

FGE417- Fenômenos Não-Lineares em Física:
Introdução ao Caos Determinístico e aos Sistemas Dinâmicos
Prof. Reynaldo Daniel Pinto

Notas de Aula - Parte 6

Estabilidade Estrutural e Bifurcações

~ 1972 - René Thom - Estabilidade estrutural e morfogênese - Teoria da Catástrofe

Exemplo 1

Sistema de Van der Pol

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y = f(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= -\mu(x^2 - 1)y - x = g(x, y, \mu)\end{aligned}$$

Vimos que μ é um parâmetro do qual o comportamento dinâmico do sistema depende; μ é chamado de parâmetro de controle.

Exemplo 2

Em um oscilador harmônico amortecido, o amortecimento b e a frequência de oscilação ω_0 são parâmetros de controle.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y = f(x, y, b, \omega_0) \\ \dot{y} &= -by - \omega_0^2 x = g(x, y, b, \omega_0)\end{aligned}$$

Voltando ao exemplo do sistema de Van der Pol e simplificando a notação:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y = f_\mu(x, y) \\ \dot{y} &= -\mu(x^2 - 1)y - x = g_\mu(x, y)\end{aligned}$$

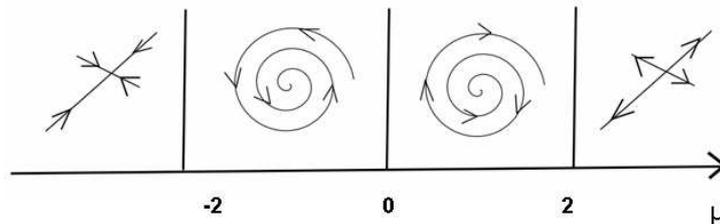


Figura 1: Pontos fixos do sistema de Van der Pol de acordo com o parâmetro μ

O sistema é estruturalmente estável em $\mu < -2$, $-2 < \mu < 0$, $0 < \mu < 2$, $\mu > 2$, em cada um desses intervalos todos os retratos de fases obtidos em função de μ são topologicamente equivalentes.

Quando $\mu = -2$, $\mu = 0$ ou $\mu = 2$, chamados de valores críticos do parâmetro de controle, o sistema **não** é estruturalmente estável pois uma pequena perturbação em μ implica em mudanças qualitativas no retrato de fases. Dizemos que para esses valores de μ o sistema dinâmico sofre uma bifurcação (análogo às transições de fase em mecânica estatística).

Caos em sistemas dinâmicos \longleftrightarrow Bifurcações

Bifurcações de codimensão 1

Um parâmetro é variado para produzir a bifurcação

Bifurcação Sela nó (bifurcação tangente)

Mecanismo básico de criação ou destruição de um par de pontos fixos.

Bifurcação

- retrato de fases muda qualitativamente
- novos pontos fixos podem aparecer
- pontos fixos podem desaparecer
- pontos fixos estáveis podem tornar-se instáveis e vice-versa

exemplo

Considere a equação:

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

Achando os pontos fixos:

$$\mu - x^{*2} = 0$$

Só existe solução real para $\mu \geq 0$

- para $\mu = 0 \rightarrow x^*$ é solução
- para $\mu > 0 \rightarrow x^* = \pm\sqrt{\mu}$ são soluções

O ponto onde as soluções começam a existir (neste exemplo $x = 0, \mu = 0$) é chamado de ponto de retorno (*turning point*)

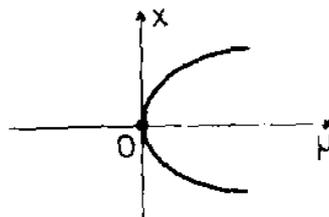


Figura 2: Pontos fixos em função de μ . $x = 0, \mu = 0$ é um *turning point*

A estabilidade dos pontos fixos é obtida investigando-se o sinal de $\frac{\partial x}{\partial y}$ calculado em x^* . Nesse caso $\frac{\partial x}{\partial y} = -2x$

- para $x = \sqrt{\mu}$, $\frac{\partial x}{\partial y}|_{\sqrt{\mu}} < 0 \rightarrow$ **assintoticamente estável**
- para $x = -\sqrt{\mu}$, $\frac{\partial x}{\partial y}|_{\sqrt{-\mu}} > 0 \rightarrow$ **instável**

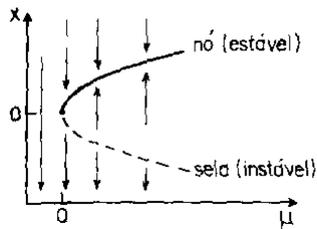


Figura 3: Diagrama de bifurcação do sistema $\dot{x} = \mu - x^2$. Bifurcação sela-nó

Bifurcação transcítica

Dois pontos fixos existem para todos os valores de um parâmetro, entretanto para $\mu = \mu_c$ as estabilidades desses pontos são trocadas.

Exemplo 3

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

Achando os pontos fixos:

$$\begin{aligned} x^* \rightarrow \mu x^* - x^{*2} &= 0 \\ x_1^* &= 0, x_2^* = \mu \end{aligned}$$

Encontrando a estabilidade dos pontos fixos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu - 2x$$

- $x_1^* \rightarrow \frac{\partial x}{\partial y}|_{x_1^*} = \mu$

- para $\mu < 0 \rightarrow$ estável
- para $\mu < 0 \rightarrow$ instável
- $x_2^* \rightarrow \frac{\partial x}{\partial y}|_{x_2^*} = -\mu$
 - para $\mu < 0 \rightarrow$ instável
 - para $\mu < 0 \rightarrow$ estável

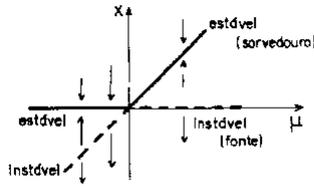


Figura 4: Bifurcação transcritical

Bifurcação de forquilha

Simetria : Um par de pontos fixos de mesma estabilidade aparece ou desaparece simultaneamente quando $\mu = \mu_c$

Exemplo 4:

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

Neste caso a simetria do problema está em que \dot{x} é invariante pela mudança de variáveis $x \rightarrow -x$

Os pontos fixos são $x_1^* = 0$ e $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{\mu}$ que existem para $\mu > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu - 3x^2$$

Encontrando a estabilidade dos pontos fixos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_1^*} = \mu$$

Que é estável para $\mu < 0$ e instável para $\mu > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_2^*} = -2\mu$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_3^*} = -2\mu$$

$x_{2,3}^*$ são estáveis para $\mu > 0$.

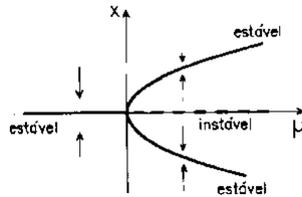


Figura 5: Bifurcação em forquilha (supercrítica)

Exemplo 5

$$\dot{x} = \mu x + x^3$$

Os pontos fixos são $x_1^* = 0$ e $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-\mu}$ que existem para $\mu < 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu + 3x^2$$

Encontrando a estabilidade dos pontos fixos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_1^*} = \mu$$

Que é estável para $\mu < 0$ e instável para $\mu > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_2^*} = 2|\mu|$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_3^*} = 2|\mu|$$

$x_{2,3}^*$ são instáveis para $\mu > 0$

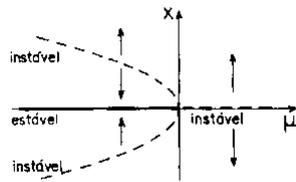


Figura 6: Bifurcação em forquilha (subcrítica)

Condições para ocorrência de bifurcação

Seja um sistema dinâmico $\dot{x} = f_\mu(x)$ em que x^* é ponto fixo.

$$f_\mu(x) \Big|_{x=x^*} = 0 \tag{1}$$

$\lambda \rightarrow$ autovalor associado à equação linearizada $\rightarrow \lambda$ se anula para $\mu = \mu_c$

$$\lambda = \frac{\partial f_\mu}{\partial x} \Big|_{(x,\mu)=(x^*,\mu_c)} = 0 \tag{2}$$

As equações 1 e 2 são condições necessárias mas não suficientes.

Exemplo 6

$$\dot{x} = \mu - x^3$$

$$x^* = \mu^{1/3}$$

Nesse caso as condições 1 e 2 são satisfeitas, porém o ponto de equilíbrio é único e assintoticamente estável. Por isso devemos procurar condições adicionais.

$$f_{\mu}(x^*) = 0 \longrightarrow \mu = \mu(x^*)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x^*} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x^*} = 0$$