

Introdução a Matematica Financeira

USP 2026

Prof. Roland Köberle

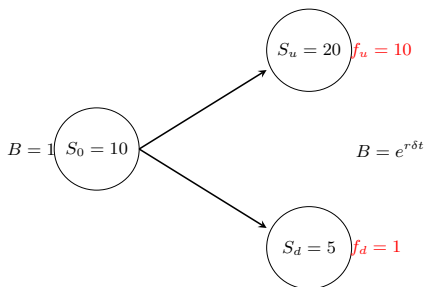
IFSC - USP

May 13, 2026

O Portfolio Replicante

Consideremos uma "rifa" ou opção que paga

- 1 f_u se o ativo subir
- 2 f_u se o ativo subir e f_d se cair
- 3 $S_d < S_0 < S_u$



Podemos montar um portfólio composto por:

- ϕ : unidades do ativo S_t .
- ψ : unidades de um título de renda fixa $B_t = e^{r\delta t}$.

O valor do portfólio $\Pi_t = \phi S_t + \psi B_t$ **replicante** no tempo δt deve satisfazer:

$$\begin{cases} \phi S_u + \psi e^{r\delta t} = f_u \\ \phi S_d + \psi e^{r\delta t} = f_d \end{cases}$$

Fixando o valor do portfólio

$$\phi = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}$$
$$\psi = e^{-r\delta t} \frac{S_u f_d - S_d f_u}{u - d}$$

Custo inicial = preço para compra/venda:

$$\Pi_0 = f_0 = \phi S_0 + \psi B_0, \quad B_0 = 1.$$

Inserindo ϕ e ψ :

$$f_0 = e^{-r\delta t} \left(f_u \frac{S_0 e^{r\delta t} - S_d}{S_u - S_d} + f_d \frac{S_u - S_0 e^{r\delta t}}{S_u - S_d} \right)$$

$$f_0 = e^{-r\delta t} [qf_u + \tilde{q}f_d], \quad \tilde{q} = 1 - q$$

com q a **probabilidade de risco neutra**

$$q = \frac{S_0 e^{r\delta t} - S_d}{S_u - S_d}, \quad S_0 e^{r\delta t} < S_u, \quad 0 \leq q \leq 1$$

(com ajuda de **Arbitragem**)

$$S_0 = e^{-r\delta t} [qS_u + \tilde{q}S_d].$$

Nota: q não é a probabilidade real de subida/descida no mercado.

A lei de um só preço

Se dois bens negociáveis idênticos \mathcal{A} e \mathcal{B} possuem o mesmo preço num certo instante, então possuem o mesmo preço também em qualquer outro instante.

- Suponha dois preços diferentes em $t = t_1$ para o mesmo ativo:

$$P_{\mathcal{A}} > P_{\mathcal{B}}$$

Suponha em $t_2 > t_1$ eles sejam iguais:

$$P_{\mathcal{A}}(t_1) > P_{\mathcal{B}}(t_1) \quad \text{mas} \quad P_{\mathcal{A}}(t_2) = P_{\mathcal{B}}(t_2).$$

Compre o mais barato por $P_{\mathcal{B}}$, curta o mais caro $P_{\mathcal{A}}$ e embolse a diferença $P_{\mathcal{A}} - P_{\mathcal{B}}$ sem gasto.

- Suponha dois preços iguais em $t = t_1$ para o mesmo ativo:

$$P_{\mathcal{A}} = P_{\mathcal{B}}$$

Suponha em $t_2 > t_1$ eles sejam diferentes:

$$P_{\mathcal{A}}(t_1) = P_{\mathcal{B}}(t_1) \quad \text{mas} \quad P_{\mathcal{A}}(t_2) \neq P_{\mathcal{B}}(t_2).$$

Neste caso temos um problema!

Arbitragem refinada \rightarrow Probabilidade de Arbitragem

Um portfólio Π replicante é de arbitragem, se o seu valor hoje satisfizer

$$\Pi(0) \leq 0$$

e no futuro $0 < t \leq T$:

- 1 possuir probabilidade nula de ter valor negativo

$$\text{Prob}_{\mathcal{P}}[\Pi(t < 0)] = 0$$

- 2 possuir probabilidade não-nula de ter valor positivo:

$$\text{Prob}_{\mathcal{P}}[\Pi(t > 0)] > 0$$

É possível construir uma máquina de fazer dinheiro!

Martingales

A **esperança** do preço da rifa subir em $t_0 + \delta t$ para f_u com probabilidade q e baixar para f_d com probabilidade \tilde{q} :

$$\langle f(t_0 + \delta t) \rangle_q \equiv qf_u + \tilde{q}f_d \rightarrow \begin{cases} f_u \text{ sobe com } q \\ f_d \text{ desce com } \tilde{q} \end{cases}$$

$$f(t_0) = e^{-r\delta t}[qf_u + \tilde{q}f_d] = e^{-r\delta t}\langle f_{t_0+\delta t} \rangle_q.$$

O preço descontado

$$\tilde{f}_t \equiv e^{-rt}f_t$$

$$\tilde{f}(t_0) = e^{-rt_0}f(t_0) = e^{-r(t_0+\delta t)}\langle f_{t_0+\delta t} \rangle_q = \langle \tilde{f}_{t_0+\delta t} \rangle_q$$

$$\tilde{f}(t_0) = \langle \tilde{f}(t_0 + \delta t) \rangle_q$$

MARTINGALE: o valor, que voce pode/deve esperar amanhã, é igual ao valor de hoje (Bachelier 1900)

$$\tilde{S}(t_0) = \langle \tilde{S}(t_0 + \delta t) \rangle_q$$

O ativo também é uma martingale

Receita geral para precificar qualquer derivativo/opções:

- 1 Exigir que $\tilde{S}(t)$ seja uma martingale.

O ativo também é uma martingale

Receita geral para precificar qualquer derivativo/opções:

- 1 Exigir que $\tilde{S}(t)$ seja uma martingale.
- 2 Calcular q pela equação:
$$qS_u + (1 - q)S_d = S_0e^{r\delta t}, \quad (S_d < S_0, S_0e^{r\delta t} < S_u).$$

O ativo também é uma martingale

Receita geral para precificar qualquer derivativo/opções:

- 1 Exigir que $\tilde{S}(t)$ seja uma martingale.
- 2 Calcular q pela equação:
$$qS_u + (1 - q)S_d = S_0e^{r\delta t}, \quad (S_d < S_0, S_0e^{r\delta t} < S_u).$$
- 3 Exigir que $\tilde{f}(t)$ seja uma martingale e calcular o valor f_0 da rifa pela equação analoga: $qf_u + (1 - q)f_d = f_0e^{r\delta t}$.

O ativo também é uma martingale

Receita geral para precificar qualquer derivativo/opções:

- 1 Exigir que $\tilde{S}(t)$ seja uma martingale.
- 2 Calcular q pela equação:
$$qS_u + (1 - q)S_d = S_0e^{r\delta t}, \quad (S_d < S_0, S_0e^{r\delta t} < S_u).$$
- 3 Exigir que $\tilde{f}(t)$ seja uma martingale e calcular o valor f_0 da rifa pela equação analoga: $qf_u + (1 - q)f_d = f_0e^{r\delta t}$.
- 4 Este procedimento será usado a seguir para precificar outros/todos os instrumentos financeiros, pois a rifa nada mais é do que um "derivativo" baseado no ativo subjacente.

Em $t + \delta t$, o preço de um ativo S_t pode tomar apenas dois valores:

- $S(t + \delta t) = \begin{cases} S_u \text{ sobe com } q \\ S_d \text{ desce com } \tilde{q} = 1 - q \end{cases}$

Revertendo:

sabendo possíveis valores amanhã, calculo-os hoje (martingale)

$$\langle e^{-r\delta t} S_{t+\delta t} \rangle_q = e^{-r\delta t} (S_u q_{now} + S_d \tilde{q}_{now}) = S_{now},$$

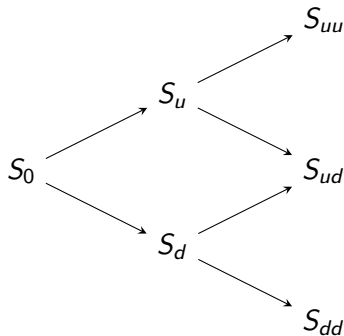
Este é o nosso modelo do mercado e dele extraímos a probabilidade risco-neutra q !

Árvore Binomial de Múltiplos Passos

Para N períodos, o preço no nó (n, j) é dado por:

$$S_u = uS_t, S_d = dS_t$$

$$S_{n,j} = S_0 u^j d^{n-j}, \quad (n \text{ passos}, j \text{ subidas})$$



A precificação é feita por **indução reversa**, do vencimento para o presente.

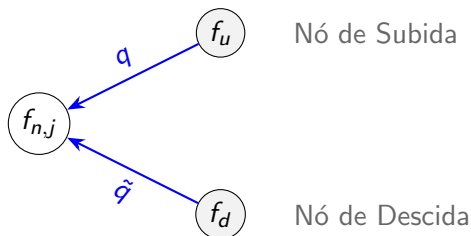
Precificação: O Caminho de Volta (Indução Reversa)

Para precificar uma Call ou Put, trabalhamos do futuro para o presente:

❶ **No Vencimento (T):**

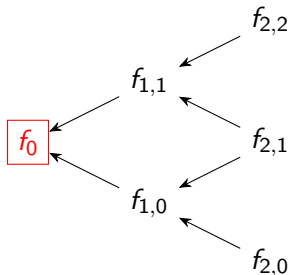
- Call: $c_T = (S_T - K)_+$
- Put: $p_T = (K - S_T)_+$

❷ **Passos Intermediários:** Regredimos um passo por vez.



Arvore de 2 Períodos

A precificação completa percorre todos os nós j no tempo n :



Passo 1: Retorno

Passo 2: Preço Hoje

Onde cada nó é calculado por:

$$f_{n,j} = e^{-r\Delta t} [qf_{n+1,j+1} + (1 - q)f_{n+1,j}]$$

Estando num nó no instante t (chamado de "now") precisamos calcular:

- 1 A probabilidade risco-neutra q para transitar ao instante seguinte. Impondo, que $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ seja uma martingale,

$$\langle e^{-r\delta t} S_{t+\delta t} \rangle_q = e^{-r\delta t} (s_u q_{now} + s_d (1 - q_{now})) = s_{now},$$

Resulta para a probabilidade risco-neutra q_{now}

$$q_{now} = \frac{e^{r\delta t} s_{now} - s_d}{s_u - s_d},$$

- 2 Impondo que a opção também seja uma martingale, o valor dela no instant t é

$$f_{now} = e^{-r\delta t} (q_{now} f_u + (1 - q_{now}) f_d).$$

O Modelo sem Juros $r = 0$

Os ativos sobem e baixam pelo mesmo valor Δ em cada passo:

$$S_{now} - S_d = \Delta, S_u - S_d = 2\Delta$$

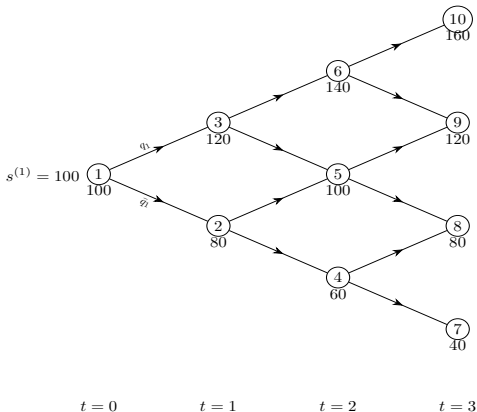
A probabilidade q depende do nó via S_{now} :

$$\begin{aligned} q_{now} &= \frac{e^{r\delta t} S_{now} - S_d}{S_u - S_d} = \frac{(e^{r\delta t} - 1)S_{now} + S_{now} - S_d}{2\Delta} \\ &= \frac{(e^{r\delta t} - 1)S_{now} + \Delta}{2\Delta} = \frac{1}{2} + \frac{S_{now}}{2\Delta}(e^{r\delta t} - 1). \end{aligned}$$

Para $r = 0$:

$$q = 1/2$$

$$f_{n,j} = \frac{1}{2}(f_{n+1,j+1} + f_{n+1,j})$$



X_3	Nó final	Trajektorias possíveis	No. de traj.
0	{7}	ddd	$1 = \binom{3}{0}$
1	{8}	udd, dud, ddu	$3 = \binom{3}{1}$
2	{9}	uud, udu, duu	$3 = \binom{3}{2}$
3	{10}	uuu	$1 = \binom{3}{3}$

Árvore Binomial de 3 Passos ($r = 0, \Delta = 20, q = 1/2$)

Note que: $f^{(1)} = \frac{1}{2^3}(f^{(10)} + 3f^{(9)}) = \frac{1}{2^2}(f^{(6)} + 2f^{(5)}) = \frac{1}{2}(f^{(3)} + f^{(2)})$

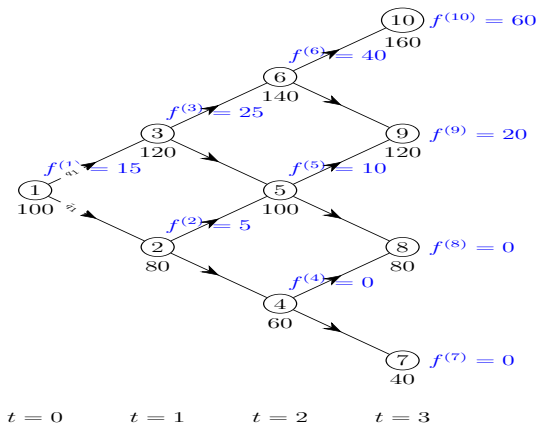


Figure: Opção **call** em árvore de 3 passos: $K = 100, q = 1/2$.

Estrategia de *hedging* um *call*: $r = 0, \Delta = 20$

$$\Pi = \phi S + \psi B$$

$$q_{now} = \frac{s_{now} e^{r\delta t} - s_d}{s_u - s_d}$$

$$f_{now} = e^{-r\delta t} (q_{now} f_u + (1 - q_{now}) f_d)$$

$$\phi = \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d} = \frac{f_u - f_d}{2\Delta},$$

$$\psi = B_{now}^{-1} (f_{now} - \phi s_{now})$$

Vendedor

Exemplo com: $r = 0, \Delta = 20, B_t = 1$

O portofolio é *auto-financiante*:

Não deve entrar nem sair grana durante o processo de *hedging*

$r = 0, \Delta = 20$, trajetória: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 10$

- Em $t = 0 \rightarrow$ nó 1 $\rightarrow f_0 = \$15, S_0 = S^{(1)} = 100$

$$\phi_0 = \frac{25-5}{2\Delta} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}S_0 = \frac{1}{2}100 = 50$$

Emprestamos $50 - 15 = 35$.

$$\Pi = f_0 = \phi_0 s_0 + \psi_0 \quad \rightarrow \quad \psi_0 = f_0 - \phi_0 S_0 = -35$$

- Em $t = 1 \rightarrow$ nó 3 $\rightarrow S_1 = S^{(3)} = 120$.

Durante este período ϕ_0, ψ_0 não mudaram, mas $S = S_1$

$$f_1 = \phi_0 s_1 + \psi_0 = \frac{1}{2}120 - 35 = 25 \quad (1)$$

Hedge: $\phi_1 = \frac{40-10}{2\Delta} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{1}{4} * S_1 = 30$

$$\text{Divida sobre para } 35+30=65 \rightarrow \psi = 25 - \frac{3}{4}120 = -65.$$

$$f_1 = \phi_1 s_1 + \psi_1$$

- Em $t = 2 \rightarrow$ nó 6 $\rightarrow S_2 = S^{(6)} = 140$.

$$f_2 = \phi_1 S_2 + \psi_1 = \frac{3}{4} 140 - 65 = 40$$

Hedge: $\phi_2 = \frac{60-20}{2\Delta} = 1 \rightarrow \frac{1}{4} * 140 = 35$.

Divida sobe para $65 + 35 = 100 \rightarrow \psi = 40 - 1 * 140 = -100$.

- Em $t = 3 \rightarrow$ nó 10 $\rightarrow S_3 = S^{(10)} = 160$.

Vendemos o ativo por \$160, pagamos a divida de $-\psi = \$100$

Sobra:

$$\mathbf{\$60 = 160 - 100 = S_3 - K}$$

satisfazendo o nossa obrigação para com o comprador!

Percorremos a árvore num particular caminho, que vamos chamar de *filtração* $\mathcal{F} = \{1, 3, 6, 10\}$. Neste caminho calculamos os processos previsíveis

$$\begin{aligned}
 S_{t=0,1,2,3} &= [&& 100, && 120, && 140 & 160] \\
 f_{t=0,1,2,3} &= [&& 15, && 25, && 40 & 60] \\
 \phi_{t=0,1,2,3} &= [&& \frac{1}{2}, && \frac{3}{4}, && 1 & x] \\
 \psi_{t=0,1,2,3} &= [&& -35, && -65, && -100 & x] \\
 f_3 = S_T - K &= \phi_2 s_3 + \psi_2 = 1 * 160 - 100 = 60
 \end{aligned}$$

Put Americano vs. Europeu: Exercício Ótimo

Considerando $K = 104$, $r = 5\%$, $\delta t = 1$, $q = 0.6280$:

Put Europeu

- Só permite exercício em $t = 2$.
- No nó $S = 80$, o valor é apenas a continuação: $f_d = 18.93$.
- **Preço Hoje:** $f_0 = 7.16$.

Put Americano

- Exercício em qualquer t .
- No nó $S = 80$,
 $104 - 80 = 24 > 18.93$.
- **Preço Hoje:** $f_0 = 10.19$.

Conclusão sobre Arbitragem

Para a opção Americana, o valor em cada nó deve ser $\max(f_t, K - S_t)$. Se usássemos o valor europeu (18.93) para uma opção que permite exercício imediato por 24.00, criaríamos uma oportunidade de arbitragem.

O limite do contínuo: o passeio aleatório unidimensional

p : probabilidade de um passo para a direita

$\tilde{p} = 1 - p$: probabilidade de um passo para a esquerda.

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

$$t = N\Delta t \quad \rightarrow \quad x(N\Delta t) = \sum_{i=1}^N x_i, \quad x_i \text{ independentes}$$

$$\langle x_i \rangle = pl + \tilde{p}(-l) = (p - \tilde{p})l, \quad \langle x_i^2 \rangle = pl^2 + \tilde{p}(-l)^2 = l^2,$$

$$\sigma_i^2 = \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 = [1 - (p - \tilde{p})^2]l^2 = 4p\tilde{p}l^2.$$

$$\langle x(N\Delta t) \rangle = N\langle x_i \rangle = N(p - \tilde{p})l, \quad \text{Var}[x(N\Delta t)] = N\sigma_i^2 = 4Np\tilde{p}l^2$$

$$W(k) = \binom{N}{k} p^k \tilde{p}^{N-k}.$$

$$x(N\Delta t) = kl - (N - k)l = ml, \quad m = 2k - N$$

$$P[ml \leq x \leq (m + \Delta m)l] = (8\pi N p \tilde{p})^{-1/2} e^{-\frac{[m - N(p - \tilde{p})]^2}{8N p \tilde{p}}} + \mathcal{O}(1/\sqrt{N})$$

$$= (2\pi N \sigma_i^2)^{-1/2} e^{-\frac{[x - N\langle x_i \rangle]^2}{2N \sigma_i^2}} l.$$

Partindo de $x_1 = 0$ após N passos de tamanho $l = \Delta x$ o andarilho estará no instante $t = N\Delta t$ na posição $x_N = ml$ com probabilidade dada pela equ.(??)

$$P[x(N\Delta t) \sim ml] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{[x - \langle x \rangle]^2}{2\sigma^2}} \Delta x.$$

A distribuição Gaussiana

$$N_x(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

é chamada *normal*. Em termos da distribuição normal cumulativa

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x) &\equiv \int_{-\infty}^x N_y(0, 1) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x dy e^{-y^2/2}, \\ 0 \leq \mathcal{N}(x) \leq 1, \quad \mathcal{N}(0) &= 1/2, \quad \mathcal{N}(\infty) = 1 \end{aligned}$$

temos

$$\sum_{k=k_1}^{k=k_2} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \sim \mathcal{N}\left(\frac{k_2 - Np}{\sqrt{Npq}}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{k_1 - Np}{\sqrt{Npq}}\right). \quad (2)$$

O limite do contínuo $\Delta t \rightarrow 0$ e processo de Wiener

$$N \rightarrow \infty, \quad \Delta t \rightarrow 0 \text{ com } t = N\Delta t > 0 \text{ fixo.}$$
$$\Delta x = l \rightarrow 0$$

Media e a variança :finitos! $N = t/\Delta t$

$$\langle x(N\Delta t) \rangle = \frac{(p - \tilde{p})l}{\Delta t} t, \quad \text{Var}[x(N\Delta t)] = 4p\tilde{p} \frac{l^2}{\Delta t} t$$

$$\left. \begin{array}{l} (p - \tilde{p})l \\ l^2 \end{array} \right\} \sim \Delta t$$

$$l^2 = 2D\Delta t, \quad D : \text{ constante de difusão ("balístico" } l \sim vt)$$

$$(p - \tilde{p})l = \nu\Delta t, \quad \nu : \text{ arrasto} \rightarrow (2p - 1)l = \nu\Delta t, \quad p = \frac{1}{2}\left(1 + \nu\frac{\Delta t}{l}\right)$$

$$l^2 = 2D\Delta t \rightarrow \frac{\Delta t}{l} = \sqrt{\frac{\Delta t}{2D}}$$

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \nu \frac{\Delta t}{l}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\nu}{\sqrt{2D}}\sqrt{\Delta t}\right)$$

$$p\tilde{p} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\nu^2}{2D}\Delta t\right) \rightarrow \frac{1}{4}$$

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(p - \tilde{p})l}{\Delta t} t = \nu t$$

$$\text{Var}[x(t)] = \sigma^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 4p\tilde{p} \frac{l^2}{\Delta t} t = 2Dt$$

$$p_D[x(t)]dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\nu t)^2}{4Dt}} dx \text{ com } \int_{-\infty}^{\infty} p_D[x]dx = 1$$

A equação de Difusão e o processo de Wiener

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial W^2} \right) p_D(W, t) = 0 \quad W(t) \equiv \frac{x}{2D}$$

Propriedades de $W(t)$

$$\begin{aligned}W(0) &= 0 \\ \langle W(t) \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} W p[W] dW = 0, \\ \langle W^2(t) \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} W^2 p[W] dW = t\end{aligned}$$

A função de correlação de 2 pontos

$$\langle W(t_2)W(t_1) \rangle, \quad t_1 < t_2$$

Incrementos $W(t_2) - W(t_1)$ são **independentes** de $W(t_1)$.

$$\langle [W(t_2) - W(t_1)]W(t_1) \rangle = \langle W(t_2) - W(t_1) \rangle \langle W(t_1) \rangle = 0,$$

$$\langle W(t_2)W(t_1) \rangle = \langle W^2(t_1) \rangle = t_1.$$

Para qualquer t_1, t_2 :

$$\langle W(t_2)W(t_1) \rangle = \min(t_1, t_2).$$

$-\infty < w < \infty$ é normalmente distribuído com $w \in N(0, 1)$.

$$W(t) = \sqrt{t}w, \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{V}ar(W) = \langle W^2 \rangle = \langle (\sqrt{t}w)^2 \rangle = t\mathcal{V}ar(w) = t$$

$$W(t) = \sqrt{t}w, \quad t \geq 0$$

$$W(t) = W(t) - W(0) = \sqrt{t}w, \quad t \geq 0$$

$$W(t) - W(s) = \sqrt{t-s}w, \quad t \geq s$$

Definição do processo de Wiener

- 1 $W(0) = 0$.
- 2 Para todo $t > 0$ os incrementos futuros $W(t + h) - W(t)$, $h \geq 0$ são independentes dos valores $W(s)$, $s \leq t$.
- 3 Incrementos $W(t_2) - W(t_1)$, $t_2 \geq t_1$ são normalmente distribuídos com média nula e variância $t_2 - t_1$:

$$W(t_2) - W(t_1) = \sqrt{t_2 - t_1} w.$$

- 4 $W(t)$ é contínuo em t

$$\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t) = \sqrt{\Delta t} w$$

Wiener mean with # samples=1000

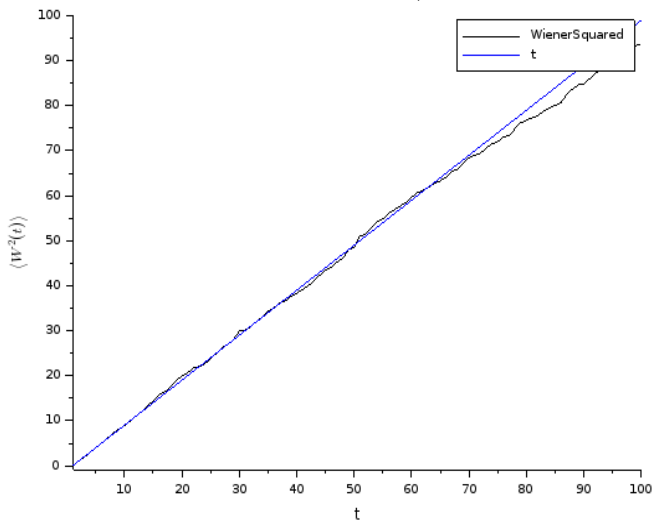


Figure: Verificação de $\langle W^2(t) \rangle = t$.

$$s_u = us_{now} = s_{now} e^{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$s_d = ds_{now} = s_{now} e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$q = \frac{e^{r\delta t} s_{now} - s_d}{s_u - s_d} = \frac{e^{r\delta t} - e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}} - e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}} = \frac{e^{(r-\mu)\delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}$$

$$q = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r - \mu - \sigma^2/2}{\sigma} \sqrt{\delta t} \right). \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
S_T &= S_0 u^k d^{N-k} = S_0 e^{(\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t})k} e^{(\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t})(N-k)} \\
&= S_0 e^{\mu N\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}(2k-N)} = S_0 e^{\mu T + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}m} \\
&= S_0 e^{\mu T + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}X_m} = S_0 e^{\mu T + \sigma\sqrt{T}\frac{X_m}{\sqrt{N}}} \\
&= S_0 e^{\mu T + \sigma\sqrt{T}Y_N}
\end{aligned}$$

$$\langle Y_N \rangle = \frac{N(q - \tilde{q})}{\sqrt{N}} = \sqrt{N} \frac{r - \mu - \sigma^2/2}{\sigma} \sqrt{\delta t} = \frac{r - \mu - \sigma^2/2}{\sigma} \sqrt{T}.$$

$$\mathcal{V}ar(Y_N)_q = \mathcal{V}ar(X_m)/N = \frac{4Nq\tilde{q}}{N} = 1 + O(\delta t),$$

$$\langle \mu T + \sigma\sqrt{T}Y_N \rangle_q = \mu T + (r - \mu - \sigma^2/2)T = (r - \sigma^2/2)T$$

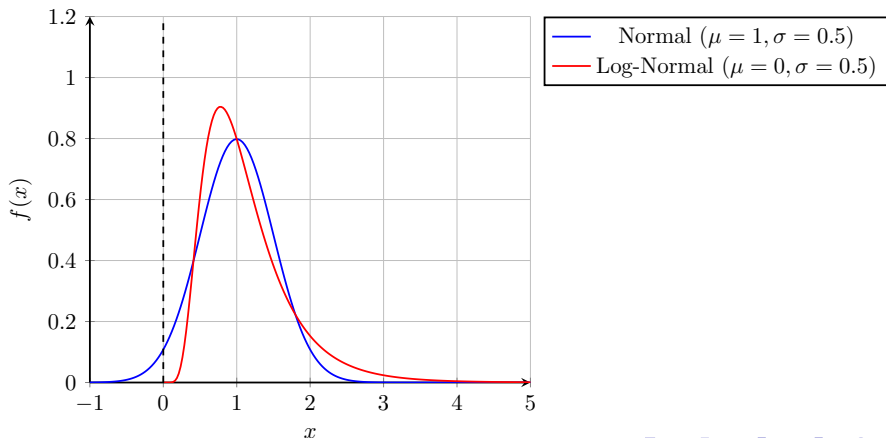
$$S_T = S_0 e^{(r - \sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}w},$$

com a Gaussiana $w \sim N(0, 1)$.

$\log(S_T/S_0)$ é normal e S_T/S_0 é *log-normal*

Distribuição log-normal

$$N_y(m, \tilde{\sigma}) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} e^{-(y-m)^2/(2\tilde{\sigma}^2)} dy.$$



A formula de Black

$$\langle x \rangle = \int_0^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} e^{-(\ln x - m)^2 / (2\tilde{\sigma}^2)}. \quad (4)$$

Com $y = \ln x$ temos

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^y dy \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} e^{-(y-m)^2 / (2\tilde{\sigma}^2)}. \quad (5)$$

$$-\frac{(y-m)^2}{2\tilde{\sigma}^2} + y = -\frac{[y - (m + \tilde{\sigma}^2/2)]^2}{2\tilde{\sigma}^2} + (m + \tilde{\sigma}^2/2).$$

Já que a distribuição normal é normalizada a integral sobre y dá $= 1$ e obtemos

$$\langle x \rangle = e^{m + \tilde{\sigma}^2/2}. \quad (6)$$

Note que $m = \langle \ln x \rangle \neq \ln \langle x \rangle = m + \sigma^2/2!$

$$\langle e^Y \rangle = e^{\langle Y \rangle + \frac{1}{2} \text{Var}(Y)}, \quad (7)$$

Para uma opção *call* Europeia $Z = (S_T - K)_+$ e seu valor em $t = 0$ é dado pela esperança descontada

$$c = \left\langle e^{-rT} (S_T - K)_+ \right\rangle_q$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/2} \left(S_0 e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma\sqrt{T}x} - K e^{-rT} \right)_+$$

Para que o integrando seja positivo devemos ter $x > x_0$ com

$$S_0 e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma\sqrt{T}x_0} = K e^{-rT}$$

ou seja

$$x_0 = \frac{-\ln \frac{S_0}{K} + (\frac{1}{2}\sigma^2 - r)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

$$\begin{aligned}
c &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} dx e^{-x^2/2} \left(S_0 e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma\sqrt{T}x} - Ke^{-rT} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} dx \left(S_0 e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T})^2 - \sigma^2 T} - Ke^{-rT} e^{-x^2/2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(S_0 \int_{x_0 - \sigma\sqrt{T}}^{\infty} dx e^{-x^2/2} - Ke^{-rT} \int_{x_0}^{\infty} dx e^{-x^2/2} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(S_0 \int_{-\infty}^{-x_0 + \sigma\sqrt{T}} dx e^{-x^2/2} - Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{-x_0} dx e^{-x^2/2} \right). \\
&= S_0 \mathcal{N}(-x_0 + \sigma\sqrt{T}) - Ke^{-rT} \mathcal{N}(-x_0).
\end{aligned}$$

$$c = S_0 \mathcal{N}\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT} \mathcal{N}\left(\frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

A distribuição normal cumulativa

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x dy e^{-y^2/2}.$$

Formula de **Black** para uma opção *call* Europeia

$$c(S_0, T) = S_0 \mathcal{N}(d_+) - Ke^{-rT} \mathcal{N}(d_-)$$

com

$$d_{\pm} = \frac{\ln(S_0/K) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$c(S, t) = S \mathcal{N}(d_+) - Ke^{-r\tau} \mathcal{N}(d_-)$$

$$d_{\pm}(S) = \frac{\ln(S/K) + (r \pm \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \tau = T - t$$

Hedging? $\Delta t \rightarrow 0$

Redistribuição continuamente!!

$$p(s, t) = Ke^{-r\tau} \mathcal{N}(-d_-) - s \mathcal{N}(-d_+).$$

$$c \equiv c(d_+, d_-) \quad \rightarrow \quad p = -c(-d_+, -d_-) \quad \mathcal{N}(-x) = 1 - \mathcal{N}(x)$$

$$dW(t) = W(t + dt) - W(t) = \sqrt{dt}w \rightarrow \langle w^2 \rangle = 1,$$

$$\langle dW^2 \rangle = dt.$$

$$\text{Var}(dW^2) = \langle dW^4 \rangle - \langle dW^2 \rangle^2.$$

$$\langle dW^4 \rangle = 3\langle dW^2 \rangle^2 \quad \text{Var}(dW^2) = 3dt^2 - dt^2 = 2dt^2$$

Lemma de Ito:

$$dW^2 = dt$$

Funções :

$$df(W) = f'(W)dW + \frac{1}{2}f''(W)(dW)^2.$$

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad \rightarrow \quad X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t$$

$$Y_t = f(X_t) \quad \rightarrow \quad dY_t = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d^2X_t$$

$$dY_t = f'(X_t)(\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X_t)dt$$

$$Y_t = e^{X_t} = e$$

$$dY_t = Y_t \left(\sigma dW_t + \left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt \right).$$

Se $\mu = -\sigma^2/2$, então Y_t é a martingale de Wald da equ.(??), pois não tem o termo de arrasto:

$$Y_t = Y_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}, \quad dY_t = \sigma Y_t dW_t.$$

$$dX_t = \mu dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i dW_t^i$$

Temos a seguinte propriedade

$$dW_t^i dW_t^j = \delta_{ij} dt$$

Verifiquemo-la para dois processos W_1 e W_2 . Primeiro note, que

$$\langle dW_1 dW_2 \rangle = \langle dW_1 \rangle \langle dW_2 \rangle = 0.$$

$$\int_{t_0}^t F(t) dW = \int_{t_0}^t F(t) \frac{dW}{dt} dt.$$

Defina

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots t_{n-1} \leq t$$

Pontos intermediários em $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$

$$S_n = \sum_{i=1}^n F(\tau_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})], \quad \tau_i = (1 - \alpha)t_{i-1} + \alpha t_i, \quad 0 \leq \alpha < 1$$

e tome o limite.

Dependencia em α :

$$\begin{aligned}\langle S_n \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n W(\tau_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})] \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle W((1-\alpha)t_{i-1} + \alpha t_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})] \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n [(1-\alpha) \min(t_{i-1}, t_i) - (1-\alpha) \min(t_{i-1}, t_{i-1}) + \alpha \min(t_i, t_i) - \alpha \min(t_i, t_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha (t_i - t_{i-1}) = \alpha (t - t_0),\end{aligned}$$

dependencia em α !!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (X_n - X)^2 \rangle = 0.$$

Integral de Ito $\tau_i = t_{i-1}$, i.e. $\alpha = 0$

$$\int_{t_0}^t dW(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n [W(t_i) - W(t_{i-1})] \right\} = W(t) - W(t_0).$$

$$\textcircled{1} \quad dW(t)^2 = dt$$

$$\int_{t_0}^t G(t') [dW(t')]^2 = \int_{t_0}^t G(t') dt'.$$

$$0 = I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \left[\sum_{i=1}^n G_{i-1} (\Delta W_i^2 - \Delta t_i) \right]^2 \right\rangle =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left\langle \sum_{i=1}^n \underbrace{(G_{i-1})^2}_{\text{red}} \underbrace{(\Delta W_i^2 - \Delta t_i)^2}_{\text{red}} \right\rangle \rightarrow \left(\langle \Delta W_i^2 \rangle = \Delta t_i, \langle X^4 \rangle = 3 \langle X^2 \rangle^2 \right) \right\}$$

$$+ 2 \sum_{i < j} \left\langle \underbrace{G_{i-1} G_{j-1} (\Delta W_j^2 - \Delta t_j)}_{\text{red}} \underbrace{(\Delta W_i^2 - \Delta t_i)}_{\text{red}} \right\rangle \left. \right\} \leftarrow = 0$$

$$\langle (\Delta W_i^2 - \Delta t_i)^2 \rangle = 2 \Delta t_i^2$$

$$I = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \Delta t_i^2 \langle (G_{i-1})^2 \rangle \right] \leq 2 \Delta t \int G(t)^2 dt \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}\left\langle \int_{t_0}^t dW(t') G(t') \int_{t_0}^t dW(s') F(s') \right\rangle &= \int_{t_0}^t dt' \langle G(t') F(t') \rangle \\ \left\langle \sum_i G_{i-1} \Delta W_i \sum_j F_{j-1} \Delta W_j \right\rangle &= \sum_i G_{i-1} F_{i-1} \langle (\Delta W_i)^2 \rangle \\ &+ \sum_{i>j} G_{i-1} F_{j-1} \langle \Delta W_i \Delta W_j \rangle \quad \leftarrow 0 \\ &= \sum_i G_{i-1} F_{i-1} \langle (\Delta W_i)^2 \rangle\end{aligned}$$

Equações diferenciais estocásticas

$$d\mathbf{X} = \mathbf{a}(t)dt + \mathbf{b}(t)d\mathbf{W}(t) \rightarrow X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t a(t')dt' + \int_{t_0}^t b(t')dW(t')$$

$$\langle X(t) \rangle = \langle X_0 \rangle + \int_{t_0}^t a(t')dt'$$

$$\langle [X(t) - \langle X_0 \rangle][X(s) - \langle X_0 \rangle] \rangle = \langle \int_{t_0}^t b(t')dW(t') \int_{t_0}^s b(s')dW(s') \rangle$$

Com $t > s$: $\int_{t_0}^s \rightarrow \int_{t_0}^t \leftarrow (b(s') = 0 \quad s' > s)$

$$\langle [X(t) - \langle X_0 \rangle][X(s) - \langle X_0 \rangle] \rangle = \int_{t_0}^{\min(t,s)} dt' b(t')^2, \quad \forall t, s \geq t_0$$

$$d\mathbf{X} = \mu dt + \sigma d\mathbf{W}(t), \quad X_0 = 0, t_0 = 0$$

$$\langle X \rangle = \mu t, \quad \langle X(t)X(s) \rangle = \sigma^2(\min(t, s) - t_0), \quad \text{Var} = \sigma^2 t$$

$$p[X(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}},$$

$$\tilde{S}_t = B_t^{-1} S_t \quad \rightarrow \quad \langle \tilde{S}_{t+\delta t} \rangle_q = \tilde{S}_t$$

$$\langle X_j | X_1, \dots, X_i \rangle = X_i, \quad \forall i \leq j.$$

$$E_t = \langle X | \mathcal{F}_t \rangle_p \leftarrow \text{filtracao} + p$$

em t $\langle \cdot | \mathcal{F}_t \rangle$: \mathcal{F}_t : esperança futura

$t = 0$: a filtração \mathcal{F}_0 é $\mathcal{F}_0 = \{1\} \leftarrow$ nó 1.

$\langle \dots \rangle_p$ é aleatorio

$$\langle X | \mathcal{F}_t \rangle_p:$$

para cada tempo temos varios nós com suas probabilidades para lá chegar.

$$\langle X_t | \mathcal{F}_s \rangle = X_s, \quad \forall s \leq t$$

Exemplos de Martingales

1 Wiener:

$$\begin{aligned}\langle W_t | \mathcal{F}_s \rangle &= \langle (W_t - W_s) + W_s | \mathcal{F}_s \rangle \\ &= \langle (W_t - W_s) | \mathcal{F}_s \rangle + \langle W_s | \mathcal{F}_s \rangle \\ &= 0 + W_s, \quad s \leq t\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}\langle I_t | \mathcal{F}_s \rangle &= I_s, \quad s \leq t, \quad (\langle \int_0^t F_s^2 ds \rangle < \infty) \\ \langle \int_0^t F(u) dW_u | \mathcal{F}_s \rangle &= \langle \int_0^s F(u) dW_u | \mathcal{F}_s \rangle + \underbrace{\langle \int_s^t F(u) dW_u | \mathcal{F}_s \rangle}_0\end{aligned}$$

Exemplos de Martingales

1 Martingale de Wald

$$Y_t = \exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right), t \geq 0$$

Derivando: $dY_t = \lambda Y_t dW_t$

2

$$dY_t = \sigma_t Y_t dW_t \tag{8}$$

com σ_t for \mathcal{F}_t -mensuravel.

$$\begin{aligned} \langle Y_t + dY_t | \mathcal{F}_t \rangle &= \langle Y_t | \mathcal{F}_t \rangle + \langle \sigma_t Y_t dW_t | \mathcal{F}_t \rangle \\ &= Y_t + \sigma_t Y_t \langle dW_t | \mathcal{F}_t \rangle = Y_t, \end{aligned} \tag{9}$$

onde σ_t, Y_t são \mathcal{F}_t -mensuraveis e portanto podemos tira-los da esperança .

- $g(s) Y_s$, ($g(s)_{s \geq 0}$ dado a priori)

não é uma martingale:

$$\langle g(t) Y_t \mid \mathcal{F}_s \rangle = g(t) \langle Y_t \mid \mathcal{F}_s \rangle = g(t) Y_s \neq g(s) Y_s, \quad s < t.$$

$g(t)$ vs \mathcal{F}_s , $g(t)$ vs aleatoriedades!

Vide $\tilde{S}(t)$ vs $e^{rt} \tilde{S}(t) = S(t)$

Martingales e Arbitragem

Um portfólio é de arbitragem, se

$$\Pi(0) \text{ for } \leq 0$$

e no futuro $0 < t \leq T$:

- 1 possuir probabilidade nula de ter valor negativo

$$\text{Prob}_{\mathcal{P}}[\Pi(t) < 0] = 0$$

- 2 possuir probabilidade não-nula de ter valor positivo:

$$\text{Prob}_{\mathcal{P}}[\Pi(t) > 0] > 0$$

$$\rightarrow \langle \Pi(t) \rangle > 0$$

$$\{\Pi(0) = e^{-rt} \langle \Pi(t) | \mathcal{F}_0 \rangle_{\mathcal{Q}} > 0.\}$$

Precificação via Formula de Feynman/Kac

$$dX_s = a(X_s, s)ds + b(X_s, s)dW_s, \quad (a, b \in C, \text{lim})$$

Condição inicial $X_t = x$, onde x e t são dados e fixos

$$\begin{aligned} df(X_s, s) &= \frac{\partial f}{\partial s}(X_s, s)ds + [d_x f(X_s, s)] = \\ &= \frac{\partial f}{\partial s}(X_s, s)ds + \left\{ \left(a(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x, t)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(X_s, t) \right\} ds + \\ &\quad + b(X_s, s) \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dW_s. \end{aligned}$$

Gerador infinitesimal $\mathcal{A} : \mathcal{A} = a(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x, t)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$df(X_s, s) = \left[\frac{\partial f}{\partial s}(X_s, s) + \mathcal{A}f(X_s, s) \right] ds + b(X_s, s) \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dW_s.$$

$$f(X_T, T) = f(X_t, t) + \int_t^T \left[\frac{\partial f(X_s, s)}{\partial s} + \mathcal{A}f(X_s, s) \right] ds + \int \dots dW_s$$

Precificação via Formula de Feynman/Kac

A resolver:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \mathcal{A}f(x, t) = 0$$

$$df(X_s, s) = b(X_s, s) \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dW_s$$

$$\langle dW_s | \mathcal{F}_t \rangle = 0 \rightarrow \langle f(X_T, T) | \mathcal{F}_t \rangle = \langle f(X_t, t) | \mathcal{F}_t \rangle = f(X_t, t)$$

Condição final (Retorno): $f(x, T) = \Phi(x)$

$$f(x, t) = \langle \Phi(X_T) | \mathcal{F}_t \rangle_{X_t=x,}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + a(x, t) \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{2} b(x, t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \\ - V(x, t) f(x, t) = 0 \end{aligned}$$

$$Y(s) = e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} f(X_s, s)$$

$$dY(s) = d_s \left(e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} \right) f(X_s, s) + e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} d_s f(X_s, s) \\ + \underbrace{\left\{ d_s \left(e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} \right) df(X_s, s) \right\}}_{\sim 0}$$

$$= -V(X_t, t) e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} f(X_s, s) + e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} d_s f(X_s, s).$$

$$dY(s) = e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} \underbrace{\left(\left[-V(X_s, s) f(X_s, s) + \frac{\partial f}{\partial s}(X_s, s) + \mathcal{A}f(X_s, t) \right] \right)}_{\rightarrow 0} ds$$

$$+ b(X_s, s) \frac{\partial f}{\partial X}(X_s, s) dW_s = e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} b(X_s, s) \frac{\partial f}{\partial X}(X_s, s) dW_s,$$

$$\langle Y(T) | \mathcal{F}_t \rangle_{X_t=x} = \langle Y(t) | \mathcal{F}_t \rangle_{X_t=x} = Y(t) |_{X_t=x},$$

$$f(x, t) = \left\langle e^{-\int_t^T V(X_\tau, \tau) d\tau} \Phi(X_T) | \mathcal{F}_t \right\rangle_{X_t=x}.$$

Equação de Black-Scholes

$a(x, t) = rx, b(x, t) = \sigma x, V(x, t) = r, r, \sigma$ constantes

$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t dW_t^Q$ é uma martingale.

Equação de Black-Scholes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0,$$

$$f(x, t) = e^{-r(T-t)} \left\langle \Phi(X_T) | \mathcal{F}_t \right\rangle_{X_t=x},$$

Teorema de Girsanov

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathcal{P}} \quad \rightarrow \quad dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathcal{Q}}$$
$$S(t) = S(t_0) e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) + \sigma W^{\mathcal{P}}(t) - W^{\mathcal{P}}(t_0)}$$

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t^{\mathcal{P}} \right). \quad (10)$$

$$W_t^{\mathcal{Q}} = \lambda t + W_t^{\mathcal{P}}, \quad \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}, \quad \sigma \neq 0$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathcal{P}} = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathcal{Q}}$$

\mathcal{P} e $\mathcal{Q} \leftarrow$ equivalentes

Radon-Nicodym(\mathcal{RN})

$$\mathcal{D}_t = e^{-\lambda^2 t / 2 - \lambda W_t^{\mathcal{P}}} = \frac{\mathcal{DQ}_t}{\mathcal{DP}_t}, \quad \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

$$d\mathcal{D}_t = \lambda \mathcal{D}_t dW_t^{\mathcal{P}}, \quad \mathcal{D}_s = \langle \mathcal{D}_t | \mathcal{F}_s \rangle, \quad s \leq t.$$

$$\langle X_t \rangle_Q \equiv \int X_t \mathcal{D}Q = \int X \frac{\mathcal{D}Q_t}{\mathcal{D}P_t} \mathcal{D}P \equiv \langle X \mathcal{D}_t \rangle_P$$

$$\langle \mathbf{1} \rangle_Q = 1,$$

pois

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{1} \rangle_Q &= \langle \mathcal{D}_t \rangle_P = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-\frac{w^2}{2t}} e^{-\frac{\lambda^2 t}{2} - \lambda w} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-(w+\lambda t)^2/2t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2/2t} = 1 \end{aligned} \quad (11)$$

Para que W_t^Q seja Wiener sob a medida Q , devemos mostrar que

$$\langle W_t^Q \rangle_Q = 0, \quad \langle (W_t^Q)^2 \rangle_Q = t$$

$$\begin{aligned}\langle e^{\theta \tilde{W}_t} \rangle_Q &= \langle e^{-\lambda^2 t/2 - \lambda W_t + \theta \tilde{W}_t} \rangle_{\mathcal{P}} = \langle e^{-\lambda^2 t/2 - \lambda W_t + \theta W_t + \theta \lambda t} \rangle_{\mathcal{P}} \\ &= e^{-\lambda^2 t/2 + \theta \lambda t} \langle e^{(\theta - \lambda) W_t} \rangle_{\mathcal{P}} = e^{-\lambda^2 t/2 + \theta \lambda t} e^{\frac{1}{2}(\theta - \lambda)^2 t} = e^{\frac{1}{2}\theta^2 t}\end{aligned}\quad (12)$$

$$\langle e^{\theta \tilde{W}_t} \rangle_Q = e^{\frac{1}{2}\theta^2 t} \rightarrow \langle \tilde{W}_t \rangle_Q = 0, \quad \langle \tilde{W}_t^2 \rangle_Q = t,$$

A equação de BS

$$f = \phi_t S + \psi_t B \rightarrow df_t = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

$$df_t = \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 (dW)^2 + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$= \left(\sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S} \right) dW_t + \left(\mu S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt.$$

$$df_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t = \sigma S_t \phi_t dW_t + (\mu S_t \phi_t + r \psi_t B_t) dt,$$

$$df_t = \sigma S_t \phi_t dW_t + \left(r f_t + (\mu - r) S_t \phi_t \right) dt.$$

$$\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = r f_t + (\mu - r) S \frac{\partial f}{\partial S}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f, \quad \phi_t = \frac{\partial f}{\partial S},$$

Δ e Volatilidade Implícita

$[0, \delta t, \delta t, \dots T]$

- 1 Vendemos $f(t)$ em t
- 2 Recompramos em $t + \delta t$.

Ausência de arbitragem $\rightarrow P\&L = 0$

$$P\&L = - \underbrace{[f(t + \delta t, S + \delta S) - f(t, S)]}_{\text{Variação da Opção}} + \underbrace{rf(t, S)\delta t}_{\text{Juros sobre o Premio}} + \underbrace{\Delta(\delta S - rS\delta t)}_{\text{Resultado do Hedge}}$$

Componente	Lançamento	Tipificação
Posição na Opção	$-\delta f$	Risco de Mercado
Prêmio Acumulado	$+rf\delta t$	Valor temporal da grana
Ações (Long)	$+\Delta\delta S$	Cobertura de Delta
Custo de Capital	$-r(\Delta S)\delta t$	Juros sobre Emprestimo

Table: Contabilidade simplificada da mesa de operações.

$$P\&L = \underbrace{(V_{t+\delta t} - V_t)}_{\text{Ganho/Perda de Capital}} + \underbrace{\text{Fluxos de Juros}}_{\text{Carregamento}}$$

$$\delta f_t = f(S + dS, t + \delta t) - f(S, t) = \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\delta S)^2$$

$$P\&L = - \left[\frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\delta S)^2 \right] + rf(t, S) \delta t + \Delta(\delta S - rS \delta t).$$

$$\Delta = \frac{\partial f(t, S)}{\partial S}.$$

$$P\&L = - \left[\frac{\partial f}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\delta S)^2 \right] + rf \delta t - \Delta rS \delta t \rightarrow 0$$

$$- \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} + r \frac{\partial f_t}{\partial S_t} S_t - rf_t \right) \delta t = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (\delta S_t)^2.$$

Δ -hedge e Volatilidade Implícita

Sem controle:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (\delta S_t)^2,$$

- **BS:** $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \rightarrow (\delta S)^2 = \sigma^2 S^2 \delta t \rightarrow$ equação BS
- $(\delta S)^2 = \hat{\sigma}_{loc}^2 S_t^2 \delta t \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (\delta S_t)^2 = \frac{1}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (\hat{\sigma}_{loc}^2 \delta t).$

$$P\&L = \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \left\{ \left(\frac{\delta S}{S} \right)^2 - \hat{\sigma}_{loc}^2 \delta t \right\}.$$

Resultado independe tanto do retorno da opção, quanto do modo de evolução do ativo!

Extrair $\hat{\sigma}_{loc} \rightarrow \sigma_{impl}$: *calibrar* o modelo BS contra o mercado

$$f_M(S_0, K, T, \sigma) = f_{BS}(S_0, K, T, \sigma_{impl}(S_0, K, T))$$

Autofinanciante vs Replicante em BS

$$\Pi(t + \delta t) = \phi(t + \delta t)S(t + \delta t) + \psi(t + \delta t)B(t + \delta t).$$

$$\Pi(t + \delta t) = \phi(t)S(t + \delta t) + \psi(t)B(t + \delta t)$$

$$(\phi(t + \delta t) - \phi(t))S(t + \delta t) + (\psi(t + \delta t) - \psi(t))B(t + \delta t) = 0$$

$$\boxed{(\phi_k - \phi_{k-1})S_k + (\psi_k - \psi_{k-1})B_k = 0}$$

Erros:

① $(dW)^2 \neq \delta t.$

② $\phi(t_k) = \frac{\partial f(t_k)}{\partial S} \rightarrow$ OK até primeira ordem em $\delta t.$

Exigimos autofinanciamento:

$$\psi_k = \psi_{k-1} - (\phi_k - \phi_{k-1}) \frac{S_k}{B_k} \rightarrow \psi_{k_T-1} = \psi_0 - \sum_{k=1}^{k_T-1} (\phi_k - \phi_{k-1}) \frac{S_k}{B_k}.$$