

FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física: Introdução
ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos

Prof. Reynaldo Daniel Pinto

Notas de Aula: Parte 4

1. Classificação dos pontos de equilíbrio

a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ nó hiperbólico estável se $\lambda_i < 0$ e instável se $\lambda_i > 0$

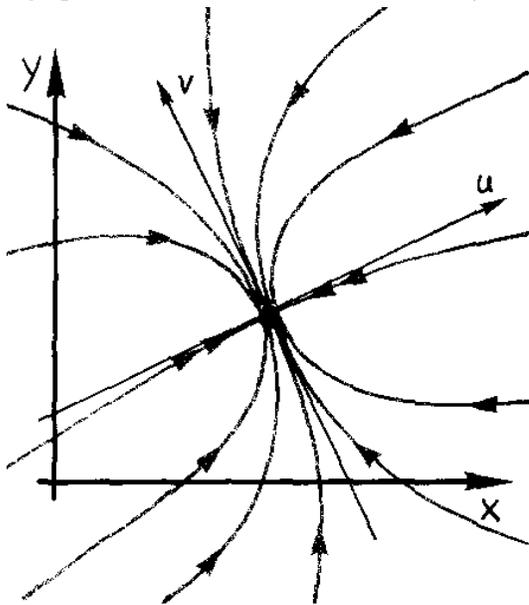


Fig.1 nó estável $\lambda_i < 0$

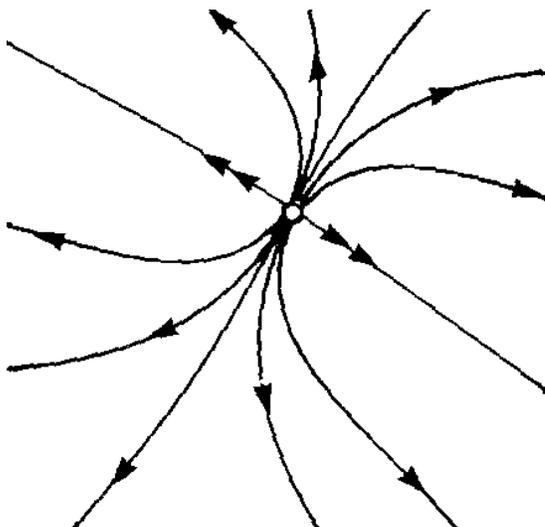


Fig.2 nó instável $\lambda_i > 0$

b) $\lambda_1, \lambda_2 \in R, \lambda_1 \neq \lambda_2$

$\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ponto de sela hiperbólico

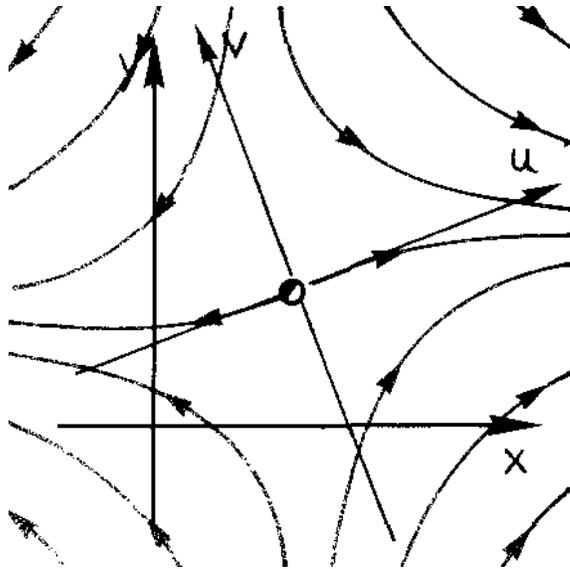


Fig.3 ponto de sela hiperbólico

c) $\lambda_1, \lambda_2 \in R, \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

Nós impróprios \longrightarrow uma única direção de aproximação/afastamento

d) $\lambda_1 = \lambda_2^*$ (complexos conjugados)

$$\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta ; \beta \neq 0$$

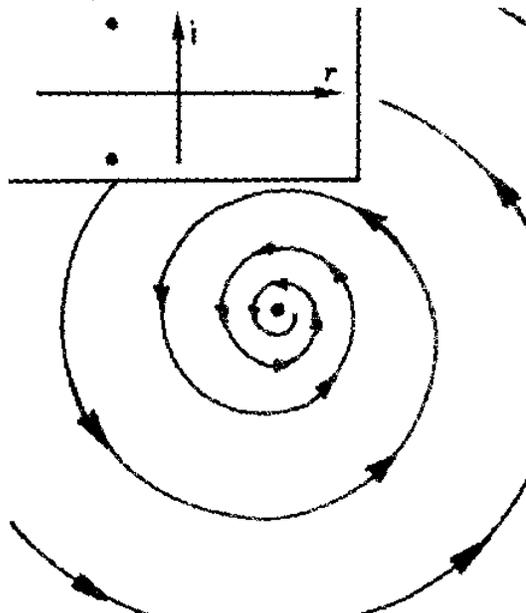


Fig.4 $\alpha < 0$: espiral convergente
foco hiperbólico estável

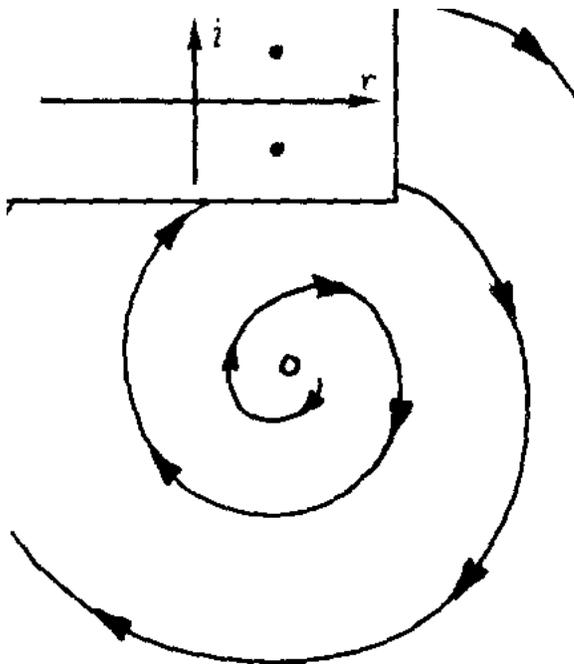


Fig.4 $\alpha > 0$: espiral divergente
foco hiperbólico instável

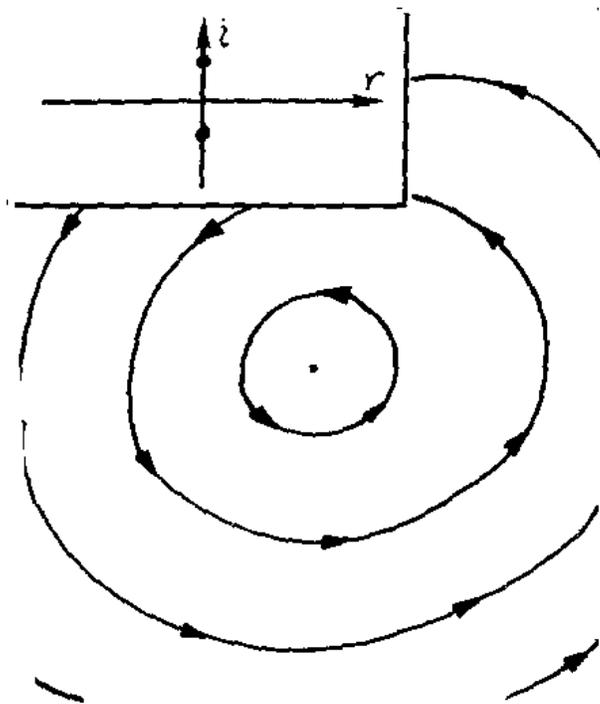


Fig.5 $\alpha = 0$ caso não-hiperbólico
ou elíptico

Sistemas Não-Lineares

Observamos o que acontece nas vizinhanças dos pontos fixos linearizando o sistema em torno desses pontos.

Exemplo:

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

$$P^* = \text{ponto fixo} = (x^*, y^*)$$

Expandindo em série de Taylor em torno de P^*

$$\dot{x} = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + \text{termos de ordem superior}$$

$$\dot{y} = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + \text{termos de ordem superior}$$

Fazendo uma mudança de variáveis

$$\tilde{x} = x - x^* ; \quad \frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\tilde{y} = y - y^* ; \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

e desprezando termos de ordem superior, de I temos que:

$$\dot{\tilde{x}} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_* \tilde{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_* \tilde{y} = a\tilde{x} + b\tilde{y}$$

$$\dot{\tilde{y}} = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_* \tilde{x} + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_* \tilde{y} = c\tilde{x} + d\tilde{y} ,$$

onde as derivadas parciais de f e g são avaliadas no pontos fixo.

Olhando a matriz jacobiana,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{J} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} \end{array} \right\} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{x}$$

\tilde{x}, \tilde{y} são aproximações de primeira ordem para as distâncias entre $(x(t), y(t))$ da trajetória do ponto fixo P^* . Os autovalores e autovetores de J somente são válidos nas proximidades de P^* onde espera-se que os termos de ordem superior sejam bem pequenos.

Mas como garantir que a linearização preserva a estabilidade de um ponto fixo?

Teorema de Hartman-Grobman:

A linearização preserva a estabilidade do ponto fixo hiperbólico $\text{Re}(\lambda) \neq 0$. O retrato de fases do sistema linearizado é topologicamente equivalente ao original nas proximidades do ponto fixo.

Se o ponto fixo for elíptico nada pode ser afirmado: é preciso olhar os termos de ordem mais alta.

Exemplo: Coelhos e ovelhas competindo em uma mesma região onde a quantidade de alimento (vegetais) é limitada.

1- em isolamento: cada espécie crescerá de acordo com uma função logística

$$\dot{x} = x(k_c - x)$$

onde a constante é proporcional ao número máximo de coelhos que poderiam se alimentar na região.

2- Os conflitos - reduzem a taxa de crescimento (pior para os coelhos já que ovelhas comem muito mais)

$x(t) \rightarrow$ coelhos

$y(t) \rightarrow$ ovelhas

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = x(k_c - x) - q_c \cdot x \cdot y$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) = y(k_o - y) - q_o \cdot x \cdot y$$

Supondo os valores das constantes :

- $k_c=4, k_o=3$, pois é necessário mais comida para ovelhas
- $q_c=2, q_o=1$, pois nas regiões onde há encontros as ovelhas levam vantagem sobre os coelhos porque ovelhas comem mais.

$$\dot{x} = f(x, y) = x(4 - x) - 2xy = 4x - x^2 - 2xy$$

$$\dot{y} = g(x, y) = y(3 - y) - xy = 3y - y^2 - xy$$

Pontos fixos $\rightarrow (x^*, y^*) = (0, 0), (0, 3), (4, 0)$ e $(2, 1)$

$$J = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} 4 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 3 - 2y - x \end{bmatrix}$$

• Ponto fixo (2,1):

$$\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right|_{(2,1)} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -2 - \lambda & -4 \\ -1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Os autovalores são $\lambda_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} > 0$ e $\lambda_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$

Calculando os autovetores em (2,1)

Para $\lambda_1 > 0$:

$$\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right|_{(2,1)} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ para } \lambda_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$-2x_1 - 4y_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} x_1 \rightarrow y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{8} = -0.64 x_1 \rightarrow \text{Indica a direção de repulsão}$$

$$\text{Para } \lambda_2 < 0 : y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8} = 0.4 x_2 \rightarrow \text{Indica a direção de aproximação}$$

Repetindo o mesmo procedimento para os outros pontos fixos:

• O ponto fixo (0,0) tem $\lambda_{1,2} = 3, 4 > 0$ é um nó hiperbólico instável. Para $\lambda = 3$, $x=0$ é a direção de afastamento.

As trajetórias se afastam (aproximam) de um nó instável (ou assintoticamente estável) tangentes ao autovetor correspondente ao menor autovalor em módulo.

• O ponto fixo (0,3) tem $\lambda_{1,2} = -2, -3$ é um nó assintoticamente estável.

Para $\lambda_1 = -2$, $y = -3x$.

• O ponto fixo (4,0) tem $\lambda_{1,2} = -1, -4$ é um nó assintoticamente estável.

Para $\lambda_1 = -1$, $y = -3x/8$.

As separatrizes \rightarrow variedades estáveis do ponto de sela.

Voltando para a motivação: a competição entre coelhos e ovelhas

\rightarrow Não podem coexistir duas espécies que competem pela mesma fonte de alimento!

Este é um resultado conhecido como o **princípio da exclusão competitiva**

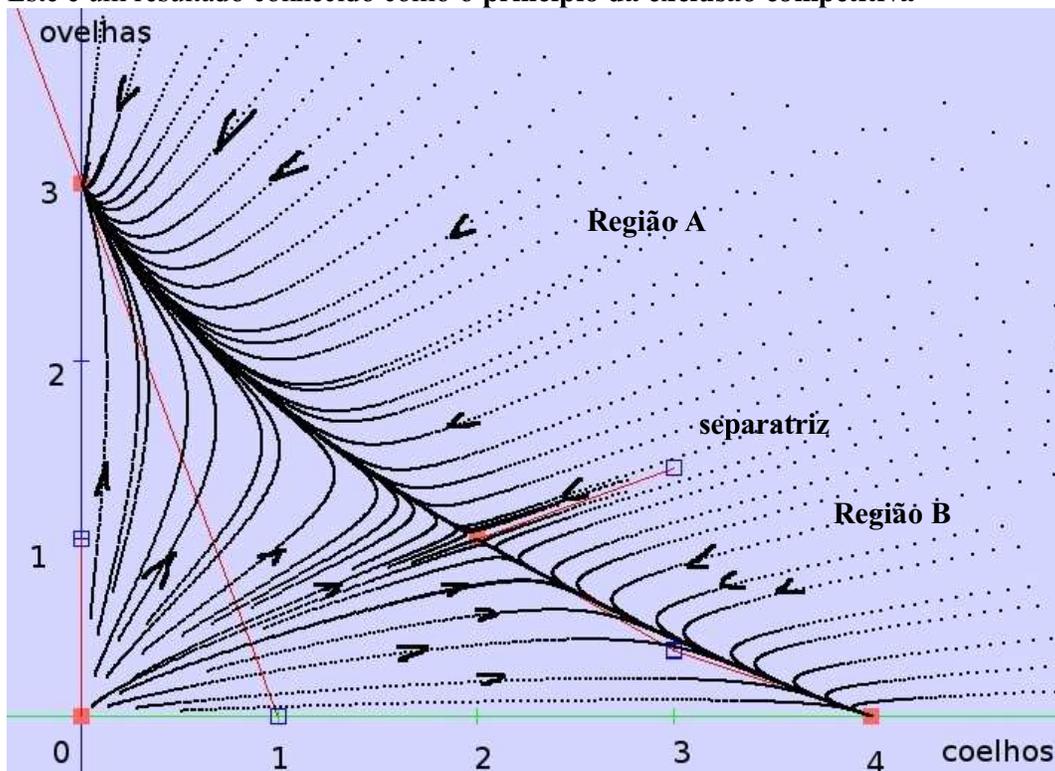


Fig.5 As órbitas cujas condições iniciais se encontram na região A convergem para o ponto fixo (0,3), da região B convergem para (0,4)