infty$

$$\frac{a_{q+2}}{a_q} \sim \frac{2\beta^2}{q}$$

que leva a mesma série da exponencial $e^{\beta r^2}$

Portanto temos que truncar a série. Ou seja temos que ter

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_{k,l} = \beta^2(2k+2l+3)}$$

$k = 0, 2, 4, 6 \ldots$

Denotando $\boxed{k + l = n}$

$n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

temos que a energia é

$$\varepsilon_{k,l} = 2\beta^2\left(n + \frac{3}{2}\right)$$

ou

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\, 2\, \frac{m\omega}{\hbar}\left(n + \frac{3}{2}\right)$$

ou

$$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)}$$

2.e

Temos que $k = 0, 2, 4 \ldots$ e $l = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Logo

$n = 0 \rightarrow k = 0 \quad l = 0$

$n = 1 \rightarrow k = 0 \quad l = 1$

$n = 2 \rightarrow (k = 0,\ l = 2)$ ou $(k = 2,\ l = 0)$

$n = 3 \rightarrow (k = 0,\ l = 3)$ ou $(k = 2,\ l = 1)$

$n = 4 \rightarrow (k = 0,\ l = 4)$, $(k = 2,\ l = 2)$, ou $(k = 4,\ l = 0)$

$n = 5 \rightarrow (k = 0,\ l = 5)$, $(k = 2,\ l = 3)$ $(k = 4,\ l = 1)$

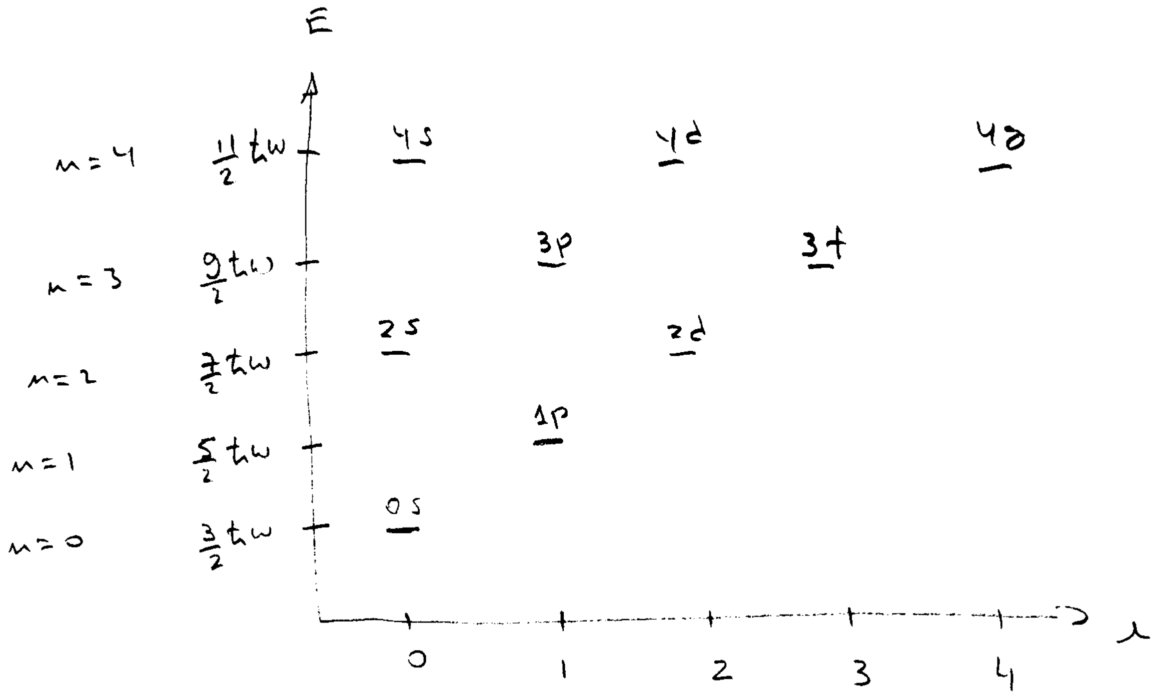
Ou seja a degenerescência de E_n é o número de números pares menor ou igual a n (incluindo zero)

$n = 0$	1	(0)
$n = 1$	1	(0)
$n = 2$	2	$(0, 2)$
$n = 3$	2	$(0, 2)$
$n = 4$	3	$(0, 2, 4)$
$n = 5$	3	$(0, 2, 4)$
$n = 6$	4	$(0, 2, 4, 6)$

Os autoestados de H, L^2 e L_z são dados por

$$\varphi_{n,l,m} = \frac{1}{r}\, u_{n,l}(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

O espectro fica



“Colinha”

1. A equação de Schrödinger é

$$i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\vec{r})\,\psi$$

2. Temos que o Laplaciano é

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

e ainda

$$\begin{aligned}
L^2 &= -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \\
L_+ &= \hbar\, e^{i\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} + i\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \\
L_- &= \hbar\, e^{-i\phi}\left[-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\,\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \\
L_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \\
L_\pm &= L_x \pm i\,L_y
\end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}
L^2\,|\,l,\,m\rangle &= \hbar^2\,l\,(l+1)\,|\,l,\,m\rangle \\
L_z\,|\,l,\,m\rangle &= \hbar m\,|\,l,\,m\rangle \\
L_\pm\,|\,l,\,m\rangle &= \hbar\sqrt{l\,(l+1) - m\,(m\pm 1)}\,|\,l,\,m\pm 1\rangle
\end{aligned}$$