Gabarito

Mecânica Quântica II - FFI 0122

Prova 2 - 29/10/2015

Duração da Prova: 2 horas

Nome:

Número USP:

1.a

1. **(2,0)** No método das ondas parciais nós expandimos a função de onda em ondas esféricas que são auto-funções de L^2 e L_z. A partir daí obtivemos uma espressão para a amplitude de espalhamento $f_k(\theta\,,\,\varphi)$ como uma soma no inteiro l que determina o valor do momento angular. A motivação do método é a de que alguns poucos termos daquela soma serão suficientes para fornecer uma boa aproximação para a amplitude de espalhamento. Desta forma podemos esperar que o método das ondas parciais funcionará tanto melhor:

   (a) quanto menor ou quanto maior for o alcance do potencial?

   (b) quanto menor ou quanto maior for a energia da partícula incidente?

   Justifique suas respostas.

Para uma onda esférica livre a probabilidade de encontrar a partícula em um ângulo sólido $d\Omega_0$ na direção (θ_0, φ_0) é (entre r e $r+dr$)

$$r^2 j_l^2(rk)\,|Y_l^m(\theta_0,\varphi_0)|^2\,dr\,d\Omega_0$$

Temos ainda que

$$j_l(kr) \sim \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} \qquad p/ \quad r \to 0$$

Portanto, próximo à origem aquela probabilidade comporta-se como r^{2l+2}. Desta maneira esta probabilidade é muito pequena para

$$kr < \sqrt{l(l+1)}$$

Concluímos então que a partícula não é afetada pelo o que ocorre dentro de uma esfera

1.b

$$b(k) = \frac{1}{k}\sqrt{l(l+1)}$$

Logo:

(a) quanto menor o alcance do potencial menor será o número de termos na expansão em l que teremos que considerar.

(b) Quanto maior a energia maior k, pois $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Portanto, quanto maior k menor será $b(k)$ e consequentemente menor o número de termos na expansão em l a ser considerado.

2.a

2. **(4,0)** Calcule a aproximação de Born para a seção de choque diferencial e seção de choque total para o espalhamento de uma partícula de massa m por um potencial da forma

$$V(\vec{r}) = V_0\, \delta^{(3)}(\vec{r})$$

onde V_0 é uma constante, e $\delta^{(3)}$ é a função delta de Dirac em três dimensões.

Pela "colinha" temos que

$$f_k(\theta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{r}\; e^{-i\vec{k}_d\cdot\vec{r}\,'}\, U(\vec{r}\,')\, \psi_k^{(\text{dift})}(\vec{r}\,')$$

onde $U = \frac{2m}{\hbar^2} V$ e V o potencial de fato

A aproximação de Born corresponde a tomar a aproximação de ordem mais baixa para ψ_k^{dift} ou seja

$$\psi_k^{\text{dift}} \sim e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}$$

Logo

$$f_k^{\text{Born}}(\theta,\varphi) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{r}\,'\, e^{-i\vec{k}_d\cdot\vec{r}\,'}\, V(\vec{r}\,')\, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}\,'}$$

$$= -\frac{mV_0}{\hbar^2 2\pi}\int d^3\vec{r}\,'\, e^{-i(\vec{k}_d-\vec{k}_i)\cdot\vec{r}\,'}\,\delta(\vec{r}\,')$$

$$\boxed{f_k^{\text{Born}} = -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}}$$

Portanto

$$\frac{d\sigma(\theta,\varphi)}{d\Omega} = |f_h(\theta,\varphi)|^2 = \frac{m^2 V_0^2}{4\pi^2 \hbar^4}$$

e

$$\sigma_{TOT} = \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2 V_0^2}{\pi \hbar^4}$$

3.a

3. **(4,0)** Uma partícula carregada de carga q e massa m está ligada a um oscilador harmônico com potencial $V = \frac{1}{2}\, k\, X^2$. O sistema é colocado em um campo elétrico E constante no espaço e no tempo, de tal maneira que a Hamiltoniano total do sistema passa a ser

$$H = \frac{P^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, X^2 - q\, E\, X \qquad \left(\omega^2 = \frac{k}{m}\right)$$

Calcule a variação de energia do estado fundamental do oscilador até ordem E^2.
Dica: utilize a "Colinha" e o fato que $\hat{X} = \frac{a^\dagger + a}{\sqrt{2}}$.

Escrevemos $H = H_0 + V$ onde V é a perturbação e

$$V = -qEX$$

Temos que (vem "colinha")

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger)$$

Pela colinha temos

$$\Delta_n^{(1)} = \langle n | V | n \rangle = -qE\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle n | a + a^\dagger | n \rangle$$

$$= 0$$

pois $\langle n | a | n \rangle = \langle n | a^\dagger | n \rangle = 0$

Agora

$$\langle n | a + a^\dagger | l \rangle = 0 \quad \text{para} \quad n \neq l \pm 1$$

Pela colinha temos que a correção de segunda ordem para a energia do estado fundamental é

$$\Delta_0^{(2)} = \sum_{l \neq 0} \frac{|V_{0l}|^2}{E_0^{(0)} - E_l^{(0)}}$$

e

$$\langle 0 | a + a^\dagger | l \rangle = \langle 0 | a | l \rangle =$$

$$= \langle 1 | l \rangle = \delta_{l,1}$$

e

$$V_{0l} = -qE\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, \delta_{l,1}$$

Ou seja

$$\Delta_0^{(2)} = q^2 E \frac{\hbar}{2m\omega} \frac{1}{E_0^{(1)} - E_1^{(0)}} = -q^2 E^2 \frac{\hbar}{2m\omega} \frac{1}{\hbar\omega}$$

Logo

$$\boxed{\Delta_0^{(2)} = -\frac{q^2 E^2}{2m\omega^2}.}$$

"Colinha"

1. A equação de Schrödinger é

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\vec{r})\,\psi$$

2. A Hamiltoniana do oscilador harmônico unidimensional é dada por

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 X^2 = \hbar\,\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

onde

$$[X\,,\,P] = i\hbar$$

e

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} + i\,\hat{P}\right) \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X} - i\,\hat{P}\right) \qquad \left[a\,,\,a^\dagger\right] = 1$$

com

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\,\omega}{\hbar}}\,X \qquad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\,\omega\,\hbar}}\,P$$

Os autoestados de H são denotados

$$H \mid \varphi_n\rangle = \hbar\,\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \mid \varphi_n\rangle \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e são obtidos a partir do estado de menor energia por

$$\mid \varphi_n\rangle = \frac{\left(a^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}} \mid \varphi_0\rangle \qquad \langle \varphi_m \mid \varphi_n\rangle = \delta_{m\,,\,n}$$

As funções de onda normalizadas dos tres primeiros estados são

$$\begin{aligned}
\langle x \mid \varphi_0\rangle &= \left(\frac{m\,\omega}{\pi\,\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}\,x^2} \\
\langle x \mid \varphi_1\rangle &= \left[\frac{4}{\pi}\left(\frac{m\,\omega}{\hbar}\right)^3\right]^{1/4} x\,e^{-\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}\,x^2} \\
\langle x \mid \varphi_2\rangle &= \left(\frac{m\,\omega}{4\,\pi\,\hbar}\right)^{1/4}\left[2\,\frac{m\,\omega}{\hbar}\,x^2 - 1\right] e^{-\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}\,x^2}
\end{aligned}$$

3. No espalhamento estacionário consideramos a Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2\,m} + V\,(\vec{r})$$

A forma assintótica da função de onda é

$$v_k^{(\mathrm{diff})}\,(\vec{r}) \sim e^{i\,\vec{k}_i\cdot\vec{r}} + f_k\,(\theta\,,\,\varphi)\,\frac{e^{i\,k\,r}}{r} \qquad\qquad r \to \infty$$

A equção integral é

$$v_k^{(\mathrm{diff})}\,(\vec{r}) = e^{i\,\vec{k}_i\cdot\vec{r}} + \int d^3\vec{r}\,' G_+\,(\vec{r} - \vec{r}\,')\;U\,(\vec{r}\,')\;v_k^{(\mathrm{diff})}\,(\vec{r}\,')$$

onde

$$V = \frac{\hbar^2}{2\,m}\,U \qquad\qquad G_+\,(\vec{r}) = -\frac{1}{4\,\pi}\,\frac{e^{i\,k\,r}}{r}$$

Temos ainda que

$$f_k\,(\theta\,,\,\varphi) = -\frac{1}{4\,\pi}\int d^3\vec{r}\,' e^{-i\,\vec{k}_d\cdot\vec{r}\,'}\;U\,(\vec{r}\,')\;v_k^{(\mathrm{diff})}\,(\vec{r}\,')$$

4. Na teoria de perturbação independente do tempo consideramos

$$H = H_0 + \lambda\,V$$

onde H_0 é a Hamiltoniana não perturbada e V a perturbação. Os estados não perturbados e perturbados satisfazem

$$H_0 \mid n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} \mid n^{(0)}\rangle \qquad\qquad H \mid n\rangle = E_n \mid n\rangle$$

Fazemos a expansão perturbative

$$\mid n\rangle = \mid n^{(0)}\rangle + \lambda \mid n^{(1)}\rangle + \lambda^2 \mid n^{(2)}\rangle + \ldots \qquad\qquad \Delta_n = \lambda\,\Delta_n^{(1)} + \lambda^2\,\Delta_n^{(2)} + \ldots$$

onde $\Delta_n = E_n - E_n^{(0)}$. Temos que

$$\Delta_n^{(1)} = V_{n\,n} \qquad\qquad \Delta_n^{(2)} = \sum_{l \neq n} \frac{\mid V_{n\,l}\mid^2}{E_n^{(0)} - E_l^{(0)}}$$

com $V_{n\,l} = \langle n^{(0)} \mid V \mid l^{(0)}\rangle$.