

# Yuval Ne’eman e o Grupo de Simetria dos Quarks

(Yuval Ne’eman and the Symmetry Group of Quarks)

Tereza Mendes, Attilio Cucchieri

*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo,  
Caixa Postal 369, CEP 13560-970, São Carlos, SP, Brasil*

Tiago B. Moraes

*Departamento de Engenharia de Biosistemas, Escola de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo,  
Av. Pádua Dias, 11, CEP 13418-900, Piracicaba, SP, Brasil*

24 de novembro de 2022

## Resumo

Neste artigo apresentamos um ensaio sobre a vida e a obra de um dos físicos mais surpreendentes do nosso tempo. Yuval Ne’eman, além de ter sido um dos precursores da teoria dos quarks, foi também político e militar, inspirando o personagem que leva o seu nome no romance de espionagem “O dossiê Odessa”, de Frederick Forsyth. O esquema descoberto por ele para classificação dos hádrons, que completou 60 anos em 2021, revelou a importância da teoria de grupos para a física de partículas elementares e foi essencial para a elaboração do modelo de quarks. Nosso texto pretende ilustrar a fascinante história da física de partículas — e sua relação com os grupos de simetrias — a partir da segunda metade do século XX, além de fornecer subsídios para estudantes que queiram iniciar ou aprofundar seus conhecimentos no assunto.

**Palavras-chave:** partículas elementares, hádrons, interação forte, grupo de simetria, quarks

In this article we present an essay about the life and work of one of the most surprising physicists of our time. Yuval Ne’eman, beside being one of the precursors of the theory of quarks, was also a statesman and a soldier, inspiring the character named after him in the espionage novel “The Odessa File”, by Frederick Forsyth. The scheme discovered by him for the classification of hadrons, which celebrated 60 years in 2021, unveiled the importance of group theory for elementary particle physics and was crucial for the formulation of the quark model. Our text intends to illustrate the fascinating history of particle physics — and its relation with symmetry groups — from the second half of the XXth century onwards, while also providing tools for students who wish to gain initial or further knowledge of the subject.

**Keywords:** elementary particles, hadrons, strong interaction, symmetry group, quarks

## 1 Introdução

Yuval Ne’eman (ver Fig. 1), físico internacionalmente conhecido por suas contribuições à teoria das *interações fundamentais* entre *partículas elementares*, nasceu em Tel Aviv, Israel, em 14 de maio de 1925, e morreu na mesma cidade em 26 de abril de 2006, em decorrência de um derrame cerebral. Entre 1960 e 1961, ele desenvolveu (independentemente de Murray Gell-Mann, dos EUA) as bases para o modelo de *quarks*, ao associar os *hádrons* — partículas entre as quais figuram os *prótons*,

os *nêutrons* e os *píons* — a *representações* do grupo de simetria  $SU(3)$ . Esse esquema de classificação, extremamente inovador para a época, abriu caminho para o entendimento atual dos hádrons, ou seja, que os mesmos não são partículas elementares, mas sim *estados ligados* de quarks, por ação da *força forte*. É essencial notar, porém, que a organização dos hádrons de acordo com a simetria  $SU(3)$  foi um grande avanço por si só, rapidamente aceito pela comunidade de física de partículas, independentemente da (posterior) introdução do conceito de quarks. De fato, a classificação  $SU(3)$  possibilitou



Figura 1: Yuval Ne’eman (1925–2006). Foto por cortesia da revista eletrônica israelense “PhysicaPlus”.

explicar, a partir de um esquema simples, o grande número de partículas observadas em aceleradores na época, inclusive prevendo novos hádrons a serem descobertos. Ao mesmo tempo, ficou clara a importância da *teoria de grupos* para o estudo teórico da física de partículas.

E quanto ao modelo de quarks? Ele foi proposto em 1964 a partir do esquema de classificação  $SU(3)$ , mas só foi confirmado e estabelecido bem mais tarde. Em particular, o grupo  $SU(3)$  foi associado à simetria dos hádrons em relação aos três tipos (ou “sabores”) de quarks de menor massa: *up*, *down* e *estranho*. O modelo explicava as combinações identificadas pela classificação  $SU(3)$ , mas introduzia várias (aparentes) contradições teóricas, que persistiram mesmo à medida em que eram obtidas as primeiras evidências experimentais de sua validade, no final dos anos 60. Mais tarde, os quarks, inicialmente vistos como um artifício matemático, foram incorporados como os campos de matéria na *teoria quântica de campos* que descreve as interações (nucleares) fortes: a *cromodinâmica quântica* ou *QCD*. Hoje em dia não há mais dúvida sobre a existência dos quarks, porém alguns aspectos de seu comportamento ainda permanecem como um mistério, a ser desvendado pelo estudo da QCD. Uma excelente introdução didática à física de partículas elementares — incluindo o modelo de quarks e também tópicos modernos em teorias quânticas de campos — pode ser encontrada no livro “The Particle Hunters”, de Yuval Ne’eman e Yoram Kirsh [1].

Em relação ao fato de o esquema  $SU(3)$  ter atraído, à época, mais atenção do que o modelo de quarks, que

de fato explicava a estrutura dos hádrons, é interessante o ponto de vista do próprio Ne’eman. Segundo ele [1, 2], sob uma perspectiva histórica, é natural ver a classificação dos hádrons como um primeiro passo para a compreensão de sua estrutura interna, da mesma forma que a classificação dos elementos na Tabela Periódica de Mendeleev antecedeu a compreensão da estrutura do átomo, permitindo elucidá-la. O caminho para descrição de uma nova interação seria assim iniciado pela busca de *padrões*, seguida pelo reconhecimento da *estrutura* subjacente, e só então pode ser identificada a *dinâmica*. Note porém, como evidenciado na Ref. [3], que enquanto a classificação de Mendeleev se baseava em propriedades que podemos perceber com nossos sentidos (como a massa e efeitos químicos da distribuição da carga elétrica), a resolução do “quebra-cabeça” da descrição dos hádrons exigiu a observação de padrões mais sutis, i.e. simetrias matemáticas.

Além de físico, Ne’eman foi também militar e político, tendo se tornado um personagem de importância central na história de seu país [4, 5]. De fato, a lista de suas participações na ciência e na política israelense é notável. Em 1965 ele fundou o Departamento de Física e Astronomia da Universidade de Tel-Aviv, sendo mais tarde presidente da Universidade (de 1971 a 1975) e diretor de seu Instituto de Estudos Avançados (de 1979 a 1997). Em 1983 fundou a Agência Espacial de Israel, a qual presidiu quase até sua morte. Serviu na Comissão de Energia Atômica de Israel (de 1965 a 1984) e presidiu-a de 1982 a 1984. Foi Diretor Científico do Centro de Pesquisas Nucleares Nahal Soreq e envolveu-se fortemente no desenvolvimento de armas nucleares para Israel. Foi o primeiro Ministro de Ciência e Desenvolvimento do país (de 1982 a 1984) e novamente em 1990–92, quando foi também Ministro da Energia. Em particular, esteve à frente do projeto “Med-Dead”, que propunha a construção de um canal ligando o Mar Morto ao Mediterrâneo para suprimento de água e energia para o Oriente Médio. (Este projeto não foi realizado devido a seu alto custo [6], mas é discutido ainda hoje.) Foi Cientista-Chefe do Ministério da Defesa de Israel (1974–76) e fundador do partido político Tehiya (um desdobramento de direita do partido Likud) no final dos anos setenta. Atuou no Knesset (o parlamento israelense) até 1990. Ne’eman dizia-se ateu, mas identificava-se muito fortemente com o povo judeu e com seu país [7]. (Relatos interessantes a esse respeito encontram-se também no obituário escrito por seu filho, Teddy Ne’eman [8].) Ele definia sua visão política<sup>1</sup> como “pró-Israel”, e não anti-árabe. Porém, algumas de suas opiniões sobre o Estado

<sup>1</sup>Naturalmente, não é objetivo deste texto a discussão da atuação política de Ne’eman, ou de seu posicionamento acerca do Estado de Israel.

de Israel —incluindo seus planos para a expansão do território nacional e sua oposição a tratados de paz— claramente criaram tensão, tendo inclusive ocasionado atentados contra sua vida.

## 1.1 Plano do Artigo

O presente artigo contém uma breve biografia científica de Yuval Ne’eman, e uma discussão detalhada da contribuição dada por ele à classificação dos hádrons. Para tanto, será útil seguir a evolução histórica da física de partículas, observando como o conceito de grupos de simetrias se tornou central para a descrição dos hádrons. Como complemento, faremos uma introdução didática aos grupos de simetria, realçando suas propriedades matemáticas e sua importância para a física quântica. Discutiremos também os principais aspectos do modelo de quarks e das interações fortes, incluindo alguns dos atuais temas de estudo na área.

Na Seção 2, descrevemos a trajetória percorrida por Ne’eman até se interessar pela classificação dos hádrons. Como veremos, após uma sugestão de Abdus Salam, seu orientador de doutorado, ele entendeu que um passo fundamental para alcançar seu objetivo era se aprofundar no estudo da teoria de grupos, ainda pouco utilizada em física de partículas na época. Assim, sua abordagem partiu do estudo dos grupos de simetrias e suas propriedades, para então escolher o esquema que melhor se adequasse à descrição dos hádrons. Isso foi, de certa forma, o inverso do que fez Murray Gell-Mann, que investigava as propriedades dos hádrons há mais tempo do que Ne’eman e buscava uma compreensão mais global deles, sem contudo associá-los diretamente a representações de um grupo de simetria. Os dois pesquisadores chegaram —independentemente, mas quase simultaneamente— à mesma classificação para os hádrons, que foi chamada por Gell-Mann de “eightfold way” (caminho óctuplo).

Na Seção 3, apresentamos as principais ideias associadas aos grupos de simetrias, discutindo sua relevância para a física quântica e seu papel crucial para a descrição dos hádrons, sem ainda detalhar conceitos mais específicos da física de partículas. Nossa intenção é fornecer uma introdução geral à teoria de grupos, mencionando alguns exemplos em mecânica quântica, sem contudo pressupor um conhecimento prévio do material apresentado. Assim, a classificação  $SU(3)$  será descrita nessa seção apenas do ponto de vista matemático, sem maior atenção a seu significado físico, ou a suas implicações para o modelo de quarks. Mais especificamente, o início da seção apresenta o tema dos grupos de simetrias, com ênfase na descrição matemática. Em seguida, nas Subseções 3.1 a 3.3, são discutidas —em seu contexto histórico— as primeiras tentativas de aplicação da teoria à classificação dos hádrons, detalhando a contribui-

ção dada por Ne’eman e seu impacto para a comunidade de física de partículas na época. Como incentivo para estudantes que queiram se aprofundar no assunto, são feitas ao longo dessa seção diversas referências aos apêndices, que cobrem alguns aspectos mais técnicos do tema e incluem aplicações práticas.

Nas Seções 4 e 5 descrevemos os aspectos principais do modelo de quarks, desde a introdução do conceito de força forte até o estabelecimento da teoria da cromodinâmica quântica (QCD). Em particular, a descrição detalhada da classificação  $SU(3)$  para os hádrons encontra-se na Subseção 4.2. A leitura dessas seções pode ser feita sem conhecimento de mecânica quântica, já que os conceitos utilizados são explicados à medida em que são introduzidos, enfatizando sua associação às simetrias relevantes em física de partículas. (Para maiores detalhes podem ser consultados os apêndices.) Dessa forma, nessas duas seções, complementamos a discussão feita na Seção 3, detalhando as propriedades físicas dos hádrons e descrevendo suas interações.

Finalmente, encerramos o texto principal do artigo com nossas conclusões, na Seção 6.

Os três apêndices foram elaborados como um reforço para o material da Seção 3 tendo em mente estudantes de física, independentemente de já terem cursado mecânica quântica. De fato, a ênfase em simetrias é complementar à abordagem usual adotada em livros-textos de física quântica, que geralmente tratam o material sem referência direta à teoria de grupos. Dessa forma, reunimos no Apêndice A os principais conceitos de mecânica quântica utilizados em nossas aplicações dos grupos de simetria para o entendimento das interações fundamentais entre partículas elementares. A seguir, no Apêndice B, discutimos em maior detalhe os *grupos de Lie*, essenciais para a compreensão das simetrias na mecânica quântica e na física de partículas. Finalmente, o Apêndice C oferece uma visão geral da *teoria de representações*, que possibilita a utilização prática de grupos de simetrias para a descrição de fenômenos físicos, ressaltando a importância de sua aplicação à física quântica. São incluídos nos apêndices tanto definições e aspectos teóricos gerais quanto alguns exemplos práticos. Mencionamos que a complexidade matemática dos apêndices não é elevada, sendo suposta apenas a familiaridade com matrizes e números complexos. Além disso, note que a leitura dos apêndices pode ser feita de forma independente, ou em paralelo com o material apresentado na Seção 3.

Ao longo do texto, são fornecidas referências em vários níveis de complexidade. Em particular, as notas de rodapé contêm algumas referências mais específicas sobre aspectos técnicos ou históricos. Adicionalmente, algu-

mas sugestões de textos didáticos, possivelmente úteis como complementação do material que apresentamos, estão reunidas a seguir. Todas as referências são listadas ao final do artigo.

## 1.2 Bibliografia Complementar

Como dito acima, um ótimo livro didático sobre o assunto, em nível bastante introdutório e voltado ao público em geral, é a Referência [1], de Ne’eman e Kirsh. Duas boas referências em nível mais avançado, de graduação, são [9] e [10]. Um excelente texto de divulgação científica, com discussão cuidadosa das principais propriedades das interações fundamentais, pode ser encontrado em [11].

Aspectos históricos envolvendo a introdução e descoberta dos quarks são descritos em detalhe em [12], [13] e em [14], que discute também alguns aspectos sociológicos. Mencionamos, adicionalmente, as seguintes referências originalmente em português: o livro [15] sobre a história da física de partículas, e os artigos [16] e [17], respectivamente apresentando uma introdução didática à estrutura matemática dos estados ligados de quarks e uma discussão de questões epistemológicas relacionadas à proposta dos quarks como partículas elementares.

Uma referência introdutória (em nível de graduação) bastante detalhada e útil sobre simetrias em mecânica quântica e sobre grupos de Lie é o livro [18]. Um exemplo de livro-texto de física quântica contendo tópicos de teoria de grupos é a Referência [19]. Vale ressaltar que a ênfase em teoria de grupos é muito importante para uma formação mais sólida em mecânica quântica, e disciplinas específicas de teoria de grupos atraem um crescente interesse de estudantes de física.

## 2 Um Coronel na Física

Ne’eman iniciou sua carreira como militar,<sup>2</sup> ingressando na Haganá (exército de resistência israelense, precursor das Forças Armadas de Israel) com apenas 15 anos. Durante o ano que teve que esperar para iniciar o curso de engenharia —pois a idade mínima era de 16 anos— e também durante a faculdade, continuou a se dedicar intensamente ao trabalho no exército, tornando-se oficial aos vinte anos de idade, em 1945. Ao mesmo tempo, seu grande interesse pela ciência e pela matemática voltou-se para a física, principalmente após cursar uma matéria de física quântica (na qual foi o único aluno) oferecida por um professor de eletrotécnica de sua faculdade. Após completar seus estudos de engenharia

<sup>2</sup>Há diversos relatos, pelo próprio Ne’eman, de sua carreira e das etapas de seus estudos. Talvez o mais completo seja a Referência [2].

em 1945, apesar do interesse pela física moderna, seguiu seu plano inicial de trabalhar na fábrica dirigida por seus familiares, projetando bombas hidráulicas para irrigação. Entretanto, já na metade de 1946 ele se encontrava inteiramente engajado em atividades militares, incluindo a instalação de judeus refugiados na Palestina, a proteção e construção de novos assentamentos, e esforços para impedir ações de organizações clandestinas que pudessem ferir civis. A partir do início da guerra de independência de Israel, em novembro de 1947, ele combateu no campo como oficial, chegando a comandar a prestigiosa Brigada Givati, um destacamento de elite das Forças Armadas Israelenses existente ainda hoje.

Enquanto militar, Ne’eman destacou-se como estrategista, tendo um papel importante tanto na guerra de independência quanto na crise do canal de Suez em 1956 e, mais tarde, na Guerra dos Seis Dias (em 1967). Sua atuação nesta última motivou a conexão de seu nome a personagens de livros de espionagem [20, 21], como o cientista israelense “Youvel Neeman” do best-seller “O Dossiê Odessa”, de Frederick Forsyth. De fato, há diversos relatos (ver, por exemplo, [22]) sobre sua participação crucial como vice-chefe da Aman, a Inteligência Militar Israelense, para a vitória de Israel na Guerra dos Seis Dias. Em particular, ele teria criado uma base de dados com informações errôneas (para que fossem interceptadas pelos inimigos) sobre a situação das forças israelenses, ajudando assim a destruir a força aérea egípcia ainda em terra. Ne’eman, porém, agia como se tais aspectos tivessem sido exagerados. Como ele próprio escreveu [23]:

*Ganhei reputação como planejador, especialmente após julho de 1948, quando arquitetei uma manobra bastante original sobre nosso flanco leste, e depois em outubro pelo desenvolvimento de uma nova técnica operacional, adaptada a nossas condições especiais. Esses planos foram postos em prática em outubro-novembro de 1948, resultando no sucesso da campanha no Sul. Após a Guerra de 1947-49, fui nomeado Chefe da Seção Operacional e Vice-Chefe do Departamento de Operações do Quartel-General das Forças Armadas (General [Yitzhak] Rabin, o futuro Primeiro Ministro, era o Chefe). Em 1951-52 frequentei a “École d’État Major” [em Paris] e fui então nomeado Diretor de Planejamento, uma tarefa que incluiu vários aspectos civis [...] e a elaboração da estratégia básica que seguimos até a “Guerra dos Seis Dias” em 1967. Nesse meio tempo, em 1955, fui transferido para servir como Vice-Chefe da Inteligência Militar, após o colapso de uma rede no Egito e as subsequentes mudanças no comando. Nessa posição desenvolvi algu-*

*mas ideias novas. O principal impulso, porém, foi o estreitamento de relações com a França, de acordo com os interesses da França e de Israel. Isso incluiu elementos que de algum modo “vazaram” e passaram por amplificações imaginosas, resultando na criação de alguns personagens (com meu nome completo!) em romances sobre o Oriente Médio ou livros sobre o Serviço Secreto.*

(A tradução é nossa.)

Durante todos esses anos de atividades militares, Ne’eman manteve a esperança de ainda seguir a carreira acadêmica. Ele fez planos para seu retorno à ciência em 1948, mas esqueceu-se deles em meio às batalhas. Em 1950 ele aprendeu relatividade geral sozinho e em 1951–52 tentou conseguir uma licença para estudar física na França, sob orientação de Louis de Broglie. Em vez disso, acabou indo aprimorar seus conhecimentos militares na École d’État Major (parte da renomada École Supérieure de Guerre), em Paris. Em 1957, já com 32 anos e com a patente de Coronel, conseguiu finalmente dedicar-se (parcialmente) aos estudos de física, iniciando seu doutoramento. Mais precisamente, Ne’eman recebeu a proposta de conciliar seus estudos com serviços militares na embaixada de Israel em Londres. De 1958 a 1960, ele foi ao mesmo tempo representante das Forças Armadas de Israel nas Embaixadas Israelenses do Reino Unido e dos Países Escandinavos e estudante de pós-graduação do Imperial College, da Universidade de Londres, no grupo de pesquisa de Abdus Salam [7]. Esta situação deu origem a alguns episódios curiosos. Como narrado por seu colega de doutoramento, Raymond F. Streater [24]

*Ne’eman juntou-se a nós no final do primeiro semestre do ano escolar de 1957–1958, e tinha perdido o início de todos os cursos. Ele pediu para copiar minhas notas de aula. Eu fiquei um pouco preocupado, com medo de não vê-las nunca mais, mas ele as devolveu no dia seguinte. Eu não conseguia acreditar que ele as tivesse copiado tão depressa, precisaria ter passado a noite inteira escrevendo. Então ele me contou seu segredo: ele tinha usado uma “fotocopiadora”, um luxo de que eu nunca tinha ouvido falar.*

*...Algumas vezes, Yuval tinha que sair mais cedo de nossos seminários; isso era para participar de recepções diplomáticas, o que era parte de suas tarefas [na embaixada].*

*...[Abdus] Salam sugeriu que nós o usássemos [o dinheiro que tinha sobrado da coleta anual para os “chás” do grupo de pesquisa, no valor*

*de 30 xelins] para uma festa de Natal. Devido ao alto imposto sobre bebidas alcoólicas, decidimos pedir mais 2 xelins a cada membro do grupo que fosse participar da festa. Yuval então ofereceu-se para comprar as bebidas, pois tinha contatos na embaixada israelense. No dia da festa, uma limusine preta estacionou na entrada do velho Departamento de Matemática do Imperial College. Ne’eman pulou de dentro, e abriu o porta-malas. Retiramos dali caixas e mais caixas de bebidas alcoólicas, todas para a festa. Quando ele estava indo embora, disse: por sinal, eu não usei todo o dinheiro, aqui estão 35 xelins de troco.*

(A tradução é nossa.)

A partir de Julho de 1958, após uma rebelião no Iraque, as responsabilidades de Ne’eman aumentaram, dificultando sua dedicação aos estudos de física. Ele teve, por exemplo, que negociar a compra de 50 tanques de guerra e dos dois primeiros submarinos de Israel. Desta forma, em 1960, ele renunciou às atividades militares. (Porém, seria chamado novamente a servir em 1967, tornando-se conselheiro do Ministro da Defesa em 1970, 1973–74 e 1975.) Seu último compromisso como militar em 1960 foi um discurso sobre as estratégias militares de Israel, apresentado na Noruega. Como descrito por Ne’eman [23]:

*Finalmente “libertei-me” e tornei-me um estudante em tempo integral em 1 de maio de 1960 — embora ainda tivesse que viajar mais uma vez à Noruega em outubro para apresentar uma palestra que tinha prometido sobre estratégias militares israelenses, no Círculo Militar de Oslo, com a presença e ativa participação de Sua Majestade o Rei Olaf V. A essa altura, eu já tinha conseguido me aprofundar no problema de física que tinha escolhido, portanto o texto desta palestra foi publicado mais ou menos na mesma época que meu artigo sobre [a simetria]  $SU(3)$ .*

(A tradução é nossa.)

## 2.1 Learn it in Depth!

Em Londres, a princípio, Ne’eman pretendia estudar teoria da gravitação no King’s College, com o astrofísico Hermann Bondi. Entretanto, devido à longa distância entre a embaixada israelense e a universidade, ele acabou se instalando no Imperial College, que ficava a cinco minutos de caminhada da embaixada.

No Imperial College, juntou-se ao grupo de Abdus Salam no Departamento de Matemática, que estudava

teoria quântica de campos. Salam inicialmente estranhou o interesse do coronel pela física, relutando em aceitá-lo como estudante. (Ne’eman apresentou-se fardado com o uniforme das forças armadas israelenses.) Acabou aceitando-o por um período de experiência, mais por seu diploma universitário do conceituado Instituto Tecnológico de Israel, o Technion, do que por sua carta de recomendação, escrita pelo General Moshe Dayan. Durante o período de experiência no curso de Salam, Ne’eman entrou pela primeira vez em contato com a teoria de grupos, ficando fascinado pelo tema. A aplicação de teoria de grupos à classificação das partículas elementares e representação de suas simetrias era um verdadeiro desafio na época e ele se decidiu por esse tópico de pesquisa para o doutoramento. À medida que Ne’eman apresentava suas ideias a Salam [1, 23], este contava-lhe que outro físico já havia tentado desenvolver aquela mesma ideia alguns anos antes, sem sucesso. Ne’eman então apresentava outras propostas, que Salam dizia terem sido testadas há menos tempo. Isso fez com que Ne’eman ganhasse confiança e buscasse novas soluções, pois sentia que estava “se aproximando do presente”. Além disso, sentiu-se motivado por chegar às mesmas propostas que os importantes físicos citados por Salam, entre os quais estava o brasileiro Jayme Tiomno [7]. Salam, porém, mostrou-se impaciente e disse-lhe que queria transferi-lo a um problema mais simples, para que o trabalho de doutorado fosse terminado dentro do prazo.<sup>3</sup> Devido à insistência de Ne’eman, Salam finalmente concordou com seu projeto de estudo [7, 27], mas aconselhou [23]:

*Você está embarcando em uma pesquisa altamente especulativa; entretanto, se você insiste, vá em frente com ela, mas faça-o seriamente. Não se satisfaça com o pouco de teoria de grupos que lhe ensinei, que é o que eu conheço. Aprenda o assunto com profundidade! (Learn it in depth!)*

(A tradução é nossa.)

Ne’eman então estudou arduamente teoria de grupos e sua utilização para classificar as partículas elementares. Na época, os experimentos em aceleradores de partículas tinham permitido a descoberta de um grande número de hádrons, i.e. partículas que interagem pela chamada

<sup>3</sup>Curiosamente, o problema teórico “mais simples” sugerido por Salam [7] só foi resolvido —por Peter Higgs— em 1964, resultando na proposta do *bóson de Higgs*. A busca por esta partícula tornou-se um dos maiores desafios experimentais da física de altas energias e foi a principal motivação para a construção do acelerador de partículas LHC, no CERN [25], completado em 2008. As primeiras evidências da existência do bóson de Higgs foram anunciadas em 2012, quase 50 anos após sua proposta teórica. Peter Higgs recebeu o prêmio Nobel de física de 2013 [26], juntamente com François Englert.

*força forte* (como os prótons e os nêutrons). Claramente, cogitava-se que essas partículas não poderiam ser todas elementares e que portanto deviam estar relacionadas umas às outras. Tentava-se então encontrar um esquema simples para classificação dos diversos hádrons, de forma que fossem evidenciadas as propriedades comuns a cada classe de partículas. No ano de 1961, Ne’eman propôs a organização dos hádrons de acordo com o grupo de simetria  $SU(3)$  [28, 29]. A proposta —feita independentemente também por Gell-Mann<sup>4</sup> [29, 30]— permitiu a classificação dos hádrons conhecidos na época e a previsão de novas partículas e suas propriedades. O esquema de classificação baseado na simetria  $SU(3)$  motivou a elaboração do modelo de quarks, proposto em 1964 mas aceito somente bem mais tarde. Mais abaixo, nas Seções 4 e 5, discutimos o modelo de quarks, os principais aspectos da força forte e algumas propriedades dos hádrons. Antes disso vejamos, a seguir, um pouco sobre a teoria de grupos, a fim de entender como as contribuições de Yuval Ne’eman e de seus contemporâneos fizeram com que esse tópico deixasse de ser um ramo da matemática quase desconhecido pelos físicos e passasse a ocupar uma posição central na física de partículas elementares.

### 3 Simetrias e Grupos na Física

A busca por simetrias é de suma importância na física. De fato, pode-se explorar a simetria de um problema para conseguir simplificações consideráveis no seu estudo, ou uma compreensão mais profunda do mesmo. A teoria de grupos permite o estudo matemático de simetrias, que estão geralmente associadas a alguma propriedade invariante de um sistema físico. Mais precisamente, podemos *definir* simetria [31, 32] como a qualidade de um objeto ou sistema que faz com que o mesmo não se altere, de maneira perceptível, quando uma determinada transformação é aplicada a ele. Por exemplo, a simetria entre lado esquerdo e direito do corpo humano equivale à invariância sob *reflexão* em relação ao plano vertical que separa os dois lados do corpo. A transformação nesse caso corresponde a inverter as coordenadas espaciais dos pontos do sistema em relação ao plano de simetria. Esta definição geral em termos de transformações estende a noção usual que temos de simetria de um objeto —associada a regularidade, harmonia, beleza— podendo ser aplicada também às *equações* que definem o comportamento de um sistema. Em particular, para descrição de um sistema composto, são importantes as

<sup>4</sup>O físico Murray Gell-Mann será uma importante referência ao longo deste texto, e será citado muitas vezes. Em particular, ver [3] para sua biografia e uma interessante descrição introdutória de suas contribuições científicas.

simetrias respeitadas pelas *interações* entre as partículas que o compõem.

O conjunto de transformações que preserva uma dada propriedade de um sistema (ou de uma interação) constitui o chamado *grupo de simetria* associado a essa propriedade. No caso da simetria por reflexão em relação a um plano, a transformação é única. Note também que após duas aplicações sucessivas dessa transformação recupera-se a situação inicial, para qualquer sistema. Por outro lado, se considerarmos a simetria por *rotação* ao redor de um eixo, o número de transformações possíveis é infinito, pois podemos realizar rotações por ângulos arbitrários em um *contínuo* de valores. Nos dois casos, o conjunto de transformações associado à propriedade de invariância (ou simetria) constitui um *grupo*.

A noção de grupo originou-se nos estudos de equações polinomiais pelo matemático francês Évariste Galois — que morreu tragicamente (aos vinte anos de idade) em consequência de um duelo [33], em 1832— e foi consolidada por volta de 1870, após o trabalho de Camille Jordan [34]. Em linhas gerais [35, 36], um grupo é uma coleção de operações ou transformações satisfazendo à seguinte condição:

A operação obtida pela combinação (i.e. a aplicação sucessiva, ou *produto*) de duas operações pertencentes ao grupo também deve pertencer a ele.

O grupo deve ainda exibir a *propriedade associativa* para o produto, deve incluir um elemento neutro ou *operação identidade*, e deve conter para cada elemento o seu *elemento inverso*, de forma que o produto dos dois seja a identidade. Note que a identidade corresponde a uma “transformação” que não altera o estado do sistema, ou seja, que corresponde a não fazer nada!

As condições acima são claramente satisfeitas pelas rotações, que podem ser representadas por matrizes *ortogonais*, i.e. matrizes cuja inversa coincide com a sua matriz transposta<sup>5</sup> De fato, a multiplicação de uma matriz por um vetor gera outro vetor. Se tal matriz for ortogonal, o módulo do vetor será mantido após a transformação de multiplicação pela matriz, sendo alterada apenas a sua direção. Ou seja, a matriz ortogonal *roda* o vetor! Note porém que, em três dimensões, a rotação resultante do produto de duas rotações ao redor de um ponto, diferentemente da rotação ao redor de um eixo fixo, pode depender da ordem em que as rotações são aplicadas. Ou seja, nesse caso, o produto de duas transformações do grupo não é *comutativo*. Tal grupo é dito *não-abeliano*. No caso das reflexões em relação a

um plano, o grupo é abeliano e contém apenas dois elementos, que podem ser representados pelos números  $-1$  (correspondendo à inversão das coordenadas) e  $1$  (correspondendo à operação identidade) [36]. A associação de números (como  $-1$  e  $1$  para as reflexões) ou matrizes ortogonais (como no caso das rotações) a transformações de simetria ilustra o uso de representações para elementos de um grupo. O Apêndice C descreve em algum detalhe a chamada teoria de representações para grupos de simetria.

Para a descrição de simetrias na física, são especialmente importantes os chamados grupos de Lie [18] (ver Apêndice B), associados às transformações contínuas, i.e. aquelas que podem ser aplicadas de forma suave, gradual. São exemplos: 1) as rotações, 2) as transformações de Galileu ou de Lorentz, que relacionam as coordenadas de espaço e tempo entre dois referenciais inerciais em movimento relativo uniforme e 3) as transformações associadas às *simetrias de gauge*, presentes nas teorias que constituem o *Modelo Padrão* das interações fundamentais. A cromodinâmica quântica ou QCD, que descreve a interação forte entre quarks, é uma dessas teorias. (A QCD será discutida na Seção 5.4.) Associada a um grupo de Lie há sempre a correspondente *álgebra de Lie*, dada pelo espaço das *transformações infinitesimais* do grupo. Essas são transformações pequenas, próximas da operação identidade, por exemplo uma rotação por um ângulo infinitesimal. O fato de que os grupos de Lie são (quase completamente) especificados por sua álgebra, que por sua vez depende somente das características *locais* do grupo (i.e. relativas às transformações infinitesimais) é uma grande vantagem. Em particular, a álgebra constitui um *espaço linear* —i.e. um espaço usual, que contém as somas de seus elementos e a multiplicação deles por constantes— com uma operação (binária) interna dada pelos *comutadores* dos chamados *geradores* do grupo. Assim, a análise matemática da álgebra é bem mais simples do que a de seu respectivo grupo, o que envolveria (em geral) operações não-lineares. No Apêndice B descrevemos propriedades dos grupos e das álgebras de Lie, e no Apêndice C são discutidos alguns exemplos práticos.

Uma vez identificado o grupo de simetria de um problema, podem ser utilizados resultados de teoria de grupos para previsão e classificação dos possíveis estados físicos do sistema considerado. Em particular, de acordo com o teorema de Noether [18] —enunciado em 1918 pela brilhante matemática alemã Emmy Noether— pode-se associar a invariância (sob uma certa transformação sofrida por um sistema) a uma grandeza conservada, simplificando-se a descrição desse sistema.

Por exemplo, a invariância por translação das equa-

<sup>5</sup>A matriz transposta é obtida trocando-se linhas por colunas na matriz original. Mais precisamente, o elemento  $M_{ij}^T$  da transposta de uma dada matriz  $M$  é igual a  $M_{ji}$ .

ções de movimento de uma partícula livre implica a conservação de sua quantidade de movimento (ou momento linear), que é a lei da inércia. A invariância por rotações, por sua vez, leva à conservação do *momento angular*  $\mathbf{L}$ , um conceito de grande importância em mecânica clássica (que explica, por exemplo, a rotação e as órbitas dos planetas). A extensão quântica do momento angular é igualmente importante, pois determina a quantização das órbitas atômicas e está relacionada ao *spin*, ou *momento angular intrínseco*, das partículas.<sup>6</sup> É claro, então, que a percepção de simetrias como invariâncias por transformações introduz naturalmente na física a linguagem de teoria de grupos. Além disso, o interesse na descrição por meio de teoria de grupos deve ser maior na física quântica do que na física clássica, já que no mundo microscópico os “objetos” de mesmo tipo considerados (e.g. elétrons, átomos, moléculas) são realmente idênticos entre si e portanto *indistinguíveis*, o que aumenta a simetria nos problemas estudados.

Consequentemente, na física de partículas, além das grandezas conservadas classicamente (energia, momento linear, momento angular e carga elétrica), observações experimentais permitiram a definição de outros *números quânticos* conservados, como os números *leptônico*, *bariônico*, *estranheza* e *isospin* (que serão vistos na Seção 4). Essas leis de conservação têm um papel fundamental nas interações entre as partículas elementares, permitindo discriminar entre processos elementares que podem acontecer e aqueles que são proibidos. De fato, para a física de partículas, saber o que *não* pode acontecer torna-se muito importante. Nesse sentido, vale a afirmação: “tudo o que não é proibido será obrigatório”, algumas vezes chamada de princípio totalitário da física quântica [3]. Assim, no limite em que a física é governada pela leis probabilísticas da mecânica quântica, são os números (quânticos) conservados que estabelecem a *identidade* das partículas subatômicas e, de certa forma, assumem o papel da cinemática clássica, “determinando” a evolução do sistema [1]. Em particular, nesse limite, uma partícula não será mais descrita por sua posição no espaço, mas por uma função de estado —a chamada *função de onda*— com determinadas propriedades de simetria.<sup>7</sup> É a essas propriedades, e não às coordenadas espaciais e temporais, que podemos atribuir significado, e são as leis de conservação (decorrentes das simetrias) que conferem realidade e objetividade ao mundo microscópico. Nesse contexto, *onde?* e *quando?* são perguntas quase irrelevantes [12].

Apesar da grande importância que atribuímos hoje aos grupos de simetria das interações fundamentais, a

<sup>6</sup>O momento angular quântico e o spin são analisados em detalhe no Apêndice C, respectivamente nas Subseções C.1 e C.2.

<sup>7</sup>Ver Apêndice A.

aceitação das ideias de teoria de grupos na física quântica não foi algo suave, como discutido em detalhe na Referência [37] e descrito brevemente a seguir.

No início do século XX —quando foi formulada a base matemática da mecânica quântica (incluindo por exemplo o cálculo matricial, que não era usado pelos físicos na época)— a descrição em termos de teoria de grupos e suas representações foi introduzida na física quântica por Hermann Weyl, no contexto da chamada simetria de gauge, inspirada no eletromagnetismo. Essas ideias foram adotadas por Eugene Wigner, entre outros, e aplicadas com sucesso ao estudo de espectros de energia atômicos, tendo como base as representações do grupo de rotações em três dimensões [38]. Mais precisamente, os valores para a energia (i.e. o espectro) de átomos e moléculas dependem dos estados físicos possíveis para o sistema; esses estados são descritos por funções com simetria bem definida, o que permite a sua classificação e a determinação de propriedades físicas (como regras de seleção para transições entre estados) a partir do grupo de simetria envolvido.<sup>8</sup>

O formalismo de teoria de grupos, porém, foi considerado obscuro e desnecessariamente complexo por vários físicos, tendo sido ironizado e chamado de “a peste dos grupos” (do alemão *Gruppenpest*) por Paul Ehrenfest em 1928, em uma carta enviada pelo mesmo a Wolfgang Pauli. Essa expressão tornou-se popular entre os físicos da época, e muitos ficaram aliviados quando, em 1929, John Slater demonstrou que a descrição dos espectros de energia atômicos podia também ser obtida sem o emprego de teoria de grupos. Dizia-se então que Slater tinha “exterminado a peste dos grupos”. Nas décadas seguintes o emprego de teoria de grupos praticamente desapareceu da física e foi somente em 1949, com o trabalho de Giulio (Yoel) Racah, que a teoria de grupos se tornou parte aceita da descrição da espectroscopia atômica. Mesmo assim, essa ferramenta teórica não era ainda utilizada de maneira sistemática no estudo da física de partículas, como ilustrado a seguir.

### 3.1 Tentativas na Física de Partículas

Nesta subseção apresentamos as primeiras ideias propostas para usar teoria de grupos na física de partículas. Para isso, vamos ocasionalmente fazer referência a alguns aspectos matemáticos sem necessariamente defini-los, lembrando que maiores detalhes sobre a teoria dos grupos de Lie podem ser encontrados no Apêndice B e que a teoria de representações é discutida no Apêndice C, juntamente a algumas aplicações. Da mesma forma, não vamos aqui nos preocupar em detalhar as propriedades físicas dos hádrons, o que será feito mais abaixo,

<sup>8</sup>Ver, por exemplo, a discussão sobre os *autoestados* de energia do átomo de hidrogênio no Apêndice C, Subseção C.3 .



nas Seções 4 e 5. Em particular, na Subseção 4.1 são explicados os conceitos de spin, isospin, *hipercarga* e *estranheza*, utilizados para identificação e classificação dos hádrons. Por enquanto, vamos apenas mencionar que os hádrons constituem um conjunto muito grande de partículas, divididas em *bárions* e *mésons*, que interagem pela força nuclear forte. Os bárions mais “famosos” são o próton e o nêutron, enquanto o méson mais conhecido é o pión. Na verdade, há três tipos de píons: positivos, negativos e neutros. O grande número de hádrons torna imperativo algum tipo de classificação, para pelo menos começar a entender suas propriedades e o que causa a grande variedade de partículas desse conjunto.

As primeiras tentativas para classificar e explicar as dezenas de hádrons —inicialmente tomados como partículas elementares— descobertos a partir da década de 50 do século XX eram baseadas na chamada simetria de isospin ou *spin isotópico* e suas possíveis generalizações [13]. Essa simetria permite agrupar hádrons de massas aproximadamente iguais (mas com cargas elétricas diferentes) em *multipletos*, como o *dublete* formado pelos núcleons, i.e. prótons  $p$  e nêutrons  $n$ , ou o *triplete* dos píons:  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$ . As partículas de cada multipletos são caracterizadas pelo mesmo valor  $I$  do isospin e diferentes valores para  $I_3$ , definido como a *projeção* do isospin na “direção 3”. Em outras palavras, de forma simplificada, vamos associar o isospin (assim como é feito com o spin) a um vetor,  $\mathbf{I}$ , sendo  $I_3$  a sua componente em uma dada direção. A escolha da direção 3 (ou “eixo  $z$ ”, a direção vertical) é arbitrária. Dessa forma, a simetria de isospin estará relacionada à simetria por “rotação” no espaço (interno) de um certo tipo de hádron. Vejamos: se aplicarmos uma rotação ao vetor de isospin  $\mathbf{I}$ , podemos mudar o valor de sua projeção  $I_3$ , mas não o valor de  $I$ , associado ao módulo do vetor. Assim, podemos —de forma natural— agrupar hádrons de massas semelhantes em multipletos, atribuindo um único valor para o módulo  $I$  e valores diferentes da projeção  $I_3$  para cada membro de um dado multipletos.

Isso parece fazer sentido, mas como pode nos levar ao dublete de núcleons ou ao triplete de píons? Acontece que, na mecânica quântica, rotações estão associadas ao *operador* momento angular (quântico), que é o análogo do momento angular clássico  $\mathbf{L}$  descrito acima. De fato (veja o Apêndice A), grandezas físicas quânticas são dadas por operadores, geralmente representados por matrizes, que agem sobre os estados do sistema. Os valores possíveis de uma grandeza observável restringem-se aos *autovalores* do operador associado a ela. No caso do momento angular, que é uma grandeza vetorial, temos um operador com três componentes (i.e. três matrizes), correspondendo às três direções do espaço. As componentes desse operador vetorial e, por analogia, também as do spin e do isospin, possuem autovalores quantiza-

dos, i.e., são permitidos apenas valores quantizados para as projeções desses vetores. Em particular, para isospin  $I = 1/2$  há dois valores possíveis para  $I_3$ :  $+1/2$  e  $-1/2$ . Para  $I = 1$  temos três valores:  $+1$ ,  $0$ ,  $-1$ . Fica bastante motivada, assim, a utilização do isospin para agrupar os hádrons em multipletos, e.g. temos  $I = 1/2$  para os dois núcleons e  $I = 1$  para os três píons. Dentro de um multipletos, diferentes hádrons são caracterizados pelos diferentes valores de  $I_3$ , i.e. diferentes autovalores do operador associado à projeção do isospin na “direção 3”. A denominação e os valores permitidos para  $I$  e  $I_3$  seguem da analogia com o spin e com o momento angular quântico, como descrito na Subseção 4.1. Para maiores detalhes sobre as simetrias relacionadas aos operadores momento angular e spin, veja respectivamente as Subseções C.1 e C.2 do Apêndice C.

A simetria de isospin das interações fortes<sup>9</sup> implica que partículas que pertencem ao mesmo multipletos sejam indistinguíveis pela interação nuclear forte ou, de forma mais pictórica: se fosse possível “desligar” a interação eletromagnética, os componentes de um multipletos, como prótons e nêutrons, seriam a mesma partícula. Com a grande proliferação de novas partículas —incluindo as chamadas partículas *estranhas*, também agrupadas em multipletos específicos— era natural procurar por uma simetria mais “alta”, que englobasse vários multipletos. De fato, como relatado em [3], Murray Gell-Mann resumiu a questão em 1957 afirmando que seria interessante se todas as partículas sujeitas à força forte pudessem ser agrupadas em padrões que permitissem descrever, por exemplo, oito bárions como estados de uma única partícula. Uma nova taxonomia, que unisse dubletos e tripletos em um “supermultipletos”. Se pensarmos no núcleon como uma moeda (i.e. um objeto com dois lados, correspondendo ao próton e ao nêutron) e no pión como um triângulo, esse supermultipletos seria como um octaedro: ao ser girado, em algum espaço abstrato, ele se torna oito bárions diferentes!

Alguns dos estudos realizados nesse período utilizavam teoria de grupos, buscando descrever os estados observados de hádrons como representações de algum grupo. Porém, como descrito a seguir, procurava-se principalmente identificar o grupo de simetria dos hádrons em manifestações da sua *representação fundamental*. Para os grupos de simetria  $SU(N)$  isso significa uma

<sup>9</sup>Vale ressaltar que essas rotações de isospin eram tomadas como rotações *globais*, i.e. a mesma rotação sendo realizada em todos os pontos do espaço-tempo, até 1954. Naquele ano, o trabalho de Chen-Ning Yang e Robert L. Mills [39] abriu o caminho para a formulação das teorias de gauge não-abelianas (ou teorias de Yang-Mills), sugerindo que a invariância por rotações de isospin deveria ser *local*, i.e. diferente em cada ponto do espaço-tempo. Como explicado na Seção 5.4, as atuais teorias das interações fortes, i.e. a QCD, e das interações fracas [1] são baseadas na teoria desenvolvida por Yang e Mills.

representação de grau  $N$ , que age sobre um espaço vetorial de dimensão  $N$ . Assim, deveriam existir  $N$  objetos elementares, a partir dos quais os hádrons seriam formados. Em particular, receberam bastante atenção nessa época as ideias baseadas no modelo proposto em 1956 por Shoichi Sakata [40], segundo o qual todos os hádrons eram considerados como combinação de prótons, nêutrons e da partícula  $\Lambda^0$ . Usando uma sugestão de Hideki Yukawa [7], as três partículas fundamentais do modelo de Sakata foram associadas a uma representação tridimensional do grupo  $SU(3)$  por Mineo Ikeda, Shuzo Ogawa e Yoshio Ohnuki [41]. Dessa forma, considerando autoestados simultâneos de carga elétrica, isospin na direção “vertical”  $I_3$ , estranheza e número bariônico,<sup>10</sup> eles tentaram classificar em multipletos os hádrons conhecidos até então.

Um pouco mais tarde, Ralph E. Behrends e Alberto Sirlin [42] consideraram o grupo  $G(2)$ , em uma representação de grau 7, e sugeriram a associação de um de seus subgrupos aos multipletos de isospin, dados pelos conjuntos de partículas  $N = (p, n)$ ,  $\Xi = (\Xi^0, \Xi^-)$  e  $\Sigma = (\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$ . As “rotações” nesse espaço de dimensão 7 permitiam “misturar” essas sete partículas. [Nesse esquema a partícula  $\Lambda^0$  não era modificada pelas transformações do grupo  $G(2)$ .] Ao mesmo tempo, o outro subgrupo seria identificado com “rotações” no espaço da hipercarga. Tentava-se, desta forma, adivinhar quais dos hádrons eram verdadeiramente elementares, supondo-se que todos os outros seriam formados a partir deles. Note que todas as partículas enumeradas acima, exceto os píons, são bárions, ou seja, hádrons semelhantes aos núcleons. Na notação aqui utilizada, os índices superiores correspondem à carga elétrica das várias partículas. As antipartículas, que possuem mesma massa e números quânticos opostos aos das partículas, são denotadas com uma barra, e.g.  $\bar{p}$  para o antipróton.

A ideia de que todos os hádrons sejam formados a partir de um pequeno número deles mesmos pode parecer absurda hoje em dia, mas teve grande aceitação na época. Em particular, uma versão anterior dessa ideia tinha sido sugerida em 1949 por Enrico Fermi e Chen-Ning Yang [43], para descrição dos mésons  $\pi$  como estados compostos de núcleons e antinúcleons. De acordo com este esquema, partículas de carga negativa podem ser formadas por um nêutron e um antipróton, que possui carga inversa à do próton, e assim por diante. Mais detalhadamente, essa teoria pode ser formulada em termos de representações do grupo  $SU(2)$  para a simetria de isospin,<sup>11</sup> a partir da representação fundamental

<sup>10</sup>Ver a Subseção 4.1 para mais detalhes sobre essas grandezas físicas.

<sup>11</sup>Como já dito acima, a construção de representações do grupo  $SU(2)$  está exemplificada no Apêndice C, Subseção C.4, utilizando as regras para adição de momentos angulares quânticos; os resul-

$(p, n)$  e da representação correspondente para os antinúcleons  $(\bar{p}, \bar{n})$ . Como explicado em [44], a ideia de Fermi e Yang tinha a vantagem de “economizar” partículas. Nas palavras de Fermi [13] (em um simpósio organizado em 1951 pelo American Institute of Physics):

*Quando a teoria de Yukawa<sup>12</sup> foi proposta, havia uma esperança genuína de que as partículas envolvidas, prótons, nêutrons e mésons  $\pi$ , pudessem ser legitimamente consideradas como partículas elementares. Essa esperança perde cada vez mais o seu fundamento à medida que novas partículas elementares são rapidamente descobertas.*

(A tradução é nossa.)

Porém, como dito explicitamente no trabalho de Fermi e Yang, a nova teoria era somente um exemplo de uma possível abordagem para a descrição da física de partículas e os próprios autores não tinham a esperança de que a proposta apresentada pudesse “realmente corresponder à realidade”. Eles também tinham a consciência de que o entendimento da física dos hádrons era um grande desafio. Ainda nas palavras de Fermi, em 1951 [13]:

*Claramente, pode ser que alguém apareça logo com uma solução para o problema do méson, e que os resultados experimentais confirmem tantas características detalhadas da teoria que ficará claro para todos que essa é a teoria correta. Tais coisas já aconteceram no passado. E podem acontecer novamente. No entanto, não acredito que possamos contar com isso, e acredito que devemos estar preparados para uma empreitada longa e difícil.*

(A tradução é nossa.)

Na generalização introduzida por Sakata, a inclusão da partícula  $\Lambda^0$  na representação fundamental tornou-se necessária devido à propriedade de estranheza verificada para alguns hádrons. Não havia, porém, uma explicação para o fato de a partícula  $\Lambda^0$ , um bárion estranho, ocupar uma posição privilegiada no modelo em relação aos outros bárions estranhos. Os esquemas de classificação baseados no modelo de Sakata foram posteriormente descartados com base experimental, à medida que foram descobertos novos hádrons, mas sua influência no início dos anos 60 era ainda muito forte (ver e.g. [45]). De fato, até que fosse confirmada a classificação introduzida por Ne’eman e Gell-Mann, esse era o principal modelo para descrição dos hádrons.

tados obtidos podem ser aplicados diretamente ao caso do isospin considerado aqui.

<sup>12</sup>Ver a Seção 4.

É curioso notar que, nesse período, havia também dúvidas crescentes em relação ao próprio conceito de partículas quando aplicado aos hádrons. Em particular, não se acreditava que o tratamento de teorias quânticas de campos, que fora tão bem sucedido na *eletrodinâmica quântica* (ou QED, a teoria que descreve as interações eletromagnéticas), pudesse ser aplicado à interação forte e aos hádrons [46]. O impasse levou a propostas bastante criativas, como o chamado modelo *bootstrap*, em que todas as partículas eram consideradas fundamentais e formadas a partir delas mesmas, em um tratamento que deixava de lado a explicação da origem das simetrias observadas [12]. A principal ênfase desse modelo era a busca de regras para descrição da *matriz de espalhamento* (ou matriz  $S$ ), ligando estados iniciais e finais de reações envolvendo as partículas, não importando quais fossem fundamentais. O método, introduzido por Geoffrey Chew, era motivado pelo cenário batizado por ele de “democracia nuclear”, descrito mais abaixo.

Ao mesmo tempo, as tentativas de classificar os hádrons usando grupos de simetria eram substituídas pela possibilidade de organizar as partículas hadrônicas nas chamadas *trajetórias de Regge*, descobertas pelo italiano Tullio Regge no final dos anos 50. Essencialmente, representando em um gráfico as massas quadradas dos mésons e dos bárions em função de seu momento angular total, Regge observou que as partículas conhecidas se alinhavam em retas específicas: as trajetórias de Regge. Nesse esquema, para cada trajetória, os pontos correspondentes às partículas reais (os pólos de Regge) representam diferentes “estados ligados” da mesma partícula [47]. Note que, inicialmente, o próprio Gell-Mann parecia mais entusiasmado com as ideias de Chew e Regge do que com a classificação pelo grupo  $SU(3)$ , como descrito em sua biografia [3].

É interessante também constatar como as diferentes abordagens para descrição dos hádrons tomaram contornos filosóficos, e até políticos! Por exemplo, Sakata, assim como vários de seus colegas na Universidade de Nagoya, inspirava-se na doutrina marxista e nos trabalhos de Friedrich Engels sobre o materialismo dialético [3, 48]. Em particular, ele acreditava [49] que a descoberta na física de diferentes camadas —nebulosas, sistema solar, moléculas, átomos, núcleos atômicos e partículas elementares, cada uma governada por suas próprias leis físicas— fosse uma verificação da visão dialético-filosófica da natureza. Além disso, a descoberta de novas camadas deveria basear-se principalmente nos fatos experimentais, e por isso o grupo de Sakata se opôs à introdução da ideia de quarks, devido à falta inicial de evidências experimentais [3]. Ao mesmo tempo, a proposta [50] “revolucionária” da “democracia nuclear” de Chew, em contraposição à “conservadora” teoria de campos, foi provavelmente inspirada (em parte) pelo ativismo po-

lítico do próprio Chew, que —já nos anos cinquenta— participou da “Federation of American Scientists”, uma associação que coletava informações sobre violações da liberdade dos cientistas cometidas nos EUA na época do macarthismo. De qualquer modo, a teoria elaborada por ele para a interpretação e explicação da física de partículas herdou [51] termos e conceitos do liberalismo americano.<sup>13</sup> Ademais, Chew acreditava [50] que a abordagem baseada na matriz  $S$  garantia uma maior “democracia” no estudo das partículas elementares, permitindo também que físicos que não aprenderam teoria de campos e “até os experimentais” contribuíssem com novas ideias.

Acima de tudo, porém, como observado em [3], a ideia de um universo formado a partir dos tripletos de  $SU(3)$  de Sakata agradava tanto aos que queriam partículas redutíveis a pequenas componentes sólidas (como suposta consequência do materialismo dialético) quanto a quem adotasse a concepção platônica de uma realidade imitando formas matemáticas. De fato, como mencionado acima, a principal referência para classificação dos hádrons era o modelo de Sakata, que teve também certa influência sobre Gell-Mann. Vemos portanto como era confusa a situação da classificação dos hádrons no final dos anos 50 e início dos anos 60 do século XX, com ideias de teoria de grupos sendo usadas de maneira ainda errática, buscando-se associar famílias de multipletos à chamada representação fundamental de algum grupo. Voltemos agora ao caminho seguido por Ne’eman para tratar do problema.

## 3.2 A Contribuição de Ne’eman

Nesta subseção discutimos a participação de Ne’eman na identificação do grupo de simetria por trás do modelo de quarks. De fato, como dito anteriormente, Ne’eman foi aconselhado por Salam a aprofundar seus conhecimentos de teoria de grupos. Dessa forma, ele procurou [1, 23, 27] aprender a classificação das álgebras de Lie em trabalhos do matemático russo Eugene B. Dynkin, traduzidos pela American Mathematical Society e sugeridos por Salam. Na época, a teoria relacionada aos grupos de Lie —desenvolvida quase 100 anos antes pelo matemático norueguês Sophus Lie— não era bem conhecida pelos físicos, e tinha sido aplicada somente a problemas envolvendo simetrias de cristais. Na Referência [27], Ne’eman conta como foi difícil chegar aos trabalhos de Dynkin, e como ficou surpreso em saber que um dos maiores especialistas em teoria de grupos de Lie da

<sup>13</sup>Relembramos que na Universidade de Berkley, onde Chew trabalhava, aconteceu em meados dos anos sessenta o protesto estudantil “Free Speech Movement” [50], que teve um papel importante para o movimento pelas liberdades civis nos EUA na década de 1960.

época era Giulio Racah, israelense como ele. Hoje em dia a teoria de grupos de Lie é comumente vista em cursos de graduação e pós-graduação em física e é coberta em diversos livros-texto sobre o assunto, incluindo aplicações na física (ver por exemplo [18, 52, 53, 54, 55]). A Referência [56], em português, trata em detalhe o problema da classificação dos hádrons.

Cabe destacar que a aplicação de teoria de grupos, por exemplo aos casos das rotações e do spin, representa uma complementação do estudo usual desses tópicos, que é normalmente feito sem referência explícita às propriedades de simetria. Porém, a análise sob o ponto de vista das simetrias é mais clara e concisa, permitindo maior generalidade. (Por exemplo, como já mencionado acima, pode ser vista a discussão para o caso do átomo de hidrogênio no Apêndice C, Subseção C.3.) Além disso, para problemas cuja solução não é ainda entendida, tentar associar estados físicos observados a representações pode ajudar muito na identificação do grupo de simetria envolvido, levando à classificação sistemática de tais estados e, potencialmente, à identificação da teoria por trás das interações que dão origem aos estados estudados. Mais especificamente, como explicado no Apêndice C, a observação de estados multipletos pode estar relacionada a *degenerescências* dentro de uma representação irredutível, e portanto podem-se identificar padrões obtidos no experimento e tentar associá-los aos multipletos de uma dada representação de um grupo. A tarefa importante nesse caso é investigar quais grupos têm a estrutura observada, com esses padrões bem definidos [57]. Foi esse o caso do modelo de quarks. Era necessário ir além da descrição da propriedade de isospin mencionada acima, baseada na simetria  $SU(2)$ , e considerar uma estruturação dos hádrons de acordo com uma simetria de ordem mais alta, que não estivesse atrelada à especificação de um conjunto de hádrons mais fundamentais. A obtenção dessa descrição foi a contribuição de Ne’eman para classificação dos hádrons.

Para entender a abordagem usada por Ne’eman é necessário definir o *posto* de um grupo de Lie,<sup>14</sup> que está relacionado à quantidade de grandezas conservadas (i.e. de números quânticos conservados) para o sistema físico estudado. Note que, no casos do momento angular e do spin (discutidos no Apêndice C, Subseções C.1 e C.2) —respectivamente associados aos grupos de simetria  $SO(3)$  e  $SU(2)$ — temos grupos de dimensão 3 e posto 1. De fato, no caso do grupo das rotações  $SO(3)$ , i.e. quando o sistema possui simetria rotacional, a grandeza conservada é o momento angular  $\mathbf{L}$  do sistema, associado ao número quântico conservado  $l$ . Mais especificamente, o módulo do vetor momento angular é fornecido pelo operador  $\mathbf{L}^2$ , cujos autovalores são  $\hbar^2 l(l+1)$ ,

<sup>14</sup>Ver Apêndice B para mais detalhes.

onde  $\hbar$  é a *constante de Planck racionalizada*. O número quântico  $l$  representa o valor máximo para medidas das componentes do momento angular (por exemplo a componente  $L_z$ , ao longo do eixo  $z$ ) e pode assumir apenas valores inteiros. Ao mesmo tempo, a degenerescência dos multipletos com um dado  $l$  é  $2l+1$ , correspondendo ao número de autovalores diferentes do operador  $L_z$  (ver Apêndice C, Subseção C.1). O fato de o grupo das rotações ter posto 1 determina que os estados físicos sejam organizados em multipletos com apenas uma grandeza invariante, o número quântico  $l$ . O mesmo ocorre para o grupo  $SU(2)$ , associado ao spin, e também ao isospin.

Um passo muito importante dado por Ne’eman foi intuir a necessidade de considerar grupos de Lie de posto 2, devido à conservação da hipercarga  $Y$  e da componente vertical do isospin<sup>15</sup>  $I_3$ . Ao mesmo tempo, ele não se limitou à representação fundamental do grupo, o que seria mais tarde uma indicação da presença de uma subestrutura para os hádrons, que são formados por quarks. De fato, como explicado na subseção anterior, a utilização do grupo de simetria  $SU(3)$  já tinha sido proposta anteriormente no modelo de Sakata, porém apenas como uma extensão do uso da representação fundamental do grupo  $SU(2)$  de isospin, adicionando-se ao próton e ao nêutron a partícula  $\Lambda^0$ . (Exemplos da formação de partículas segundo esse modelo são dados na Referência [56].) Assim, apesar de representar um exemplo de aplicação da teoria de grupos à descrição dos hádrons e uma referência para seus aspectos técnicos [58], podemos dizer que a ênfase do modelo de Sakata não era nas possíveis representações do grupo  $SU(3)$ , mas nos três objetos que definiam a representação fundamental. Tais objetos, as partículas  $(p, n, \Lambda^0)$  e suas antipartículas, eram os constituintes de todos os hádrons, ou seja o modelo satisfazia a ideia —ou dogma, como dito mais tarde por Ne’eman [7]— de “pequenos tijolos sólidos e básicos” no coração da matéria. Por outro lado, a classificação de Ne’eman parecia ignorar a questão dos constituintes da matéria, já que os multipletos refletiam as representações de ordem mais alta do grupo (em particular as representações com oito componentes), sem incluir a representação fundamental com três objetos. Como enfatizado em [13]: “a natureza parece preferir a simplicidade, mas tinha ignorado o *três* fundamental em favor do *oito*, ou será que não?”

Na Referência [23] Ne’eman relata os estágios finais de seu estudo e a coincidência de ter chegado à descrição correta praticamente ao mesmo tempo que o físico americano Murray Gell-Mann [1]:

...*Eu percebi que apenas quatro grupos eram*

<sup>15</sup>Notemos, porém, que equivalentemente podem-se considerar [ver a Eq. (2) na Seção 4.1] a conservação das grandezas estranheza  $S$ , mencionada acima, e da carga elétrica  $Q$ .

*possíveis, e comecei a examinar cada um deles separadamente. Recordo-me que um desses grupos [chamado  $G(2)$ ] levava a diagramas com a forma da estrela de Davi, e torci para que esse fosse o grupo correto, mas não era. Por outro lado,  $SU(3)$  ajustou-se perfeitamente! Eu terminei meu trabalho em dezembro de 1960, e discuti sobre ele com Salam. Então eu enviei um artigo para publicação no início de Fevereiro de 1961, que foi publicado logo depois. Murray Gell-Mann do Caltech estava trabalhando no mesmo problema ao mesmo tempo e tinha chegado à mesma conclusão.*

(A tradução é nossa.)

Assim, enquanto Ne’eman concluía seu trabalho, Murray Gell-Mann, nos Estados Unidos, também “encaixava pedaços do quebra-cabeça” para descrição dos estados hadrônicos. Gell-Mann, que foi responsável por diversos avanços teóricos para a física de partículas e era já um dos pesquisadores mais importantes na área, identificou (independentemente de Ne’eman) o grupo  $SU(3)$  para classificação dos hádrons. O esquema foi chamado por ele de *caminho óctuplo* (eightfold way, em inglês),<sup>16</sup> devido à presença de multipletos com oito objetos. É curioso notar quão pouca familiaridade ele possuía com teoria de grupos [3, 37]:

*Murray Gell-Mann teve que ser informado por um matemático [Richard Block] no outono de 1960 de que os objetos “bonitinhos” com que ele estava brincando no desenvolvimento inicial da álgebra de correntes eram bem conhecidos pelos matemáticos como grupos de Lie e possuíam uma elaborada teoria.*

(A tradução é nossa.)

De fato, enquanto estava visitando o *Collège de France* (Paris) em 1959–1960, Gell-Mann gastou bastante tempo [3] trabalhando com álgebras baseadas em quatro, cinco, seis, e até sete, operadores/correntes, sem obter nenhum resultado. Foi somente após a revelação de Richard Block que ele entendeu que, em todas as suas tentativas com as álgebras de correntes, ele tinha simplesmente combinado de várias formas os grupos  $U(1)$  e  $SU(2)$ . Ambos são grupos de Lie (ver Apêndice B), sendo o primeiro um grupo abeliano e o segundo —já usado na descrição do isospin— um grupo não-abeliano com três geradores, correspondentes a três operadores/correntes usados na abordagem de Gell-Mann. Então ficou claro para ele que, para a classificação dos hádrons, deveriam ser considerados grupos de Lie mais

complicados. Logo, a escolha recaiu, de forma natural, sobre o grupo  $SU(3)$ , caracterizado por oito geradores.

### 3.3 Impactos da Descoberta

Como descrito abaixo na Subseção 4.2, a proposta da classificação de hádrons em multipletos —segundo representações do grupo de simetria  $SU(3)$ — recebeu atenção praticamente imediata, ao ser aplicada aos dados experimentais de aceleradores de partículas disponíveis na época. De fato, em poucos meses, o esquema foi amplamente divulgado, aceito e estabelecido, resolvendo a confusa situação descrita na Subseção 3.1 e produzindo previsões de novas partículas, que logo foram descobertas, como descrito abaixo, na Seção 4.2. Em resumo, a classificação proposta representou, à época, uma verdadeira mudança de paradigma para compreensão dos hádrons, que depois levaria a um entendimento mais profundo das interações fortes. Maiores detalhes sobre os aspectos físicos da classificação, como a especificação das partículas previstas e observadas, serão vistos (na Seção 4.2) após a discussão dos números quânticos envolvidos, os quais fornecem também a base para o modelo de quarks. Aqui vamos nos concentrar nos aspectos matemáticos, relacionados à utilização de teoria de grupos para classificação dos hádrons. Em particular, é interessante notar que o próprio modelo de quarks, introduzido pouco após o esquema de classificação pela simetria  $SU(3)$ , não recebeu na época tanta atenção, levando cerca de dez anos para ser confirmado e aceito. Ou seja, ironicamente, foi muito melhor recebida a *classificação* dos hádrons do que a *razão* fundamental por trás dela, i.e. a existência dos quarks. Podemos dizer, portanto, que inicialmente o aspecto mais notável do esquema proposto foi a utilização de uma “nova” ferramenta matemática para descrição de partículas elementares: a classificação em termos de representações não-triviais do grupo  $SU(3)$ . Vejamos, então, a seguir, o impacto dessa aplicação mais sofisticada da teoria de grupos ao estudo da física de partículas, no início dos anos 1960.

Como dito anteriormente, até o final dos anos cinquenta do século XX a teoria de grupos não era utilizada de maneira sistemática na física de partículas. Como exemplo, vale relembrar um curso de teoria de grupos ministrado por Giulio Racah no Instituto de Estudos Avançados em Princeton em 1951, frequentado por Gell-Mann e Salam, entre outros. No curso foram abordadas as representações do grupo  $SU(3)$  como rotações em um espaço tridimensional complexo, além das rotações usuais, mas isso não foi lembrado por eles mais tarde, quando apenas descrições baseadas nas rotações usuais foram tentadas para a descrição inicial dos hádrons [1].

<sup>16</sup>O nome escolhido por Gell-Mann é uma referência ao *nobre caminho óctuplo* nos ensinamentos de Buda.

Como escreveu Abraham Pais [13]:

*Desde o início ficou evidente que aqui nós, físicos, estávamos aprendendo a verdadeira arte.*

*...Porém na época eu, assim como os outros, não fui capaz de destilar as partes essenciais dessas aulas que, mais tarde, seriam úteis na física de partículas.*

(A tradução é nossa.)

Na metade dos anos sessenta essa situação já tinha mudado, tendo surgido artigos de revisão com ferramentas de teoria de grupos em física de partículas para experimentais e não-especialistas, como a Referência [57]. Podemos avaliar o impacto da descoberta de Ne’eman a partir do seguinte trecho, assinado por “amigos de Yuval”, publicado no CERN Courier [59]:

*De acordo com os multipletos  $SU(3)$  de Gell-Mann e Ne’eman, os núcleons eram membros de uma representação octeto, em vez de pertencerem ao triplete fundamental. Além do octeto, multipletos de massas mais altas também continham vários estados ainda não descobertos, incluindo a ilustre partícula  $\Omega^-$  no decuplo.<sup>17</sup> Sua descoberta em 1964 com as propriedades previstas forneceu uma corroboração triunfal do esquema de classificação  $SU(3)$  e físicos de partículas correram então a estudar teoria de grupos.*

(A tradução é nossa.)

Portanto, o trabalho de Ne’eman (e de Gell-Mann) para a compreensão dos estados hadrônicos, baseado na utilização de teoria de grupos de maneira não trivial — indo além da ideia de alguns bárions “privilegiados” na representação fundamental de um grupo — teve como consequência a valorização do próprio estudo de teoria de grupos.

Pouco tempo depois da proposta de Ne’eman e Gell-Mann, a classificação  $SU(3)$  foi obtida também por David R. Speiser e Jan Tarski [60] como parte de um estudo detalhado em que foram analisados, de forma sistemática, todos os grupos possíveis para a classificação das partículas elementares. Observamos que esses dois pesquisadores, do Instituto de Estudos Avançados em Princeton, iniciaram seu estudo em 1961, independentemente de Ne’eman e Gell-Mann. É interessante também notar que, contrariamente a seus contemporâneos, Speiser possuía bastante familiaridade com teoria de grupos,<sup>18</sup> pois era sobrinho de um importante matemático

<sup>17</sup>Ver final da Seção 4.2.

<sup>18</sup>Como descrito em [61], Speiser conhecia bem o assunto por ter “caído dentro [do caldeirão] quando pequeno, como o mítico gaulês Obelix”.

suíço, Andreas Speiser, autor de um um famoso livro sobre teoria de grupos [62].

Em conclusão, a classificação  $SU(3)$  dos hádrons mudou profundamente a maneira como era vista a teoria de grupos na época. É muito interessante, nesse sentido, o relato do físico e matemático Freeman Dyson, reproduzido na Referência [63], sobre o papel desempenhado pela Universidade de Princeton na difusão da teoria de grupos em física:

*No início do século passado [o século XX] o matemático Oswald Veblen e o físico James Jeans estavam discutindo a reforma do currículo matemático da Universidade de Princeton. Jeans argumentou que a teoria de grupos deveria ser omitida, alegando que teoria de grupos era um assunto que jamais seria útil na física. Veblen deve ter vencido a discussão pois a teoria de grupos continuou a ser lecionada. É de fato irônico que a teoria de grupos não só se tornou um dos temas centrais da física, mas grande parte da pesquisa inovadora [na área] foi desenvolvida justamente em Princeton!*

(A tradução é nossa.)

Como veremos na Seção 4.2, o esquema baseado no grupo  $SU(3)$  para classificação dos hádrons foi o primeiro passo para identificação dos quarks como subestrutura por trás dos hádrons. O modelo de quarks (ver Seção 5), introduzido por Gell-Mann e Zweig em 1964, incorpora o esquema  $SU(3)$  e explica as representações observadas a partir do produto direto<sup>19</sup> das representações fundamentais, i.e. das representações padrão e dual, correspondentes a três tipos de quarks e anti-quarks. Como dissemos acima, é curioso que o esquema  $SU(3)$  tenha tido confirmação e aceitação relativamente rápidas (como descrito no final da Seção 4.2), enquanto que o modelo de quarks permaneceu um tópico controverso por muitos anos, sendo finalmente aceito apenas em 1974. De fato, embora hoje possa parecer mais importante a identificação dos quarks como subestrutura dos hádrons do que sua classificação resultante segundo o grupo  $SU(3)$ , essa última era certamente melhor estabelecida na época, e foi a principal razão para a atribuição do prêmio Nobel de 1969 a Gell-Mann [64] (ver e.g. [65]).

## 4 Interação Forte e Simetria

Quando estudantes se deparam pela primeira vez com o modelo atômico de Rutherford-Bohr, uma questão na-

<sup>19</sup>Veja exemplos de produto direto de representações no Apêndice C, Subseção C.4.

tural é: Como podem os prótons permanecer ligados no núcleo atômico, sendo que eles possuem cargas elétricas de mesmo sinal e portanto deveriam se repelir? Essa questão é resolvida postulando-se uma nova força, a chamada força forte. Tal interação deve agir também sobre os nêutrons, que fazem parte do núcleo atômico e que não possuem carga elétrica. Como o próprio nome diz, essa interação é de tal modo intensa que consegue manter ligadas as partículas no núcleo atômico, apesar da repulsão coulombiana entre os prótons. Por outro lado, a nova força deve possuir curto alcance, restringindo-se ao tamanho do núcleo, pois do contrário sua ação seria percebida em escalas maiores.

Em 1935, o físico japonês Hideki Yukawa propôs uma teoria [66] em que a força nuclear forte seria *intermediada* por certas partículas massivas, mais tarde chamadas mésons  $\pi$ , ou *píons*. Segundo essa teoria, quando ocorre interação pela força forte, os núcleons trocam píons entre si, sendo o alcance da força determinado pela massa dos píons. A associação de uma interação com a troca de partículas (chamadas *mediadoras*) é natural na visão quantizada de campo: dizemos, por exemplo, que a interação eletromagnética é intermediada por *fótons*. O alcance da interação está inversamente relacionado à massa da partícula mediadora: no caso dos fótons a massa é zero e o alcance é infinito. Para a força forte, sabendo que o alcance  $r_0$  é da ordem do tamanho do núcleo, i.e.  $10^{-15} m$ , é possível estimar a massa  $m_\pi$  prevista para os píons. De fato, é relativamente simples obter [1] a relação  $m_\pi \approx \hbar c/2r_0 \approx 100 \text{ MeV}$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. O termo “méson” deve-se ao fato de que essa massa está entre as massas altas dos núcleons (classificados como bárions) e a massa baixa dos elétrons (classificados como léptons). Os píons só foram descobertos em 1947 [67], com a contribuição do brasileiro César Lattes, em colaboração com Hugh Muirhead, Giuseppe Occhialini e Cecil F. Powell.<sup>20</sup>

A explicação da interação forte como troca de píons fornece uma teoria efetiva, que descreve bastante bem alguns aspectos gerais da força nuclear forte. Entretanto, como entendido posteriormente, a verdadeira interação forte ocorre em um nível mais fundamental, entre os quarks, que compõem os hádrons, através da troca de *glúons* (análogos aos fótons no eletromagnetismo) [1]. Dessa forma, a força que mantém prótons e nêutrons ligados no núcleo atômico é dada por “resquícios” da interação entre os quarks, de maneira análoga às forças de Van der Waals entre moléculas, que são resquícios da força elétrica entre prótons e elétrons no interior dos átomos.

Note que nem todas as partículas interagem pela força forte. O elétron e os neutrinos, por exemplo, não “sen-

<sup>20</sup>Porém, somente Powell recebeu (em 1950) o prêmio Nobel pela descoberta [68].

tem” essa interação. Assim, podemos dividir as partículas elementares (sem considerar as partículas mediadoras das interações) entre as que interagem pela força forte, chamadas de hádrons, e as que não interagem, os léptons. A proposta do modelo dos quarks engloba unicamente os hádrons, que por sua vez são divididos (como explicado acima) em: bárions —e.g. prótons e nêutrons— e mésons, como os píons. Aos bárions pode ser associado o chamado número bariônico, que é conservado nos processos envolvendo a força forte. Já o número de mésons não é necessariamente conservado em tais processos. Por exemplo, um próton pode absorver energia e dar origem a um pión e um nêutron.<sup>21</sup> Nesse caso é conservado o número bariônico (igual a 1 para o próton e para o nêutron) e é criado um méson, ou seja o número de mésons aumentou de 0 para 1 no processo. Esse comportamento distinto de bárions e mésons está indiretamente relacionado ao spin dessas partículas [1]. Já que o spin, assim como suas generalizações, constitui um número quântico muito importante na classificação das partículas elementares, descrevemos brevemente algumas de suas propriedades a seguir. (Maiores detalhes sobre o spin e sobre o momento angular em geral podem ser encontrados no Apêndice C, especialmente nas Subseções C.1 e C.2.) Da mesma forma, descreveremos mais abaixo as grandezas hipercarga, estranheza e isospin, e apresentaremos detalhes do esquema para classificação dos hádrons introduzido por Ne’eman e Gell-Mann, o “eighthfold way”.

## 4.1 Hipercarga, Estranheza e Isospin

Em mecânica clássica, o momento angular é uma importante grandeza conservada (quando não há aplicação de torques externos) e está associado à rotação do corpo ao redor de um certo eixo. O spin, ou momento angular intrínseco de uma partícula, não possui uma explicação clássica desse tipo, embora seja frequentemente apresentado como um análogo quântico de rotação da partícula ao redor de seu eixo interno.<sup>22</sup> De fato, partículas com spin podem apresentar um momento de dipolo magnético  $\mu$  (proporcional ao valor  $s$  do spin), como seria esperado na física clássica para uma carga em movimento de rotação ao redor de um eixo. No caso de um momento magnético não nulo, o spin tende a se alinhar com um campo magnético externo, o que pode ser observado ex-

<sup>21</sup>Essa reação está ilustrada mais abaixo na Seção 5.3, Fig. 5, em que são detalhados também os conteúdos de quarks dos hádrons envolvidos.

<sup>22</sup>É preciso enfatizar que esta é apenas uma analogia já que, como discutido na Subseção C.2 do Apêndice C, o momento angular de spin não corresponde a uma rotação física. Sua existência foi descoberta experimentalmente e pode ser prevista teoricamente na mecânica quântica relativística, a partir da equação de Dirac [1].

perimentalmente. Note que esse é um efeito natural no caso de partículas que possuem carga elétrica, como o elétron, mas foi observado também para o nêutron. Essa foi uma das primeiras indicações de que o nêutron poderia não ser uma partícula realmente elementar [69, 70], apresentando uma estrutura interna.<sup>23</sup>

De forma mais quantitativa [9], o spin pode ser pensado como um vetor  $\mathbf{S}$  de módulo  $\hbar\sqrt{s(s+1)}$ , sendo  $\hbar$  (como acima) a constante de Planck racionalizada, i.e. dividida por  $2\pi$ . O valor de  $s$  é quantizado,<sup>24</sup> podendo ser apenas um número inteiro ou semi-inteiro. Da mesma forma, as projeções do spin (por exemplo na direção do campo magnético) podem assumir apenas certos valores. Mais precisamente, no caso de um spin  $s$  temos  $2s + 1$  possíveis projeções, dadas por  $-\hbar s, \hbar(-s+1), \dots, \hbar(s-1), \hbar s$ . Ou seja, as projeções também são quantizadas. Assim, na ausência de campo magnético, uma partícula de spin  $s$  (e momento magnético intrínseco  $\mu$ ) possui  $2s + 1$  estados *degenerados*, i.e. associados à mesma energia. Para partículas carregadas, essa degenerescência é quebrada pelo campo magnético, sendo que a energia de interação da partícula com o campo é proporcional à projeção do spin na direção do campo.

No caso de spin inteiro a partícula é chamada de *bóson* e no caso semi-inteiro de *férmion*. Os elétrons, por exemplo, são férmions e têm spin igual a  $1/2$ , podendo portanto apresentar  $2 \times 1/2 + 1 = 2$  valores para as componentes ou projeções: spin apontando para cima ou para baixo. Quanto aos hádrons, vemos que os bárions apresentam spin semi-inteiro, isto é, são férmions, enquanto que os mésons são bósons. A diferença crucial de comportamento entre férmions e bósons está associada ao *Princípio de Exclusão* de Pauli, discutido na Seção 5.4 e no Apêndice C, Subseção C.2.

Outra grandeza importante para a classificação dos hádrons é a hipercarga  $Y$ , dada por [1, 56]

$$Y = B + S, \quad (1)$$

onde  $B$  é o número bariônico descrito acima (i.e. 1 para

<sup>23</sup>Por outro lado, o neutrino, que é uma partícula elementar (i.e. sem estrutura interna), de spin  $1/2$  e carga nula, também pode ter um momento magnético não nulo, no caso de possuir massa não nula. Nesse caso, porém, o momento magnético é devido a correções radiativas do Modelo Padrão, i.e. efeitos perturbativos de ordem mais altas [71]. Por essa razão, o resultado previsto é que esse momento magnético seja proporcional à massa do neutrino e tão pequeno que não poderia ser detetado experimentalmente hoje em dia.

<sup>24</sup>A quantização do módulo e das componentes do spin é uma consequência das relações de comutação que definem a álgebra do momento angular quântico, como detalhado no Apêndice C, Subseção C.1. (Ver também a Subseção C.2.) Claramente, essas regras de quantização são análogas às já citadas para o isospin e o momento angular orbital, respectivamente nas Subseções 3.1 e 3.2 acima.

bárions, 0 para mésons e  $-1$  para antibárions) e  $S$  é a estranheza, que também é conservada em processos envolvendo a força forte. A estranheza —associada a um número quântico  $S$ — foi introduzida [1] em 1953 por Murray Gell-Mann<sup>25</sup> para explicar o curioso fato de que, nas reações observadas em aceleradores, alguns hádrons, que eram produzidos apenas em pares, apresentavam tempo de decaimento muito maior do que o esperado. Dizia-se então que as partículas com essa propriedade possuíam “estranheza”. Note que a conservação da estranheza explica que partículas estranhas sejam criadas aos pares, por exemplo uma partícula com  $S = 1$  e outra com  $S = -1$ , de forma que a estranheza total resultante seja 0, como na situação inicial. Fica também claro por que o decaimento dessas partículas é lento, considerando que a estranheza *não* é conservada no decaimento de uma partícula estranha em uma não-estranha. De fato, a interação forte (assim como a interação eletromagnética) conserva a estranheza e portanto tal decaimento deve ocorrer por ação da *força fraca*, o que determina o tempo de vida mais longo para tais partículas.

Como já mencionado na Seção 3.1, o isospin é uma grandeza central na classificação dos hádrons. Ela foi introduzida por Werner Heisenberg em 1932 para representar próton e nêutron —que possuem praticamente a mesma massa— como dois estados diferentes de uma única partícula, o núcleon. Por analogia com o spin, o isospin  $I$  do núcleon foi tomado igual a  $1/2$ , de forma que os “estados” próton e nêutron podem ser associados aos dois valores permitidos<sup>26</sup> para a projeção do isospin na direção “vertical”, indicada com  $I_3$ . Temos assim os valores  $I_3 = 1/2$  (correspondendo ao próton) e  $-1/2$  (correspondendo ao nêutron).<sup>27</sup> Assim, o isospin é uma generalização do spin para o espaço abstrato definido pelos diferentes tipos de hádrons.

O isospin é conservado nas interações fortes, o que pode ser associado a uma invariância por “rotações” no espaço de isospin. Isto implica que a interação forte não distingue entre prótons e nêutrons e, conseqüentemente, não está relacionada à carga elétrica. Note que a simetria associada ao isospin não é perfeita na natureza,

<sup>25</sup>E, independentemente, por Tadao Nakano e Kazuhiko Nishijima [72].

<sup>26</sup>Como no caso do spin  $s$ , descrito acima, em que há  $2s + 1$  projeções possíveis, teremos  $2I + 1$  valores para as projeções do isospin  $I$ .

<sup>27</sup>Vale ressaltar que a escolha do eixo vertical para diferenciar estados de próton e nêutron é claramente uma convenção. Porém, uma vez escolhida uma “direção”, não podemos mais mudar a definição de próton e nêutron, i.e. um isospin paralelo ao plano horizontal sempre representará uma *combinação linear* dessas duas partículas. Pelo contrário, no caso do spin usual (na ausência de campo magnético), as três direções espaciais são totalmente equivalentes: precisamos escolher uma delas para definir a base no espaço de spins mas, se necessário, podemos mudar essa escolha quando desejarmos.



já que é respeitada pela força forte mas quebrada pela força elétrica. (Este é porém um efeito pequeno, já que a intensidade da força elétrica é pequena comparada à da força forte.)

O conceito de isospin pode ser generalizado para grupos de partículas com massas aproximadamente iguais, que também podem ser pensadas como “versões” diferentes da mesma partícula. Dentro de um multipletto de partículas a carga elétrica varia de uma para outra por uma unidade, o que pode ser associado à projeção  $I_3$  do isospin, exatamente como explicado acima para as projeções quantizadas do spin  $s$ . De fato, a carga elétrica  $Q$  das partículas é dada pela fórmula de Gell-Mann-Nishijima [1]

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y = I_3 + \frac{B+S}{2}, \quad (2)$$

que implica  $Y = 2(Q - I_3)$  para a hipercarga. Ao mesmo tempo, as  $2I+1$  projeções para a componente  $I_3$  do isospin (com “módulo” do isospin dado por  $I$ ) correspondem às partículas do multipletto, que possuem mesmo número bariônico e spin. Temos assim, por exemplo, os seguintes multipletos de isospin

- Píons (ver Seção 3.1 acima):  $(\pi^+, \pi^0, \pi^-)$ , com  $I = 1$  (i.e.  $2I + 1 = 3$  partículas),  $s = 0$ ,  $B = 0$ ;
- Partículas  $\Delta$ :  $(\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-)$ , com  $I = 3/2$  (i.e.  $2I + 1 = 4$  partículas),  $s = 3/2$ ,  $B = 1$ .

(Note que nos dois casos considerados acima, a estranheza  $S$  é nula.)

Vejam agora a organização dos hádrons de acordo com as grandezas  $Y$  e  $I_3$ . Repare que, considerando a Eq. (2) acima, essa classificação pode ser feita de maneira equivalente em termos da estranheza  $S$  e da carga elétrica  $Q$  (mantendo fixo o número bariônico  $B$ ).

## 4.2 Classificação dos Hádrons: O Eight-fold Way

Se inicialmente dividirmos os hádrons em quatro grupos, de spin 0, 1/2, 1 e 3/2, e posteriormente os distribuímos num diagrama de hipercarga  $Y$  versus  $I_3$ , obteremos os quatro diagramas das Figs. 2 e 3. Como dito acima, partículas com mesma hipercarga  $Y$  e isospin  $I$  formam multipletos (um para cada linha nas figuras), cujos elementos possuem aproximadamente a mesma massa e são indexados por seus valores de  $I_3$  (correspondendo a diferentes valores para a carga elétrica). De fato, a relação (2) pode facilmente ser verificada nas Figs. 2 e 3 e foi de grande importância na organização das partículas conhecidas inicialmente e na previsão de novas partículas hadrônicas. Lembremos que, como dito acima, o número de elementos de cada multipletto é igual a  $2I + 1$ , sendo

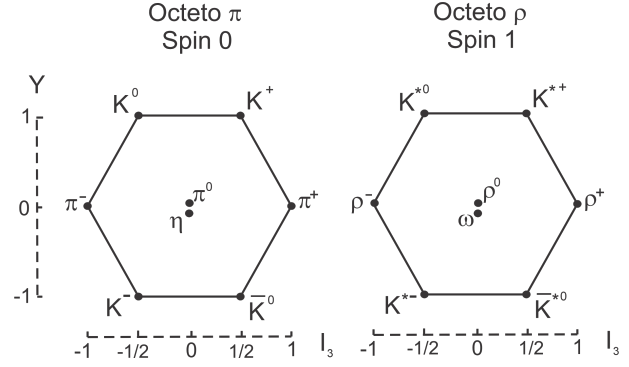


Figura 2: Diagramas (hexágonos) representando mésons no plano  $I_3$ - $Y$ . Cada octeto é formado por partículas de mesmo spin (respectivamente 0 e 1). Nos dois casos temos o número bariônico  $B = 0$ .

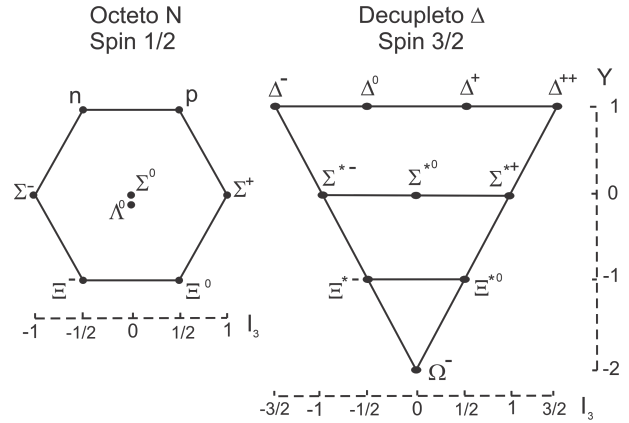


Figura 3: Diagramas representando bárions no plano  $I_3$ - $Y$ . No octeto as partículas possuem spin 1/2 e no decupletto as partículas possuem spin 3/2. Nos dois casos temos o número bariônico  $B = 1$ .

$I_3 = -I, -I+1, \dots, I-1, I$ . Assim, as partículas de um dado multipletto possuem carga elétrica média  $\bar{Q}$  dada por  $\bar{Q} = Y/2$ . (Observe que, para estados de um dado isospin  $I$ , o valor médio de  $I_3$  é sempre zero.)

Claramente, a organização dos multipletos de isospin da forma mostrada nas Figs. 2 e 3 sugere uma forte simetria e a possibilidade de empregar teoria de grupos no estudo das propriedades das partículas. Porém é importante lembrar que, na época dos trabalhos de Ne’eman e Gell-Mann (i.e. 1960–61) ainda não se haviam observado todas as partículas presentes nesses quatro diagramas. Portanto, estava muito menos clara a maneira apropriada de agrupar os vários hádrons, além de não se saber qual era o grupo de simetria correto a se aplicar. Como mencionado na Seção 3.2 acima, os trabalhos de Ne’eman [28] e de Gell-Mann [30] permitiram identificar o grupo de simetria  $SU(3)$ , que de fato admite represen-

tações na forma de octeto e decuplo.

O primeiro grande sucesso [1] do modelo de Ne’eman e de Gell-Mann foi a previsão de spin 1/2 para as partículas  $\Xi^0$  e  $\Xi^-$  (ver o octeto na Fig. 3), em vez do valor 3/2 previsto pelo modelo de Sakata. Essa previsão foi confirmada em 1963. O outro teste fundamental para a consagração do eightfold way foi a correta descrição dos bárions de spin 3/2 (ver o decuplo na Fig. 3). De fato, no início de 1962, somente sete desses bárions eram conhecidos: as quatro partículas  $\Delta$  de hipercarga 1, descobertas por Fermi em 1952, e as três partículas  $Y$  (hoje chamadas de  $\Sigma$ ), de hipercarga nula, descobertas em 1961. Em abril de 1962, Sheldon Lee Glashow e Jun John Sakurai apresentaram [73] uma possível classificação baseada nessas sete partículas, usando o modelo de Ne’eman e Gell-Mann. A escolha desses autores foi usar uma representação de dimensão 27 do grupo  $SU(3)$ , e não o decuplo. (A esse respeito veja, na próxima seção, a descrição de como era a situação dos dados experimentais na época.) Porém, no apêndice de seu artigo, eles discutiram também a possibilidade de usar uma representação de dimensão 10. Nesse segundo caso, o modelo permitiu prever partículas de hipercarga  $-1$  (com massa 1520 MeV) e de hipercarga  $-2$  (com massa 1640 MeV). O trabalho, porém, só seria publicado (pela revista *Nuovo Cimento*) no dia 16 de julho de 1962.

Em junho de 1962, Ne’eman e Gell-Mann participaram<sup>28</sup> da Conferência “Rochester”,<sup>29</sup> no CERN em Genebra (na Suíça), onde foi anunciada a descoberta de duas novas partículas de spin 3/2: as partículas  $\Xi^{*-}$  e  $\Xi^{*0}$ , de hipercarga  $-1$  e massa aproximadamente 1530 MeV (em acordo com a previsão de Glashow e Sakurai mencionada acima, que não fora ainda publicada). Elas se encaixavam perfeitamente no esquema do decuplo mostrado na Fig. 3, que prevê uma diferença de cerca de 150 MeV entre cada múltiplo de hipercarga [56], i.e. entre as linhas horizontais do diagrama do decuplo. Esse resultado deixou claro para Ne’eman e Gell-Mann que todas essas partículas de spin 3/2 faziam parte de uma representação de decuplo do grupo  $SU(3)$ , faltando somente descobrir a última partícula, de hipercarga  $-2$  (ou, equivalentemente, de estranheza  $-3$ ) e projeção de isospin  $I_3$  nula, i.e. de carga elétrica  $-1$  [ver Eq. (2)], com uma massa de cerca de 1680 MeV. Os dois pediram a palavra ao mesmo tempo [1, 74] para anunciar essa nova previsão, mas Gell-Mann estava sentado mais à frente no auditório (e era mais conhecido) e foi chamado a falar primeiro. Assim, ele formulou e

<sup>28</sup>Os dois cientistas encontraram-se pela primeira vez nessa conferência, tornando-se bons amigos [1].

<sup>29</sup>A Conferência Rochester começou em 1950, com frequência bial. Essa série de conferências existe ainda hoje, com o nome de *International Conference on High Energy Physics* (ICHEP), sendo um dos mais importantes eventos em física de partículas.

apresentou publicamente a previsão da nova partícula,<sup>30</sup> chamando-a de  $\Omega^-$ . Após a exposição feita por Gell-Mann, um físico do Brookhaven National Laboratory (BNL), Nicholas P. Samios, perguntou a ele qual deveria ser o decaimento esperado para essa nova partícula. Gell-Mann então esboçou as possibilidades em um guardanapo de papel, que Samios pegou e levou consigo. Em fevereiro de 1964 a descoberta da nova partícula foi estabelecida por um grupo de 33 físicos do Laboratório BNL, nos EUA [76]; entre eles estava Nicholas Samios.

## 5 Os Quarks: de um Trocadilho a Campos Quânticos de Matéria

Nesta seção discutimos como foi conciliada a identificação do grupo de simetria das interações fortes com a (difícil) constatação de que os hádrons fossem compostos de partículas mais elementares, os quarks. De fato, apesar do ótimo acordo dos diagramas das Figs. 2 e 3 com a proposta de classificação pela simetria  $SU(3)$ , restava entender *por que* a simetria se manifestava na forma de octetos ou decuplo —que pertencem à chamada *representação adjunta* (ver Apêndice C) do grupo— e não pela representação fundamental, que corresponderia a três objetos. Como veremos, essa foi apenas uma das razões que levantaram dúvidas em relação ao modelo de quarks. De fato, houve pouca aceitação do modelo por um longo tempo após sua introdução, e podemos argumentar que o próprio nome “quarks” sugerido para as novas partículas, propostas como constituintes da matéria hadrônica, já indicasse que se tratava de algo pouco verossímil. Vamos também descrever como o modelo de quarks evoluiu para uma teoria quântica de campos, a QCD, baseada na invariância de gauge local (não-abeliana) associada às chamadas cargas de cor. Note que essa simetria também é dada pelo grupo  $SU(3)$  mas, como ficará claro, ela não está diretamente relacionada ao esquema de classificação introduzido por Ne’eman e Gell-Mann. Acompanhe atentamente os passos da descrição ao longo dessa seção, para entender a fundo a diferença entre *cores* e *sabores* dos quarks!

### 5.1 Modelo de Quarks: História

Em 1962, trabalhando juntamente com Haim Goldberg (que tinha sido estudante de Giulio Racah em Jerusalém), Ne’eman buscou compreender a origem da simetria  $SU(3)$ , descrita nas seções anteriores, que explicava a classificação dos hádrons. Como parte desse es-

<sup>30</sup>Após o anúncio da descoberta das partículas  $\Xi^*$  em Genebra, Glashow e Sakurai enviaram à revista um novo artigo [75], em agosto de 1962, discutindo mais alguns detalhes do decuplo de spin 3/2 e da nova partícula prevista, que eles chamaram de  $Z^-$ .

tudo, os pesquisadores propuseram [77] um modelo em que os hádrons não seriam mais vistos como verdadeiras partículas elementares, mas sim como estados ligados de constituintes fundamentais com número bariônico  $1/3$ . Note que essa escolha mantém válida a “contabilidade” dos estados de mésons, com número bariônico  $B = 1/3 - 1/3 = 0$ , e de bárions, com  $B = 1/3 \times 3 = 1$ .

Apesar de seu pioneirismo, como argumentado por Harry J. Lipkin [78], Goldberg e Ne’eman não discutiam a possível existência dos novos constituintes fundamentais propostos, ou sua natureza, o que diminuiu a relevância do trabalho.<sup>31</sup> Por exemplo, eles sugeriram que mésons poderiam ser estados ligados “bárion e antibárion” mas, de fato, sem discutir as propriedades desses constituintes elementares. Parece razoável supor que, por essa razão, o artigo de Goldberg e Ne’eman não tenha sido incluído no livro sobre o eightfold way editado em 1964 por Gell-Mann e Ne’eman [29]. Entretanto, note que tampouco o artigo de Gell-Mann sobre a proposta dos quarks [79] fez parte desse livro. É preciso lembrar aqui que, de qualquer forma, postular partículas de número bariônico  $1/3$  implica em objetos de carga elétrica fracionária, pois a carga  $+1$  do próton, e.g., deverá ser repartida entre as três partículas que o constituem. (Isso pode ser alcançado, no caso de estranheza zero, pela combinação de duas partículas com cargas  $Q = 2/3$  e  $-1/3$  [veja a Eq. (2) para  $S = 0$  e  $I_3 = \pm 1/2$ ]. Tal escolha corresponde aos quarks up e down descritos mais abaixo. Por outro lado, ainda nas palavras de Lipkin [78], deve-se considerar que qualquer sugestão de uma simetria baseada em cargas fracionárias “não teria sido considerada seriamente” na época. Portanto, não é surpreendente que o novo modelo tenha sido apresentado apenas como um modo matemático mais consistente de explicar todas as partículas hadrônicas com base na simetria  $SU(3)$ . Para isso, foi proposta uma simetria baseada no grupo de Lie  $U(3)$ , que pode ser escrito como o *produto direto*<sup>32</sup> do grupo  $SU(3)$  com o grupo  $U(1)$ . A componente  $U(1)$  estaria relacionada ao número bariônico através de um operador  $B$  representado por uma matriz  $3 \times 3$ , diagonal e com os elementos não-nulos iguais a  $1/3$ . (Tal operador possui trivialmente três auto-estados independentes com autovalor  $B = 1/3$ , que podem ser identificados com três novas partículas.) Essa nova simetria permitia acomodar, na mesma representação de octeto do grupo  $SU(3)$ , conjuntos de partículas com número bariônico diferente,

i.e. os mésons (ver Fig. 2) com  $B = 0$ , os bárions (ver Fig. 3) com  $B = 1$  e os correspondentes antibárions com  $B = -1$ .

Como observado por Lipkin [58], a nova teoria “estava um pouco à frente do seu tempo” e “a situação experimental não estava pronta para sua aceitação”. Assim, o trabalho de Goldberg e Ne’eman não teve destaque imediato. Em boa parte isso foi devido também a resultados experimentais errados. De fato, vale notar a interessante discussão de Lipkin, no artigo acima, sobre a importância de uma correta interpretação dos dados experimentais para a comprovação de uma teoria. Tal interpretação permitiu demonstrar, corretamente, o desacordo entre as previsões do modelo de Sakata e a natureza. Por outro lado, como descrito por Lipkin, experimentos mal interpretados conduziram inicialmente à incorreta conclusão de que as quatro partículas  $\Delta$  e as três partículas  $Y$  (hoje chamadas de  $\Sigma$ ) do decuplo deveriam ser descritas por uma representação de dimensão 27 do grupo  $SU(3)$ . Isso claramente retardou a correta classificação e interpretação das partículas hadrônicas.

No ano de 1964, Murray Gell-Mann [79] e George Zweig [81] apresentaram, independentemente, trabalhos individuais propondo uma teoria semelhante, mas falando explicitamente de três novas partículas elementares, de número bariônico  $1/3$ . Gell-Mann usou o termo *quark* para denominar as três partículas. O nome foi tomado por ele da frase “Three quarks for Muster Mark!” do livro *Finnegan’s Wake*, de James Joyce. Além disso, Gell-Mann pode ter escolhido o nome por sua semelhança com a palavra “quirk” em inglês [3], que significa “peculiaridade”. Já Zweig usou o termo *aces* (*ases*) por analogia com as outras quatro partículas elementares conhecidas na época —os quatro léptons: elétron, múon e os correspondentes neutrinos— e baseado na associação pictórica dos novos constituintes a figuras geométricas [82]. No final, permaneceu o nome escolhido por Gell-Mann, provavelmente porque ele conseguiu que seu trabalho fosse publicado, no periódico *Physics Letters*,<sup>33</sup> enquanto que o trabalho de Zweig foi divulgado apenas como *CERN report*. De fato, na Referência [82] e na entrevista documentada em [83], Zweig conta que desistiu de publicar seu longo artigo após encontrar muita resistência:<sup>34</sup> por alguma razão, o chefe da divisão teórica do CERN, o belga Léon Van Hove, resolveu im-

<sup>31</sup>Todavia, em um seminário em maio de 1962 no Instituto Weizmann, em Israel, Ne’eman explicou [2] que era “como se” os bárions fossem formados por três constituintes elementares.

<sup>32</sup>Mais precisamente, o grupo  $U(3)$  pode ser decomposto como  $U(1) \times SU(3)/Z_3$ . Aqui indicamos com  $Z_3$  o grupo das rotações de 120 graus, que pode ser representado pelos números complexos  $z = 1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$ , os quais satisfazem a propriedade  $z^3 = 1$  [80].

<sup>33</sup>Gell-Mann contou a Zweig que teve receio de enviar seu trabalho à revista *Physical Review Letters*, que era mais renomada, por achar que ela não o teria aceito para publicação [82].

<sup>34</sup>Lembremos também que Zweig não conseguiu ser contratado em uma importante universidade dos EUA (a UC Berkeley) porque, em uma reunião do departamento, seu físico teórico mais sênior descreveu o modelo dos ases como “trabalho de um charlatão” [82]. Alguns anos depois, Zweig passou a trabalhar em neurobiologia.

Tabela 1: Propriedades dos três quarks mais leves. As colunas representam a carga elétrica  $Q$ , o número bariônico  $B$ , a componente  $I_3$  do isospin, a estranheza  $S$  e a hipercarga  $Y$ . Os quarks possuem spin  $1/2$ .

Quark (“sabor”)	$Q$	$B$	$I_3$	$S$	$Y$
$u$	$2/3$	$1/3$	$1/2$	$0$	$1/3$
$d$	$-1/3$	$1/3$	$-1/2$	$0$	$1/3$
$s$	$-1/3$	$1/3$	$0$	$-1$	$-2/3$

pedir a publicação do trabalho de Zweig, instruindo a secretária do grupo a não digitar esse ou outros artigos dele! Além disso, Van Hove cancelou um seminário de Zweig no CERN, já anunciado, sobre a teoria dos ases. Vale ressaltar que o artigo de Gell-Mann [79] é bem curto (apenas duas páginas), limitando-se a descrever o modelo de quarks e mostrar como essa nova ideia poderia ser usada para obter relações de dispersão, por meio da chamada *álgebra de correntes* [46]. Ao contrário, o trabalho não publicado de Zweig [81] (de cerca de 80 páginas) descreve em detalhe muitos aspectos da física dos quarks e, em particular, contém um outro famoso resultado teórico, hoje conhecido como *regra de OZI*, proposta independentemente também por Susumu Okubo [84], em 1963, e por Jugoro Iizuka [85], em 1966. Essa regra permite explicar por que certos decaimentos de partículas hadrônicas aparecem com frequência menor do que o esperado. De fato, foi o problema de explicar a supressão do decaimento<sup>35</sup>  $\phi \rightarrow \rho + \pi^0$ , com  $\rho \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ , que levou Zweig a desenvolver seu modelo de ases [83, 86].

## 5.2 Modelo de Quarks: Propriedades

No modelo de Gell-Mann e Zweig, a simetria  $SU(3)$  para os hádrons corresponde aos três tipos —ou “sabores”— de quarks de menor massa, chamados up ( $u$ ), down ( $d$ ) e estranho ( $s$ ), suficientes para explicar os hádrons conhecidos na época. Propriedades desses quarks são dadas na Tabela 1 (ver também as previsões para as massas dos quarks na Tabela 1 da Referência [81]). Note que para cada quark há um antiquark, com números quânticos opostos. De acordo com o modelo dos quarks, os mésons são formados por um quark e um antiquark e os bárions por três quarks. Prótons e nêutrons, por exemplo, são formados apenas por quarks up e down,<sup>36</sup> da

<sup>35</sup>É interessante ver esse resultado de Zweig representado “de forma pictórica” na Fig. 12 da Referência [81].

<sup>36</sup>Hoje em dia sabemos também que a pequena diferença de massa entre os quarks up e down [87] tem um papel muito importante na diferença de massa entre prótons e nêutrons.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (uuu) & \Delta^{++} & & & & & \\
 (uud) & \Delta^+ & (uus) & \Sigma^{*+} & & & \\
 (udd) & \Delta^0 & (uds) & \Sigma^{*0} & (uss) & \Xi^{*0} & \\
 (ddd) & \Delta^- & (dds) & \Sigma^{*-} & (dss) & \Xi^{*-} & (sss) \quad \Omega^-
 \end{array}$$

Figura 4: O decuplete da Fig. 3 acima, mas agora mostrando os conteúdos de quarks para cada bárion.

seguinte maneira

- Próton: dois quarks up e um quark down, resultando em carga elétrica  $Q = 2/3 + 2/3 - 1/3 = 1$ ;
- Nêutron: dois quarks down e um quark up, resultando em carga elétrica  $Q = -1/3 - 1/3 + 2/3 = 0$ .

No caso do decuplete de bárions (ver Fig. 3), de acordo com o modelo dos quarks, as partículas são constituídas pela combinação dos quarks up, down e estranho, como ilustrado na Fig. 4. De fato, pode-se verificar prontamente a equivalência da proposta de quarks com a atribuição dos números quânticos discutidos na seção anterior. Por exemplo, como vemos na Fig. 4, a partícula  $\Omega^-$  é constituída por três quarks  $s$ . Sendo que cada quark  $s$  possui carga  $-1/3$ , estranheza  $-1$ , e número bariônico  $1/3$ , a soma total de suas propriedades ( $Q = -1, S = -3$  e  $B = 1$ ) confere exatamente com os valores fornecidos pela Fig. 3: usando a Eq. (1) temos a hipercarga  $Y = 3 * 1/3 - 3 * 1 = -2$ .

Do ponto de vista da teoria de grupos, os estados ligados (hádrons) são formados a partir do chamado produto direto de objetos nas representações fundamentais.<sup>37</sup> No caso dos bárions, a composição de três quarks resulta, para os possíveis estados ligados, na divisão em multipletos na forma de: um singleto, dois octetos e um decuplete, o que é representado como [56]

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10. \quad (3)$$

Da mesma forma, para os mésons, a combinação de um quark com um antiquark resulta em

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8, \quad (4)$$

onde  $\bar{3}$  é a representação dual (ver Apêndice B) da representação fundamental  $3$ . Nos dois casos, vemos que o número total de possibilidades (obtido efetuando-se as operações de produto e soma nas equações acima) é o mesmo, tanto no produto de representações fundamentais/duais (lado esquerdo das equações) quanto na classificação em multipletos (lado direito): igual a 27 no primeiro caso e 9 no segundo.

<sup>37</sup>Ver Apêndice C, Subseção C.4.

### 5.3 A Difícil Aceitação dos Quarks

Apesar do sucesso do modelo em explicar as classes de hádrons conhecidas, não houve, por um bom tempo, consenso a respeito da verdadeira existência dos quarks. O próprio Gell-Mann escreveu em 1964 sobre a possibilidade de essas entidades serem realmente partículas físicas [79]:

*É divertido especular sobre como os quarks se comportariam se fossem partículas físicas de massa finita (em vez de entidades puramente matemáticas como elas seriam no limite de massa infinita).*

(A tradução é nossa.)

Alguns defendiam que essas entidades eram apenas ferramentas matemáticas, usando como argumento a ausência de sua observação direta. Tal observação aparentemente seria simples, pois bastaria encontrar partículas com carga elétrica fracionária (ver Tabela 1). Citando mais uma vez Gell-Mann [79]:

*Uma busca por quarks estáveis de carga  $-1/3$  ou  $+2/3$  ... nos aceleradores de maior energia ajudaria a nos assegurar da não existência de quarks reais.*

(A tradução é nossa.)

Podemos supor que Gell-Mann relutasse em defender diretamente a existência dos quarks. De fato, ainda em 1972, Gell-Mann preferia não apresentar os quarks como partículas necessariamente verdadeiras, tentando até conciliar a hipótese dos quarks com o modelo bootstrap (mencionado na Seção 3.1 acima) [88]:

*... então os quarks presumivelmente não podem ser partículas reais. Eu não disse em lugar algum até agora que os quarks devem ser partículas reais. Pode haver quarks reais, ...*

*... não há razão para uma distinção entre o modelo de quarks e o modelo bootstrap: eles podem ser apenas duas descrições diferentes do mesmo sistema, como a mecânica ondulatória e a mecânica matricial.*

(A tradução é nossa.)

A resistência em reconhecer os quarks como partículas verdadeiras pode, talvez, ser comparada à que se observou quando foram propostos os átomos. Por exemplo, ainda no início do século XX [89], químicos como Wilhelm Ostwald<sup>38</sup> e físicos como Ernst Mach achavam desnecessário usar o conceito de átomos para a descrição de

<sup>38</sup>Prêmio Nobel de química em 1909 [90].

processos químicos, ou referiam-se a átomos e moléculas como uma hipótese artificial, útil como modelo matemático para descrever certas experiências. Mach chegou a comparar os átomos a símbolos algébricos. Claramente, uma das principais objeções à teoria atômica era a impossibilidade de “ver” um átomo. Os resultados negativos dos experimentos para a procura de quarks livres produziram pontos de vista parecidos. Assim, nos anos sessenta e no começo dos anos setenta do século XX, muitos físicos importantes não acreditavam no modelo de quarks. Entre eles, Werner Heisenberg<sup>39</sup> considerava o problema da estrutura das partículas elementares como um problema de filosofia e não de física [1].

Com efeito, como evidenciado nas Referências [3] e [86], a questão da aceitação dos quarks ilustra muito bem a discussão sobre o aspecto filosófico das ideias científicas: elas são *descobertas* ou *invenções*? Esse conflito pode ser visto, por exemplo, nos títulos de dois importantes livros que tratam o assunto de forma histórica, “The Hunting of the Quark”, de Michael Roridan [12] e “Constructing Quarks”, de Andrew Pickering [14]. Gell-Mann recusava-se a debater o assunto, mas a dúvida sobre a realidade dos quarks — partículas que em princípio não podiam ser observadas isoladamente — agitava-se em sua mente, como podia ser notado por sua dificuldade em escolher as palavras ao tratar do tema em suas palestras e declarações. Após certo tempo ele, e os demais físicos da época, pararam de se preocupar com essa questão.

O próprio Richard Feynman,<sup>40</sup> orientador de doutorado de Zweig, não gostou inicialmente da ideia de quarks como constituintes fundamentais das partículas hadrônicas [86], achando que a supressão do decaimento da partícula  $\phi$ , explicada por Zweig, pudesse ser um erro experimental. Segundo Zweig, na época, Feynman preferia o modelo bootstrap e acreditava que a teoria correta para as partículas hadrônicas não permitiria resolver o problema de quais partículas são efetivamente elementares.<sup>41</sup> Porém, em maio de 1968, após conversar mais uma vez com Zweig sobre esse assunto, no refeitório do Instituto Caltech (nos EUA), Feynman decidiu olhar com mais atenção para a questão e, de fato, no ano seguinte ele apresentou o modelo de *pártons*, possíveis constituintes puntiformes dos hádrons, hoje interpretados como quarks e glúons. Esse modelo [93, 94, 95] permitiu explicar os resultados do processo chamado de *espalhamento inelástico profundo*, estudado no acelerador linear de Stanford (SLAC), nos EUA, em 1968 e consi-

<sup>39</sup>Prêmio Nobel de física em 1932 [91].

<sup>40</sup>Prêmio Nobel de física em 1965 [92], juntamente com Sin-Itiro Tomonaga e Julian Schwinger.

<sup>41</sup>Apesar disso, Feynman não rejeitava a ideia de quarks como parte da álgebra de correntes [86], introduzida por Gell-Mann. A diferença entre quarks *constituintes* (das partículas hadrônicas) e quarks *de correntes* é discutida em [88].

derado a primeira evidência experimental da existência dos quarks.<sup>42</sup> Foi somente em 1971, quando Zweig já fazia pesquisa em neurobiologia, que Feynman reconheceu o trabalho dele, declarando ao encontrá-lo: “Parabéns, Zweig! Você tinha razão.”<sup>43</sup>

Hoje há amplas evidências para a existência dos quarks, apesar dos resultados negativos da busca por quarks isolados, ou livres [97, 98]. Mas qual seria a explicação para a ausência de observação de um quark livre? Ela vem do que chamamos de *confinamento* dos quarks [1], uma condição “bizarra” que impede a existência de estados de quarks isolados. A propriedade de confinamento de quarks é geralmente relacionada à diferença de comportamento dessas partículas segundo a distância a que se encontram umas das outras. De fato, os experimentos mostram que a força entre dois quarks muito próximos é pequena, o que é chamado de *liberdade assintótica*, de forma que eles se comportam como partículas (quase) livres no limite de pequenas separações espaciais. Porém, quando tentamos afastar dois quarks, a força entre eles aumenta de tal modo que é impossível separá-los, por mais que eles sejam “puxados” para romper sua ligação. Usando uma analogia com um sistema familiar, é como se os quarks estivessem ligados por uma mola, ou corda. Na verdade, a um certo ponto, a “energia potencial” acumulada entre o par de quarks será grande o suficiente para a produção de um novo par quark-antiquark. Quando isso acontece, a ligação entre os quarks iniciais se rompe, e o hádron inicial dá lugar a dois novos hádrons, como ilustrado na Fig. 5 para o estado ligado de três quarks. Note que a ligação inicial foi quebrada, mas sem que qualquer dos quarks tenha se tornado livre, já que eles foram incorporados aos novos hádrons formados. Consequentemente, não é possível que um quark seja detetado sozinho, o que nos leva à proposta do confinamento dos quarks: por alguma razão, a força que liga dois quarks torna-se arbitrariamente grande ao se tentar separá-los, e não é possível isolá-los.

O entendimento dessa propriedade é um dos maiores desafios da física teórica de hádrons e, claramente, requer a completa compreensão da força entre eles, a força forte. Falaremos um pouco sobre esse assunto mais abaixo, na Seção 5.6. Na próxima subseção discutimos uma outra inconsistência do modelo inicial de quarks, que levou à introdução de um novo número quântico, relacionado à interação forte, e à formulação da cromo-

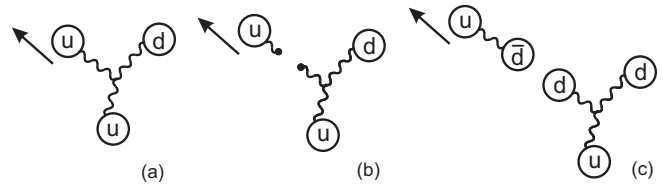


Figura 5: Os três quarks iniciais ( $uud$ ) constituem um próton. Em (a) tentamos separar um quark (up) dos demais. Em (b) a ligação parece se romper, porém imediatamente em (c) forma-se um par de quarks down e antidown com a energia vinda da ligação, de modo que acabamos observando um píon positivo e um nêutron, mas não um quark livre. Figura adaptada de [1].

dinâmica quântica, ou QCD.

## 5.4 Quarks São Coloridos!

Mencionamos anteriormente que há uma distinção crucial entre férmions, que possuem spin semi-inteiro e obedecem ao Princípio de Exclusão de Pauli, e bósons, que possuem spin inteiro e não obedecem a esse princípio. O princípio de Pauli, de modo simplista, diz que férmions iguais não podem coexistir no mesmo estado quântico. Podemos entender a importância desse princípio se notarmos que é devido a ele que o elétron —que é um férmion de spin  $1/2$ — pode ocupar um estado de energia que já contenha um outro elétron somente se os dois tiverem projeções opostas do spin. Dessa forma, os níveis de energia de um átomo, chamados de *orbitais* e indicados pelos números quânticos  $n, l$  e  $m$  (ver discussão sobre o átomo de hidrogênio no Apêndice C, Subseção C.3), podem conter apenas dois elétrons, um com projeção de spin  $+1/2$  e o outro com projeção  $-1/2$ . Note que os dois elétrons ocuparão, assim, o mesmo nível de energia, mas estarão em estados quânticos distintos, diferindo pelo número quântico associado à projeção do spin.<sup>44</sup> Esse resultado, consequência direta do princípio de Pauli, dá origem à elaborada estrutura de camadas dos elétrons nos átomos que formam os diversos elementos, determinando suas propriedades químicas.

Os quarks, assim como os elétrons, têm spin  $1/2$  (ver a legenda da Tabela 1), e portanto também devem satisfazer ao princípio de Pauli. Logo após a proposta do modelo dos quarks, vários físicos chamaram a atenção para o fato de que, nesse modelo, dois ou três quarks em um hádron teriam que ocupar o mesmo estado quântico. Em particular, tomava-se como exemplo a partícula  $\Delta^{++}$ , que apresenta spin  $3/2$  e é formada por três

<sup>42</sup>Em 1990 Jerome I. Friedman, Henry W. Kendall e Richard E. Taylor receberam o prêmio Nobel de física [96] pela realização desse experimento. Uma ótima referência sobre a montagem e condução do experimento, incluindo aspectos históricos da descoberta e da dificuldade de aceitação dos quarks, é o livro [12], do físico e historiador Michael Riordan.

<sup>43</sup>No original: “Congratulations Zweig! You got it right” [86].

<sup>44</sup>Como já vimos, para um dado spin  $s$  há  $2s + 1$  estados quânticos possíveis, i.e.  $2 \times 1/2 + 1 = 2$  estados para o elétron de spin  $s = 1/2$ , correspondendo às projeções  $\pm 1/2$  no eixo  $z$ .



quarks *up* (ver Figs. 3 e 4). Isso só é possível, no estado de momento angular  $l = 0$  [1], se os três quarks (idênticos) tiverem spins paralelos.<sup>45</sup> Isso violaria o princípio de Pauli, sendo os quarks férmions idênticos de spin  $1/2$ . De fato, o princípio de Pauli já não permitiria que houvesse dois férmions idênticos nessa situação, mas, aparentemente, no caso da partícula  $\Delta^{++}$ , temos três!

Uma possível solução para o problema foi apresentada por Moo-Young Han e Yoichiro Nambu,<sup>46</sup> que propuseram a existência de nove quarks [100], ao invés de três, sendo três quarks *up*, três quarks *down* e três quarks *estranhos*. Assim, os três quarks *up* da partícula  $\Delta^{++}$  seriam três partículas diferentes e poderiam portanto ocupar o mesmo estado quântico. Neste modelo, chamado pelos autores de “três tripletos”, os quarks possuíam carga elétrica  $Q$  e hipercarga  $Y$  inteiras e não fracionárias, o que estaria em desacordo com a Tabela 1. Porém, em média, os três quarks de cada tipo reproduziam os valores das cargas elétricas e das hipercargas fracionárias, necessárias para explicar as propriedades dos hádrons. Por exemplo [101], dois quarks *up* apresentavam carga elétrica  $+1$  enquanto o terceiro era neutro, fornecendo em média uma carga igual a  $2/3$ . Logo antes do trabalho de Han e Nambu, Oscar Wallace Greenberg [102] também tentou explicar a aparente violação do princípio de Pauli introduzindo a chamada *para-estatística*,<sup>47</sup> que permitia que um dado estado físico fosse ocupado por três férmions idênticos. Na Referência [104], foi demonstrada a equivalência parcial entre a solução apresentada por Greenberg e o modelo de Han e Nambu. De fato, todos os estados ligados obtidos usando para-quarks podem também ser construídos considerando o modelo de três tripletos (e vice-versa).

O modelo de três tripletos de Han e Nambu introduziu também uma outra ideia muito interessante [13]: a possibilidade de uma simetria  $SU(3)$  entre quarks do mesmo tipo pertencentes a tripletos diferentes [100]. Essa simetria implicaria na existência de oito campos *vetoriais* (i.e. campos de spin igual a 1), que estariam relacionados a uma nova interação, chamada por eles de *superforte*, que permitiria explicar a formação de hádrons e suas massas. Porém, essas ideias de Han e Nambu passaram quase completamente despercebidas em 1965 [13]. Somente em 1972, Gell-Mann e Harald Fritzsch [88, 101, 105] encontraram a solução definitiva ao problema da aparente violação do princípio de Pauli

<sup>45</sup>A mesma crítica pode ser feita a outras partículas dos multipletos descritos acima.

<sup>46</sup>Note que Nambu ganhou o prêmio Nobel de física em 2008 [99], pela descoberta de um outro importante fenômeno na física das partículas elementares: a *quebra espontânea de simetria*. O prêmio foi compartilhado com Makoto Kobayashi e Toshihide Maskawa.

<sup>47</sup>Ver a Seção 0.3.13 do livro [103] para mais detalhes sobre *para-férmions*.

na física hadrônica. Como Han e Nambu, eles consideraram nove quarks, i.e. os três quarks da Tabela 1 mas “equipados” com um novo número quântico (conservado), que poderia apresentar três diferentes valores para cada quark. Assim, no caso do  $\Delta^{++}$ , os três quarks *u* poderiam ter números quânticos idênticos para o spin, o número bariônico, a estranheza e a carga elétrica, mas diferentes para o novo número quântico, que foi chamado de *cor*. (A partícula  $\Omega^-$ , formada por três quarks *s*, poderia ser explicada de forma análoga.) Nos primeiros trabalhos, as cores consideradas por Gell-Mann e Fritzsch eram vermelho, branco e azul [88, 105]. Em seguida, em analogia com a teoria das cores de Newton, foram postuladas combinações de três quarks de cores (primárias) diferentes (e.g. vermelho, verde e azul) [101], para descrever os bárions, assim como combinações de um quark, com uma determinada cor, e de um anti-quark, com sua correspondente *anticor*, para descrição de mésons. Note que, nos dois casos, a partícula formada pelos quarks seria “branca”, sem carga de cor, i.e. um importante princípio associado às cargas de cor é que todos os mésons e bárions são “brancos”.

A hipótese do novo número quântico de cor permitiu explicar corretamente vários resultados experimentais da época [88, 101]. Entre eles vale ressaltar o cálculo da razão

$$R = \frac{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q} \rightarrow \text{hádrons})}{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+)} \quad (5)$$

i.e. a comparação da *seção de choque*  $\sigma$  para o processo (puramente leptônico)  $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$  — aniquilação de elétron e pósitron em múon e antimúon — com a seção de choque para o processo  $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q} \rightarrow \text{hádrons}$  — aniquilação de elétron e pósitron em quark e antiquark, com posterior formação de partículas hadrônicas. De fato, no segundo caso, o resultado, além de depender da carga elétrica dos pares de quark e antiquark produzidos, deve também ser proporcional ao número de pares  $q\bar{q}$  diferentes que podem ser gerados nas colisões. Logo, se cada quark (*up*, *down* e *estranho*) pode aparecer com três diferentes cores (e os correspondentes antiquarks com as três correspondentes anticolors),<sup>48</sup> fica claro que a razão  $R$  deve ser proporcional ao número de cores [101]. Efetivamente, esse fator (igual a 3), juntamente com os valores fracionários para as cargas elétricas dos quarks, permite explicar completamente o valor experimental de  $R$ .

## 5.5 Cromodinâmica Quântica (QCD)

Além da proposta da carga de cor, Gell-Mann e Fritzsch consideraram também na Referência [105] a possibili-

<sup>48</sup>Sendo que no instante inicial do processo o par  $e^- e^+$  não possui carga de cor, o par  $q\bar{q}$  também deve ter cor total nula, se a carga de cor for de fato conservada na natureza.

dade de incluir na teoria (em analogia com o trabalho de Han e Nambu) uma simetria  $SU(3)$  e oito campos vetoriais, chamados de glúons, que poderiam satisfazer às chamadas equações de Yang-Mills (ver nota de rodapé 9). Eles também discutiram a possibilidade de os glúons possuírem ou não carga de cor e evidenciaram que uma teoria de quarks, antiquarks e glúons poderia ser usada para fundamentar a teoria dos pártons de Feynman e James Daniel Bjorken (ver Seção 5.1 acima). No ano seguinte, Gell-Mann, Fritzsch e Heinrich Leutwyler [106] formalizaram a teoria que é hoje conhecida como cromodinâmica quântica (QCD). Trata-se de uma teoria quântica de campos de tipo Yang-Mills [107, 108], que descreve as partículas que interagem pela força forte, todas compostas por quarks, através da troca de glúons. Em particular, a *lagrangiana* da QCD é baseada na simetria  $SU(3)$  de cor e inclui oito *campos de gauge* de spin 1 — os glúons — correspondentes aos oito geradores<sup>49</sup> do grupo  $SU(3)$ . É importante notar que a simetria  $SU(3)$  da QCD se refere a rotações no espaço do número quântico cor, e é uma simetria *exata*. Por outro lado, a simetria  $SU(3)$  proposta por Ne’eman e Gell-Mann se refere a rotações no espaço dos sabores de quarks e era apenas aproximada.

Além disso, uma diferença crucial entre as duas simetrias é o fato de a simetria de cor ser uma simetria de gauge local, ou seja, uma simetria (exata) válida para cada ponto do espaço-tempo separadamente. Note que o fato de impor invariância por transformações dadas por elementos distintos de um grupo de simetria em cada ponto do espaço-tempo faz com que a simetria de gauge local seja um dos casos mais “extremos” de simetrias. Vejamos o que isso significa, para um exemplo simples de simetria de rotação. Tomemos um conjunto de relógios de ponteiro distribuídos em fila, representando a hora em várias cidades do mundo. Poderíamos dizer que o fuso horário é uma grandeza que possui simetria de rotação, pois se alterarmos todos os ponteiros pelo mesmo ângulo — isto é, se compararmos a leitura das horas dos relógios entre si em diferentes momentos do dia — a diferença de horário entre eles permanecerá a mesma. O mesmo não seria válido, é claro, se rodássemos cada ponteiro por um ângulo arbitrário. De fato, é difícil imaginar uma grandeza dependente dos ângulos dos ponteiros que permaneça invariante por rotações da hora em cada relógio independentemente! Mas a simetria de gauge é exatamente isso: podemos modificar os campos da teoria em cada ponto do espaço-tempo por uma “rotação” dada por um elemento do grupo  $SU(3)$  (no caso da simetria de cor da QCD) e os observáveis físicos não se alteram. Uma simetria extremamente restritiva, portanto. Tão restritiva, efetivamente, que o

<sup>49</sup>Em geral o grupo  $SU(N)$  possui  $N^2 - 1$  geradores (ver Apêndice B), fornecendo portanto oito geradores para  $N = 3$ .

simples fato de impormos que a lagrangiana possua simetria de gauge já define a teoria. Assim são as teorias de gauge.

Ressaltamos que a formulação em termos de teorias de gauge é a base do atual entendimento da descrição de três das quatro interações fundamentais da natureza. Como descrito acima, a simetria de gauge local é altamente restritiva, e de certa forma é notável que ela já estivesse contida “automaticamente” no eletromagnetismo, e explicitada na QED. Após o trabalho de Yang-Mills já citado acima (ver nota de rodapé 9), foram demonstradas propriedades muito importantes para as teorias com simetria de gauge local não-abeliana, especialmente a renormalizabilidade da teoria eletrofraca [109], que rendeu o Prêmio Nobel de 1999 aos físicos holandeses Gerardus ’t Hooft e Martinus J. G. Veltman [110, 111] ????. Deve porém ser mencionado aqui que o mesmo resultado foi obtido independentemente também por Juan José Giambiagi e Carlos Guido Bollini, da Argentina [112, 113]. (A respeito disso, ver o interessante texto [114].)

O grande sucesso da QCD foi a demonstração para essa teoria da propriedade de liberdade assintótica, que mencionamos acima na Seção 5, feita por David Gross, Frank Wilczek e David Politzer em 1973 (os três ganharam o prêmio Nobel de física em 2004 pela descoberta [115]). Vale lembrar que, na época, Wilczek era estudante de doutorado de Gross na Universidade de Princeton e o resultado obtido por eles, e independentemente por Politzer, considerava somente o cálculo em *teoria de perturbação* até a primeira ordem. Como relatado no livro [103], um outro estudante de doutorado da Universidade de Princeton, William Edward Caswell, completou no ano seguinte o mesmo cálculo, mas incluindo as correções de segunda ordem e verificando que a propriedade de liberdade assintótica não era comprometida pelos novos termos calculados. O trabalho de Caswell não teve, infelizmente, o mesmo sucesso dos artigos de Gross, Wilczek e Politzer e, alguns anos depois, ele abandonou o meio acadêmico. A vida de Caswell acabou tragicamente: ele era um dos passageiros do voo American Airlines 77, sequestrado nos ataques de 11 de setembro de 2001 e deliberadamente arremessado contra o Pentágono.

Com a grande evolução na detecção de partículas nos anos seguintes, evidenciaram-se vários novos hádrons com diferentes propriedades, criando-se a necessidade de acrescentar mais três sabores de quarks à teoria: *charm*, *bottom* e *top*. Em particular a descoberta do quark *charm* despertou muita atenção [1]. Em 1974 a partícula  $J/\psi$ , um méson constituído de um quark *charm* e um antiquark *charm*, foi descoberta independentemente por dois grupos de pesquisa, um no Stanford Linear Accelerator Center, liderado por Burton Richter, e outro no



Brookhaven National Laboratory, liderado por Samuel Chao Chung Ting. (Os dois ganharam o prêmio Nobel da física de 1976 [116].) O anúncio da descoberta foi feito (independentemente) pelos dois grupos em 11 de novembro do mesmo ano. O grupo de Richter chamou a partícula de  $\psi$ , enquanto o grupo de Ting escolheu  $J$ . Para evitar ter que escolher um dos dois nomes, a comunidade de física de partículas optou por juntá-los. Essa descoberta, conhecida como “Revolução de novembro”, deu um grande impulso aos estudos experimentais em física de partículas [117].

Atualmente, no Modelo Padrão das partículas elementares [1], toda a matéria conhecida é explicada em termos dos seis sabores de quarks, dos seis léptons e de suas respectivas antipartículas. A simetria  $SU(3)$  de sabor introduzida por Ne’eman e Gell-Mann permanece como uma simetria aproximada da QCD para os hádrons leves (compostos pelos três quarks de menor massa). As transições entre esses sabores ocorrem pela interação fraca: em particular, os quarks  $d$  e  $s$  podem decair no quark  $u$ , através de um mecanismo explicado em 1963 por Nicola Cabibbo [118]. Em seguida, a teoria de Cabibbo incluiu também o quark charm, levando à definição da chamada matriz  $(2 \times 2)$  de Cabibbo. Enfim, essa matriz foi generalizada para a matriz  $(3 \times 3)$  CKM por Makoto Kobayashi e Toshihide Maskawa [119], incluindo todos os seis sabores de quarks e permitindo também a quebra da chamada simetria CP no *Modelo Padrão* das interações fundamentais. Foi esse trabalho que, como já dito acima (ver nota de rodapé 46), lhes rendeu o prêmio Nobel de física de 2008 [99], juntamente com Yoichiro Nambu.

A aceitação da teoria da QCD como teoria das interações fortes também não foi imediata. De fato, vejamos a seguinte declaração, publicada em 1990 [120]

*Deve-se enfatizar que a crença na teoria da QCD se baseia amplamente em argumentos estéticos. É uma teoria elegante que parece conter as características gerais necessárias para explicar as propriedades observadas da matéria hadrônica. No entanto, o cálculo de suas implicações é tão complicado que mesmo algumas de suas características qualitativas mais importantes, como o confinamento de quarks, ainda não foram estabelecidas matematicamente.*

(A tradução é nossa.)

## 5.6 QCD e Confinamento dos Quarks

A razão para o pessimismo expresso acima em relação à QCD é que, se por um lado era possível descrever os experimentos no limite de altas energias, graças à propriedade de liberdade assintótica, a teoria mostrava-se

“hostil” aos cálculos necessários para descrição do regime de energias baixas. Era extremamente frustrante possuir uma teoria quântica de campos com simetria local de gauge (como a QED) e, pela primeira vez, não ser capaz de verificar suas previsões, pela impossibilidade de calculá-las a partir da teoria! Por décadas, parecia que a QCD não seria útil para desvendar as propriedades da matéria hadrônica, que se manifestam no regime de baixas energias. De fato, o progresso na área foi sendo obtido principalmente por modelos inspirados pela física nuclear teórica, e aproximações da teoria, combinados a alguns resultados experimentais, usados para melhor ajuste dos modelos.

Apesar disso, uma abordagem inovadora para estudo da QCD a energias mais baixas a partir de primeiros princípios (i.e. a partir da lagrangiana da QCD, sem aproximações) tinha sido introduzida já em 1974, por Kenneth Geddes Wilson [121]. A chamada *formulação de rede* introduzida por ele permite, em princípio, que sejam tratadas todas as escalas de energia simultaneamente, ao contrário do tratamento perturbativo usual em teorias quânticas de campos. A base dessa abordagem é redefinir a teoria (i.e. a sua lagrangiana e as grandezas físicas de interesse) em um espaço-tempo discretizado —a rede— e, em seguida, buscando fazer a conexão com o espaço-tempo real, físico, que claramente é contínuo, não discretizado. O trabalho de Wilson explicava como “demonstrar” a propriedade de confinamento a partir da formulação de rede, mas infelizmente ficou claro que a chamada *expansão de acoplamento forte* [122], necessária para estender os resultados ao limite físico do espaço contínuo, não apresentava um bom comportamento, inviabilizando cálculos realísticos. Por outro lado, a nova formulação prestava-se ao estudo por técnicas gerais da Mecânica Estatística, área da física que se ocupa em obter as propriedades dos sistemas de muitos corpos interagentes, como os gases, a partir de suas leis físicas individuais. De fato, a mecânica estatística pode ser vista como a versão microscópica da Termodinâmica. Uma dessas técnicas é a simulação computacional, em que são implementadas as leis microscópicas e é simulada uma evolução temporal do sistema, de acordo com as distribuições estatísticas exatas da teoria, fornecendo resultados numéricos para as grandezas físicas de interesse. O trabalho computacional para consideração da QCD é naturalmente muito maior do que para os sistemas de mecânica estatística usuais, devido à maior complexidade da interação. Mesmo assim, a possibilidade de utilização das simulações computacionais foi testada a partir do início dos anos 1980, inicialmente por Michael Creutz [123, 124], pesquisador do Laboratório de Brookhaven, nos EUA.

Hoje em dia há muitos resultados extremamente precisos de simulações de QCD na rede para propriedades

hadrônicas [87], em particular o espectro de massas dos hádrons mais leves, incluindo até a diferença de massa entre o próton e o nêutron. Pode-se afirmar que a obtenção desses resultados é uma prova indireta do confinamento, já que a quase totalidade da massa dos núcleons vem da QCD, ou seja da interação entre os quarks (e glúons!) que constituem o próton e o nêutron. Trata-se de um avanço notável, obtido tanto graças à rápida evolução do poder computacional nas décadas seguintes quanto ao desenvolvimento de técnicas e ideias de melhoria da formulação, por parte da comunidade de pesquisa dessa área. Resta ainda, porém, o desafio de uma demonstração matemática da propriedade de confinamento de quarks e glúons, i.e. de objetos com carga de cor. Embora as simulações de QCD na rede não possam ser usadas para produzir tal demonstração diretamente, espera-se que elas possam contribuir para um melhor entendimento das propriedades dos campos de gauge da QCD e de sua interação, ajudando talvez a melhorar a percepção de quais aspectos da teoria sejam relevantes para induzir o mecanismo do confinamento.

Em particular, o “Clay Mathematics Institute” definiu, em 2000, sete problemas matemáticos como “Problemas do Milênio”, oferecendo um milhão de dólares para a solução de cada um deles. Entre esses problemas está a existência de *intervalo de massa* (*mass gap*) para as chamadas teorias de Yang-Mills [125], o que é equivalente ao problema de confinamento da carga de cor na QCD.

## 6 Conclusão

Como vimos acima, a história dos quarks envolveu períodos de grande incerteza, e as conquistas foram devidas à persistência de pesquisadores excepcionais como Ne’eman. Pode-se dizer que a iniciativa de Ne’eman foi surpreendente, considerando como se apresentava caótica a situação da física de partículas na época do seu doutorado em Londres, e dado que ele estava apenas iniciando seus estudos de física de partículas, como descrito nas Seções 2 e 2.1 acima.

Apesar de não ter ganhado o prêmio Nobel, ele recebeu diversas premiações nacionais e internacionais, como o Prêmio Israel (1969), a Medalha Einstein (1970), a Medalha Wigner (1982) e o prêmio EMET (2003). Vale também lembrar que, além das contribuições descritas na Introdução para o estabelecimento de instituições científicas em Israel, Ne’eman fundou o “Center for Particles and Fields” da Universidade do Texas (Austin) em 1968. Ao mesmo tempo, Ne’eman teve um papel importante na divulgação da física, tendo deixado o ótimo texto introdutório sobre física de partículas, “The Particle Hunters”, de 1986, escrito em conjunto com Yoram

Kirsh [1]. De fato, o livro foi considerado o melhor guia de física de partículas da época pelo “Times Literary Supplement” [22].

Na Referência [4], Shlomo Sternberg (matemático britânico) conta-nos que conheceu Ne’eman no ano de 1962, atendendo ao pedido de que apresentasse algumas aulas sobre Topologia dos Grupos de Lie para o grupo de pesquisa de Ne’eman. Inicialmente, Sternberg não compreendeu qual o interesse do grupo de físicos nessa área da matemática, mas posteriormente conheceu a utilização do grupo  $SU(3)$  para descrição dos hádrons. Essas poucas aulas acabaram originando 43 anos de colaboração. O último trabalho em conjunto foi publicado no Physics Reports em 2005.

*It is hard to explain how one person could successfully perform so many tasks. Obviously he had an enormous capacity for hard work and was extremely well organized. Two other traits that I could observe first hand were: He always had his mind on the big picture: he did get involved in the details but was always able to relate them to the overall goal. A second trait was his personal charm combined with an ability to delegate authority. Once he trusted someone’s ability to do a job, he inspired that person to charge ahead while keeping himself informed of the progress. This is a rare trait of true leadership.*

## 7 Agradecimentos

Agradecemos a L.M. Cucchieri, C.C.B. dos Santos e T.M. Schlittler por sugestões e comentários e a A. Manes, editor da revista eletrônica “PhysicaPlus”, pelo uso da fotografia na Fig. 1. T.B.M. agradece ao CNPq pelo apoio financeiro (a elaboração de uma versão preliminar deste manuscrito fez parte de seu projeto de Iniciação Científica). A.C. e T.M. agradecem à Fapesp e ao CNPq por apoio financeiro parcial.

## A Mecânica Quântica

Neste apêndice apresentaremos alguns conceitos úteis em mecânica quântica, fazendo referência a livros didáticos da área quando necessário. Para estudantes que ainda não tenham cursado disciplinas de física quântica, indica-se a Referência [129] para um primeiro contato com o tema, em nível de graduação.

Como já mencionado na Seção 3, na mecânica quântica um sistema físico é descrito por uma função de estado, a função de onda  $\Psi$ , solução da *Equação de Schrödinger* para o sistema [129]. Ao contrário do que ocorre

na mecânica clássica, mesmo tendo a expressão —i.e. a função de onda  $\Psi$ — para o estado físico do sistema, será geralmente impossível saber com certeza o valor de uma grandeza física (e.g. a energia) antes de medi-la. De fato, saberemos apenas qual a *probabilidade* de obter na medida cada um dos valores possíveis para a grandeza desejada. Além disso, as grandezas físicas —também chamadas de *observáveis*— são representadas por operadores (i.e. matrizes) Os valores possíveis, ou *permitted*, para um observável quântico são os autovalores da matriz que o representa [129]. Em particular, teremos certeza de obter um autovalor específico somente se o sistema estiver em um estado especial, o *autoestado* relativo a esse autovalor, dado pelo correspondente *autovetor* da matriz. É importante ressaltar que, na base dada por seus autovetores, uma matriz toma a forma diagonal, com elementos dados pelos autovalores. Neste caso a matriz é dita diagonalizada.

Vejamos os conceitos acima de forma mais detalhada. Para tanto, mencionamos que é muito conveniente a chamada *notação de Dirac*<sup>50</sup> para os estados quânticos [19], definida da seguinte forma. Associamos o espaço de funções de estado  $\Psi(x)$  —onde  $x$  representa a coordenada espacial, que tomamos unidimensional, por simplicidade— a um espaço vetorial de “kets”. O ket  $|\Psi\rangle$  é o vetor cujas componentes (na chamada representação das coordenadas  $x$ ) são  $\Psi(x)$ . Claramente, trata-se de um vetor com infinitas coordenadas. Por analogia, definimos os “bras” no espaço de *funcionais* agindo nos kets. A ação do funcional definido pelo bra  $\langle\Phi|$  sobre o ket  $|\Psi\rangle$  será o *produto escalar* entre as funções  $\Phi(x)$  e  $\Psi(x)$ , dado pela integral

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \int \Phi(x)^* \Psi(x) dx. \quad (6)$$

Notemos agora que, da mesma forma que  $|\Psi\rangle$  pode ser visto como um vetor, temos que  $\langle\Phi|$  corresponde em geral ao transposto conjugado do vetor definido pelo ket  $\Phi$ . Desta forma, as funções de onda têm uma interpretação geométrica natural, já que a expressão acima corresponde ao produto escalar “usual” dos vetores  $\langle\Phi|$  e  $|\Psi\rangle$ , definido como soma dos produtos de suas componentes, que se torna uma integral para componentes dadas por  $x$ . É natural, agora, que um operador dado pela matriz  $A$  aja sobre um vetor de estado  $\Psi(x)$ , o que é denotado como  $A|\Psi\rangle$ .

O conceito de diagonalização de operadores (matrizes) em termos de seus autovetores é de suma importância e pode ser ilustrado de forma bastante simples. Essencialmente, enquanto a aplicação de uma matriz a um vetor genérico resulta em um vetor ao longo de uma nova direção, a ação sobre seus autovetores é simplesmente a

multiplicação pelo autovalor correspondente, sem alterar a direção do vetor. Ou seja, autovetores são vetores especiais para os quais a ação da matriz (que representa o operador correspondente) é a multiplicação por um número, o seu autovalor. Na notação de Dirac, temos, então para um autovetor de  $A$  com autovalor  $a_n$ , que indicamos como  $|u_n\rangle$ , simplesmente,

$$A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle. \quad (7)$$

A probabilidade de uma medida do observável associado ao operador  $A$  fornecer o valor  $a_n$  é dada pelo módulo quadrado da projeção do estado  $\Psi$  sobre o autoestado correspondente ao autovalor  $a_n$ . Ademais, após ser medido um dado autovalor  $a_n$ , ocorre o *colapso* da função de onda no sub-espaço correspondente a esse autovalor. Isso significa que, se o operador  $A$  corresponder a uma grandeza conservada pelo sistema, medidas posteriores de  $A$  darão sempre o valor  $a_n$ . Para saber se uma grandeza é conservada, basta considerar o *comutador*, definido para dois operadores  $A$  e  $B$  como

$$[A, B] \equiv AB - BA, \quad (8)$$

do operador a ela associado com o operador *hamiltoniano*  $H$ , que define a evolução temporal do sistema, de acordo com a equação de Schrödinger. Se o operador  $A$  comutar (i.e. tiver comutador nulo) com  $H$ , a grandeza correspondente será conservada, ou seja permanecerá constante após uma medida.

Além disso, claramente, para que o operador corresponda a uma grandeza física, devemos exigir que seus autovalores sejam números reais. Isso é garantido quando os observáveis são representadas por operadores (i.e. matrizes) hermitianos. Relembramos que as matrizes hermitianas são o equivalente de matrizes simétricas, i.e. com linhas iguais às colunas, para o caso (mais geral) de elementos de matriz complexos. De fato, elas satisfazem a relação  $M = M^\dagger$ , onde a operação  $\dagger$  é obtida tomando-se o complexo conjugado da transposta da matriz. Então, para uma matriz hermitiana temos  $M_{ij} = M_{ji}^*$ , onde  $*$  indica o complexo conjugado. Assim, quando uma matriz hermitiana toma a forma diagonal, os seus elementos  $M_{ii}$ —que correspondem aos seus autovalores  $\lambda_i$ — devem satisfazer a relação  $M_{ii} = M_{ii}^*$ . Logo, seus *autovalores* são reais!

Generalizando a condição para conservação de observáveis mencionada acima, podemos dizer que, na mecânica quântica, do ponto de vista matemático, a invariância de um sistema físico em relação a uma certa simetria exige [18] que a hamiltoniana  $H$  do sistema comute com todos os elementos  $U$  do grupo correspondente a essa simetria, isto é, devemos ter

$$HU = UH \quad (9)$$

<sup>50</sup>Introduzida em 1939 por P.A.M. Dirac [130].

ou, equivalentemente,  $H = UHU^{-1}$ , onde  $U^{-1}$  é o elemento inverso de  $U$ . Efetivamente, se a função de onda  $\Psi$  é solução da equação de Schrödinger para a hamiltoniana  $H$ , a relação acima implica que a função de onda transformada  $U\Psi$  também será solução da mesma equação de Schrödinger.

Por exemplo, na notação de Dirac, se  $|\Psi\rangle$  é um autoestado de energia  $E$ , i.e.  $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ , podemos demonstrar que o estado quântico “rodado”  $R|\Psi\rangle$  do sistema, onde  $R$  está associado às rotações espaciais, terá a mesma energia que o estado original  $|\Psi\rangle$ . De fato, temos que

$$H(R|\Psi\rangle) = RH|\Psi\rangle = RE|\Psi\rangle = E(R|\Psi\rangle), \quad (10)$$

ou seja,  $(R|\Psi\rangle)$  é também autovetor de  $H$  com autovalor  $E$ . Como dito acima, note que os operadores considerados, e.g.  $H, U, R$ , estão associados a matrizes agindo no espaço de funções (vetores) de onda  $|\Psi\rangle$ .

## B Grupos e Álgebras de Lie

Neste apêndice apresentamos em maior detalhe algumas das propriedades dos grupos de Lie e das álgebras de Lie, que foram introduzidos na Seção 3 acima para descrever as transformações de simetria contínuas. Em particular, ressaltamos que os elementos de um grupo de Lie são funções analíticas de  $g$  parâmetros  $\theta_k$ , como os três *ângulos de Euler* no caso das rotações tridimensionais. Assim, indicamos os elementos de um grupo de Lie com  $U(\theta_1, \dots, \theta_g)$  e usualmente essa parametrização é escolhida de forma tal que  $U(0, \dots, 0) = \mathbb{1}$ , onde  $\mathbb{1}$  é a matriz identidade. Logo, no limite de pequenos parâmetros  $\delta\theta_k$  temos<sup>51</sup>

$$U(\delta\theta_1, \dots, \delta\theta_g) \approx \mathbb{1} + i \sum_{k=1}^g \delta\theta_k T_k, \quad (11)$$

onde as  $g$  matrizes  $T_k$ , chamadas de *geradores* do grupo de Lie, são objetos *linearmente independentes*, ou seja, não podem ser escritos como *combinações lineares*<sup>52</sup> uns dos outros. Por consequência, usando transformações infinitesimais  $U(\delta\theta_1, \dots, \delta\theta_g)$  na Eq. (9), devido à arbitrariedade dos parâmetros  $\delta\theta_k$ , obtemos que a invariância de um sistema físico em relação a um grupo de Lie requer que a hamiltoniana  $H$  comute com todos os geradores  $T_k$  do grupo, i.e.

$$HT_k = T_k H. \quad (12)$$

<sup>51</sup>A fatorização explícita da unidade imaginária  $i$  é uma escolha conveniente, como será mostrado mais abaixo.

<sup>52</sup>Isto é, somas que “misturam” objetos de um conjunto, por exemplo com coeficientes reais e fracionários, como exemplificado logo a seguir.

As matrizes

$$T = \sum_{k=1}^g c_k T_k, \quad (13)$$

obtidas como combinação linear dos geradores  $T_k$  de um grupo de Lie  $G$ , constituem a álgebra de Lie associada ao grupo  $G$ . A propriedade fundamental dessas álgebras é que elas são *fechadas*<sup>53</sup> sob a operação de comutação, definida acima na Eq. (8). Em particular, os geradores do grupo satisfazem às relações

$$[T_i, T_j] = T_i T_j - T_j T_i = \sum_{k=1}^g f_{ijk} T_k, \quad (14)$$

onde  $i, j = 1, \dots, g$ . As constantes  $f_{ijk}$  são chamadas de constantes de estrutura do grupo de Lie. No caso do grupo  $SO(3)$  das rotações tridimensionais, os três geradores  $L_k$  podem ser escolhidos como matrizes  $3 \times 3$  (linearmente independentes) hermitianas que satisfazem às regras de comutação

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} L_k. \quad (15)$$

Aqui,  $\hbar$  é (de novo, ver Seção 3.2) a constante de Planck racionalizada e  $\epsilon_{ijk}$  é o símbolo de Levi-Civita, i.e.

- $\epsilon_{123} = 1$ ;
- $\epsilon_{ijk}$  é antissimétrico (tem seu sinal invertido) pela troca de dois índices. Ou seja,  $\epsilon_{213} = -1$ ,  $\epsilon_{231} = 1$  e assim por diante.

Mais detalhes sobre os grupos de Lie, ilustrados pelo exemplo das rotações em mecânica quântica [i.e. o grupo  $SO(3)$ ] e pelo caso de *momento angular de spin* [i.e. o grupo  $SU(2)$ ], serão apresentados nas Subseções C.1 e C.2 abaixo.

No caso do grupo  $SU(N)$  a álgebra é dada, na representação fundamental, por matrizes hermitianas  $N \times N$  com *traço* zero. Uma matriz hermitiana  $M$  pode sempre ser escrita como  $M = A + iB$ , onde  $A$  é uma matriz real e simétrica e  $B$  é real e antissimétrica. Sendo que  $A = A^T$ , onde  $T$  indica a transposta da matriz, temos que  $A$  possui  $N$  elementos não nulos na diagonal e  $N(N-1)/2$  elementos distintos fora da diagonal (por exemplo, os elementos acima da diagonal). Ao mesmo tempo, sendo que  $B^T = -B$ , temos que os elementos na diagonal de  $B$  são nulos e portanto essa matriz possui somente  $N(N-1)/2$  elementos distintos. No total isto daria  $N^2$  elementos reais independentes para a matriz  $M$ . Notemos, porém, que o traço de  $M$  deve ser zero, o que implica a imposição de uma condição adicional.

<sup>53</sup>Ou seja, o comutador de dois elementos da álgebra é também um elemento da álgebra, e pode ser escrito na forma (13).

Assim, dos  $N$  elementos na diagonal, somente  $N - 1$  são independentes. Logo, no total temos  $N^2 - 1$  elementos reais e independentes, e precisamos de  $g = N^2 - 1$  geradores  $T_k$  na equação (13).

Vale ressaltar que, se  $T_k$  são os geradores de um grupo de Lie, então  $\tilde{T}_k \equiv -T_k^T$  também são geradores desse grupo. De fato, é fácil verificar que se os geradores  $T_k$  satisfazem às regras de comutação (14) com certas constantes de estrutura  $f_{ijk}$ , então os geradores  $\tilde{T}_k$  também satisfazem às mesmas regras

$$\begin{aligned} [\tilde{T}_i, \tilde{T}_j] &= T_i^T T_j^T - T_j^T T_i^T = -[T_i, T_j]^T \\ &= -\sum_{k=1}^g f_{ijk} T_k^T = \sum_{k=1}^g f_{ijk} \tilde{T}_k. \end{aligned} \quad (16)$$

A representação do grupo de Lie em termos dos geradores  $\tilde{T}_k$  é chamada de *representação dual* da representação caracterizada pelos geradores  $T_k$  [56].

A relação fundamental entre um grupo de Lie e a álgebra correspondente é o *mapa exponencial*, que permite escrever um elemento do grupo  $U(\theta_1, \dots, \theta_g)$  como<sup>54</sup>

$$U(\theta_1, \dots, \theta_g) = \exp\left(i \sum_{k=1}^g \theta_k T_k\right). \quad (17)$$

Logo, como a função  $f(x) = e^x$  pode ser razoavelmente bem aproximada pela função  $1+x$  quando  $|x| \ll 1$ , também a Eq. (11) pode ser obtida através de uma aproximação linear do mapa exponencial, no limite de parâmetros  $\theta_k$  pequenos. Ao mesmo tempo, o mapa exponencial implica que, se os parâmetros  $\theta_k$  forem números reais<sup>55</sup> e se as matrizes  $U(\theta_1, \dots, \theta_g)$  forem *unitárias* (i.e. se for satisfeita a condição<sup>56</sup>  $U^{-1} = U^\dagger$ ), então, notando que  $U^{-1} = \exp(-i \sum_{k=1}^g \theta_k T_k)$  e  $U^\dagger = \exp(-i \sum_{k=1}^g \theta_k T_k^\dagger)$ , temos que os geradores  $T_k$  são *hermitianos*, i.e.  $T_k = T_k^\dagger$ .

Enfim, vamos rever em maior detalhe a definição de *posto*<sup>57</sup>  $r$  de um grupo de Lie, introduzida na Seção 3.2. Para isso vamos definir  $r$  como o número de geradores do grupo que comutam entre si, i.e. tais que<sup>58</sup>  $T_i T_j = T_j T_i$ . No caso de uma representação matricial, isso implica que as matrizes correspondentes a

<sup>54</sup>A exponencial de uma matriz  $M$  é definida através da série  $\exp(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} M^n/n!$ .

<sup>55</sup>Neste caso a álgebra de Lie é dita *real*.

<sup>56</sup>Relembramos que a operação  $\dagger$  é obtida tomando-se o complexo conjugado da transposta da matriz.

<sup>57</sup>Ou *rank*, em inglês.

<sup>58</sup>Note que esta propriedade não depende da representação considerada. Também, como vimos acima, é claro que os geradores  $T_k$  não comutam em geral entre si. De fato, para que os geradores  $T_i$  e  $T_j$  comutem é necessário que as respectivas constantes  $f_{ijk}$  ( $k = 1, \dots, g$ ) sejam nulas [ver Eq. (16)]. Quando todos os geradores não comutam entre si, o posto  $r$  é igual a 1.

esses geradores podem ser *diagonalizadas* simultaneamente [131]. Assim sendo, podemos tomar os vetores da *base* do espaço vetorial  $V$ , no qual as matrizes do grupo agem, como autovetores para todos esses geradores especiais. Para cada um dos geradores, tais autovetores podem ser classificados por seus correspondentes autovalores. Além disso, pode-se demonstrar [18] que, para um grupo de posto  $r$ , há  $r$  operadores *invariantes* (ou *de Casimir*)  $C_i$ , i.e.  $r$  operadores linearmente independentes que comutam com todos os geradores. (Como exemplo de operador de Casimir, ver os operadores  $\mathbf{L}^2$  e  $\mathbf{S}^2$  nas Subseções C.1 e C.4 abaixo.) Conseqüentemente, os operadores  $C_i$  (que são escritos a partir dos geradores do grupo  $T_k$ ) também comutam entre si.

Assim sendo, se a hamiltoniana  $H$  do sistema é invariante sob as transformações de um dado grupo (de Lie) de simetria, i.e. se  $H$  comuta com os geradores  $T_k$  desse grupo [ver Eq. (12) acima], então  $H$  comuta também com os operadores de Casimir  $C_i$  do grupo. Ao mesmo tempo, considerando uma representação unitária do grupo, é possível [18] construir os operadores (invariantes) de Casimir  $C_i$  de forma que eles sejam hermitianos. (Ver acima, no Apêndice A, uma breve discussão sobre a importância dos operadores hermitianos em mecânica quântica, e abaixo, no final do Apêndice C, comentários sobre as representações unitárias para os grupos de Lie compactos.) Podemos então diagonalizar simultaneamente  $H$  e os operadores  $C_i$  e, portanto, cada estado do sistema fica caracterizado por seus autovalores  $c_i$  em relação aos operadores de Casimir do grupo. Além disso, dado que os operadores de Casimir comutam com todos os geradores, temos que os autovalores  $\{c_i\}$  não são afetados pelas transformações de simetria do sistema físico, i.e. são números quânticos conservados. Fica então evidente que o posto  $r$  do grupo de simetria é igual ao número de grandezas conservadas — i.e. de números quânticos conservados — para o sistema físico, em relação à transformação associada ao grupo de simetria.

## C Teoria de Representações

Apresentamos a seguir uma breve introdução à teoria de representações, que de certa forma faz a “ponte” entre a teoria de grupos e a física, permitindo que as transformações associadas a um grupo simetria sejam tratadas de maneira concreta. Após introduzir o conceito de representações, faremos aplicações a casos físicos de interesse. Em particular, vamos considerar o exemplo das rotações (tridimensionais) em mecânica quântica, dadas como representações do grupo  $SO(3)$  associado ao momento angular. A descrição do spin do elétron em termos de representações do grupo  $SU(2)$  segue por

analogia. Utilizando as regras para adição de momentos angulares, vamos demonstrar a obtenção de representações (de singlete e tripleto, ver Subseção C.4) para a simetria  $SU(2)$  de isospin, como mencionado na Subseção 3.1. Ao mesmo tempo, veremos como a análise de teoria de grupos auxilia na compreensão de problemas de mecânica quântica, além de proporcionar uma metodologia para obter as representações de um dado grupo de simetria.

Chama-se de *representação* a uma maneira concreta de exprimir um grupo,<sup>59</sup> como a representação em termos de matrizes ortogonais para o grupo das rotações [132]. Assim, uma representação associa a cada elemento do grupo um operador linear inversível, que podemos imaginar como uma matriz quadrada  $N \times N$  inversível, i.e. uma matriz  $M$  para a qual existe a matriz inversa  $M^{-1}$ , satisfazendo

$$M M^{-1} = \mathbb{1}, \quad (18)$$

onde  $\mathbb{1}$  é a matriz identidade. Essas matrizes agem em um *espaço vetorial*  $V$ , cuja dimensão  $N$  é chamada de *grau* (ou *dimensão*) da representação.

É importante não confundir o grau de uma representação com a dimensão do respectivo grupo. Ressaltamos que todos os grupos considerados aqui são de dimensão finita. Em particular, no caso dos grupos de Lie, descritos acima na Seção 3 e detalhados no Apêndice B, a dimensão do grupo coincide com o número  $g$  de seus geradores, i.e. o número de elementos da *base* da álgebra de Lie correspondente. Para o grupo  $SU(2)$ , por exemplo, a dimensão do grupo é 3, embora seja geralmente utilizada a representação de grau 2 dada pelas matrizes complexas  $2 \times 2$ , *unitárias* e com determinante igual a 1. As matrizes unitárias são o equivalente das matrizes ortogonais, descritas acima na Seção 3, para o caso mais geral em que os elementos de matriz podem ser números complexos. (Ver mais detalhes no Apêndice B.) Nesse caso, podemos escolher como geradores as três *matrizes de Pauli* (ver Subseção C.4). Mais genericamente, para grupos  $SU(N)$ , a dimensão do grupo é  $g = N^2 - 1$ , e a representação habitual é dada por matrizes  $N \times N$ , a chamada *representação fundamental*.<sup>60</sup> De grande relevância na física é também a chamada *representação adjunta* do grupo  $SU(N)$ , dada por matrizes  $g \times g$ , i.e. trata-se de uma representação de grau igual à dimensão do grupo.

Como explicado na Subseção 3.1, um multipletto [18] representa um conjunto de estados *degenerados* em rela-

ção a um certo grupo de simetria. Dito de outra forma, o grupo de simetria transforma os estados do multipletto entre si. Logo, na linguagem da mecânica quântica, um multipletto é um subespaço invariante do *espaço de Hilbert* do sistema [18, 52]. Usando a definição de operadores de Casimir  $C_i$ , apresentada acima, fica também evidente que cada multipletto de estados é caracterizado, de forma unívoca,<sup>61</sup> pelo conjunto de autovalores  $\{c_i\}$ , sendo o número de elementos do multipletto relacionado à degenerescência desses autovalores. Note, porém, que o termo multipletto é usado em geral somente para o caso de um subespaço invariante e *irreduzível*, i.e. que não possa também ser dividido em subespaços invariantes em relação ao mesmo grupo de simetria. Claramente, se um multipletto é um subespaço vetorial de dimensão  $N$ , precisamos de uma representação de grau  $N$  para caracterizar a ação do grupo sobre ele. Além disso, sendo que o multipletto é um subespaço irreduzível, temos que a representação do grupo de simetria também deve ser irreduzível. Assim, a classificação das partículas em multiplettos requer a consideração de representações irreduzíveis do grupo de simetria que caracteriza a teoria.

Cabe destacar que a representação fundamental (ou representação padrão), definida acima, é sempre irreduzível. Para os grupos de Lie considerados nesse trabalho, i.e.  $SO(3)$ ,  $SU(N)$  e  $G(2)$ , a representação adjunta também é irreduzível. Para esses grupos vale ainda um outro resultado importante [133]: todas as representações irreduzíveis (de grau finito) podem ser construídas a partir de *produtos tensoriais* das representações fundamentais (ver nota de rodapé 60). Como exemplo, ilustramos na Subseção C.4 a obtenção das representações *singleto* e *tripleto* a partir do *produto direto* de cópias da representação definidora do grupo  $SU(2)$  [134], que é a única representação fundamental desse grupo. No caso mais geral do grupo  $SU(N)$ , há  $N - 1$  representações fundamentais distintas [80]. Em particular, para o grupo  $SU(3)$  elas são a representação definidora e a representação *dual* (ver Subseção B). Na Seção 5.1 usamos produtos dessas duas representações fundamentais do grupo  $SU(3)$  para obter as possíveis representações para mésons e bárions.

Por fim, notemos que os grupos  $SO(3)$ ,  $SU(N)$  e  $G(2)$  são também grupos de Lie *compactos*, i.e. os parâmetros  $\theta_k$  que aparecem na *mapa exponencial*<sup>62</sup> do grupo assumem valores em *espaços compactos*.<sup>63</sup> Nesse caso, pode-se demonstrar [133] que uma representação de grau finito é sempre equivalente a uma *representação unitária*, ou

<sup>59</sup>Relembramos que a definição de grupo foi dada na Seção 3.

<sup>60</sup>Notemos que a terminologia usada na física difere daquela usada na matemática, para a qual essa representação é chamada de *definidora* (*defining*) ou *padrão* (*standard*). De acordo com a nomenclatura matemática, além da representação definidora pode haver outras representações (*irreduzíveis*) definidas como fundamentais.

<sup>61</sup>Relembramos que os autovalores  $c_i$  são invariantes sob transformações do grupo de simetria.

<sup>62</sup>Ver Apêndice B.

<sup>63</sup>Vale ressaltar que  $G(2)$  é um subgrupo de  $SO(7)$ , o grupo das rotações no espaço  $\mathbb{R}^7$ , que também é compacto. Um exemplo importante de grupo não compacto em física é o grupo de Lorentz, ligado às simetrias do espaço-tempo na mecânica relativística.

seja, para a qual os elementos do grupo sejam representados por operadores —ou matrizes— unitárias. (Esse resultado vale também para os grupos finitos [52, 133], i.e. grupos com um número finito de elementos.) Em particular, tal representação unitária pode sempre ser obtida definindo-se o produto escalar —no espaço vetorial  $V$  associado à representação considerada— através de uma *média sobre o grupo* [133, 135]. Vejamos, a seguir, a consequência física disso.

A consideração de uma representação unitária para um grupo de Lie implica que podemos escrever —usando o mapa exponencial— os elementos  $U$  do grupo como

$$U = \exp(iT), \quad (19)$$

onde  $T$  é uma matriz hermitiana (ver Apêndice A). Note que a matriz  $T$  pertence à álgebra do grupo, e é escrita como combinação linear dos geradores  $T_k$  do grupo, em termos dos parâmetros  $\theta_k$ . Portanto, para os grupos de Lie compactos, os geradores podem sempre ser escolhidos (considerando-se uma representação unitária do grupo) como hermitianos, uma grande vantagem para a descrição física das transformações de simetria consideradas.

## C.1 Momento Angular

Um exemplo familiar de grupo de Lie em mecânica quântica é o grupo  $SO(3)$ , associado à simetria por rotações em três dimensões [18], cujos geradores podem ser identificados com as componentes cartesianas  $L_x, L_y, L_z$  do vetor momento angular (orbital)  $\mathbf{L}$ . Assim como ocorre para a energia e para o momento linear, temos no caso quântico que  $L_x, L_y, L_z$  são operadores, atuando na função que descreve o estado (quântico) do sistema, a função de onda  $\Psi$ . Vejamos primeiramente como estão relacionadas entre si as componentes de  $\mathbf{L}$ . Analogamente à expressão clássica, temos  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , ou seja  $\mathbf{L}$  é dado pelo *produto vetorial* da posição  $\mathbf{r}$  pelo momento linear  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . (Por exemplo, no caso clássico de movimento circular uniforme em uma órbita de raio  $r$  para um corpo de massa  $m$  e velocidade  $v$ , o momento angular é um vetor de módulo  $mvr$  e direção perpendicular ao plano que contém o círculo.) O produto vetorial “mistura” as componentes  $x, y, z$  dos vetores envolvidos, sendo e.g. a componente  $z$  de  $\mathbf{L}$  dada em termos das componentes  $x$  e  $y$  dos vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$  por  $L_z = xp_y - yp_x$ . Por sua vez, as componentes do operador momento linear são dadas, no caso quântico, por derivadas espaciais, e.g.  $p_x = -i\hbar\partial/\partial x$ , sendo  $\hbar$  a constante de Planck racionalizada e  $i$  a unidade imaginária. No caso do operador  $L_z$  podemos aplicar a uma função de  $x, y$  e  $z$  as operações definidas pela expressão de  $p_x$  (e suas formas análogas

para as coordenadas  $y$  e  $z$ ) e obter<sup>64</sup>

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (20)$$

onde  $\phi$  é o ângulo de rotação ao redor do eixo  $z$ . Isto significa que uma rotação por um ângulo infinitesimal  $\delta\phi$  estará associada à operação

$$\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \delta\phi L_z = \mathbb{1} - \delta\phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (21)$$

onde  $\mathbb{1}$  representa a operação identidade. Este resultado é um caso particular da expressão (11), válida para qualquer grupo de Lie.<sup>65</sup> Ao mesmo tempo, uma rotação do sistema físico, por um ângulo finito  $\phi_0$  ao redor do eixo  $z$ , é produzida pelo operador<sup>66</sup>  $\exp(-i\phi_0 L_z/\hbar)$ .

Assim como na mecânica clássica, também na mecânica quântica o momento angular  $\mathbf{L}$  é uma grandeza conservada para sistemas isolados, em consequência da invariância por rotação. Em particular, isto vale para cada componente de  $\mathbf{L}$ . No estudo do caso quântico, porém, devemos considerar as relações de comutação entre os operadores envolvidos, ou seja, o fato de que, para dois operadores  $A$  e  $B$  gerais, o comutador  $[A, B]$ , definido na Eq. (8), não será (em geral) nulo. No caso dos operadores posição e momento linear na direção  $x$ , sendo  $p_x = -i\hbar\partial/\partial x$ , temos

$$[x, p_x] = xp_x - p_x x = i\hbar. \quad (22)$$

Tais relações são consistentes com o *princípio da incerteza* de Heisenberg, que limita o conhecimento simultâneo da posição e do momento de uma partícula [1]. Para as componentes de  $\mathbf{L}$ , obtemos assim as relações de comutação

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, [L_y, L_z] = i\hbar L_x, [L_z, L_x] = i\hbar L_y, \quad (23)$$

de acordo com a Eq. (15). Como no caso do momento linear e da posição visto acima, o fato de duas componentes de  $\mathbf{L}$  não comutarem (i.e. terem comutador não-nulo) implica que há uma imprecisão, ou incerteza —da ordem de  $\hbar$ — na medida simultânea dessas grandezas. Ou seja, para um sistema quântico, não será possível conhecer ao mesmo tempo mais do que uma das componentes do vetor  $\mathbf{L}$ . Por outro lado, pode-se verificar que o operador  $\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$  comuta com todas as componentes de  $\mathbf{L}$ , e portanto uma medida de  $\mathbf{L}^2$  não

<sup>64</sup>Note que, utilizando a *regra da cadeia* e as expressões das coordenadas  $x$  e  $y$  em termos de  $\phi$ , podemos escrever  $\partial/\partial\phi = x\partial/\partial y - y\partial/\partial x$ .

<sup>65</sup>Como explicado na Subseção B acima, a fatorização da unidade imaginária  $i$ , no lado esquerdo da relação (21), permite associar ao gerador  $L_z$  um operador hermitiano.

<sup>66</sup>Aqui estamos usando o mapa exponencial, também descrito na Subseção B.

será alterada por rotações ao redor de qualquer eixo. De fato, o operador (escalar)  $\mathbf{L}^2$  está associado ao módulo do vetor  $\mathbf{L}$ , que é invariante por rotações. Os estados do sistema quântico serão especificados portanto pelo módulo do vetor momento angular e por apenas uma de suas componentes, por exemplo  $L_z$ .

Além disso, as relações de comutação acima determinam a *quantização* do momento angular, ou seja o fato de que apenas certos valores sejam permitidos para as componentes e para o módulo de  $\mathbf{L}$ . Mais precisamente, pode-se escrever a função de onda  $\Psi$  do sistema em termos das *autofunções*, ou *autoestados*, dos operadores  $\mathbf{L}^2$  e  $L_z$ , correspondentes aos autovetores das matrizes associadas aos operadores. Ou seja, trata-se de um conjunto de funções (em comum para os dois operadores) que não se alteram sob ação desses operadores, exceto pela multiplicação por um valor constante, ou autovalor. Os autovalores referentes a  $\mathbf{L}^2$  e  $L_z$  são indexados respectivamente pelas constantes  $l$  e  $m$ . Em particular, considerando a Eq. (20), é fácil verificar que as autofunções de  $L_z$  são dadas pela expressão

$$\Phi_m(\phi) = \exp(im\phi), \quad (24)$$

que de fato satisfaz à relação

$$L_z \Phi_m(\phi) = m\hbar \Phi_m(\phi). \quad (25)$$

Ao mesmo tempo, utilizando as relações de comutação e impondo que a função que descreve o estado do sistema não se altere por uma rotação de  $360^\circ$ , verifica-se que  $l$  e  $m$  podem assumir apenas valores inteiros. De fato, pelo exposto acima, uma rotação de  $360^\circ$  ao redor do eixo  $z$  é produzida pelo operador  $\exp(-2\pi i L_z/\hbar)$ . Ao mesmo tempo, a aplicação desse operador às autofunções  $\Phi_m(\phi)$  é equivalente a substituir  $L_z$  pelo fator  $m\hbar$  [ver a Eq. (25)], e portanto equivale a multiplicar a autofunção por uma *fase* (i.e. um número complexo de *módulo* igual a 1) dada por  $\exp(-2\pi im)$ . Assim, o estado do sistema permanecerá inalterado após uma rotação (trivial) de  $360^\circ$  se essa fase for igual a 1, i.e. para valores inteiros de  $m$ . Além disso, para cada valor fixo de  $l$ , temos  $2l + 1$  valores possíveis para as projeções  $m$ , dados por:  $-l, -l + 1, \dots, l - 1, l$ . Consequentemente,  $l$  deverá ser inteiro, e pode ser tomado positivo. Mencionamos que, na verdade, o autovalor associado à aplicação do operador  $\mathbf{L}^2$  é  $\hbar^2 l(l + 1)$ . Ou seja, o módulo do vetor  $\mathbf{L}$ , i.e.  $\hbar\sqrt{l(l + 1)}$ , corresponderá ao valor máximo  $\hbar l$  de sua projeção  $L_z$  (como seria esperado classicamente) apenas no limite de grandes valores de  $l$ , para os quais  $l + 1 \approx l$ .

Em resumo, o sistema será descrito pelos números quânticos  $l$  e  $m$ , associados respectivamente ao módulo do momento angular e à sua componente  $L_z$ , com valores  $l = 0, 1, 2, \dots$  e  $m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$ . Para cada valor de  $l$  temos um multipletto dado por  $2l + 1$

estados, com mesmo valor para o módulo de  $\mathbf{L}$ , indexados por seus diferentes valores para a componente  $L_z$ . Note que o número de estados em um multipletto corresponde à degenerescência do número quântico  $l$  (que fixa o autovalor do operador  $\mathbf{L}^2$ ).

## C.2 Momento Angular Intrínseco

As regras descritas acima para o caso do momento angular podem ser aplicadas também ao momento angular *intrínseco* das partículas elementares,<sup>67</sup> o spin  $\mathbf{S}$  [1]. Em particular, as componentes de  $\mathbf{S}$  obedecem a relações de comutação análogas às do momento angular orbital  $\mathbf{L}$  vistas acima. Portanto, as propriedades resultantes dessas relações, como a quantização dos autovalores dos operadores  $\mathbf{S}^2$  e  $S_z$ , serão as mesmas que para o operador  $\mathbf{L}$ . Temos aqui também, portanto, estados dados por multipletos em que o módulo do spin — i.e.  $\hbar\sqrt{s(s + 1)}$ , sendo  $s$  o análogo do número quântico  $l$  acima — é constante. O multipletto associado a um valor  $s$  possui  $2s + 1$  estados, associados aos valores possíveis da projeção  $S_z$  para  $s$  fixo. O mesmo vale para a degenerescência nos multipletos de isospin (ver Subseção 4.1): para um valor do módulo de isospin dado por  $I$  teremos  $2I + 1$  estados, correspondendo às possíveis projeções  $I_3$  do isospin.

Note porém que no caso do momento angular intrínseco (de spin ou isospin) não há uma correspondência clássica,<sup>68</sup> como havia para o vetor  $\mathbf{L}$  acima (dado por  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ). Em particular, o número quântico  $s$  associado ao módulo do spin  $\mathbf{S}$  (assim como o isospin  $I$ ) poderá assumir valores semi-inteiros além de inteiros,<sup>69</sup> o que determina algumas propriedades peculiares do spin. Por exemplo, o estado de uma partícula com número quântico de spin  $s = 1/2$ , como o elétron, *não* permanece inalterado após uma rotação de  $360^\circ$  de suas coordenadas, mas será multiplicado por um fator global  $-1$ . De fato, usando o resultado descrito na seção anterior com valores semi-inteiros de  $m$ , fica imediato verificar que uma rotação de  $360^\circ$  produz uma fase igual a  $-1$ . Tal fator não pode ser detetado diretamente, mas traz

<sup>67</sup>Esses resultados se aplicam da mesma forma ao spin isotópico, ou isospin. Como descrito na Seção 3.1, o conceito de spin como representação de  $SU(2)$  foi generalizado (para a descrição inicial de hádrons) à chamada simetria de isospin. Tal descrição, claramente incompleta, serviu de inspiração para o esquema de classificação introduzido mais tarde por Ne’eman e Gell-Mann, que era baseado nas representações do grupo  $SU(3)$ , levando em conta tanto a simetria de isospin quanto a de hipercarga.

<sup>68</sup>Para ressaltar a diferença entre momento angular  $\mathbf{L}$  e spin  $\mathbf{S}$ , mencionamos que o segundo é muitas vezes definido como um grau de liberdade *interno* da partícula. Correspondentemente, as “rotações” do spin  $\mathbf{S}$  acontecem nesse espaço interno e não no espaço tridimensional usual.

<sup>69</sup>Observe que, ainda assim,  $2s + 1$  será sempre um inteiro, como  $2l + 1$  no caso do momento angular  $l$  visto anteriormente. Isto é necessário, já que esses valores representam o número de projeções possíveis ao longo de uma dada direção.



consequências dramáticas para a diferença de comportamento entre partículas com spin inteiro e semi-inteiro, como discutido nas Subseções 4.1 e 5.4.

Para ilustrar essa diferença, vamos considerar a descrição de duas partículas idênticas de spin  $s$ . Sendo as partículas idênticas, elas são de fato indistinguíveis a nível quântico e, contrariamente ao caso clássico, não podemos saber qual partícula ocupa qual posição. Assim, nos cálculos (quânticos) devemos incluir a possibilidade de trocar a posição das partículas idênticas sem que a descrição se altere. Escolhendo como origem das coordenadas cartesianas do sistema o ponto mediano entre as duas partículas, vemos que a troca de uma partícula com a outra é equivalente a uma rotação de  $180^\circ$  nas coordenadas das partículas, por exemplo ao redor do eixo  $z$ . Como explicado acima, tal rotação gera um fator de fase  $\exp(-\pi im)$  para cada partícula ou, equivalentemente, uma fase total de  $\exp(-2\pi im)$  para o sistema de duas partículas. Assim, se  $m$  possui valores inteiros, essa fase é igual a 1 e o sistema é simétrico pela troca das duas partículas. Por outro lado, se  $m$  é semi-inteiro, esta fase é igual a  $-1$  e o sistema é dito *antissimétrico* pela troca das duas partículas, já que sua autofunção sofre inversão de sinal sob a troca. A associação de um estado antissimétrico ao sistema de duas (ou mais) partículas idênticas de spin semi-inteiro determina que tais partículas —chamadas de férmions— não possam ocupar estados individuais idênticos. Esse resultado é a base do Princípio da exclusão de Pauli (ver Subseção 5.4). Uma ilustração dessa propriedade pode ser vista mais abaixo, na Subseção C.4, para estados de duas partículas idênticas de spin  $1/2$ , considerando-se a contribuição da parte de spin para a função de onda total. De fato, temos (por construção) que apenas no estado simétrico (estado *tripleto*) as duas partículas podem assumir a mesma componente de spin. Pelo contrário, na combinação assimétrica (estado *singlete*) os dois spins devem necessariamente apresentar componentes opostas.

### C.3 Átomo de Hidrogênio

Claramente, na discussão acima, não houve a *necessidade* de invocar a teoria de grupos. Por outro lado, vimos que as relações de comutação associadas ao momento angular no caso quântico [ver a Equação (23)] são *exatamente* as relações entre os geradores das rotações infinitesimais, que determinam a álgebra para a representação do grupo  $SO(3)$  por matrizes ortogonais  $3 \times 3$ . Em particular, o gerador de rotações infinitesimais ao redor do eixo  $z$  pode ser identificado com  $L_z$ . Assim, apenas pela análise de teoria de grupos poderíamos saber de antemão, por exemplo, os números quânticos permitidos para o momento angular  $\mathbf{L}$  de um sistema com simetria rotacional, e poderíamos associar os es-

tados físicos desse sistema às representações do grupo das rotações. De fato, a linguagem de transformações de simetria é tão poderosa que a simples observação de que um problema com potencial central —i.e. no qual a força depende apenas da distância  $r$  da partícula até a origem, e não da posição dela— possui simetria esférica (i.e. simetria por rotação) permite a determinação da estrutura dos níveis quânticos de energia para o sistema. Uma ilustração disso para o átomo de hidrogênio é feita a seguir [9, 19].

Para tanto, relembremos que as possíveis energias  $E$  de um sistema físico, descrito pela hamiltoniana  $H$ , são dadas pela aplicação da hamiltoniana às autofunções de  $H$ , i.e. funções  $\Psi$  para as quais vale  $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ . Portanto, a ação do operador  $H$  sobre o autoestado  $\Psi$  (representado na notação usual de mecânica quântica por  $|\Psi\rangle$ ) é multiplicar o estado por sua energia  $E$ . No caso geral, o estado quântico do sistema é dado como combinação linear de autofunções de  $H$  e podemos calcular a probabilidade de achar, em uma medida experimental, um dos possíveis valores de energia  $E$ . Para o átomo de hidrogênio, a hamiltoniana é dada pelo termo cinético  $\mathbf{p}^2/2m_e$  (onde  $m_e$  representa a massa do elétron,<sup>70</sup> que é essencialmente a *massa reduzida* do sistema) e pelo termo potencial de interação coulombiana entre o próton e o elétron. Pode-se verificar que esta hamiltoniana comuta com os três geradores das rotações ( $L_x$ ,  $L_y$  e  $L_z$ ). Logo, o operador  $R$  associado a qualquer rotação —obtido pela exponencial de combinações lineares dos geradores do grupo— também comuta com a hamiltoniana, i.e.  $HR = RH$ . Dessa forma, o estado quântico “rodado”  $R|\Psi\rangle$  do sistema terá a mesma energia que o estado original  $|\Psi\rangle$  [ver Eq. (10) acima]. Isto implica que os estados quânticos do sistema serão dados por funções radiais (i.e. que dependem apenas de  $r$ ) multiplicadas por funções angulares, dadas por representações irredutíveis do grupo  $SO(3)$ . Essas funções são indexadas pelos números quânticos  $l$  e  $m$  vistos acima. As autofunções do problema, obtidas pela multiplicação das partes radial e angular, podem ser escritas portanto como  $\Psi_{n,l,m}$ , onde  $n$  é o número quântico associado à parte radial. Note que, em princípio, apenas estados com mesmo valor de  $l$  são degenerados, i.e. têm a mesma energia. No entanto, no caso do átomo de hidrogênio, estados de  $l$  diferente podem ter a mesma energia, se tiverem o mesmo valor de  $n$ . Essa degenerescência adicional está relacionada ao operador *excentricidade* [18, 136], que é o análogo quântico do *vetor de Runge-Lenz*. Em particular, pode-se demonstrar que a conservação desse operador no caso do átomo de hidro-

<sup>70</sup>Nossa descrição da evolução do sistema é feita para o movimento do elétron apenas, já que o próton é muito mais massivo e pode ser considerado em repouso.

gênio<sup>71</sup> amplia a simetria  $SO(3)$ , devida ao momento angular, para uma simetria  $SO(4)$ . Esse grupo possui dois operadores de Casimir. Logo, é de se esperar que os estados do átomo de hidrogênio com a mesma energia (multipletos) possam ser classificados usando dois números quânticos (i.e.  $l$  e  $m$ ).

Vale ressaltar que uma descrição mais completa dos níveis de energia do átomo de hidrogênio deve incluir os efeitos relativos ao spin do elétron. Tais efeitos surgem levando-se em conta interações adicionais no sistema, e.g. a interação do spin do elétron com o campo magnético produzido pela “rotação” do próton vista no referencial do elétron, o chamado *efeito spin-órbita*. Este efeito elimina a degenerescência no número quântico  $l$ , i.e. neste caso as energias do átomo de hidrogênio dependem de  $n$  e de  $l$  [19].

### C.4 Representações para Spin 1/2

As propriedades associadas ao spin do elétron podem ser obtidas, de forma análoga ao procedimento acima, a partir das representações do grupo  $SU(2)$  [9]. Em particular, temos dois autoestados para a componente  $S_z$  (análogo a  $L_z$  acima) do operador de spin 1/2, com autovalores  $+\hbar/2$  e  $-\hbar/2$ . Tais estados correspondem a spin “para cima” e “para baixo” em relação ao eixo  $z$  e podem ser escritos como vetores unitários, respectivamente

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Isso significa que o estado do sistema de spin 1/2 será uma “mistura” dos dois possíveis autoestados  $\chi_+$  e  $\chi_-$ , i.e. uma soma dos dois vetores, com coeficientes  $c_{\pm}$  complexos:  $c_+ \chi_+ + c_- \chi_-$ . Uma medida experimental do spin ao longo do eixo  $z$  dará  $+\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$  com probabilidade dada em termos<sup>72</sup> dos coeficientes  $c_{\pm}$ . A operação de simetria por rotação dos spins é gerada pelas chamadas matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

geradores do grupo  $SU(2)$  de matrizes  $2 \times 2$  complexas unitárias. As componentes do operador  $\mathbf{S}$  podem ser identificadas com as matrizes acima multiplicadas pelo fator  $\hbar/2$ . Em particular, a componente  $S_z$ , associada

<sup>71</sup>Ao contrário da conservação do momento angular, que acontece para todos os potenciais com simetria de rotação, a conservação do operador excentricidade é uma propriedade exclusiva do potencial coulombiano. Assim, não se aplica a átomos com mais de um elétron, ou quando se consideram correções relativísticas para o átomo do hidrogênio.

<sup>72</sup>Em geral considera-se uma combinação linear normalizada, i.e. com  $|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$ , de forma que as probabilidades de uma medida dar  $+\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$  serão respectivamente  $|c_+|^2$  e  $|c_-|^2$ .

à reflexão em relação ao eixo  $z$ , é obtida de  $\sigma_z$ , cujos autovalores são 1 e  $-1$ , associados aos autoestados  $\chi_+$  e  $\chi_-$  introduzidos acima. Da mesma forma, as relações de comutação entre as componentes de  $\mathbf{S}$  seguem das relações para as matrizes  $\sigma$ . Como esperado, essas relações são as mesmas que para o momento angular  $\mathbf{L}$  [ver Eq. (15)], já que a álgebra do grupo  $SU(2)$  é a mesma que a do grupo  $SO(3)$ . Consequentemente, as representações de  $SU(2)$  são também representações de  $SO(3)$ , mas com valores duplos no caso de spin semi-inteiro. [A cada elemento de  $SO(3)$  serão associados dois objetos da representação de  $SU(2)$ , com sinais opostos.] Pode-se também verificar que o operador

$$\mathbf{S}^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) \quad (28)$$

é proporcional à matriz identidade. Logo, esse operador comuta com os geradores do grupo, i.e. as três matrizes de Pauli, e é, de fato, o único operador de Casimir do grupo  $SU(2)$ . (Da mesma forma, o operador  $\mathbf{L}^2$  é o único operador de Casimir do grupo  $SO(3)$ , estando relacionado à conservação do momento angular, como visto acima.)

Vejamos agora como podem ser obtidas representações de ordens mais altas a partir de combinações de objetos na representação fundamental [134], no caso do spin 1/2. O resultado da adição de dois momentos angulares de spin 1/2, por exemplo a combinação dos spins de dois elétrons, é um operador vetorial com as mesmas relações de comutação dos spins individuais,<sup>73</sup> como pode ser visto escrevendo as somas para as componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Os números quânticos associados ao novo operador são obtidos de maneira simples, a partir dos valores permitidos para suas componentes. Por exemplo, a soma das componentes  $S_z$  para os dois spins pode assumir os valores  $-1$ ,  $0$ ,  $1$  (já que cada uma delas vale  $+1/2$  ou  $-1/2$ ). Como tínhamos quatro combinações possíveis dos autoestados  $\chi_+$  e  $\chi_-$  de cada elétron, temos uma representação de dimensão 4, que será agora indexada pelos autovalores do spin total, cujo autovalor  $s$  pode ser 0 ou 1, já que são esses os valores do “módulo” do spin que correspondem às projeções possíveis. Em particular, o caso  $s = 0$  corresponde a uma única projeção possível,  $m = 0$ , e o caso  $s = 1$  a três projeções,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ . Vemos portanto que os autoestados serão quatro, como esperado. Em outras palavras, a partir da combinação, ou *produto direto* de duas representações de dimensão 2, obtivemos uma representação de dimensão 4, *soma direta* de representações irredutíveis, de dimensões 1 (no caso  $s = 0$ ) e 3 (caso  $s = 1$ ). Isso é geralmente repre-

<sup>73</sup>Este resultado se aplica a qualquer soma de momentos angulares e de spin e, em particular, ao momento angular total  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  de um sistema de partículas interagentes.

sentado simbolicamente como

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3. \quad (29)$$

A representação resultante é associada ao operador obtido pela soma dos spins, e seus autoestados serão dados por combinações dos autoestados individuais  $\chi_+$  e  $\chi_-$  para cada elétron. Por exemplo o estado com projeção  $S_z$  máxima (presente no caso  $s = 1$ ) corresponde a ter os dois spins no autoestado  $\chi_+$ , e pode ser representado por  $\chi_+(1) \otimes \chi_+(2)$ . O caso de projeção  $-1$  é análogo, e corresponde a  $\chi_-(1) \otimes \chi_-(2)$ . Já o caso de projeção 0, presente tanto para  $s = 1$  quanto para  $s = 0$ , envolve combinações de  $\chi_+(1) \otimes \chi_-(2)$  e  $\chi_-(1) \otimes \chi_+(2)$ , já que essas duas configurações possuem projeção  $S_z$  igual a zero. Mais precisamente, a combinação referente ao caso  $s = 1$  é dada por

$$[\chi_+(1) \otimes \chi_-(2) + \chi_-(1) \otimes \chi_+(2)]/\sqrt{2}, \quad (30)$$

enquanto que o caso  $s = 0$  corresponde a

$$[\chi_+(1) \otimes \chi_-(2) - \chi_-(1) \otimes \chi_+(2)]/\sqrt{2}. \quad (31)$$

Podemos notar que os três autoestados relativos a  $s = 1$  têm a propriedade de simetria por troca dos spins, i.e. trocando-se o estado da partícula “1” pelo da partícula “2” nas expressões acima. O caso  $s = 0$ , por sua vez, é antissimétrico em relação a essa operação, ou seja fica multiplicado por um fator  $-1$ . As três combinações referentes a  $s = 1$  formam o chamado tripleto e a referente a  $s = 0$  é chamada de singleto.

O procedimento demonstrado acima, para obtenção das representações de singleto e tripleto do grupo  $SU(2)$  através da soma de dois spin  $1/2$ , pode ser estendido ao caso de um número arbitrário de objetos (utilizando-se os chamados *coeficientes de Clebsch-Gordan*). Vale lembrar (ver Apêndice C) que, para os grupos  $SU(N)$ , todas as representações irredutíveis (de grau finito) podem ser construídas a partir de produtos tensoriais das representações fundamentais. No caso  $SU(2)$  aqui considerado, há uma única representação fundamental, dada pelas matrizes  $2 \times 2$  unitárias e de determinante igual a 1. Assim, o método ilustrado acima, baseado no produto direto da representação fundamental de  $SU(2)$  — e subsequente simetrização (como no caso do tripleto) e antissimetrização (como no caso do singleto) no espaço produto [36, 55, 132] — permite obter todas as representações irredutíveis (de grau finito) desse grupo.

### C.5 A Álgebra de Lie do Grupo $SU(N)$

Como explicado acima, os geradores  $T_k$  para o grupo de Lie  $SU(N)$ , que constituem uma base para a correspondente álgebra de Lie, são dados (na representação fundamental) por  $N^2 - 1$  matrizes independentes  $N \times N$ , hermitianas e com traço nulo. O caso mais simples  $N = 2$

foi descrito na seção anterior, onde foi mostrado que os geradores  $T_k$  são dados pelas três matrizes de Pauli [ver Eq. (27)]. É interessante que o caso  $SU(2)$  pode ser facilmente generalizado para todas as álgebra de Lie  $SU(N)$ . Em particular, no caso  $N = 3$ , podemos considerar as oito matrizes de Gell-Mann. As primeiras três delas são uma simple extensão das matrizes de Pauli para o caso  $3 \times 3$ , sendo dadas pelas expressões

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

e

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Além da matriz  $\lambda_3$  há também, entre as oito matrizes de Gell-Mann, uma segunda matriz diagonal:

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

De fato, sendo que o posto do grupo  $SU(3)$  é igual a 2, sabemos que dois geradores do grupo  $SU(3)$  devem comutar entre si, como é o caso das matrizes  $\lambda_3$  e  $\lambda_8$ . As restantes quatro matrizes são também uma extensão ao caso  $3 \times 3$  das matrizes de Pauli  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , sendo dadas pelas expressões

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

e

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Note que, usando  $\lambda_3$  e  $\lambda_8$ , podemos construir as matrizes

$$\lambda_+ = \frac{\sqrt{3}\lambda_8 + \lambda_3}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

e

$$\lambda_- = \frac{\sqrt{3}\lambda_8 - \lambda_3}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

e que os conjuntos de matrizes  $(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_+)$  e  $(\lambda_6, \lambda_7, \lambda_-)$  são de novo uma óbvia extensão das três matrizes de Pauli ao caso  $3 \times 3$ .

O caso geral  $SU(N)$  pode ser construído da mesma forma. Para isso é suficiente considerar as matrizes  $E_{ij}$ , que são matrizes  $N \times N$  com todos os elementos nulo,

com exceção do elemento da linha  $i$  e da coluna  $j$ , que é igual a 1. Logo, podemos definir as matrizes (ver, por exemplo, o Apêndice A.1 da Referência [137])

$$T_{ij}^s = E_{ij} + E_{ji} \quad (39)$$

$$T_{ij}^a = -i(E_{ij} - E_{ji}) \quad (40)$$

$$T_{jj}^d = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left[ \sum_{l=1}^j E_{ll} - j E_{j+1,j+1} \right]. \quad (41)$$

Note que as matrizes  $T_{ij}^s$ , com  $i < j$ , são  $N(N-1)/2$  matrizes reais e simétricas, como as matrizes  $\lambda_1, \lambda_4$  e  $\lambda_6$  acima. Ao mesmo tempo, as matrizes  $T_{ij}^a$ , com  $i < j$ , são  $N(N-1)/2$  matrizes puramente imaginárias e anti-simétricas, como as matrizes  $\lambda_2, \lambda_5$  e  $\lambda_7$  acima. Enfim, as matrizes  $T_{jj}^d$ , com  $j < N$ , são  $N-1$  matrizes reais e diagonais, como as matrizes  $\lambda_3$  e  $\lambda_8$  acima. Assim, no total, temos  $N^2 - 1$  matrizes hermitianas, linearmente independentes e com traço nulo, que podem ser usadas como geradores do grupo de Lie  $SU(N)$ .

## Referências

- [1] Y. Ne'eman e Y. Kirsh, *The Particle Hunters* (Cambridge University Press, Cambridge, segunda ed., 1996).
- [2] Y. Ne'eman, *Patterns, Structure And Then Dynamics: Discovering Unitary Symmetry And Conceiving Quarks*, DOE-ER-03992-466 e TAUP 142-81, <https://lib-extopc.kek.jp/preprints/PDF/2000/0036/0036115.pdf>, acessado em 31/10/22.
- [3] George Johnson, *Strange Beauty: Murray Gell-Mann and the Revolution in Twentieth-Century Physics* (Knopf, Nova York, 1999).
- [4] S. Sternberg, *Yuval Ne'eman*, anais da “Albert Einstein’s Century International Conference” (realizada em Paris, França, 2005), AIP Conf. Proc. **861**, 247 (2006).
- [5] A. Watson, *Yuval Ne'eman Dies at 80*, obituário na revista “Science” (versão eletrônica) em 26 de abril de 2006, <https://www.science.org/content/article/yuval-neeman-dies-80>, acessado em 31/10/22.
- [6] A. T. Wolf, *Hydropolitics along the Jordan River* (United Nations University Press, Tóquio, 1995), <https://archive.unu.edu/unupress/unupbooks/80859e/80859E00.htm#Contents>, acessado em 31/10/22.
- [7] M. Hargittai e I. Hargittai, *Candid Science IV: Conversations With Famous Physicists* (Imperial College Press, Londres, 2004).
- [8] T. Ne'eman, *In Remembrance of Yuval Ne'eman (1925–2006)*, obituário na revista eletrônica “PhysicaPlus”, editada pela Sociedade Israelense de Física, No. 7, [https://web.archive.org/web/20071007191318/http://physicaplus.org.il/zope/home/en/1124811264/memorial\\_neeman\\_en](https://web.archive.org/web/20071007191318/http://physicaplus.org.il/zope/home/en/1124811264/memorial_neeman_en), acessado em 6/7/22.
- [9] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (Wiley-VCH Verlag, Weinheim, segunda edição, 2008).
- [10] F. Halzen e A. D. Martin, *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* (John Wiley & Sons, Nova York, 1984).
- [11] R. Gilmore *O Mágico dos Quarks - A Física de Partículas ao Alcance de Todos* (Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro, 2002).
- [12] M. Riordan, *The Hunting of the Quark, a True Story of Modern Physics* (Simon & Schuster, Nova York, 1987).
- [13] A. Pais, *Inward Bound, of Matter and Forces in the Physical World* (Oxford University Press, Nova York, 1986).
- [14] A. Pickering, *Constructing quarks: a sociological history of particle physics* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [15] F. Caruso, V. Oguri e A. Santoro (editores), *Partículas Elementares: 100 anos de descobertas* (Editora da Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2005).
- [16] C. Oldoni da Silva e P. L. Natti, *Modelo de Quarks e Sistemas Multiquarks*, Rev. Bras. Ens. Fis. **29**, 175 (2007).
- [17] M. A. Moreira, *A Física dos Quarks e a Epistemologia*, Rev. Bras. Ens. Fis. **29**, 161 (2007).
- [18] W. Greiner e B. Müller, *Quantum Mechanics: Symmetries*, (Springer-Verlag, Berlim, segunda edição, 2004).
- [19] J.J. Sakurai e J. Napolitano, *Mecânica Quântica Moderna* (Bookman Editora, Porto Alegre, segunda edição, 2012).
- [20] F. Forsyth, *O Dossiê Odessa* (Editora Record, Rio de Janeiro, 1972).

- [21] G. Pape e T. Aspler, *The Scorpion Sanction* (Bantam Books, Nova York, 1981).
- [22] L. Joffe, *Yuval Ne'eman*, obituário no jornal britânico “The Guardian” em 15 de maio de 2006, <http://www.theguardian.com/science/2006/may/15/obituaries.guardianobituaries>, acessado em 31/10/22.
- [23] Y. Ne'eman, *Hadronic Octaves: Symphony in Treble Clef*, anais da “9th International Conference on Hadron Spectroscopy” (realizada em Protvino, Rússia, 2001), AIP Conf. Proc. **619**, 259 (2002).
- [24] Esse relato, anteriormente acessível na página eletrônica de Raymond F. Streater (Professor Emérito do King's College), não se encontra mais disponível.
- [25] <http://home.web.cern.ch/topics/large-hadron-collider>, acessado em 9/10/22.
- [26] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2013/summary/>, acessado em 9/10/22.
- [27] Y. Ne'eman, *The Periodic Table and Genetic Code of the Hadrons*, anais da “24th International Workshop on Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory” (realizada em Protvino, Rússia, 2001), editados por V. A. Petrov, <http://inspirehep.net/record/1209784/files/IHEP%20C01-06-27%20295-304.pdf>, acessado em 9/10/22.
- [28] Y. Ne'eman, *Derivation of Strong Interactions from a Gauge Invariance*, Nucl. Phys. **26**, 222 (1961).
- [29] M. Gell-Mann e Y. Ne'eman, *The Eightfold Way: a Review with a Collection of Reprints* (W. A. Benjamin, Nova York, 1964).
- [30] M. Gell-Mann, *The Eightfold Way: A Theory Of Strong Interaction Symmetry*, Caltech report CTSL-20 (1961), <https://www.osti.gov/biblio/4008239/>, acessado em 9/10/22.
- [31] R. Feynman, *The Character of Physical Law* (MIT Press, Cambridge, décima-segunda impressão, 1985).
- [32] Y. Ne'eman, *The interplay of symmetry, order and information in physics and the impact of gauge symmetry on algebraic topology*, <https://lib-extopc.kek.jp/preprints/PDF/2000/0036/0036040.pdf>, acessado em 11/10/22.
- [33] G. G. Garbi, *O Romance das Equações Algébricas* (Editora Livraria da Física, São Paulo, quarta edição, 2010).
- [34] C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Gauthier-Villars, Paris, 1870).
- [35] J. P. Elliot e P. G. Dawber, *Symmetry in Physics*, Volume 1 (Macmillan Education, Londres, 1979).
- [36] I. Verona Schensted, *A Course on the Application of Group Theory to Quantum Mechanics*, (NEO Press, Peaks Island, 1976).
- [37] L. Bonolis, *From the Rise of the Group Concept to the Stormy Onset of Group Theory in the New Quantum Mechanics. A saga of the invariant characterization of physical objects, events and theories*, La Rivista del Nuovo Cimento **27**, No. 4-5, 1 (2004).
- [38] A. Borrelli, *The emergence of selection rules and their encounter with group theory, 1913-1927*, Studies In History and Philosophy of Science Part B: Studies In History and Philosophy of Modern Physics **40**, No. 4, 327 (2009).
- [39] C. N. Yang e R. L. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [40] S. Sakata, *On A Composite Model For The New Particles*, Prog. Theor. Phys. **16**, 686 (1956).
- [41] M. Ikeda, S. Ogawa e Y. Ohmuki, *A Possible Symmetry in Sakata's Model for Bosons-Baryons System*, Progr. Theor. Phys. **22**, 715 (1959).
- [42] R. E. Behrends e A. Sirlin, *Weak-Coupling Currents and Symmetries of Strong Interactions*, Phys. Rev. **121**, 324 (1961).
- [43] E. Fermi e C. N. Yang, *Are Mesons Elementary Particles?*, Phys. Rev. **121**, 324 (1961).
- [44] F. Wilczek, *Fermi and the elucidation of matter*, <https://arxiv.org/abs/physics/0112077>, acessado em 11/10/22.
- [45] L. B. Okun, *The impact of the Sakata model*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **167**, 163 (2007).
- [46] H. Pietschmann, *On the Early History of Current Algebra*, Eur. Phys. J. H **36**, 75 (2011).
- [47] J. M. F. Bassalo, *Os Primeiros Quarks*, Revista de Ensino de Física **3**(4), 13 (1981).
- [48] K. W. Staley, *Lost Origins of the Third Generation of Quarks: Theory, Philosophy, and Experiment*, Phys. Perspect **3**, 210 (2001).

- [49] S. Sakata, *Theory of Elementary Particles and Philosophy*, Progress of Theoretical Physics Supplement **50**, 199 (1971).
- [50] D. Kaiser, *Nuclear Democracy: Political Engagement, Pedagogical Reform, and Particle Physics in Postwar America*, Isis **93**(2), 229 (2002).
- [51] D. Kaiser, *The Physics of Spin: Sputnik Politics and American Physicists in the 1950s*, Social Research **73**(4), 1225 (2006), JSTOR, <http://www.jstor.org/stable/40971881>, acessado em 12/10/22.
- [52] A. Fazzio e K. Watari, *Introdução à teoria de grupos (com aplicações em moléculas e sólidos)* (Editora UFSC, Santa Maria, 1998).
- [53] R. Gilmore, *Lie groups, physics, and geometry: an introduction for physicists, engineers and chemists* (Cambridge University Press, Nova York, 2008).
- [54] W. K. Tung, *Group Theory in Physics* (World Scientific, Singapura, 1985).
- [55] H. Georgi, *Lie Algebras In Particle Physics: from Isospin To Unified Theories* (Westview Press, Boulder, segunda edição, 1999).
- [56] J. M. F. Bassalo e M. S. D. Cattani, *Teoria de Grupos* (Livraria da Física, São Paulo, segunda edição, 2008).
- [57] K. W. McVoy, *Symmetry Groups in Physics*, Rev. Mod. Phys. **37**, 84 (1965).
- [58] H. J. Lipkin, *From Sakata Model to Goldberg-Ne'eman Quarks and Nambu QCD Phenomenology and "Right" and "Wrong" Experiments*, Progr. Theor. Phys. Suppl. **167**, 155 (2007).
- [59] CERN Courier 46, n. 6, 2006 ([http://lib-docs.web.cern.ch/lib-docs/Archives/biographies/Ne'eman\\_Y-200607.pdf](http://lib-docs.web.cern.ch/lib-docs/Archives/biographies/Ne'eman_Y-200607.pdf)), acessado em 10/10/22.
- [60] D. R. Speiser e J. Tarski, *Possible schemes for global symmetry*, J. Math. Phys. **4**, 588 (1963).
- [61] K. Williams, *Two Cultures: Essays in Honour of David Speiser* (Birkhäuser Verlag, Basileia, 2006).
- [62] A. Speiser, *Die theorie Der Gruppen von Endlicher Ordnung Paperback* (Dover, Nova York, 1943).
- [63] D. Joyner, *Adventures in group theory: Rubik's cube, Merlin's machine, and other mathematical toys* (Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2002).
- [64] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1969/summary/>, acessado em 13/10/22.
- [65] H. Fritzsche, *Murray Gell-Mann — A Scientific Biography*, Int. J. Mod. Phys. A **25** 3879 (2010).
- [66] H. Yukawa, *On the Interaction of Elementary Particles*, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **17**, 48 (1935).
- [67] C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini e C. F. Powell, *Processes Involving Charged Mesons*, Nature **159**, 694 (1947).
- [68] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1950/summary/>, acessado em 13/10/22.
- [69] A. Landé e D. R. Inglis, *The Magnetic Moment of the Neutron*, Phys. Rev. **46**, no. 1, 76 (1934).
- [70] G. Breit e I. I. Rabi, *On the Interpretation of Present Values of Nuclear Moments*, Phys. Rev. **46**, no. 3, 230 (1934).
- [71] C. Brogini, C. Giunti e A. Studenikin, *Electromagnetic Properties of Neutrinos*, Adv. High Energy Phys. **2012**, 459526 (2012).
- [72] K. Nishijima, *Two alternative versions of strangeness*, Proc. Japan Acad. B **84**, 363 (2008).
- [73] S. L. Glashow e J. J. Sakurai, *The 27-fold way and other ways: symmetries of mesons-baryon resonances*, Nuovo Cim. **25**, 337 (1962).
- [74] *Three Quarks for Muster mark!* em J. Baggott, *The Quantum Story, A History in 40 Moments* (Oxford University Press, Nova York, 2011).
- [75] S. L. Glashow e J. J. Sakurai, *On the tenfold way*, Nuovo Cim. **26**, 622 (1962).
- [76] V. E. Barnes *et al.*, *Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three*, Phys. Rev. Lett. **12**, 204 (1964).
- [77] H. Goldberg e Y. Ne'eman, *Baryon Charge and R-Inversion in the Octet Model*, Nuovo Cim. **27**, 1 (1963).
- [78] H. J. Lipkin, *Quarks for pedestrians*, Phys. Rept. **8**, 173 (1973).
- [79] M. Gell-Mann, *A Schematic Model Of Baryons And Mesons*, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [80] S. A. Abbas, *Group Theory in Particle, Nuclear and Hadron Physics* (Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2017).

- [81] G. Zweig, *An  $SU(3)$  Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking*, CERN-TH-401 e CERN-TH-412 (1964).
- [82] G. Zweig, *Origins of the Quark Model*, CALT-68-805 (1980), [https://authors.library.caltech.edu/18969/1/Origins\\_of\\_the\\_Quark\\_Model\\_Final\\_Zweig\[1\].pdf](https://authors.library.caltech.edu/18969/1/Origins_of_the_Quark_Model_Final_Zweig[1].pdf), acessado em 20/11/22.
- [83] <http://ep-news.web.cern.ch/content/interview-george-zweig>, acessado em 31/10/22.
- [84] S. Okubo, *Phi meson and unitary symmetry model*, Phys. Lett. **5**, 165 (1963).
- [85] J. Iizuka, *Systematics and phenomenology of meson family*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **37**, 21 (1966).
- [86] G. Zweig, *Concrete Quarks - The Beginning of the End*, EPJ Web Conf. **71**, 00146 (2014).
- [87] Y. Aoki *et al.* [Flavour Lattice Averaging Group (FLAG)], Eur. Phys. J. C **82**, no.10, 869 (2022).
- [88] M. Gell-Mann, *Quarks*, Acta Phys. Austriaca Suppl. **9**, 733 (1972).
- [89] E. Segrè, *From X-Rays To Quarks, Modern Physicists and Their Discoveries* (W.H. Freeman and Co., São Francisco, 1980).
- [90] <https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1909/summary/>, acessado em 03/11/22.
- [91] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1932/summary/>, acessado em 03/11/22.
- [92] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1965/summary/>, acessado em 03/11/22.
- [93] R. P. Feynman, *Very high-energy collisions of hadrons*, Phys. Rev. Lett. **23**, 1415 (1969).
- [94] J. D. Bjorken e E. A. Paschos, *Inelastic Electron Proton and gamma Proton Scattering, and the Structure of the Nucleon*, Phys. Rev. **185**, 1975 (1969).
- [95] C. O. Escobar, *A invenção dos pártons*, Rev. Bras. Ens. Fis. **40**, e4214 (2018).
- [96] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1990/summary/>, acessado em 03/11/22.
- [97] R. L. Workman *et al.* [Particle Data Group], *Review of Particle Physics*, Prog. Theor. Exp. Phys. **2022**, 083C01 (2022).
- [98] <http://pdg.lbl.gov/>, acessado em 03/11/22.
- [99] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2008/summary/>, acessado em 16/11/22.
- [100] M. Y. Han e Y. Nambu, *Three-Triplet Model with Double  $SU(3)$  Symmetry*, Phys. Rev. **139B**, 1006 (1965).
- [101] H. Fritzsche, *The history of QCD*, CERN Courier 52, n. 8, 2012 (<https://cds.cern.ch/record/1734855/files/vol52-issue8-p021-e.pdf>), acessado em 16/11/22.
- [102] O. W. Greenberg, *Spin And Unitary Spin Independence In A Paraquark Model Of Baryons And Mesons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 598 (1964).
- [103] T. Hübsch, *(Fundamental) Physics of Elementary Particles*, <https://mobt3ath.com/uplode/books/book-62333.pdf>, acessado em 16/11/22.
- [104] O. W. Greenberg e D. Zwanziger, *Saturation in Triplet Models of Hadrons*, Phys. Rev. **150**, 1177 (1966).
- [105] H. Fritzsche e M. Gell-Mann, *Current algebra: Quarks and what else?*, Anais da “XVI International Conference on High Energy Physics” (Chicago, EUA, 1972), p. 135 (J.D. Jackson e A. Roberts, eds.), <https://www.slac.stanford.edu/econf/C720906/papers/v2p135.pdf> (acessado em 16/11/22) e hep-ph/0208010.
- [106] H. Fritzsche, M. Gell-Mann e H. Leutwyler, *Advantages of the Color Octet Gluon Picture*, Phys. Lett. **47B**, 365 (1973).
- [107] K. Moriyasu, *An elementary primer for gauge theory* (World Scientific, 1983).
- [108] M. Kaku, *Quantum Field Theory, a modern introduction* (Oxford Univ. Press, 1993).
- [109] G. 't Hooft e M. J. G. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972).
- [110] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1999/summary/>, acessado em 20/11/22.
- [111] G. 't Hooft, *Under the spell of the gauge principle*, Adv. Ser. Math. Phys. **19**, 1 (1994).
- [112] C. G. Bollini e J. J. Giambiagi, *Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter*, Nuovo Cim. B **12**, 20 (1972).
- [113] C. G. Bollini e J. J. Giambiagi, *Lowest order divergent graphs in nu-dimensional space*, Phys. Lett. B **40**, 566 (1972).

- [114] W. Bietenholz e L. Prado, *Revolutionary physics in reactionary Argentina*, *Physics Today* **67**, n. 2, 38 (2014).
- [115] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2004/summary/>, acessado em 16/11/22.
- [116] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1976/summary/>, acessado em 21/11/22.
- [117] R. P. Crease, *The November revolution*, *Phys. World* **17**, n. 11, 18 (2004).
- [118] N. Cabibbo, *Unitary Symmetry and Leptonic Decays*, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 531 (1963).
- [119] M. Kobayashi e T. Maskawa, *CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652 (1973).
- [120] P. T. Matthews, *Strong Interactions* em “The Encyclopedia of Physics”, edited by R. M. Besançon (Springer Science, terceira edição, 1990).
- [121] K. G. Wilson, *Confinement of quarks*, *Phys. Rev. D* **10**, 2445 (1974).
- [122] J. M. Drouffe e J. B. Zuber, *Strong Coupling and Mean Field Methods in Lattice Gauge Theories*, *Phys. Rept.* **102**, 1 (1983).
- [123] M. Creutz, *Confinement and the Critical Dimensionality of Space-Time*, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 553-556 (1979) [erratum: *Phys. Rev. Lett.* **43**, 890 (1979)].
- [124] M. Creutz, *Asymptotic Freedom Scales*, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 313 (1980).
- [125] <https://www.claymath.org/millennium-problems/yang%E2%80%93mills-and-mass-gap>, acessado em 23/11/22.
- [126] Y. Ne’eman, *The Elvis Presley of Science*, no jornal diário israelense Haaretz em 8 de outubro de 1999.
- [127] <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1979/summary/>, acessado em 21/11/22.
- [128] M. J. Duff, *A Layman’s Guide to M-Theory*, anais do “Abdus Salam Memorial Meeting” (realizado em Trieste, Itália, 1997), em *The Mathematical Sciences after the Year 2000* (World Scientific, 2000).
- [129] D. J. Griffiths, *Mecânica Quântica* (Pearson, São Paulo, segunda edição, 2011).
- [130] P.A.M. Dirac, *A new notation for quantum mechanics*, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **35** (3), 416 (1939).
- [131] K.M. Abadir e J.R. Magnus, *Matrix Algebra* (Cambridge University Press, New York, 2005).
- [132] R. Mirman, *Group theory: an intuitive approach* (World Scientific, Singapura, 1995).
- [133] J.-S. Huang, *Lectures on Representation Theory* (World Scientific, Singapura, 1999).
- [134] P. Ramond, *Group Theory: A Physicist’s Survey* (Cambridge University Press, Nova York, 2010).
- [135] R. Gomez, *Introduction to Representation Theory of Lie Groups*, <https://pdfs.semanticscholar.org/6b6b/5cfbccf6f596966d0414732e06ff6521b390.pdf>, acessado em 17/10/22.
- [136] C.-K. Chua, *Obtaining hydrogen energy eigenstate wave functions using the Runge-Lenz vector*, *J. Phys. Commun.* **2**, 085023 (2018).
- [137] J. Smit, *Introduction to Quantum Fields on a Lattice*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Plano do Artigo . . . . .	3
1.2	Bibliografia Complementar . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Um Coronel na Física</b>	<b>4</b>
2.1	Learn it in Depth! . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Simetrias e Grupos na Física</b>	<b>6</b>
3.1	Tentativas na Física de Partículas . . . . .	8
3.2	A Contribuição de Ne’eman . . . . .	11
3.3	Impactos da Descoberta . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Interação Forte e Simetria</b>	<b>14</b>
4.1	Hipercarga, Estranheza e Isospin . . . . .	15
4.2	Classificação dos Hádrons: O Eightfold Way . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Os Quarks: de um Trocadilho a Campos Quânticos de Matéria</b>	<b>18</b>
5.1	Modelo de Quarks: História . . . . .	18
5.2	Modelo de Quarks: Propriedades . . . . .	20
5.3	A Difícil Aceitação dos Quarks . . . . .	21
5.4	Quarks São Coloridos! . . . . .	22
5.5	Cromodinâmica Quântica (QCD) . . . . .	23
5.6	QCD e Confinamento dos Quarks . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>26</b>
<b>7</b>	<b>Agradecimentos</b>	<b>26</b>
<b>A</b>	<b>Mecânica Quântica</b>	<b>26</b>
<b>B</b>	<b>Grupos e Álgebras de Lie</b>	<b>28</b>
<b>C</b>	<b>Teoria de Representações</b>	<b>29</b>
C.1	Momento Angular . . . . .	31
C.2	Momento Angular Intrínseco . . . . .	32
C.3	Átomo de Hidrogênio . . . . .	33
C.4	Representações para Spin 1/2 . . . . .	34
C.5	A Álgebra de Lie do Grupo $SU(N)$ . . . . .	35