

## Notas de Aula - Parte 7

### Bifurcação de Hopf

É responsável pelo aparecimento de ciclos e comportamentos oscilatórios. A cada bifurcação de Hopf uma nova frequência aparece no sistema. Seja o sistema de equações

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) = f_\mu(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) = g_\mu(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Em que  $P^* = (0, 0)$  e

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Os autovalores de  $J$  avaliada no ponto fixo  $P^*$  são  $\lambda = \mu \pm i$

- Para  $\mu < 0 \longrightarrow P^*$  é assintoticamente estável
- Para  $\mu > 0 \longrightarrow P^*$  é instável

Usando a transformação

$$\begin{aligned}x_1 &= r\cos\theta \\x_2 &= r\sin\theta\end{aligned}\tag{2}$$

De (1) e (2) e usando a regra da cadeia temos que

$$\dot{x}_1 = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta = -r\sin\theta + r\cos\theta(\mu - r^2)\tag{3}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta = r\cos\theta + r\sin\theta(\mu - r^2)\tag{4}$$

Multiplicando (3) e (4) por  $\cos\theta$  e  $\sin\theta$  respectivamente, e usando que  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  obtemos um novo sistema de equações diferenciais em termos das variáveis  $r$  e  $\theta$

$$\dot{r} = r(\mu - r^2)\tag{5}$$

$$\dot{\theta} = 1\tag{6}$$

Para  $\mu > 0$  existe uma órbita periódica de raio  $r^* = \sqrt{\mu}$ . Em  $\mu_c = 0$  há troca de estabilidade estrutural pois para  $\mu < 0$  a solução assintoticamente estável é um ponto de equilíbrio e para  $\mu > 0$  é um ciclo limite. E. Hopf(1942) estabeleceu as condições para ocorrência desse tipo de bifurcação num sistema  $n$ -dimensional \*.A bifurcação de Hopf é caracterizada pela existência de um par de autovalores puramente imaginários no ponto de bifurcação

Para o sistema (5) e (6) os autovalores são  $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$  e valor crítico do parâmetro é  $\mu_c = 0$ . Em qualquer bifurcação de Hopf para  $\mu \rightarrow \mu_c$ ,  $r^* \sim \sqrt{\mu}$

## Bifurcação de Dobra Cíclica

Seja a equação de Duffing

$$\ddot{X} + d\dot{X} + X + \alpha X^3 = f\cos(\omega t)\tag{7}$$

Que representa um sistema massa-mola com atrito e forçado, para o qual  $\alpha$ ,  $f$  e  $d$  são fixos e  $\omega$  é o parâmetro de controle.  $\bar{X}$  é a amplitude de oscilação no estado estacionário quando  $t \rightarrow \infty$ .

---

\*Poincaré(1892), Andronov(1929) estudaram esse mesmo mecanismo de bifurcação

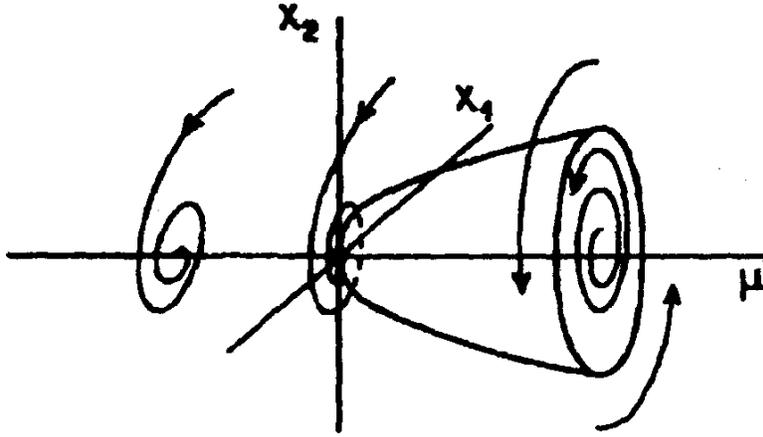


Figura 1: Bifurcação de Hopf supercrítica

$\bar{X}(\omega)$  é uma função resposta lisa exceto nos pontos P e Q onde ocorre a **bifurcação de dobra cíclica** e há o surgimento de histerese devido a coexistência de atratores.

### Bifurcação Flip ou Duplicação de Período

Em fluxos é necessário um sistema de no mínimo 3 dimensões para que ocorra bifurcação flip. Tanto a bifurcação flip quanto a em forquilha são caracterizadas pelo surgimento de 2 ramos (estáveis) após a bifurcação, porém na bifurcação em forquilha o sistema é atraído a um dos ramos de acordo com a condição inicial, enquanto que na bifurcação flip o sistema de fato oscila entre os dois ramos caracterizando duplicação do período.

A bifurcação flip é supercrítica quando há o surgimento de dois ramos estáveis e subcrítica quando aparecem ramos instáveis.

*Exemplo 1:*

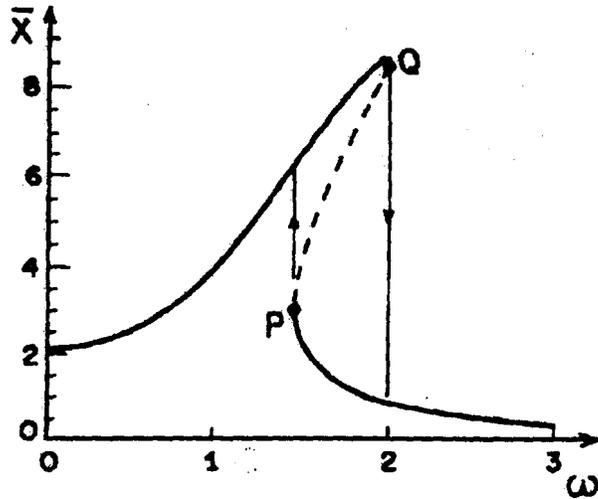


Figura 2: diagrama de bifurcação do sistema de Duffing

O sistema de Duffing sofre bifurcação flip com relação ao parâmetro  $\omega$ . A equação de Duffing (7) pode ser escrita como um sistema 3D. Fixando os valores  $d = 0.2$ ,  $\alpha = 1$  e  $f > 22$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{z} &= 1 \\ \dot{y} &= -0.2y - x - x^3 - f \cos(\omega z) \end{aligned}$$

**Exemplo 2:**

O mapa logístico

$$x_{n+1} = x_n \mu (1 - x_n)$$

sofre n bifurcações flip, (que configura uma cascata de duplicação de

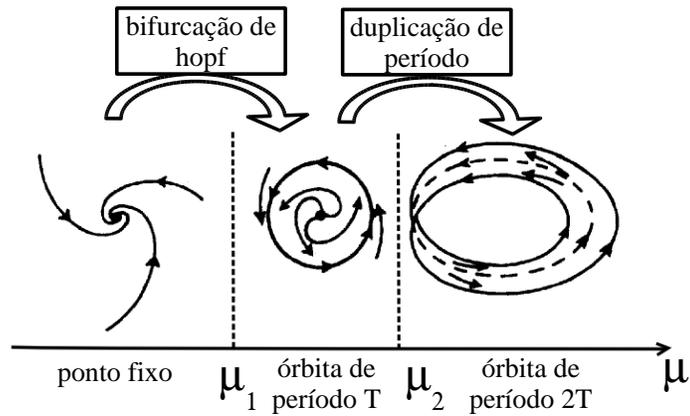


Figura 3: Diagrama esquemático: o sistema sofre um bifurcação de Hopf e em seguida uma duplicação de período, surgindo um órbita de período  $2T$  (faixa de Möbius)

período) levando de período  $T$  a um período  $2^n T$ . No mapa logístico uma sequência infinita de bifurcações flip leva ao aparecimento de *caos*.

### Bifurcação de Neimark ou Bifurcação Secundária de Hopf

Seja o sistema

$$\dot{x} = F_\mu(x)$$

que apresenta um ciclo limite para  $\mu = \mu_a$ .

- para  $\mu = \mu_a$  o sistema é localmente dissipativo
- para  $\mu \rightarrow \mu_b$  é localmente conservativo

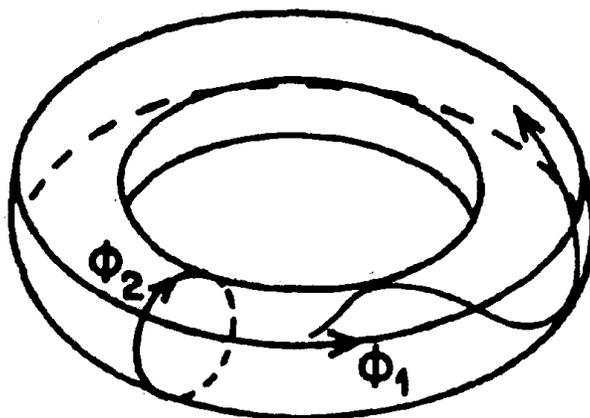


Figura 4:

- para  $\mu > \mu_b$  apresenta "amortecimento positivo" nas vizinhanças do ciclo limite

***Neimark:***

Aparecimento de uma nova frequência  $f_2$ . Se  $f_1$  e  $f_2$  forem comensuráveis a órbita se fecha a cada  $\frac{f_2}{f_1}$  oscilações ("phase locking").