

Introdução a Matemática Financeira

Roland Köberle*

Departamento de Física - USP-São Carlos, Brasil

April 11, 2025

*email: rk@ifsc.usp.br

0 Índice

1. Introdução
2. Um pouco de história
3. O mercado financeiro
4. A precificação correta de uma Rifa e arbitragem
5. Contratos
6. Opções
7. Estratégias de *Hedging* com Opções
8. O método binomial e a estratégia autofinanciante
9. Passeios aleatórios e o processo de Wiener
10. A distribuição log-normal para precificar opções
11. Arvore de n passos e a fórmula de Black
12. Martingales
13. Cálculo de Ito
14. A formula de Feynman-Kac e as equações de Fokker-Planck/Kolmogorov
15. A estrutura no caso contínuo e o teorema de Girsanov
16. Precificação via Martingales e Arbitragem
17. A equação de Black-Scholes II
18. As gregas em BSM
19. *Hedging* opções no contínuo
20. Calibrando BSM e volatilidade implícita
21. A volatilidade local e a equação de Dupire
22. Volatilidade aleatoria

23. Volatilidade local aleatoria
24. *Delta-Hedging* no discreto
25. Mudando de Numerario com multiplos ativos
26. Precificando opções com barreiras
27. Mais que um ativo subjacente e ativos não-negociaveis
28. Processos com saltos
29. Quantos
30. Taxas de juro
31. Tecnicas em Teoria de Campos em Matematica Financeira

Apêndices:

- A - O limite da distribuição binomial
- B - Verificação explicita da solução da equação BSM
- C - Transformando na equação de difusão
- D - Solução da equação BS para parametros dependentes do tempo
- E - Métodos Numéricos
- F - Código Scilab para precificação Black-Scholes

1 Introdução

Estamos supondo que o aluno não tenha qualquer informação prévia sobre os instrumentos usados para operar no mercado financeiro. A finalidade deste curso é apresentar a dinamica de um mercado idealizado e a matematica necessaria para nele navegar. Não tem a pretensão de ensinar o leitor como operar de fato no mercado financeiro da vida real. Foram elaboradas sem preocupação com "excessivo" rigor matematico.

Pre-requisitos : Cálculo III, Física Matemática.

Alguma familiariedade com conceitos de probabilidade é util, mas não necessaria. Para um aquecimento neste topico veja e.g. o captítulo 1 de F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*. Veja tambem as notas de aula [1].

O conteudo destas notas não cabe num curso normal de um semestre. Uma seleção minima poderia constar das seguinte seções : 1-4, 6, 8-16, 18.

2 Um pouco de história

- **Contratos na Babilonia**

Reproduzimos abaixo[2] um contrato do tempo de Hamurabi, século XVIII a.C:

... shekels of silver-at the Samag rate-Sin-eribam and Bititum . . . and Selibum, sons of Rakakum have borrowed from Samag and Aja under the supervision of Samag-muballit. At harvest time the payment-month [?] they are to pay [weigh out] the silver and its interest.

2 witnesses.

Date: 2nd of Nisan [March], 15th year of the king's reign.

- **Tales de Mileto(624-546 a.C.)[3]**

Aristoteles cita a seguinte anedota sobre o filósofo Tales de Mileto. A pobreza de Tales era considerado uma prova de que filosofia serve para nada. Mas no inverno Tales previu que haveria uma boa safra de azeitonas e conseqüentemente as prensas teriam uma grande procura no verão seguinte. Com algum dinheiro que tinha fez um contrato, que lhe garantiu o monopólio das prensas, já que no inverno ninguém mais estava interessado nelas. No verão fez um bom dinheiro alugando as prensas pelo preço que quis. Mostrou assim, que filósofos podem enriquecer facilmente, mas em geral não o fazem porque a sua ambição está alhures.

- **Vendas a *curta*** em que voce vende um ativo, que voce nem precisa possuir¹, com a promessa de devolve-lo no futuro na esperança, que o preço cairá.

Vejamos o que diz a Wikipedia[5].

"..The practice of short selling was likely invented in 1609 by Dutch businessman Isaac Le Maire, a sizeable shareholder of the Dutch East India Company. Edward Stringham[6] has written extensively on the development of sophisticated contracts on the Amsterdam Stock Exchange in the seventeenth century, including short sale contracts. Short selling can exert downward pressure on the underlying stock, driving down the price of shares of that security. This, combined with the seemingly complex and hard-to-follow tactics of the practice, has made short selling a historical target for criticism. At various times in history,

¹Neste caso pedir-lo-a emprestado. O emprestador espera que o preço subirá! Por mais detalhes veja o capítulo 3.2.

governments have restricted or banned short selling.

The London banking house of Neal, James, Fordyce and Down collapsed in June 1772, precipitating a major crisis that included the collapse of almost every private bank in Scotland, and a liquidity crisis in the two major banking centres of the world, London and Amsterdam. The bank had been speculating by shorting East India Company stock on a massive scale, and apparently using customer deposits to cover losses. It was perceived[citation needed] as having a magnifying effect in the violent downturn in the Dutch tulip market in the eighteenth century.

In another well-referenced example, George Soros[7] became notorious for "breaking the Bank of England" on Black Wednesday of 1992, when he sold short more than 10 billion worth of pounds sterling..."

Um outro episódio recente é a venda-a-curta das ações da distribuidora *Gamestop* e a luta dos investidores pequenos para virar o jogo.

Para se divertir com a história da economia leia[8].

3 O Mercado Financeiro

Exercício 0:

Assistir o filme de R. Reich *Saving Capitalism* no Netflix.

Para ilustrar como funciona o mercado financeiro, vejamos um exemplo de transação financeira básica. Suponha que você queira comprar uma certa quantidade de grãos de café a serem entregues no fim da safra daqui a 10 meses. Como não temos muita certeza qual será o preço em 10 meses, resolvemos fazer um contrato com o produtor. Isto pode ser feito diretamente entre você e o produtor. Isto se chama *contrato de balcão*. Ou, principalmente para quantias maiores, através de um agente no *mercado de bolsa*.

Você naturalmente vai procurar uma instituição, que garantirá a correta execução do contrato, e.g. arcando com os prejuízos, se um dos parceiros for a falência, eventualmente se responsabilizando pela entrega física do produto etc. Este agente é chamado de *Camara de Compensação* (CC) (Clearing House em inglês), que é um sistema criado para viabilizar a relação entre compradores e vendedores, registrando e processando as transações existentes,

viabilizando assim o *Sistema de Pagamentos Brasileiro*(SPB)². Isto naturalmente terá algum custo.

No Brasil existem basicamente duas grandes Camaras de Compensação .

- A Selic (Sistema Especial de Liquidação e Custodia), que faz o registro, a liquidação e a custodia de Titulos Publicos Federais. Por exemplo: o Tesouro Prefixado (LTN), Tesouro Selic (LFT), Tesouro Prefixado com Juros Semestrais (NTNF), Tesouro IPCA+ (NTNB Principal) e Tesouro IPCA+ com Juros Semestrais (NTNB).
- A B3 (Brasil, Bolsa, Balção), que³ atua no ambito privado em operações de titulos de renda fixa (CDB, RDB, LF, DI etc), variavel (LCA, CCB, CCI), ações e outros.

Existem varios tipos de contratos, os mais basicos são :

1. Contrato a Vista

Voce pode pagar a vista no dia de hoje ($t = 0$) para receber o café daqui a 10 meses ($t = T$). Vamos chamar o preço a vista de \mathcal{P} (\mathcal{P} de presente).

2. Contrato a Termo

Voce pode pagar daqui a 10 meses, quando o café for entregue. Chamamos este preço de *a-termo* \mathcal{A} .

3. Contrato Futuro

Voce pode fazer um contrato *Futuro* pelo preço \mathcal{F} , que será descrito no capítulo 5.

Vamos discutir os possíveis preços a serem atribuidos aos items a serem negociados. É óbvio, que pagando a vista voce deve ter um desconto, de modo que $\mathcal{P} < \mathcal{A}$. Quanto menor? Isto depende de uma multidão de fatores como a demanda esperada, o clima, a qualidade das estradas na colheita, a mão de obra, as pragas, os especuladores, os assaltantes etc.

Um outro fator é o seguinte. Se voce pagar a vista, o produtor deverá investir a grana em algum negocio ou então deixá-la rendendo juros numa

²Ele permite transferencias financeiras seguras e confiaveis. Inclui também a liquidação de pagamentos tais como cheques e cartões de credito.

³Fruto da fusão entre a Camara de Liquidação da BM& FBovespa e a Central de Liquidação de Titulos Privados (Cetip). Para mais detalhes veja e.g. a pagina [12].

instituição financeira. Vamos considerar somente este segundo caso, porque "negócio" é um termo nebuloso demais. Chegamos a segunda pergunta: qual juro r conseguiríamos?

Voce vê que estamos num cipoal de difícil controle. É por isto que foi inventado um "mercado ideal", cujas variáveis podemos extrair do mercado real razoavelmente bem. Este mercado ideal, a ser precisado no decorrer, terá que ser *liquido* e *fundo*⁴. *Liquido* quer dizer que sempre haverá um parceiro para sua transação financeira e *fundo* quer dizer que sempre haverá dinheiro a disposição para emprestar ou pedir emprestado a taxa r . O que seria esta **taxa r** será discutido no próximo capítulo.

Mas veja por exemplo o que Derman&Miller[9] falam sobre as "leis" deste tipo de mercado: "... *During the past 20 years there has been a tendency for quantitative finance and asset pricing to become increasingly formal and axiomatic. Many textbooks postulate mathematical axioms for finance and then derive the consequences. In this book, though, we're studying financial engineering, not mathematical finance. The ideas and the models are at least as important as the mathematics. The more math you know, the better, but math is the syntax, not the semantics....Finance is concerned with the relations between the values of securities and their risk, and with the behavior of those values. It aspires to be a practical field, like physics or chemistry or electrical engineering. As John Maynard Keynes once remarked about economics, "If economists could manage to get themselves thought of as humble, competent people on a level with dentists, that would be splendid." Dentists rely on science, engineering, empirical knowledge, and heuristics, and there are no theorems in dentistry. Similarly, one would hope that finance would be concerned with laws rather than theorems, with behavior rather than assumptions. One doesn't seriously describe the behavior of a market with theorems... Because we don't have the right laws, the axiomatic approach to finance is problematic...As Paul Wilmott wrote, "every financial axiom ever seen is demonstrably wrong. The real question is how wrong (Wilmott 1998)...."*

Falamos acima de especuladores. Sempre os haverá, mas num mercado *eficiente* eles devem correr um risco proporcional ao valor em especulação e nunca devemos permitir que consigam ganhar sem risco. Se por exem-

⁴Isto é análogo ao físico, que anuncia que a lei da queda livre vale somente no vácuo. É verdade que é muito mais fácil controlar a qualidade do vácuo do que este mercado ideal. Por isto as leis da física são infinitamente mais precisas do que as do mercado, que afinal de contas envolvem comportamento humano em situações muitas vezes conflitantes.

plô algum ativo for disponível abaixo do que é considerado “razoável”, ele será imediatamente comprado e vendido com lucro, de modo que desaparecerá quase instantaneamente do mercado, que eliminará esta ”anomalia”. Para isto é necessário que esta informação sobre o ativo esteja imediatamente disponível para todos os agentes.

Um mercado destes deve então ter uma série de propriedades:

- Há tantos compradores e vendedores, que nenhum consegue manipular preços .
- A informação relevante para negociar deve instantaneamente estar a disposição de todos os agentes.
- Não há custos envolvidos nas transações , tais como taxas do agente ou taxas para manter um ativo etc.

Nestas notas suporemos, que não haja **spread** de compra-venda. Quer dizer que o preço para compra e para venda de um particular produto seja o mesmo. Na realidade o preço para compra costuma ser maior que o da venda, tal como acontece na compra de uma moeda estrangeira num banco.

3.1 Mercado risco-neutro e taxa livre de risco r

Toda vez que voce fizer um contrato envolvendo o preço de algum ativo no futuro, terá que avaliar o tamanho do risco que voce corre. O risco depende em particular da taxa de juros, que o mercado exigir. Como é difícil prever o futuro, resolveu-se criar uma construção teórica chamada ”taxa livre de risco” r .

No mercado financeiro quanto maior o risco de um investimento, maior o retorno exigido e, quanto menor o risco, menor o retorno. Taxa livre de risco deve então se aproximar da taxa mais baixa que um investidor aceitaria ao fazer um investimento. Isto naturalmente depende do perfil do investidor e no fim das contas não existe um investimento completamente sem risco. Cada mercado possui taxas que servem de substituto para a taxa livre de risco r .

No Brasil é comum usar a taxa Selic para r . Ela oferece um risco pequeno e retorno baixo. No que se refere a ativos um investimento com risco baixo seria o *Tesouro Direto*. O risco neste caso é o Brasil quebrar. A inflação , que está voltando, é outro fator complicador. Leva-se então também em conta o

Certificado de Deposito Interbancário CDI, que é a taxa que os bancos usam para negociar entre eles. O analogo nos EEUU é a taxa do tesouro americano ou o indice Standard & Poor's 500. Há varios modelos matematicos para extrair a taxa r de dados mercadológicos[20].

Vamos então supor que exista uma taxa r fixa, que possamos usar para fazer ou tomar emprestimos. Isto permite ter uma ideia de quanto valerá e.g. um título emprestado em $t = t_0$ ao juro r apos um tempo de emprestimo $t > t_0$. Para uma precificação continua temos que título $B(t)$ aumentará no intervalo de tempo dt como

$$dB = rB(t)dt, \quad (3.1)$$

onde r é medido em % por ano. Integrando obtemos

$$B(t) = B(t_0)e^{r(t-t_0)}. \quad (3.2)$$

O fator $e^{r(t-t_0)}$ mede o quanto o título rendeu de juros ao ser emprestado por um tempo $T = t - t_0$ e resulta para $r \geq 0$, que $e^{rT} \geq 1$. Viceversa se quisermos estimar quanto vale hoje em $t = 0$ um título a ser entregue no futuro $T > 0$ pelo preço $B(T)$, teriamos

$$B(0) = B(T)e^{-rT}. \quad (3.3)$$

Se voce vender o titulo no instante t de sua escolha, o adicional que voce recebe é $B(0)(e^{rT} - 1)$.

Também usamos este fator de desconto para o **Cupon-zero**, que é um contrato funcionando da seguinte maneira. Voce deposita o valor de face V e recebe depois de T anos um valor maior $e^{rT}V$. $e^{rT} > 1$ corresponde ao juro, que V renderia apos T anos a uma taxa de juros r . Chama-se *zero*, porque rende nada antes da expiração no tempo $t = T$. Isto é diferente de nosso $B(t)$, títulos de dívida publica ou debenturas de corporações, que pagem juros durante a vigencia do título.

- **Caveat juros compostos**

Por questões de simplicidade usaremos na precificação continua sempre e^{rt} , mas os bancos nem sempre fazem isto e $(1 + r)^{-n} > e^{-nr}$. Se por exemplo voce comprar hoje em $t = 0$ um cupon-zero para receber $P(T) = \$1000$ apos $n = 5$ anos a taxa de $r = 0.6\%$ por ano, voce pagará hoje o valor de

$$P(0) = P(T)/(1 + r)^n \rightarrow P(0) = 1000/(1 + 0.6/100)^5 = \$970.532$$

A precificação exponencial daria

$$P(0)_{exp} = 1000e^{-0.6*5/100} = \$970.445.$$

3.2 Posições *longas* e *curtas*

Ha duas maneiras básicas de negociar um ativo, por exemplo um terreno: *longas* e *curtas*.

1. Voce tem uma posição *longa*, se voce é dono de um ativo S_0 no dia de hoje $t = t_0$. Um investidor toma esta posição na expectativa que o ativo (terreno, ações, ...) subirá para S_T no futuro $t = T$, de modo que ele possa vender o ativo por um preço mais alto e terá o lucro $S_T - S_0$.
2. O contrario é uma posição *curta*⁵, em que você vende um ativo S_0 no dia de hoje. Se voce não possui o ativo, sua posição será *a descoberto*: nestas notas sempre usaremos a *curta descoberta*. Neste caso voce pede emprestado e.g. de seu agente, o ativo S_0 e vende-o imediatamente pelo preço do dia em $t = t_0$. Com isto voce abre uma posição com seu agente, que voce terá que fechar num futuro $t = T > t_0$ predeterminado, devolvendo o ativo. Voce faria isto na suposição que o ativo cairá para $S_T < S_0$. Assim voce comprará a ação no futuro por um preço S_T menor, ganhará a diferença $S_0 - S_T$ e fecha a posição ao devolver o ativo ao agente. Resumindo a **venda-a-curta**:

- Peça emprestado o ativo S_0 em $t = 0$ e vende-o em $t = 0$. Voce obtem um de caixa positivo.
- Compra o ativo S_T em $t = T$ e devolva o ativo fechando a posição .
- Voce lucra o valor $S_0 - S_T$, se o ativo baixar e perde, se ele subir. O empréstador lucrará $S_0 - S_T$, se o ativo subir!

Na verdade a venda-a-curta pode ser um contrato bastante complicado. Por exemplo seu agente poderia pedir emprestado o ativo a uma terceira pessoa, que cobrará aluguel e taxas. Os dois pedirão garantias colaterais, que podem aumentar se o ativo baixar. Os juros podem mudar etc. Tudo isto deve ser especificado no contrato envolvendo agora tres agentes!

Salvo menção em contrário, suporemos daqui para frente que

⁵Em ingles: *I am short of money*, quer dizer que eu não tenho dinheiro.

1. A venda *curta* de qualquer quantidade, ou seja *curtar*, é sempre possível.
2. Não há custos para as transações, pois estes custos variam de agente para a agente, dependem do tipo e quantidade do ativo; portanto difíceis de quantificar.

4 A precificação correta de uma rifa e arbitragem

Para ilustrar como atribuir um preço correto a instrumentos financeiros envolvendo riscos, considere a seguinte rifa. Suponhamos que algum ativo S valha $S_0 = \$10$ hoje em $t = t_0$. Sabemos que depois de um tempo δt , ou seja em $t = t_0 + \delta t$, ele pode subir para $S_u = \$20$ ou baixar para $S_d = \$5$. Vamos impor que

$$S_d \leq S_0 \leq S_u. \quad (4.1)$$

Quanto voce pagaria pela oportunidade, que lhe daria em $t_0 + \delta t$ a quantia de \$10, se o ativo subir e \$1 se ele baixar? Qual seria o valor, que o vendedor aceitaria?

Ilustramos a situação na figura Fig.(4.1), onde chamamos f_u o seu retorno após um tempo δt , se o ativo subir e f_d , se o ativo baixar.

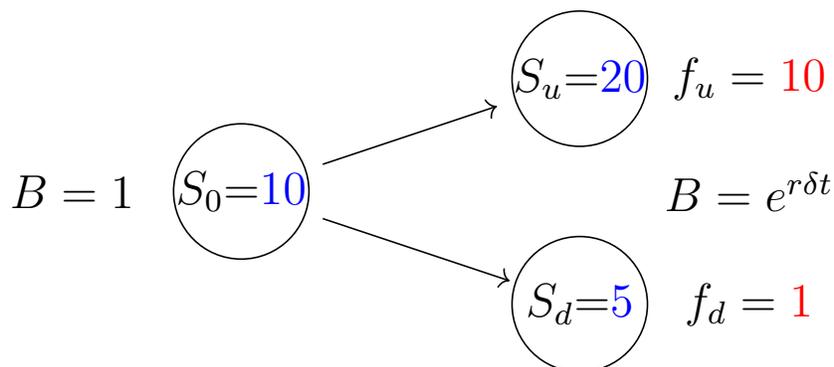


Figure 4.1: Os dados para precificar uma rifa com $S_d \leq S_0 \leq S_u$.

O que o vendedor poderia fazer para se proteger contra eventuais perdas? Ele poderia tentar encontrar um preço de "referencia", que seja aceitavel tambem para o comprador, ou seja: que nenhum dos dois tenha prejuizos,

mas obviamente também não terão lucros. Mostramos possíveis cenários na tabela abaixo, supondo que o vendedor gasta toda a grana da venda para comprar ativos.

Tentando operar sem lucro, nem perdas

Valor da rifa	Fração do ativo	Novo ativo	Lucro
5.5	0.55	11 ↑	+1
		2.75 ↓	+1.75
4	0.4	8 ↑	-2
		2 ↓	+1
6	0.6	12 ↑	+2
		3 ↓	+2
4=6-2	0.6	12 ↑	+2-2=0
		3 ↓	+2-2=0

As tres primeiras linhas da tabela mostram que parece impossivel evitar perdas ou lucros, investindo todo o valor da rifa no ativo. A ultima linha mostra uma situação sem lucros, em que vendemos a rifa por \$4, mas vamos investir \$6 em ativos. Isto é \$2 a mais que o valor da rifa. Fica claro que só comprando ativos, não podemos acertar um valor da rifa, que resulte sem lucro, nem prejuizo. Pois temos somente uma variavel (o preço da rifa) para acertar dois valores (os eventuais premios a serem pagos/recebidos f_u, f_d). Mas a ultima linha sugere, que podemos pedir emprestado uma quantia em dinheiro, e.g. titulos, que corresponderá ao valor necessitado (O valor **\$2** na tabela, onde não levamos em conta os juros, que correm entre t e $t + \delta t$).

Vamos então construir um portofolio contendo uma certa quantidade do ativo e mais um certo numero de títulos. O portofolio deve valer exatamente o valor da rifa no tempo $t_0 + \delta t$. Seja Π o portofolio contendo ϕ unidades do ativo S e ψ unidades do título B

$$\Pi = \phi S + \psi B. \tag{4.2}$$

Se o título vale hoje $B(t_0)$, em $t = t_0 + \delta t$ seu valor será $B(t_0 + \delta t) = e^{r\delta t} B(t_0)$ e todos os participantes devem concordar com esta taxa de juros r .

Para igualar o valor da rifa em $t_0 + \delta t$ devemos impor

$$\begin{aligned} \phi S_u + \psi B(t_0)e^{r\delta t} &= f_u \\ \phi S_d + \psi B(t_0)e^{r\delta t} &= f_d. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Resolvendo para ϕ, ψ resulta

$$\phi = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}, \quad \psi = \frac{e^{-r\delta t}}{B(t_0)} \frac{S_u f_d - S_d f_u}{S_u - S_d}. \quad (4.4)$$

O valor do portofolio Π hoje em $t = t_0$ é

$$\Pi(t_0) = \phi S(t_0) + \psi B(t_0) \quad (4.5)$$

e este será o preço f_0 pelo qual negociaremos a nossa rifa. Usando a notação $S_0 = S(t_0)$ obtemos

$$f_0 = \Pi(t_0) = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} S_0 + e^{-r\delta t} \frac{S_u f_d - S_d f_u}{S_u - S_d}. \quad (4.6)$$

Acabamos de construir um **portofolio replicante**, que replica o valor da rifa. Note que em nenhum momento precisamos saber a probabilidade com que o ativo evolui para baixo ou para cima, mas somente os valores S_u, S_d . O vendedor executa a estratégia para se proteger e conseguir satisfazer a suas obrigações. O comprador somente paga a rifa, que verificou ser justa, e espera o resultado do ativo S_u ou S_d .

Voltando ao nosso exemplo vamos supor, que o titulo vale hoje $B(t_0) = \$1$. Temos então os seguintes valores, mostrados na Fig.(4.1):

$$S_0 = \$10, \quad B(t_0) = \$1, \quad (4.7)$$

$$S_u = \$20, \quad S_d = \$5, \quad (4.8)$$

$$f_u = \$10, \quad f_d = \$1. \quad (4.9)$$

Estes dados fornecem⁶ $\phi = 3/5$ e $\psi = -e^{-r\delta t}2$. Portanto o custo de um portofolio, que seja igual ao valor da rifa a ser negociada, é pela equ.(4.5)

$$\Pi(t_0) = \frac{3}{5} \cdot 10 - e^{-r\delta t}2 = 6 - e^{-r\delta t}2. \quad (4.10)$$

Temos a seguinte evolução do portofolio

$$\Pi(t_0) = 6 - 2e^{-r\delta t} \xrightarrow{\delta t} \Pi(t_0 + \delta t) = \begin{cases} \frac{3}{5}20 - 2 = 12 - 2 = 10 \\ \frac{3}{5}5 - 2 = 3 - 2 = 1 \end{cases} \quad (4.11)$$

⁶Aqui estamos supondo, que seja possível negociar frações de ativos. Isto é obviamente impossível na vida real. Note porem que ações são usualmente negociadas em pacotes de centenas.

e o negócio fecha sem risco, pois o portofolio cobre o valor da rifa. Cobramos o valor da rifa e entregamos o premio apesar do ativo ser de risco, i. e. hoje não sabemos o valor do ativo amanhã.

Para se proteger contra o risco, o vendedor adota a seguinte estratégia/*hedge*.

Em $t = t_0$:

ele vende a rifa por $\Pi(t_0) = 6 - e^{-r\delta t}2$. Ele usa \$6 para comprar a fração de $3/5$ do ativo⁷ e fica devendo $e^{-r\delta t}2$.

Em $t = t_0 + \delta t$ temos o seguinte cenário.

- Ele pagou juros sobre a dívida de $e^{-r\delta t}2$, que aumentou para $e^{-r\delta t}2e^{+r\delta t} = \2
- Se o ativo subir, ele o vende por $\frac{3}{5}\$20 = \12 , paga a rifa de \$10 para o comprador e sobram \$2 para pagar a sua dívida e fechar o negócio.
- Se o ativo baixar, ele o vende por $\frac{3}{5}\$5 = \3 , paga a rifa de \$1 para o comprador. Sobram \$2 para pagar a sua dívida e fechar o negócio.

Consideremos agora a posição do **comprador**. A sua estratégia é oposta a do vendedor: quando um vende o outro compra e vice-versa. Como a quantidade de grana é conservada, o portofolio $\tilde{\Pi}$ do comprador é o negativo do vendedor. Temos portanto $\phi = -\frac{3}{5}$ implicando venda-a-curta do ativo. A estratégia do comprador é a seguinte.

Em $t = t_0$:

1. Compra a rifa gastando $\tilde{\Pi}(t_0) = -(6 - e^{-r\delta t}2)$.
2. Curte a fração de $3/5$ do ativo por \$6 e deposita o resto $+e^{-r\delta t}2$ no banco.

Em $t = t_0 + \delta t$:

1. Recebe juros sobre $e^{-r\delta t}2$, que aumenta para $e^{-r\delta t}2e^{+r\delta t} = \2 .
2. Se o ativo subir, ele recebe o valor da rifa de \$10 dando um total em caixa de $2 + 10 = 12 = \frac{3}{5}20$ para fechar a curta.

⁷Na vida real não podemos negociar frações de ativos. Estes são negociados em centenas e a precisão é até a terceira casa após a virgula.

3. Se o ativo baixar, ele recebe a rifa de \$1 dando um total de $2 + 1 = 3 = \frac{3}{5}5$ para fechar a curta.

Gostou do milagre? O vendedor gastou nada, mas tampouco nada recebeu ao *lançar*⁸ a rifa. Conseguimos criar um portofolio *sem risco* e executamos um *hedge*⁹ perfeito. É claro que o vendedor não vai morrer de fome, pois cobrará taxas para financiar o seu negocio. Também é claro, que o comprador não vai entrar num negocio em que ele só paga taxas e ganha nada - a não ser que não faça as contas corretamente. Em nosso mercado ideal todos os participantes são 100% racionais e não existem "malucos a la Dostoiievsky".

Na vida real a coisa é diferente, pois afinal o atrativo de *rifar* é correr riscos. O comprador pode nem executar o hedge, pagando 10 e torcendo para que o ativo suba para 20. Precisamos ainda levar em conta a *Industria de Marketing*, que gera agentes **desinformados** e **irracionais**.

⁸Usamos a palavra "lançar" ao invés de vender para realçar, que não é uma venda-a-curta, mas simplesmente uma venda. Afinal os dois participantes apenas assinam um contrato e não há troca de mercadoria.

⁹"hedge" é o termo usado no mercado financeira. Significa, que voce ergeu uma "cerca" para se proteger das oscilações do mercado.

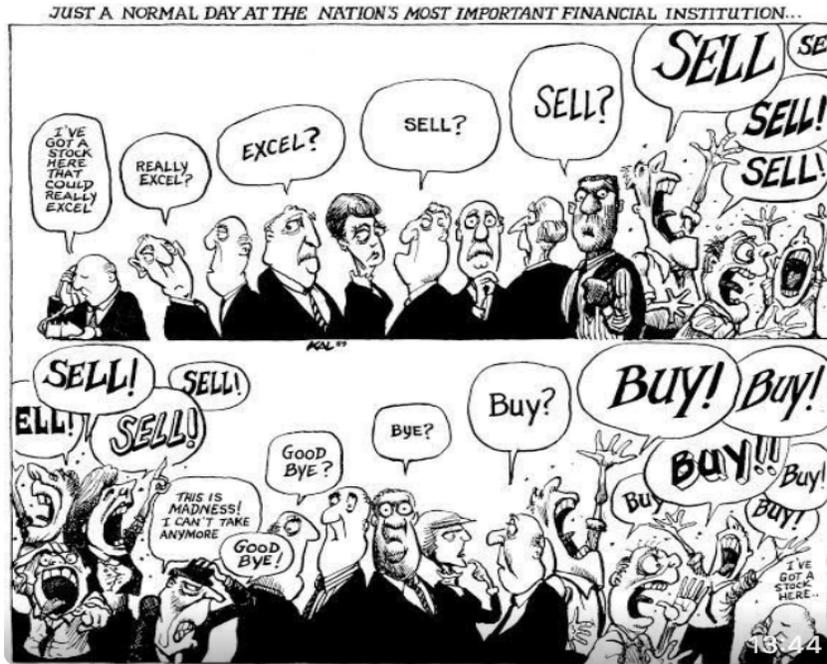


Figure 4.2: Um possível cenário mercadológico.

Exemplo 4.1 Invertendo f_u com f_d .

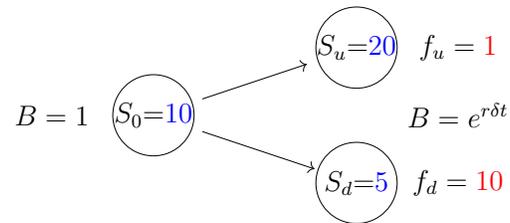


Figure 4.3: Invertendo f_u com f_d da figura 4.1

Considerando a posição do vendedor, temos agora

$$S(t_0) = \$10, \quad B(t_0) = \$1, \quad \xrightarrow{\delta t} \begin{cases} S_u = \$20, & f_u = \$1, \\ S_d = \$5, & f_d = \$10 \end{cases}$$

Com $\phi = -\frac{3}{5}$, $\psi B_0 = \frac{20 \cdot 10 - 5 \cdot 1}{15} \hat{e}^{-r\delta t} = \frac{39}{3} \hat{e}^{-1} = 13 \hat{e}^{-1}$ temos

$$\Pi(t_0) = -\frac{3}{5} \cdot 10 + \hat{e}^{-1} 13, \quad (\hat{e} \equiv e^{r\delta t}). \quad (4.12)$$

Evolução do portofolio é

$$-\frac{3}{5} \cdot 10 + \hat{e}^{-1}13 \xrightarrow{\delta t} \Pi(t_0 + \delta t) = \begin{cases} -\frac{3}{5}20 + 13 = -12 + 13 = 1 \\ -\frac{3}{5}5 + 13 = -3 + 13 = 10 \end{cases}$$

e o portofolio permite ao vendedor cumprir sua obrigação.

A estratégia do vendedor é a seguinte.

Em $t = t_0$ ele vende a rifa por $\Pi(t_0) = -6 + \hat{e}^{-1}13$. Ele curta $\frac{3}{5} \cdot 10 = 6$ do ativo, matando o $-\$6$ e deposita $\hat{e}^{-1}13$ no banco para render juros.

Em $t = t_0 + \delta t$ ele tem 13 em caixa.

- Se o ativo subir, ele paga a rifa de $\$1$ para o comprador e sobram $\frac{3}{5}20 = 12$ para fechar a curta.
- Se o ativo baixar, ele paga a rifa de $\$10$ para o comprador e sobram $\frac{3}{5}5 = 3$ para fechar a curta.

4.1 A probabilidade risco-neutra e arbitragem

Vimos que o preço da rifa é

$$f_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} S_0 + e^{-r\delta t} \frac{S_u f_d - S_d f_u}{S_u - S_d}. \quad (4.13)$$

Vamos garimpar um tesouro escondido nesta formula! Mas para isto precisamos de um guia. Entra **Louis Bachelier**(1870–1946). Bachelier nasceu em 11/03/1870 e em sua tese de doutorado (29/03/1900) escreveu "L'esperance mathematique du speculateur est nulle" dizendo que num mercado de ações deve haver uma simetria envolvendo um comprador e um vendedor e não deve haver um vies a favor de um ou outro. Quando é que um jogo é "justo" e "equilibrado"? Quando investimos uma certa quantia \tilde{f}_0 e esperamos recuperar nem mais nem menos do que a quantia investida. Ou seja, quando a esperança $\langle f_t \rangle$ num instante posterior for igual a f_0 :

$$\langle \tilde{f}(t_0 + \delta t) \rangle = \tilde{f}(t_0).$$

Esta é a definição de **martingale**. Neste caso não haverá ganhadores, nem perdedores. Como não podemos prever o futuro, só podemos calcular a esperança supondo conhecer a probabilidade das ocorrências de f_t . É claro,

que haverá flutuações em torno da esperança $\langle f_t \rangle$ e o especulador reza para que sejam a seu favor. Seria a graça, que até um jogo justo¹⁰

Para revelar a estrutura de martingale, re-escrevamos a equ.(4.13) como

$$\begin{aligned} f(t_0) &= e^{-r\delta t} \left(f_u \frac{S_0 e^{r\delta t} - S_d}{S_u - S_d} + f_d \frac{S_u - S_0 e^{r\delta t}}{S_u - S_d} \right) \\ &= e^{-r\delta t} (q f_u + \tilde{q} f_d). \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde introduzimos o parametro q :

$$q = \frac{S_0 e^{r\delta t} - S_d}{S_u - S_d}, \quad \tilde{q} = 1 - q = \frac{S_u - e^{r\delta t} S_0}{S_u - S_d} \quad (4.15)$$

Seja $\langle \tilde{f}(t_0 + \delta t) \rangle$ a esperança do preço da rifa subir em $t_0 + \delta t$ para f_u com probabilidade q e baixar para f_d com probabilidade \tilde{q} :

$$\langle \tilde{f}(t_0 + \delta t) \rangle \equiv q f_u + \tilde{q} f_d. \quad (4.16)$$

Com esta definição a equ.(4.14) fica

$$f(t_0) = e^{-r\delta t} \langle \tilde{f}(t_0 + \delta t) \rangle. \quad (4.17)$$

Multiplicando esta equação por e^{-rt_0} resulta para o preço descontado da rifa

$$\tilde{f}_t = e^{-rt} f_t \quad (4.18)$$

a equação

$$\boxed{\langle \tilde{f}(t_0 + \delta t) \rangle_q = \tilde{f}(t_0).} \quad (4.19)$$

Ou seja: \tilde{f}_t é **uma martingale** sob a probabilidade q .

¹⁰Num casino da vida real o jogo nunca é "justo". Se numa roleta há 37 numeros, voce teria a probabilidade 1/37 para acertar um numero entre 1 e 37. Mas no roleta há sempre pelo menos um zero e sua probabilidade de acertar é apenas 1/38. Na verdade é um pouco mais complicado, mas o casino acaba sempre lucrando! Em principio voce poderia usar a estrategia de "dobrar a rifa" toda vez que voce perder a jogada. Quando voce acertar, voce ganha o investimento inicial. Supondo naturalmente que seu capital não tenha acabado antes e voce ter perdido tudo. Mas o casino impõe limites ao numero de vezes que voce pode dobrar. Para o teorema valer temos que proibir estrategias, que sempre garantem lucro como a de "dobrar a rifa".

Resolvendo a equ.(4.15) para S_0 resulta

$$S(t_0) = e^{-r\delta t} \left(q(S_u - S_d) + S_d \right) = e^{-r\delta t} \left(qS_u + \tilde{q}S_d \right). \quad (4.20)$$

Ou seja: o ativo descontado

$$\tilde{S}(t) \equiv e^{-rt} S(t) \quad (4.21)$$

tambem é uma **martingale** sob a *probabilidade risco-neutra* q :

$$\langle \tilde{S}(t_0 + \delta t) \rangle_q = \tilde{S}(t_0). \quad (4.22)$$

$f(t), S(t)$ não são martingales, mas sim $e^{-rt} S(t), e^{-rt} f(t)$: tivemos que extrair o "arrasto" e^{rt} gerado pela taxa r . Aplicamos o fator de desconto $e^{-r\delta t}$, que mede a valorização "automatica" do dinheiro. O titulo descontado $\tilde{B}(t) = e^{-r\delta t} B(t) = B(t_0)$ é tambem uma martingale. Concluimos, que os tres itens negociaveis $\tilde{f}_t, \tilde{S}_t, \tilde{B}(t)$ são martingales.

Para merecer o nome de probabilidade¹¹ q deve satisfazer os limites

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{1}. \quad (4.23)$$

Consideremos primeiro caso $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ e depois $r \neq 0$.

- As desigualdades equ.(4.1: $S_u \geq S_0 \geq S_d$) implicam para $r = 0$

$$q = \frac{S_0 - S_d}{S_u - S_d} \rightarrow q \geq 0$$

$$1 - q = \frac{S_u - S_0}{S_u - S_d} \geq 0 \rightarrow q \leq 1.$$

Verificamos portanto, que para $r = 0$ a variavel q é de fato uma probabilidade valida. É uma consequencia de nossa algebra.

- Se $r \neq 0$ ainda vale $q \geq 0$, pois $S_0 \geq S_d \rightarrow S_0 e^{r\delta t} \geq S_d$.

No entanto teriamos que satisfazer ainda $S_u - S_0 e^{r\delta t} \geq 0$ para que $q \leq 1$, mas isto não segue de $S_u \geq S_0 \geq S_d$!

Aqui entrará um aspecto crucial do nosso mercado financeiro: o conceito de **arbitragem**. Vamos ver como funciona no caso em pauta.

¹¹No caso do nosso exemplo $q = \frac{1}{3}$ para $r = 0$. Note que esta probabilidade q nada tem a haver com a probabilidade "real" com que o ativo passa de S_0 para S_u ou S_d !

- Se valesse $q > 1$, teríamos $S_0 e^{r\delta t} > S_u$. Procedemos então da seguinte maneira. Vendemos o ativo S_0 a curta em t_0 , investindo a grana recebida num título, que em $t_0 + \delta t$ valerá $S_0 e^{r\delta t}$. Para fechar a curta gastariamos S_u e lucrando $S_0 e^{r\delta t} - S_u$ sem risco. Impomos então que o nosso mercado ideal não permite este ganho sem risco, o que implica $q \leq 1$ ou equivalentemente

$$S_d \leq S_0 e^{r\delta t} \leq S_u. \quad (4.24)$$

A prescrição sempre é : *Compre o mais barato e/ou venda o mais caro.*

Quando possibilidades de ganhar dinheiro sem risco ocorrem, dizemos que existe **arbitragem**. Na vida real uma situação destas não subsistiria por muito tempo, pois se alguém ganha há outro que perde e logo a rifa seria negociada pelo preço justo, o mercado se encarregando a atingir um preço de equilíbrio. Em nosso mercado ideal em que não permitimos arbitragem, podemos usar o que se chama **lei de um só preço** :

Se dois bens idênticos e negociáveis possuem o mesmo preço num certo instante, então possuem o mesmo preço também em qualquer outro instante. Pois se em t_1 existirem dois preços para o mesmo bem, um arbitrador poderia comprar o mais barato, vender o mais caro e embolsar a diferença sem risco. Não permitimos esta situação de ganho sem risco em nosso mercado ideal.

Isto naturalmente supõe, que sempre haja rifas no mercado para comprar e vender e que a informação sobre os preços de compra e venda sejam imediatamente acessíveis a todos os agentes do mercado. Adicionalmente é necessário poder emprestar e pedir emprestado qualquer quantidade de dinheiro a uma taxa de juro sobre o qual tanto comprador como vendedor concordam. Num mercado em que este tipo de transação ocorre entre parceiros, que nem se precisam conhecer, esta taxa será necessariamente a taxa livre de risco r ¹². A seguir sempre suporemos que estas condições sejam satisfeitas em nosso mercado ideal e que não existe a possibilidade de arbitragem. Desta maneira o mercado forçará os limites $q = [0, 1]$, mesmo que valendo somente $S_d \leq S_0 \leq S_u$.

¹²No mercado real a compra/venda é intermediado por bancos, instituições de investimento etc, que cobrarão taxas para administrar o negócio.

Note, que não demonstramos que $q = [0, 1]$ usando somente álgebra a partir das hipóteses. Precisamos da ação de um mercado muito especial para impo-las. É importante ter em mente esta diferença para não gerar confusões!

Demonstraremos mais abaixo, que a condição $S_d \leq S_0 e^{r\delta t} \leq S_u$ ou $q = [0, 1]$ também é suficiente proibindo a possibilidade de arbitragem.

Podemos agora simplificar todo processo de precificação, aproveitando que tanto o preço de ativo como da rifa descontados são martingales. O procedimento é :

1. Exigir que $\tilde{S}(t)$ seja uma martingale.
2. Calcular q pela equação: $qS_u + (1 - q)S_d = S_0 e^{r\delta t}$
3. Exigir que $\tilde{f}(t)$ seja uma martingale e calcular o valor f_0 da rifa pela equação analoga: $qf_u + (1 - q)f_d = f_0 e^{r\delta t}$.

Este procedimento será usado a seguir para precificar contratos e outros instrumentos financeiros, pois a rifa nada mais é do que um derivativo baseado no ativo subjacente.

Por exemplo na situação da figura 4.3 teríamos com $r = 0$ o seguinte: $q = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ e $\tilde{f}_0 = \frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}10 = 7$, que coincide com a equ.(4.12) para $r = 0$.

A precificação via martingale é a maneira canônica para evitar arbitragem merecendo portanto um nome especial:

O Primeiro Teorema Fundamental

Um modelo não permite arbitragem, se e somente se existir uma probabilidade risco-neutra $0 \leq q \leq 1$ para precificação .

Já mostramos, que a ausência de arbitragem implica

$$0 \leq q \leq 1 \tag{4.25}$$

ou seja: a existência de uma probabilidade risco-neutra.

Falta mostrar que $0 \leq q \leq 1$ também implica ausência de arbitragem. Formulamos a condição de existir arbitragem para o nosso portfólio replicante $\Pi(t) = f(t)$:

A Um portofolio $\Pi(t)$ permite arbitragem, se satisfizer

$$\begin{aligned}\Pi(0) &= 0, \\ \langle \Pi(t) \rangle_q &> 0, \quad t \neq 0,\end{aligned}\tag{4.26}$$

esta segunda afirmando, que a probabilidade do portofolio assumir um valor positivo, é não-nula. Se isto for verdade, temos uma maquina de fazer dinheiro de graça!

Precisamos mostrar que a possibilidade de arbitragem viola a desigualdade equ.(4.25). Considere um portofolio Π satisfazendo $\Pi(0) = 0$ e suponha que $\langle \Pi(t) \rangle_q > 0$. Mas isto é proibido pela propriedade Martingale equ.(4.17), que requer

$$\Pi(0) = e^{-rt} \langle \Pi(t) \rangle_q > 0,$$

violando a hipotese. Note o fato, que *uma Martingale amarra presente com futuro*. Dai sua presença universal em nosso mercado.

Logo a condição equ.(4.25) - **a existencia de uma probabilidade risco-neutra sob a qual o ativo é uma martingale** - é necessaria e suficiente para evitar arbitragem, ou seja evitar ganho sem risco.

Exercício 4.1.

Repita o argumento para mostrar a lei de um só preço, quando $t_1 < 0$.

Exercício 4.2.

 Precificando um contrato.

Suponha que um ativo, valendo S_0 em $t = t_0$, possa em $T = t_0 + \delta t$ assumir dois valores $S_u = S_0 u$ e $S_d = S_0 d$ com $S_d < S_0 e^{r\delta t} < S_u$.

1. Calcule a media e a variança do ativo sob a medida risco-neutra no instante T , supondo uma taxa risco-neutra r .
2. Por quanto voce compraria um contrato, que lhe paga o valor $S_T - K$ em $t = T$?
Suponha que K seja um valor da ordem de S_0 . Explique a estrategia a ser executada.
3. Quanto voce pagaria para um contrato, que lhe paga em $t = T$ o valor $S_T - K$, se $S_T > K$ ou nada em caso contrario,

- com $K < S_d$,
- com $K > S_u$,
- com $S_u > K > S_d$?

Exercício 4.3.

Suponha que voce tenha a disposição dois ativos S e A evoluindo conforme $S \rightarrow S_u, S_d$ e $A \rightarrow A_u, A_d$. É possível compor um portofolio replicante? Existe uma estrategia de *hedge*?

5 Contratos

Suponha que queiramos comprar uma certa quantidade de café a ser entregue daqui a nove meses. Estamos porem preocupados com o preço do café naquela data de entrega, que chamamos de T . Por isto fazemos um contrato hoje em $t = 0$, que estipula o preço K a ser pago por uma determinada quantidade de café a ser entregue em $t = T$. O tempo de entrega T é medido em anos. O contrato envolve pois um ativo aleatorio - o café - e o preço K , que é deterministico. Temos pelo menos duas maneiras de fazer o pagamento.

5.1 Contrato a termo

Num contrato **a termo** (*forward* em ingles) para comprar um ativo pagamos o valor K , quando o ativo for entregue no instante T , chamado tempo de maturação. O contrato **a termo** especifica, que o dono do contrato (que assume uma posição *longa*) tem o direito de comprar o ativo, que em $t = T$ valerá S_T , pelo preço K ¹³. S_T é aleatorio, mas K é fixado em $t = 0$.

Qual seria um valor razoavel para K , que seria especificado hoje em $t = 0$ na assinatura do contrato? Se o ativo vale hoje S_0 , propomos que K deve ser igual ao *preço a-termo* F_0

$$F_0 = e^{rT} S_0 = K, \quad (5.1)$$

que é o valor que um titulo com $B_0 = S_0$ renderia. Se o preço fosse diferente, teriamos a possibilidade de arbitragem.

A Se $F_0 < e^{rT} S_0$, curtamos S_0 e firmamos um contrato a-termo para comprar café (assumimos uma posição *longa*). Em $t = T$ os juros aumentaram S_0 para $e^{rT} S_0$, mas só pagamos F_0 para comprar ativo e fechar a curta. Embolsamos a diferença $e^{rT} S_0 - F_0$.

A Se $F_0 > e^{rT} S_0$, fazemos o contrario. Pedimos emprestado S_0 para comprar S_0 e firmamos um contrato a-termo para vender café (curtamos o contrato a-termo). Em $t = T$ os juros aumentaram nossa divida S_0 para $e^{rT} S_0$. Mas vendemos café por $F_0 > e^{rT} S_0$ e embolsamos a diferença.

¹³O contrato deve ainda estipular como e quando o ativo seria entregue e talvez outros detalhes.

Sempre vendemos/curtamos o mais caro e compramos o mais barato. A tabela mostra a mecânica da transação, quando há arbitragem. Suponha que $S_0 = \$100$, $r = 5\%$ e o tempo de maturação seja um ano. Obtemos $F_0 = 100e^{0.05} = 105.1$, que aproximamos por $F_0 = 105$.

Tabela: Arbitragem com preços a-termo não-alinhados usando $S_0 = \$100$, $r = 5\%$, $T = 1$, $F_0 = \$105$

Preço a-termo = $\\$110 > F_0$)	Preço a-termo = $\\$98 < F_0$)
<i>Hoje:</i>	<i>Hoje :</i>
Peça emprestado $\$100$ a 5%	Curta S_0 recebendo $\$100$
Compra S_0	Invista a juros $\$100$ a 5%
Firme um contrato a-termo para vender café em um ano por $\$110$	Firme um contrato a-termo para comprar café em um ano por $\$98$
<i>Em um ano:</i>	<i>Em um ano:</i>
Venda café por $\$110$	Compre café por $\$98$
Feche a posição com juro por $\$105$	Feche a curta gastando $\$98$ e recebe $\$105$ do investimento
Retorno: $\$110 - F_0 = \5	Retorno: $F_0 - \$98 = \7

Em ambos os casos o arbitrador realiza lucros sem risco.

5.1.1 Valor de um contrato a-termo

Suponha, que um agente financeiro queira negociar um contrato a-termo: comprar ou vender uma contrato existente, que foi firmado um tempo atrás em $t = 0$.

- Qual seria o valor justo f_t num instante $0 \leq t \leq T$ a ser cobrado por um contrato destes?

Na entrega no instante T o "comprador" (o dono do contrato, que é *longo*) recebe o ativo valendo S_T pagando o preço a-termo K . O retorno é portanto $S_T - K$. Este seria o valor do contrato em $t = T$:

$$f_T = S_T - K, \quad (5.2)$$

É a diferença entre o preço do dia do ativo e o preço pelo qual o vendedor tem que entregar o ativo. Se S_T for igual a K , este contrato não oferece nenhuma vantagem e é claro que deve valer nada.

Para determinar o preço no instante $t \leq T$, descontamos K pelo fator $e^{-r(T-t)}$ e fazemos $S_T \rightarrow S_t$. Resulta para o valor f_t do contrato *a-termo* no instante t

$$f_t = S_t - e^{-r(T-t)}K. \quad (5.3)$$

O valor do contrato mudará com tempo para mais ou menos, dependendo como pressões do mercado afetam S_t . Seu valor pode ser positivo ou negativo, inclusive zero! Se $f_t < 0$ o comprador na verdade recebe este valor.

Na data da assinatura do contrato em $t = 0$ temos com a equ.(5.1: $K = e^{rT}S_0$)

$$f_0 = S_0 - e^{-rT}e^{rT}S_0 = 0.$$

Como não há fluxo de caixa em $t = 0$, é justo que o valor do contrato seja nulo no dia da assinatura.

Por enquanto a equ.(5.3) é apenas uma proposta, mas é justificada pelo seguinte argumento de arbitragem. Considere então a seguinte estratégia no instante t .

- Venda o contrato por f_t
- Gaste S_t para comprar o ativo
- Deposite o restante $f_t - S_t$ num banco para render juros.

O custo desta estratégia é $f_t - S_t - (f_t - S_t)$.

- Logo no instante t o nosso portfólio Π_t vale

$$\Pi_t = f_t - S_t - (f_t - S_t) = 0.$$

- Mas no instante T temos

$$\Pi_T = -f_T + S_T + (f_t - S_t)e^{r(T-t)}.$$

Pois ao vender o contrato ao comprador, este tem em $t = T$ o direito de adquirir o ativo pelo preço K e temos que providenciar o valor $f_T = (S_T - K)$. Também entra o valor S_T ao vender o ativo e $(f_t - S_t)$ rende juros. Resulta portanto $\Pi_T = K + (S_t - f_t)e^{r(T-t)}$.

Se $\Pi_t \neq \Pi_T$ teríamos uma máquina de ganhar (ou perder) dinheiro sem risco ou seja, deve valer $\Pi_T = 0$, i.e. a equ.(5.3).

Note que o mercado pode oferecer contratos com uma gama de valores de entrega K e você pode escolher um conveniente num instante t e pagará por este direito. No entanto, se você assinar um contrato novo no instante t , o valor de K é fixado em $F_t = e^{r(T-t)}S_t$!

Exemplo 5.1

Considere um contrato firmado em $t = 0$ com o preço de entrega $K = \$48$ e data de entrega de dezenove meses $T = 1.6$ e a taxa é $r = 10\%$ por ano. Suponha que o preço do café daqui a seis meses em $t = 0.5$ seja $S_{0.5} = \$50$. O valor do contrato em $t = 0.5$ é pela equ.(5.3)

$$f_{0.5} = 50 - 48e^{-0.1 \times 1.1} = 6.99.$$

Exemplo 5.2

Vamos assinar um contrato *a-termo* para comprar um ativo em dois anos, $T = 2$. Quem vende o contrato (é *curto*) deve entregar o ativo em $t = T$ ao comprador (que é *longo*). Suponha que o contrato foi iniciado com $S_0 = 100$ e $r = 5\%$. O preço *a-termo* é então $F_0 = 100 * e^{0.05 \times 2} = 110.5$ e fixamos $K = F_0$.

Depois de 1.5 anos o ativo subiu para \$107 e a taxa r caiu para 4%. Qual seria o valor do contrato-a-termo? Levando em conta a nova taxa de juros temos com $T - t = 0.5$ e $\tilde{F}_t = Ke^{-r(T-t)}$ para o valor do contrato

$$f_2(1.5) = S_t - \tilde{F}_t = \$107 - \$110.5e^{-0.04 \times 0.5} = -\$1.31.$$

Para comprar um contrato como este você na verdade vai receber \$1.31, pois augura um prejuízo do qual o vendedor quer se livrar. Mas nos últimos seis meses as coisas podem mudar!

5.2 Contrato Futuro

Um contrato **futuro** é como um contrato *a-termo*, em que no entanto fechamos o contrato todo dia. Isto evita o risco de que encaramos grandes oscilações nos preços do ativo, o que pode resultar em quebra de contrato, insolvência do vendedor etc. Seja F_t o valor do contrato futuro adquirido no

instante t com a data de entrega do produto X em $t = T$. O preço do dia do ativo é $S(t)$. O contrato *futuro* para uma posição longa $F(T, t_0)$ funciona da seguinte maneira. Se T é a data de entrega do produto, temos $0, 1, 2, \dots, T$ dias até a entrega com F_j o valor do produto no dia j : F_0 é o preço hoje e F_T o preço no dia da entrega. Obviamente o preço F_j só é conhecido no dia j e não antes. Todo dia voce calcula a diferença $F_j - F_{j-1}$ entre o preço do dia e o preço do dia anterior. Ao assinar o contrato não há fluxo de caixa. Mas no dia $j = 2, 3, \dots$ o dono do contrato recebe o valor $F_j - F_{j-1}$ (Este valor pode ser negativo, em que caso o dono paga este valor). No dia T o dono recebe o valor final $F_T - F_{T-1}$ e recebe o produto. Somando o fluxo de caixa total obtemos

$$(F_1 - F_0) + (F_2 - F_1) + \dots + (F_T - F_{T-1}) = F_T - F_0.$$

A entrega do ativo acontece somente no dia T . Neste dia eu compro o ativo pelo preço do dia S_T gastando F_T e recebo o valor $F_T - F_0$. O fluxo de caixa é $(-F_T) + (F_T - F_0) = -F_0$ ou seja eu gasto F_0 para comprar o ativo. Este valor já é conhecido no dia do fechamento do contrato como num contrato a termo. Só que $F_T - F_0$ é pago sucessivamente durante o vigencia do contrato.

Mostramos abaixo o fluxo de caixa para contratos a vista, a termo e para uma posição futura longa $F_X(T, t_0)$.

Tabela de Contrato Futuro para entregar o produto X

A termo						
<i>dia</i>	0	1	2	...	$T - 1$	T
<i>fluxo de caixa</i>	0	0	0	...	0	$X - F_0$
Futuro						
<i>dia</i>	0	1	2	...	$T - 1$	T
<i>fluxo de caixa</i>	0	$F_1 - F_0$	$F_2 - F_1$...	$F_{T-1} - F_{T-2}$	$X - F_{T-1}$

Exercicio 5.1

Verifique, que para uma taxa r constante ou uma função conhecida do tempo, o preço de um contrato a-termo é o mesmo que o de um futuro para o mesmo K e T .

6 Opções

Opções são instrumentos financeiros baseados em (derivados de) um ativo subjacente e.g. uma ação, um título de dívida pública, uma debentura de corporações etc. O dono da opção tem o **direito**, mas não a **obrigação** de exercê-la num certo instante $t = t_e$, o tempo de execução. Para ter este direito o dono pagou no instante $t = 0$ o prêmio, o preço da opção, ao vendedor da opção. Nas opções *Europeias* o tempo $t_e = T$. Este "tempo de maturação" T é fixado ao realizar a transação. Para opções *Americanas* o dono pode escolher o instante de execução entre hoje ($t = 0$) e $t = T$. Ou seja, o tempo de execução t_e vale $t_e = T$ para opções Europeias e é limitado a $0 < t_e \leq T$ para opções Americanas. O dono da opção tem o direito de negociar o ativo subjacente por um determinado *preço de exercício* K (strike price) no instante $t = t_e$. Este preço é fixado ao realizar a transação. Como veremos opções podem funcionar como uma apólice de seguro além de possibilitar a especulação.

As duas opções básicas, também chamadas de *vanilla*, são:

- A opção **call** Europeia dá ao dono o direito de comprar o ativo S pelo preço K . Ele fecha o contrato hoje em $t = 0$ e paga o prêmio ao vendedor da opção. Se em $t = T$ o ativo S subir para S_T com $S_T > K$, exercerá o seu direito e comprará o ativo pelo preço K . Poderia vender o ativo embolsando a diferença $S_T - K > 0$, que será pago pelo vendedor da opção. Se o ativo não subir acima de K , ele não exerce a opção e o vendedor embolsará o prêmio. Assim o lançador/vendedor torce para que o ativo caia e que comprador não exerça a opção para assim embolsar o prêmio!

Este arranjo também funciona como um seguro. Se você precisa adquirir um ativo no futuro $t > 0$, você paga o prêmio hoje, mas garante a compra do ativo pelo preço K no futuro. O valor do prêmio é da ordem de alguns %'s do ativo.

- A opção **put** Europeia dá ao dono o direito de vender o ativo em $t = T$ pelo preço K . Se o ativo cair abaixo de K , exercerá o seu direito e venderá o ativo pelo preço K , que é maior que o preço do dia. Se o ativo subir acima de K , ele não exerce a opção.

O vendedor torce para que o ativo suba e o comprador não exerça a opção para assim embolsar o prêmio! Se o ativo baixar ele é obrigado

a arcar com o prejuízo de $K - S_T$.

Este arranjo também funciona como um seguro. Se você precisa vender um ativo no futuro $t = T$, você paga o prêmio em $t = 0$, mas garante a venda do ativo pelo preço K .

Para as opções Americanas substitua $T \rightarrow t_e$.

Vemos que um contrato de opção abrange dois parceiros: o comprador, que tem direitos e o lançador, que tem deveres. O comprador tem uma posição chamada *longa* e o vendedor tem uma posição chamada *curta*.

Temos então os seguintes quatro tipos de investidores para opções Europeias (Para Americanas faça $T \rightarrow t_e$):

- **Comprador de um *call***: tem o direito de comprar um ativo em $t = T$ por um preço K predeterminado

comprar um *call* \rightarrow *longo* num *call*
 \rightarrow dono tem o direito de comprar o ativo subjacente pelo preço K no instante T
 \rightarrow exerce a opção caso o ativo suba

- Suponha um ativo valendo hoje $S_0 = \$90$, o preço de exercício $K = 100$, $T = 1$ e o preço da opção $c = \$4$. Um investidor comprou uma *call* Europeia para comprar 100 ativos. Seu investimento inicial é $\$400$. Se em um ano o ativo valer menos que $\$100$, ele não exercerá a opção e perderá este investimento de $\$400$. Se em um ano o ativo valer mais que $\$100$, exercerá a opção. Se e.g. o preço do ativo for $\$110$, o ganho por item do ativo será $\$10$. O ganho para 100 itens será $\$1000$ e subtraindo o seu gasto inicial, o lucro do investidor será $\$1000 - \$400 = \$600$. O preço S_0 não entra nesta conta e só serve para estimar o preço da opção.

- **Lançador de um *call***: tem a obrigação de vender um ativo em $t = T$ por um preço K predeterminado

vender um *call* \rightarrow *curto* num *call*
 \rightarrow obrigação a vender o ativo subjacente pelo preço K no instante T
 \rightarrow torce para que o ativo baixe para embolsar o prêmio

- **Comprador de um *put*:** tem o direito de vender um ativo em $t = T$ por um preço K predeterminado

comprar um *put* → *longo* num *put*
 → dono tem o direito de vender o ativo subjacente pelo preço K no instante T
 → exerce a opção caso o ativo baixa

- Suponha um ativo valendo hoje $S_0 = \$90$, o preço de exercício $K = 100$, $T = 1$ e o preço da opção $c = \$4$. Um investidor comprou um *put* Europeia para comprar 100 ativos. Seu investimento inicial é $\$400$. Se em um ano o ativo valer mais que $\$100$, ele não exercerá o opção e perderá este investimento de $\$400$. Se em um ano o ativo valer menos que $\$100$, exercerá a opção. Se e.g. o preço do ativo for $\$80$, o ganho por item do ativo será $\$20$. O ganho para 100 itens será $\$2000$ e subtraindo o seu gasto inicial, o lucro do investidor será $\$2000 - \$400 = \$1600$. O preço S_0 não entra nesta conta e só serve para estimar o preço da opção.

- **Lançador de um *put*:** tem a obrigação de comprar um ativo em $t = T$ por um preço K predeterminado

vender um *put* → *curto* num *put*
 → obrigação de comprar o ativo subjacente pelo preço K no instante T
 → torce para que o ativo suba para embolsar o premio

Definindo a função

$$(x)_+ \equiv \hat{\theta}(x) \equiv \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

podemos escrever o retorno das opções Europeias *call/put* na maturação $t = T$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_c &= (S_T - K)_+ \\ \mathcal{R}_p &= (K - S_T)_+ \end{aligned} \quad (6.2)$$

Pois uma opção *call* só será exercida se $S_T > K$ e valerá nada no caso contrário. Uma opção *put* só será exercida, se $S_T < K$ e valerá nada no caso contrário.

Temos então o seguinte fluxo de caixa para opções Europeias:

- **Opção *call***

O comprador de um *call* paga o prêmio \mathcal{P}_c e ganha \mathcal{R}_c . O lucro \mathcal{L}_c do comprador será

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{R}_c - \mathcal{P}_c = \begin{cases} -\mathcal{P}_c, & S_T \leq K \\ (S_T - K) - \mathcal{P}_c, & S_T > K \end{cases} . \quad (6.3)$$

O lucro do vendedor é $\tilde{\mathcal{L}}_c = -\mathcal{L}_c$.

Uma opção *call* é chamada ITM, se $S_T > K$, ATM se $S_T = K$ e OTM se $S_T < K$ ¹⁴.

- **Opção *put***

O lucro \mathcal{L}_p do comprador será

$$\mathcal{L}_p = \mathcal{R}_p - \mathcal{P}_p = \begin{cases} -\mathcal{P}_p, & S_T \geq K \\ (K - S_T) - \mathcal{P}_p, & S_T < K \end{cases} . \quad (6.4)$$

O lucro do vendedor é $\tilde{\mathcal{L}}_p = -\mathcal{L}_p$.

Uma opção *put* é chamada ITM, se $S_T < K$, ATM se $S_T = K$ e OTM se $S_T > K$.

É claro que opções serão exercidas somente se forem ITM.

Os gráficos abaixo ilustram estas situações mostrando os preços \mathcal{R} das opções em termo de S_T , o preço final do ativo. Note que o eixo horizontal é o valor do ativo na maturação S_T . Este eixo nada tem a haver com a evolução temporal do ativo $S(t)$, que é alguma função aleatória de t .

Note ainda que o retorno de uma opção *call* diminui conforme K aumenta, resultando em

$$\frac{d\mathcal{R}_c}{dK} \leq 0.$$

Para uma opção *put* é o contrário:

$$\frac{d\mathcal{R}_p}{dK} \geq 0.$$

¹⁴Em inglês *in-the-money*, *at-the-money* e *out-of-money*.

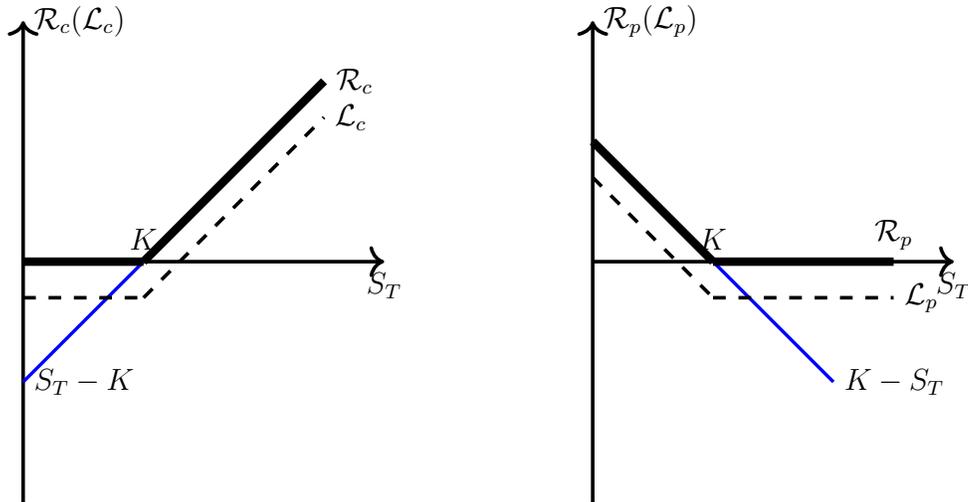


Figure 6.1: Linhas pretas: retorno e lucro do comprador de opções *call* e *put*.

Os graficos acima mostram \mathcal{IV} , chamado de *valor intrinseco* das opções: é o retorno das opções no instante da maturação $t = T$. Mas qual seriam os seus valores para $t < T$? Teriamos que incluir explicitamente uma dependencia temporal das opções: seus *valores temporais* \mathcal{TV} ¹⁵. Para $t < T$ o valor das opções é maior do que no instante de maturação, pois haverá oportunidade para ocorrerem flutuações favoráveis. Tanto para $S \ll K$ como $S \gg K$ o \mathcal{TV} tendo a zero, porque não haverá tempo suficiente para grandes flutuações favoráveis de S . Isto quer dizer que opções com $S \gg K$ ou $S \ll K$ são mais faceis da precificar, porque os seus valores se aproximam de seus valores intrinsecos.

Portanto uma opção é uma função de duas variaveis: S e t . O preço de uma opção é tipicamente alguns porcentos do valor da ação subjacente. O resultado é mostrado nas Fig.6.2. Na seção 16 este cenário é resultado de um modelo especifico.

¹⁵*Intrinsic Value* e *Time Value* em ingles.

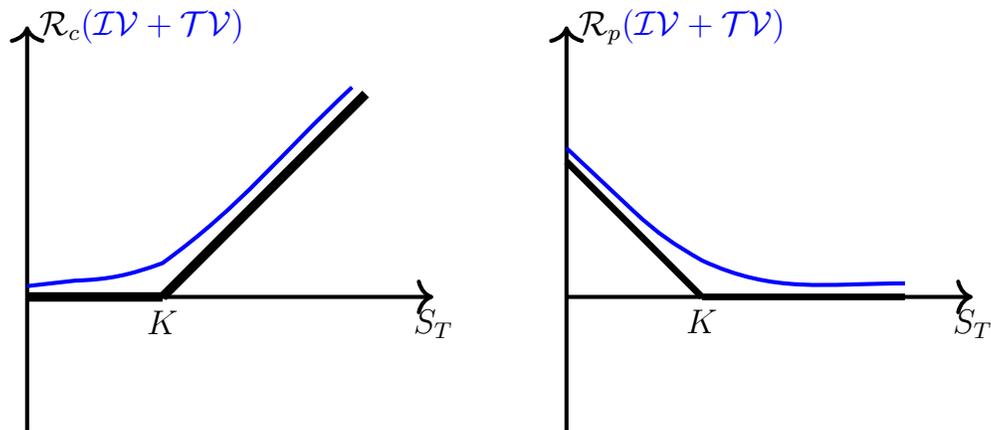


Figure 6.2: Linhas azuis: $IV + TV$.

A Fig.(6.2) mostra que estas opções são convexas, tanto como função de S como de K . Ou seja, a secante entre dois pontos x_1 e x_2 de uma função está sempre acima do grafo de função para $x_1 \leq x \leq x_2$ - veja Figura 6.3.

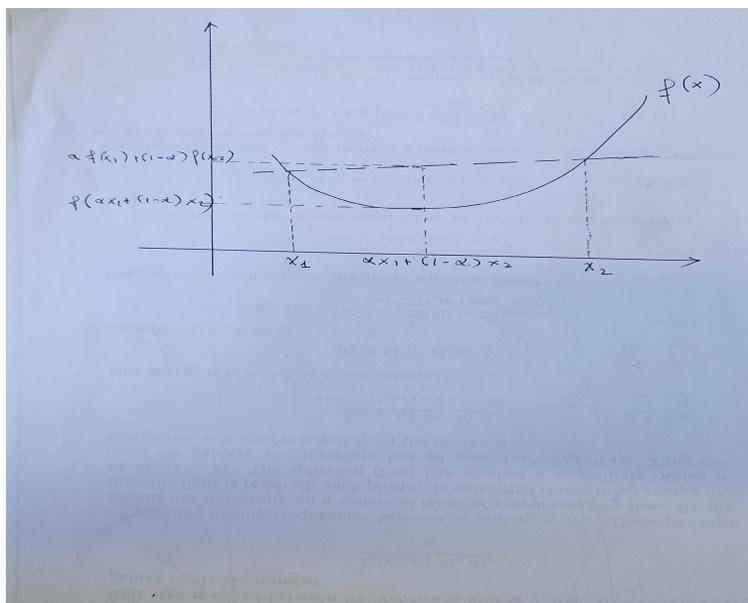


Figure 6.3: Convexidade.

Vale portanto para uma função convexa

$$\text{convex}[f] \equiv (\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)) - (f(\alpha x_1) + (1 - \alpha)x_2) \geq 0 \quad (6.5)$$

com $0 \leq \alpha \leq 1$.

Com X uma variável aleatória podemos formular a equação acima como

$$\langle f(X) \rangle \geq f(\langle X \rangle), \quad (6.6)$$

que é a **desigualdade de Jensen**. Esta convexidade será importante na análise de preços das opções.

Exemplo 6.3 (Exercendo uma Opção Americana)

Uma opção call Americana nunca deve ser exercida antes da maturação.

Verifique os argumentos seguintes. Suponha que a opção *call* Americana seja exercida no instante $\tau < T$, ou seja antes da maturação. O retorno neste instante é $(S_\tau - K)_+$. Resulta, que em $t = 0$ o seu valor seria $\langle (S_\tau - K)_+ \rangle e^{-r\tau}$. Como $\tau < T$ temos

$$\langle (S_\tau - K)_+ \rangle e^{-r\tau} \leq \langle (S_\tau e^{-r\tau} - K e^{-rT})_+ \rangle$$

Como a função $(x - K)_+$ é convexa - veja equ.(6.5) - podemos fazer $\tau \rightarrow T$ no primeiro termo obtendo

$$\langle (S_\tau e^{-r\tau} - K e^{-rT})_+ \rangle \leq \langle (S_T e^{-rT} - K e^{-rT})_+ \rangle$$

Ou seja, o valor da opção Americana exercida antes de T é sempre menor ou igual a uma Europeia. Portanto não deve ser exercida antes da maturação.

Para negociar opções podemos operar via **mercado de bolsa**, onde os contratos são padronizados ou via **mercado de balcão**, onde os parceiros se entendem diretamente. O Chicago Board Options Exchange¹⁶ é a maior bolsa para negociar opções. No Brasil esta função é realizada pela B3. Esta se responsabiliza pela correta execução dos contratos, garantindo a liquidação ou registrando-os no mercado de balcão.

6.1 Limites superiores para opções

Suponhamos que as opções sejam negociadas hoje em $t = 0$, o ativo valendo S_0 e que madurem em $t = T$ com o ativo valendo S_T . Vamos deduzir limites superiores para negociar opções Europeias e Americanas. Chamaremos os premios simplesmente de c ou p para opções Europeias e C e P para Americanas.

¹⁶CBOE; www.cboe.com

- Tanto para uma **call** Europeia c como Americana C , o preço da opção nunca pode ser maior que o ativo:

$$c \leq S_0, C \leq S_0. \quad (6.7)$$

Se isto não fosse verdade, ou seja $c \geq S_0$ um arbitrador poderia comprar o ativo S_0 e curtar a opção, embolsando a diferença. Se for preciso, ele entrega o ativo na maturação.

Nota: a opção *call* é um contrato. Para simplificar a notação chamamos de c o preço/premio deste contrato ao invés de \mathcal{P}_c . Idem para as outras opções.

- O dono de uma opção **put** ganha no máximo $K - S_T \leq K$. Numa *put* Americana P não sabemos em que instante $0 < t \leq T$ a opção será exercida. Só sabemos então que $P \leq K$. Numa Europeia sabemos que poderá ser exercido no instante $t = T$, de modo que o preço de exercício K vale hoje Ke^{-rT} . Isto fornece os limites

$$p \leq Ke^{-rT}, P \leq K. \quad (6.8)$$

Se isto não fosse verdade, um arbitrador poderia vender a opção e investir o recebido pela taxa r . Se for preciso, ele compra o ativo pelo preço K na maturação e embolsa o juro ganho.

6.2 Limites inferiores para opções

Vamos deduzir limites inferiores para negociação de opções Europeias tanto *call* como *put*.

- Uma **call** Europeia vale em $t = T$

$$c(T) = (S_T - K)_+, \quad (6.9)$$

de acordo com a equ.(6.2). Desprezando \mathcal{TV} , resultaria que $S_T - K$ vale pelo menos $S_0 - Ke^{-rT}$ no dia de hoje. Este seria portanto o limite inferior de uma *call* Europeia exercida. Se não for exercida, seu valor é zero e teríamos então os limites

$$(S_0 - Ke^{-rT})_+ \leq c \leq S_0. \quad (6.10)$$

Este limite vale, pois violando-o há possibilidade de arbitragem:

\mathcal{A} Suponha que o limite inferior seja violado, implicando $c + Ke^{-rT} < S_0$ ou $S_0 - c - Ke^{-rT} = \delta > 0$. O arbitrador então executa o golpe - *compre o mais barato e venda o mais caro*. Em $t = 0$ ele compra a opção, deposita Ke^{-rT} no banco e vende S_0 a *curta*, formando um portofolio

$$\Pi_0 = c + Ke^{-rT} - S_0.$$

Em $t = T$ este portofolio valerá $\Pi_T = (S_T - K)_+ + K - S_T$, pois o retorno de c é $(S_T - K)_+$ e deposito bancario rende e^{rT} de juros. Se $S_T > K$ a opção será exercida e o portofolio valerá

$$\Pi_T = (S_T - K) + K - S_T = 0.$$

Se $S_T < K$ a a opção não será exercida e o portofolio valerá $\Pi_T = K - S_T$. Temos então para a diferença dos portofolios

$$\delta\Pi = \Pi_T - \Pi_0 \tag{6.11}$$

$$= \begin{cases} 0 & -(c + Ke^{-rT} - S_0) = \delta & \text{se } S_T > K \\ K - S_T & -(c + Ke^{-rT} - S_0) = K - S_T + \delta & \text{se } K > S_T \end{cases}$$

resultando num lucro livre de risco para o arbitrador, já que $\delta\Pi > 0$.

Substituindo o tempo 0 por um tempo $t \leq T$ temos tambem para uma opção *call* no instante t

$$(S_t - Ke^{-r(T-t)})_+ \leq c(t, T) \leq S_t. \tag{6.12}$$

- Uma **put Europeia** vale em $t = T$

$$p(T) = (K - S_T)_+. \tag{6.13}$$

O valor de $(K - S_T)_+$ no dia de hoje vale pelo menos $Ke^{-rT} - S_0$, pois desprezamos o \mathcal{TV} . Este é portanto o limite inferior de uma *put*, se for exercida e é zero, se não for exercida. Resumindo temos

$$(Ke^{-rT} - S_0)_+ \leq p \leq Ke^{-rT}. \tag{6.14}$$

A Violando o limite inferior temos $p + S_0 < Ke^{-rT}$ ou seja $Ke^{-rT} - p - S_0 = \delta > 0$. Teriamos arbitragem e aplicamos o golpe análogo ao do *call*. Compramos a opção p , o ativo S_0 e vendemos/curtamos Ke^{-rT} . Formamos portanto o portfólio

$$\Pi_0 = p + S_0 - Ke^{-rT}.$$

Em $t = T$ temos

$$\Pi_T = (K - S_T)_+ + S_T - K.$$

Resulta então para a diferença dos portfólios

$$\delta\Pi = \Pi_T - \Pi_0 \tag{6.15}$$

$$= \begin{cases} 0 & -(p + S_0 - Ke^{-rT}) = \delta & \text{se } S_T < K \\ S_T - K & -(p + S_0 - Ke^{-rT}) = S_T - K + \delta & \text{se } S_T > K \end{cases}$$

resultando num lucro livre de risco para o arbitrador, já que $\delta\Pi > 0$.

De novo vale também para uma opção *put* em $t \leq T$

$$(Ke^{-r(T-t)} - S_t)_+ \leq p(t, T) \leq Ke^{-r(T-t)}. \tag{6.16}$$

Exercício 6.1.

Verifique a veracidade do seguinte raciocínio para obter os limites inferiores.

1. Opção *call*.

Comparamos os seguintes dois portfólios contendo:

- Portfólio A: uma opção *call* Europeia mais um cupon zero pagando K em $t = T$
- Portfólio B: uma ação do ativo S , valendo S_T no tempo T .

No portfólio A o cupon zero valerá K no tempo $t = T$. Se $S_T > K$ a opção será exercida e o portfólio valerá S_T . Se $S_T < K$ a opção expira sem valor e o portfólio valerá K . Ou seja no tempo $t = T$ o portfólio A vale $c(T)$ da equ.(6.9) e Portfólio B vale S_T em $t = T$. Assim o portfólio A sempre vale mais que o portfólio B na maturidade. Pela lei de um só preço isto também deve valer hoje, quando o cupon-zero vale Ke^{-rT} , resultando que $c + Ke^{-rT} \geq S_0$.

2. Opção *put*.

Comparamos os seguintes dois portfólios contendo:

- Portfólio C: uma opção *put* Europeia e um ativo S .
- Portfólio D: um cupon zero pagando K na maturação $t = T$.

Se $S_T < K$ a opção é exercida na maturidade e o portfólio C vale K . Se $S_T > K$ a opção vale nada e o portfólio vale S_T . Ou seja o portfólio C vale $p(T)$ da equ.(6.13) em $t = T$. Portfólio D vale K em $t = T$. Resulta que o portfólio C vale sempre mais que o portfólio D no instante $t = T$. Na ausência de arbitragem isto também deve valer hoje, quando o cupon-zero vale Ke^{-rT} . Resulta que $p + S_0 \geq Ke^{-rT}$.

6.3 Paridade *put-call* e a opção *call* Americana

Existe uma relação entre uma opção Europeia de *put* e *call*, quando ambas tem o mesmo preço de exercício K e o mesmo tempo de maturação T . De fato em $t = T$ uma *put* vale $(K - S_T)_+$ e uma *call* vale $(S_T - K)_+$. A diferença é portanto

$$c - p = (S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_T - K. \quad (6.17)$$

Esta igualdade vale em $t = T$. Portanto pela lei de um só preço deve também valer no dia de hoje¹⁷. Segue-se que a diferença entre *put* e *call* vale hoje em $t = 0$

$$c - p = S_0 - Ke^{-rT}. \quad (6.18)$$

Pelo mesmo raciocínio uma relação analoga vale num instante $0 \leq t \leq T$

$$c(S, t) - p(S, t) = S_t - Ke^{-r(T-t)} = f, \quad (6.19)$$

onde f é o preço a-termo dado pela equ.(5.3).

Para opções Americanas só temos os limites

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}. \quad (6.20)$$

Pode-se mostrar explicitamente, que há possibilidade da arbitragem, se estes limites forem violados[13].

Podemos usar a paridade *put - call* para mostrar que:

¹⁷Note que o risco cancela na diferença.

- Uma opção **call Americana** nunca deve ser exercida antes da maturação.

De fato da paridade (6.19) temos

$$c(S, t) = p(S, t) + S_t - Ke^{-r(T-t)} \geq S_t - Ke^{-r(T-t)} > S_t - K.$$

Já que opções Americanas valem sempre mais que Europeias temos

$$C(S, t) \geq c(s, t) > S_t - K.$$

Ou seja o valor da opção *call* Americana é sempre maior que seu valor intrínseco durante toda a vigência da opção. Como este valor é maior que o ganho máximo possível ao exercê-la, ela nunca deve ser exercida antes da maturação. Portanto o preço da opção *call* Americana é igual a da Europeia.

Exercício 6.1

Mostre que há possibilidade de arbitragem, se uma opção Americana valesse menos que a Europeia.

7 Estratégias de Hedging com Opções

ead.case.edu/OptionStrategies.pdf Vamos considerar possíveis estratégias de hedging com opções. As mais simples protegem contra flutuações de um ativo. Será necessário criar um portfólio contendo além de uma opção também um ativo S , como vimos na seção 6. Temos várias situações: você pode estar *longo/curto* no ativo e *longo/curto* na opção. Qual a estratégia a ser usada depende de sua percepção da volatilidade do mercado e sua inclinação a correr riscos. Veja por exemplo as referências [11, 14].

7.1 Estratégias com um ativo e uma opção vanilla

Nos gráficos abaixo, que ilustram estas estratégias, a diferença entre posições longas e curtas é um sinal \pm . Numa opção *call* longa você possui uma opção $(S_T - K)_+$, mas pagou c para isto, resultando no custo $\mathcal{L}^c = (S_T - K)_+ - c$. Numa opção *call* curta você vendeu uma opção $(S_T - K)_+$, mas recebeu c para isto, resultando no custo $\mathcal{L}_c = -(S_T - K)_+ + c = -\mathcal{L}^c$. Idem para *put*. As linhas tracejadas em vermelho mostram o custo destas opções. O retorno numa posição longa no ativo é $\mathcal{L}^s = S_T - S_0$, pois você

adquiriu o ativo pagando S_0 e na maturação ele valerá S_T . As linhas tracejadas em azul mostram o retorno destes ativos. As linhas pretas mostram o lucro, que é o valor final a receber, menos o custo inicial para formar o portfólio. Observe que o ativo gira as linhas das opções por $\pm 45^\circ$. Note que os graficos da figura 7.1 são opostos das da figura 7.2, trocando *longo* \leftrightarrow *curto*.

1. Ativo longo e *put* longo

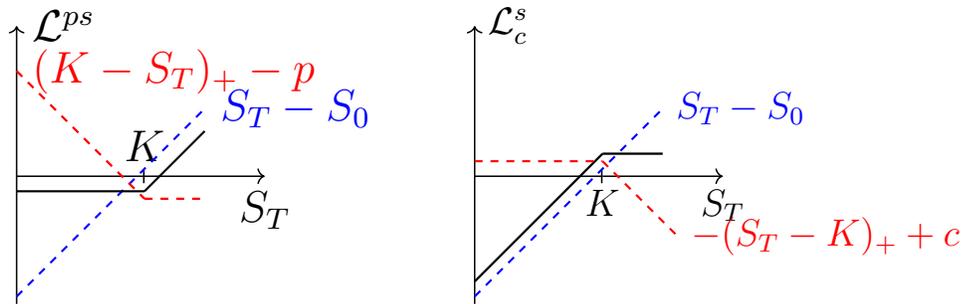
Suponha que você possui um ativo S_0 em $t = t_0$ e está preocupado com uma eventual queda do preço na maturação para

$$S_T < S_0,$$

ou seja você quer proteção na regioao $S_T - S_0 < 0$.

Uma opção é comprar uma certa quantidade de *puts* p , pois ai voce garante a venda pelo preço K , se o ativo cair abaixo de K . É chamado de "put protetor", que um produtor de café pode executar para garantir um preço minimo no futuro. K em geral é da ordem de S_0 . Quantos *puts*? Isto depende da relação entre o valor da opção e o valor do ativo. Este valor flutua, é de *risco*. Você tem que modelar este risco para decidir quantos *puts* você vai comprar¹⁸.

O grafico da figura 7.1a mostra o lucro¹⁹ \mathcal{L}^{ps} para um ativo longo e um *put* longo.



(a) Lucro \mathcal{L}^{ps} de ativo longo e *put* longo. (b) Lucro \mathcal{L}^s de ativo longo e *call* curto.
Linhas pretas $[(K - S_T)_+ - p] + (S_T - S_0)$. Linhas pretas $[-(S_T - K)_+ + c] + (S_T - S_0)$.

Figure 7.1: Lucros de ativo longo com:
 \mathcal{L}^{ps} *put* longo e \mathcal{L}^s *call* curto.

¹⁸Veremos nas seções (8.3,16) como modelar este risco.

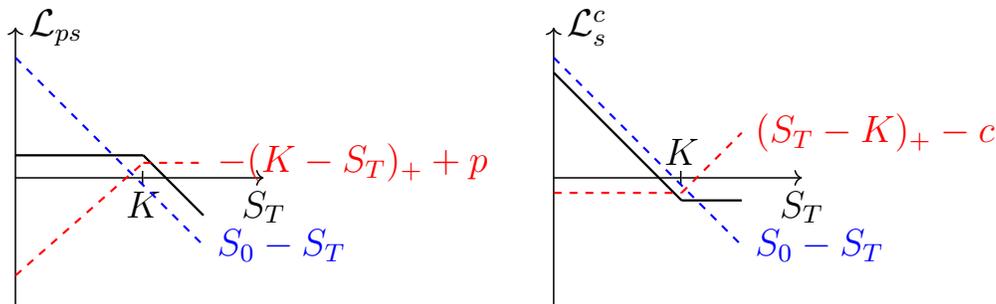
¹⁹Usamos indices superiores para *longo* e inferiores para *curto*.

2. Ativo longo e *call* curto

Com um ativo longo voce tambem pode vender um *call*, o ativo lhe protegendo contra o desembolso de grana, que o *call* lhe obriga a fazer, se o ativo subir: chama-se "call coberto". Se o preço do ativo cai, voce embolsa o valor da opção. Pois voce deu o direito de comprar por K , mas se o ativo caiu abaixo a opção não será exercida. É uma maneira de especular para ganhar o premio. O gráfico da figura 7.1b mostra a lucro \mathcal{L}_c^s .

3. Ativo curto e *put* curto

Voce vende um *put* na expectativa de que o ativo suba acima de K , pois o comprador não venderá o ativo por K , se ele vale mais que isto. Voce curta o ativo para lhe proteger contra uma queda dele. É uma maneira de especular. O gráfico da figura 7.2a mostra a lucro \mathcal{L}_{ps} .



(a) Lucro \mathcal{L}_{ps} de ativo e *put* curtos. (b) Lucro \mathcal{L}_s^c de ativo curto e *call* longo.
Linhas pretas $[-(K - S_T)_+ + p] - (S_T - S_0)$. Linhas pretas $[(S_T - K)_+ - c] + (S_0 - S_T)$.

**Figure 7.2: Lucros de ativo curto com:
 \mathcal{L}_{ps} *put* curto e \mathcal{L}_s^c *call* longo.**

4. Ativo curto e *call* longo

Voce compra um *call*, se voce espera que o preço do ativo subjacente suba, pois poderá compra-lo pelo preço $K < S_T$. Mas o ativo curto lhe protege, se o ativo tiver uma forte descida. O gráfico da 7.2b mostra a lucro \mathcal{L}_s^c .

5. Comprar um *call* ou vender um *put* .

Qual é mais vantajoso? Comprar um *call* requer um investimento inicial com o risco de não exercer a opção, perdendo assim o valor da

opção. Por outro lado vender um *put* gera imediatamente um fluxo de caixa positivo. Mas se o ativo cair a zero, você é obrigado a comprá-lo por K .

Exercício 7.1

Verifique que outras combinações de um ativo e uma opção não geram proteção.

7.2 Opções compostas

Podemos também montar um portfólio com várias opções Europeias (ou Americanas) com preços de exercício diferentes. Se todas tiverem a mesma maturação, podemos superpor os gráficos das Figs.(6.1), deslocando as adequadamente. Isto resultará em curvas lineares por partes.

É necessário saber com as opções variam com o valor de K . O dono de um *call* tem o direito de adquirir um ativo pelo preço K . Portanto um K menor é mais vantajoso e por isto preço da *call* é maior. Ou seja, a função $c(K)$ é decrescente em K , evidenciado pela função $(S_T - K)_+$. O dono de um *put* tem o direito de vender um ativo pelo preço K . Portanto um K maior é mais vantajoso e por isto preço da *put* é maior. Ou seja, a função $p(K)$ é crescente em K , evidenciado pela função $(K - S_T)_+$.

7.2.1 Apostando em alta

Suponha que um investidor espera que a bolsa vai melhorar e as ações subirão. Ele não quer gastar muito, mas quer ganhar com as altas. Ele pode então investir em opções Europeias: uma estratégia é comprar uma opção e vender outra, as duas com uma pequena diferença, inclusive nenhuma. Usando opções vanilla, temos várias maneiras de proceder. Uma é usando *calls*.

Podemos usar duas opções *call* com mesma maturação T , mas com preços alvo K diferentes $K_1 < K_2$. Em $t = 0$ o investidor forma um portfólio, comprando um *call* c_1 com K_1 e vendendo outro *call* c_2 com K_2 . Como o preço de um *call* diminui com o aumento de K , esta estratégia requer um investimento inicial $c_1 - c_2 > 0$. A motivação do investidor é a seguinte. Ele compra um *call* c_1 , se protegendo de uma baixa $S_T < K_1$. Ao vender c_2 ele abre mão de um lucro potencial oriundo de c_1 se $S_T > K_2$, em compensação recebendo o preço da opção *call* c_2 .

Mostramos o retorno $(S_T - K_1)_+ - (S_T - K_2)_+$ em $t = T$ na tabela abaixo e os lucros na Fig.7.3 com $K_1 < K_2$.

Preço do ativo	\mathcal{R}_l de <i>call longo</i>	\mathcal{R}_c de <i>call curto</i>	$\mathcal{R}_l - \mathcal{R}_c$
$S_T \leq K_1$	0	0	0
$K_1 < S_T < K_2$	$S_T - K_1$	0	$S_T - K_1$
$K_2 \leq S_T$	$S_T - K_1$	$K_2 - S_T$	$K_2 - K_1$

Retornos \mathcal{R} apostando em alta usando *calls*.

Explicitando por exemplo o caso $S_T \geq K_2$, temos o seguinte. Como o investidor vendeu um *call*, ele deve entregar a diferença $S_T - K_2$ ao comprador, que adquiriu o direito de comprar o ativo por K_2 . Mas o investidor também comprou um *call* mais caro para ter o direito de adquirir o ativo pelo preço $K_1 < K_2$. Assim ele acaba que desembolsar somente a quantia de $K_2 - K_1 > 0$.

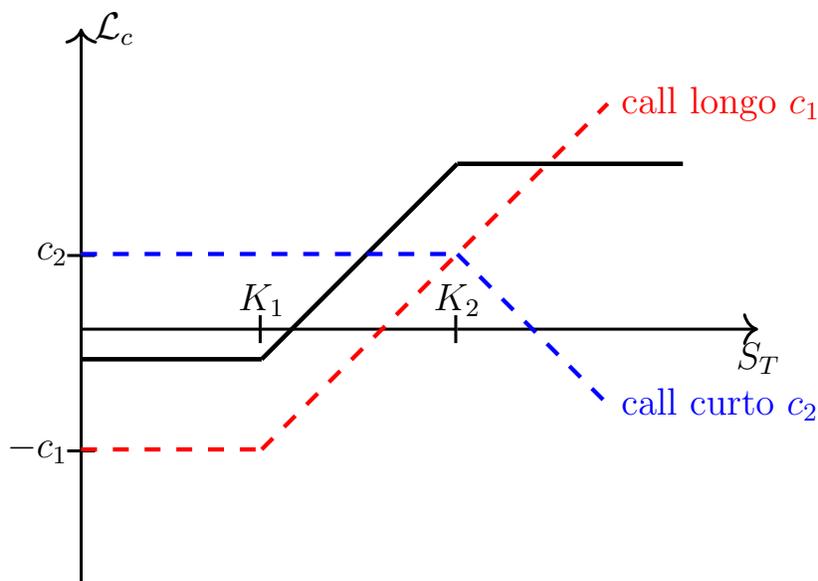


Figure 7.3: Lucro \mathcal{L}_c apostando em altas usando *calls*. Os valores de c_1, c_2 são exagerados para melhor visualização. Como a expectativa é uma subida do ativo, a linha preta tem inclinação positiva e é constante fora do intervalo $[K_1, K_2]$.

Especificamente suponha, que o investidor compra um *call* com $K_1 = 40$ por $c_1 = 4$ e vende outro *call* com $K_2 = 45$ por $c_2 = 2$ com $T = 1/4$. O custo da estratégia é $c_1 - c_2 = 2$ com retorno

1. zero para $S_T < 40$;
2. $S_T - 40$ para $40 < S_T < 45$;
3. $5 = 45 - 40$ para $S_T > 45$.

Subtraindo o custo obtemos o lucro para os tres casos:

$$L_{1,2,3} = [-2, S_T - 42, 3].$$

Exercicio 7.2

Fica como exercicio analisar a estrategia de comprar e vender *puts* com retorno $(K_1 - S_T)_+ - (K_2 - S_T)_+$, $K_2 > K_1$. Note que agora o investidor obtem um fluxo de caixa positivo ao iniciar a operação, pois o preço do *put* valoriza com K : $p_2 > p_1$.

7.2.2 Expectativa de baixa

Suponho agora que a expectativa é que as ações vão baixar. Neste caso uma possivel estrategia para se proteger contra baixas seria parecida com o exemplo anterior, só que trocamos *calls* por *puts*. O investidor deve vender um *put* p_1 com K_1 e comprar outro p_2 com $K_2 > K_1$. Como opções *put* se valorizam com o aumento de K , esta estrategia requer um investimento inicial positivo $p_2 - p_1 > 0$, ou seja como na estrategia de altas ele deve comprar o mais caro e vender o mais barato, esta estrategia exigindo um investimento inicial. Mostramos o retorno $(K_2 - S_T)_+ - (K_1 - S_T)_+$ na tabela abaixo e o lucro na Fig.(7.4) com $K_1 < K_2$.

Preço do ativo	\mathcal{R} de <i>put longo</i>	\mathcal{R} de <i>put curto</i>	\mathcal{R} integral
$S_T \leq K_1$	$K_2 - S_T$	$-(K_1 - S_T)$	$K_2 - K_1$
$K_1 < S_T < K_2$	$K_2 - S_T$	0	$K_2 - S_T$
$K_2 \leq S_T$	0	0	0

Retornos \mathcal{R} para expectative em baixa usando *puts*.

A figura abaixo mostra os lucros.

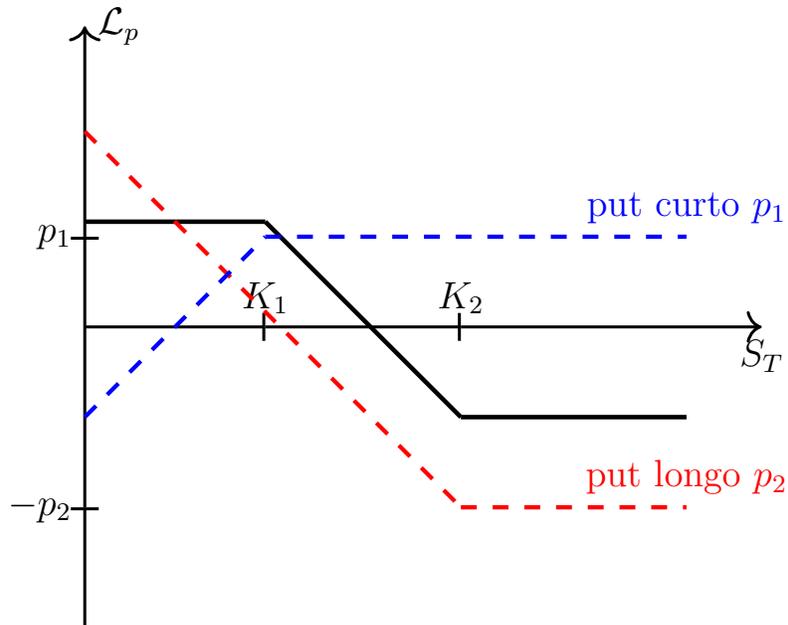


Figure 7.4: Lucro \mathcal{L}_p para expectativa em baixas usando *put* s. Os valores de p_1, p_2 são exagerados para melhor visualização. Como a expectativa é uma descida do ativo, a linha preta tem inclinação negativa e é constante fora do intervalo $[K_1, K_2]$.

Especificamente suponha, o investidor venda um *put* com $K_1 = 40$ por $p_1 = 2$ e compra outro *put* com $K_2 = 45$ por $p_2 = 4$ com $T = 1/4$. O custo da estratégia é $p_2 - p_1 = 2 > 0$ com o seguinte resultado:

1. $5 = 45 - 40$ para $S_T < 40$;
2. $45 - S_T$ para $40 < S_T < 45$;
3. zero para $S_T > 45$.

O lucro será portanto $L_{1,2,3} = [3, 43 - S_T, -2]$.

7.3 O Collar

O *Collar* é um instrumento popular para quem é longo num ativo S e está disposto a abrir mão de algum ganho em caso de subida para ganhar proteção de

descidas. De posse de um ativo S , vamos comprar um *put* com preço de exercício K_p e vender um *call* com K_c . Ambas com a mesma maturação T . Com $K_p < S < K_c$ o *put* p_t limita perdas, se S baixar mais que K_p . O *call* c_u limita lucros, se S subir acima de K_c . Verifique, que o valor do *collar* no instante t dado por

$$Col(t) = S + p_t(S, t) - c_u(S, t),$$

funciona como enunciado. A Fig.(7.5) mostra o retorno na maturação. Também vale

$$Col(t) = Ke^{-(T-t)} + c_l(S, t) - c_u(S, t)$$

usando paridade *put - call*.

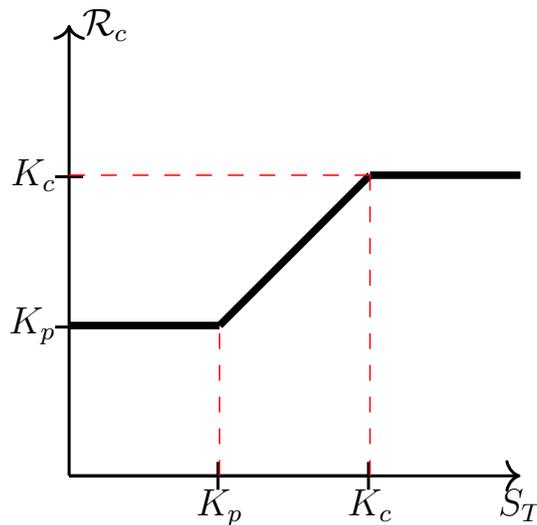


Figure 7.5: Retorno de um *collar* na maturação $t = T$.

Exemplo 7.1 (*Collar*)

Suponha, que um investidor é longo num valendo hoje \$100 e tem pouco certeza sobre o andamento futuro do mercado. Ele compra um *put* com preço alvo $K_p = 90$ pelo preço de \$4. Ele também vende um *call* com $K_c = 110$ pelo preço \$4.

Suponha que o preço caia para $\$80 < K_p$.

- O *call* vendido não será exercida com consequente ganho de \$4.

- O *put* de preço \$4 será exercida com retorno $90 - 80 = 10$ com ganho \$6.
- O ativo valendo \$80 resulta numa perda de \$20.
- O *put* protetivo reduziu esta perda para $|\$4 + \$6 - \$20| = \10 .

Agora suponha que o ativo suba para $\$105 > K_p$.

- O *call* vendida não será exercida, pois $\$110 - \$105 = 0$ com consequente retorno de \$4.
- O *put* de preço \$4 também não será exercida resultando numa perda de \$4.
- O ativo valendo \$105 resulta num ganho de \$5.
- Os preços dos *put* e o *call* OTM se cancelaram e o retorno final é \$5. É o mesmo ganho sem ter negociado opções.

Suponha que o ativo suba para $\$115 > K_c$.

- O *call* vendida será exercida, pois $\$115 - \$105 = 0$ com consequente perda de $|\$4 - \$5| = \$1$.
- O *put* de preço \$4 também não será exercida resultando numa perda de \$4.
- O ativo valendo \$115 resulta num ganho de \$15.
- O ganho final será $-\$1 - \$4 + \$15 = \10 .
- O *put* limitou as perdas, se $S_T < K_p$ e o *call* limitou as ganhos se $S_T > K_c$.

Exemplo 7.2 (Opção borboleta)

Com S_0 sendo o preço do ativo hoje e $\delta K > 0$, uma opção borboleta longa consiste em:

1. Compre um *call* com $K_1 = S_0 - \delta K$ e um com $K_3 = S_0 + \delta K$
2. Curta dois *call* com $K_2 = S_0$.

Exemplo 7.3 (Opção borboleta)

Suponha a ação da companhia Dreadco negociando em \$100 e o investidor acredita, que isto não va mudar grande coisa nos proximos meses. Ele então lança duas opções *call* c_2 com $K_2 = 100$ e compra uma opção *call* c_1 com $K_1 = 90$ e outra c_3 com $K_3 = 110$. Seja C o custo total de formar o portofolio. Se a ação estiver em $S_T = 100 - 0.001$ na maturação, c_2 expira sem valor e ele embolsa o valor de venda dela e ainda ganha 10 com a compra de c_1 . O ganho total é $c_2(0) + 10 - C$. Se a ação estiver $S_T < 100$ ou $S_T > 110$ a perda será maxima pela compra de c_1 e c_3 reduzido pela venda de c_2 . Se $90 < S_T < 110$ o negocio depende do preço das opções. Supondo $C = 5$. Ele tera uma perda para $S_T < 100 - 5$ ou $100 + 5 < S_T$ e um ganho se $9.5 \leq S_T \leq 105$.

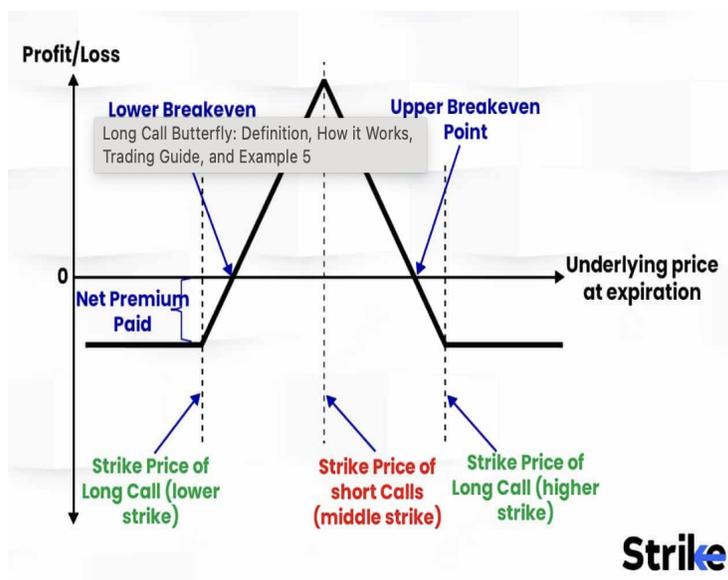


Figure 7.6: Posição Borboleta

XXXX

Exercicio 7.3

Analise a estrategia de apostar em baixa com *calls* com retorno $(S_T - K_1)_+ - (S_T - K_2)_+$, $K_2 > K_1$. Note que agora o investidor obtem um fluxo de caixa positivo ao iniciar a operação.

Exercicio 7.4

Em que condições do mercado é vantajoso comprar um *call* e vender um *put* com o mesmo K ? E o contrario? Veja e.g. <https://steadyoptions.com/articles/ep-sell-put-buy-call-strategy/>

7.4 Estratégias com maturações diferentes

Podemos criar um *calendar spread* vendendo duas opções *call* com o mesmo preço alvo K , mas com maturações diferentes $T_1 < T_2$. Opções com T maior costumam valer mais, requerendo pois um investimento inicial para vendel-as.

8 O método binomial e a estratégia auto-financiante

Para precificar opções pelo método binomial vamos iterar o procedimento da seção 4. Dividemos para isto o intervalo temporal até maturação T em n passos pequenos: $\delta t = T/n$. Mas mantemos dois valores possíveis para o ativo, o que justifica o nome **binomial**. O valor de δt depende da precisão com que queremos modelar as flutuações de nosso ativo. Com um δt suficientemente pequeno podemos descrever qualquer movimento de nosso ativo na vida real.

O objetivo do metodo é determinar o valor/premio da opção no instante inicial $t = 0$, conhecendo seu retorno Z somente no tempo T . Para opções *call*, *put* Europeias teriamos $Z = (S_T - K)_+$, $(K - S_T)_+$. Veremos que no limite $\delta t \rightarrow 0$ obtemos as famosas fórmulas de Black eqs.(10.19),(10.26).

8.1 Arvore de 2 passos

Vamos então iterar o procedimento da seção 4, que executa um só passo para um número $n = 2$ passos. Para isto criamos uma árvore binária descrevendo a evolução temporal de nossos processos aleatórios. Rotulemos os nós como mostra a Fig.(8.1).

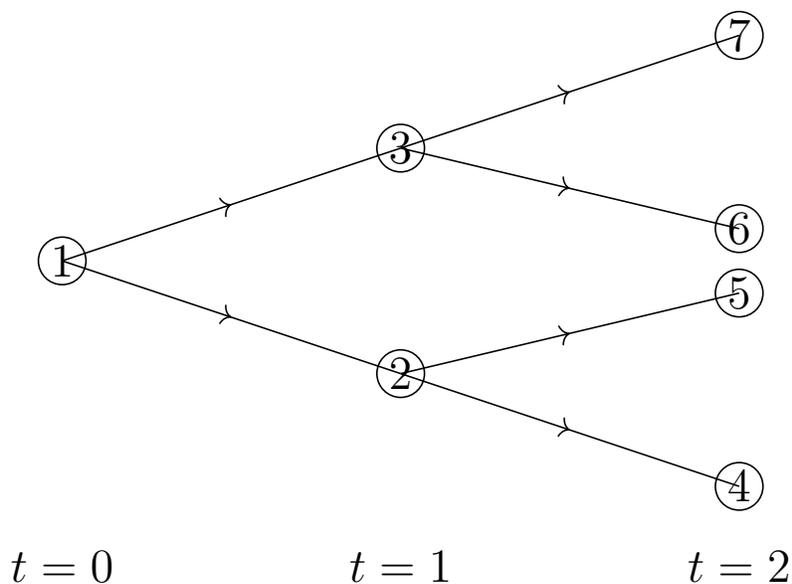


Figure 8.1: Enumeração de nós numa árvore binomial de dois passos.

Vamos criar um portofolio replicante, cujo valor no tempo de maturação $t = T$ será o retorno Z e no tempo $t = 0$ será o preço da opção. O portofolio mais simples possível conterá novamente dois items:

1. **O ativo S_t .**

Suponhamos que o ativo siga um processo aleatorio $S(t) \equiv S_t$ com probabilidade p , podendo em cada instante $t > 0$ assumir somente dois valores. Ele pode subir com probabilidade p para s_u ou baixar com probabilidade $1 - p$ para²⁰ s_d ou i.e. $s_u > s_d$. As probabilidades de transição²¹ podem depender do nó como mostra a Fig.(8.2). Usaremos indices inferiores para indicar o tempo e superiores entre parenteses para indicar os nós.

²⁰Usamos minúsculas para indicar valores particulares do processo aleatório S_t .

²¹Tal como no caso da rifa, veremos que a precificação independe destas probabilidades.

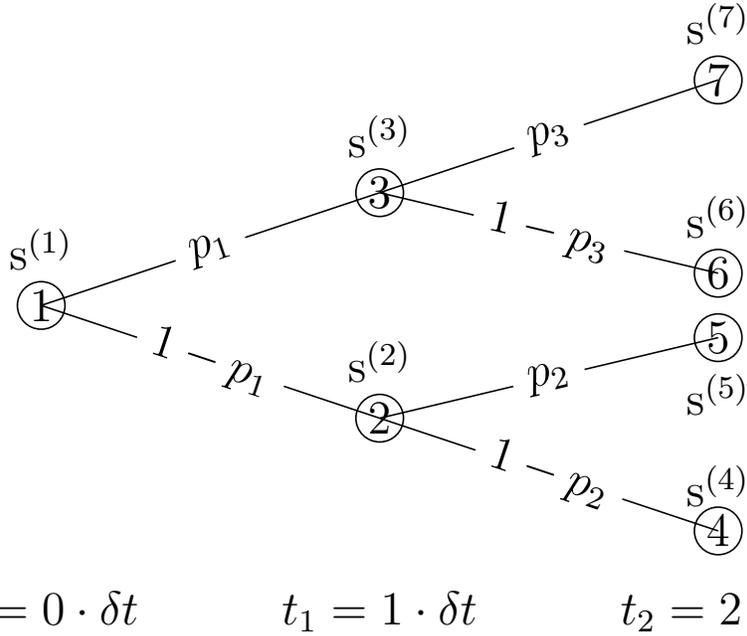


Figure 8.2: Enumeração de nós numa árvore binomial de dois passos com os ativos e suas probabilidades de evolução.

No instante inicial $t = 0$ o ativo terá um certo valor $s^{(1)}$ no nó 1. Podemos comprar ou vender qualquer quantidade do ativo por este valor em $t = 0$. A esperança no instante t_1 sob a probabilidade p é

$$\langle S(t_1) \rangle_p \equiv ps_u + (1-p)s_d = p_1s^{(3)} + (1-p_1)s^{(2)} \quad (8.1)$$

Quando a bolsa abre em $t = 1 \cdot \delta t$ o ativo é cotado pelo novo valor: pode ter subido para $s^{(3)}$ ou baixado para $s^{(2)}$. Ainda não sabemos os valores em t_2 , mas podemos calcular as esperanças. Elas são

$$\langle S(t_2) \rangle_p = \begin{cases} p_3s^{(6)} + (1-p_3)s^{(5)}, & \text{se se o ativo subiu} \\ p_2s^{(5)} + (1-p_2)s^{(4)}, & \text{se se o ativo baixou.} \end{cases} \quad (8.2)$$

Em geral $s^{(j)}$ pode subir com probabilidade p_j para $s^{(2j+1)}$ ou baixar com probabilidade $1-p_j$ para $s^{(2j)}$ nos respectivos nós.

2. O título B_t .

O valor de nossa grana depende do tempo: pagamos ou recebemos

juros. B_t representa a dependencia temporal do dinheiro. Se em $t = 0$ a título vale $B(t_0) = B_0$, em $t = 1 \cdot \delta t$ ele valerá $B_1 = B_0 e^{r\delta t}$. Note que usamos sub-índices temporais para os títulos, pois estes assumem o mesmo valor para todos os nós com tempos iguais. Por simplicidade consideraremos somente uma taxa constante²² de modo que no instante $t = n\delta t$ o título valerá $B_n = B_0 e^{nr\delta t}$. Em finanças este título, que monitora o valor do dinheiro, chama-se *numerario*. Para simplificar a notação poremos $B_0 = 1$.

Para aplicar a prescrição de precificar uma rifa da secção 4 a uma rede, é conveniente adaptar a notação usada naquela secção para uma rede binária como da Fig. 8.2. Estando num nó no instante t (chamado de "now") precisamos calcular:

1. A probabilidade risco-neutra q para transitar ao instante seguinte. Impondo, que $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ seja uma martingale, temos

$$\langle e^{-r\delta t} S_{t+\delta t} \rangle_q = e^{-r\delta t} (s_u q_{now} + s_d (1 - q_{now})) = s_{now},$$

onde s_u e s_d são os possíveis valores do ativo no instante seguinte: o primeiro após subida e o segundo após descida. Resulta portanto para a probabilidade risco-neutra q_{now}

$$q_{now} = \frac{e^{r\delta t} s_{now} - s_d}{s_u - s_d}, \quad (8.3)$$

2. Impondo que a opção também seja uma martingale, o valor dela no instante t é fornecido pela equ. (4.17)

$$f_{now} = e^{-r\delta t} (q_{now} f_u + (1 - q_{now}) f_d). \quad (8.4)$$

Usando estas equações podemos avançar na rede a partir do primeiro nó até os últimos nós, onde o valor da opção é conhecido. Retrocedendo precificamos a opção nos nós anteriores.

No nó "1" temos a equ. (8.3) fornece

$$q^{(1)} = \frac{s^{(1)} e^{r\delta t} - s^{(2)}}{s^{(3)} - s^{(2)}}. \quad (8.5)$$

²²Poderíamos ter uma sequência de taxas de juro r_1, r_2, \dots ou mesmo um processo aleatório.

O valor $f^{(1)}$ do portfólio em $t = 0$ no nó "1" é fornecido pela equ.(8.4):

$$f^{(1)} = e^{-r\delta t} \left(q^{(1)} f^{(3)} + (1 - q^{(1)}) f^{(2)} \right). \quad (8.6)$$

Suporemos aqui que $0 < q < 1$, excluindo os valores extremos $q = 0, 1$, pois supomos que o processo não pare num nó intermediário: as duas probabilidades de transição devem ser diferentes de zero.

Se sentarmos no nó j ao invés do nó "1" e repetirmos o raciocínio, teríamos

$$f^{(j)} = e^{-r\delta t} \left(q^{(j)} f^{(2j+1)} + (1 - q^{(j)}) f^{(2j)} \right). \quad (8.7)$$

Fazendo $j = 2, 3$ temos

$$f^{(2)} = e^{-r\delta t} \left(q^{(2)} f^{(5)} + (1 - q^{(2)}) f^{(4)} \right), \quad (8.8)$$

$$f^{(3)} = e^{-r\delta t} \left(q^{(3)} f^{(7)} + (1 - q^{(3)}) f^{(6)} \right) \quad (8.9)$$

$$(8.10)$$

com as probabilidades

$$q^{(2)} = \frac{s^{(2)} e^{r\delta t} - s^{(4)}}{s^{(5)} - s^{(4)}}, \quad q^{(3)} = \frac{s^{(3)} e^{r\delta t} - s^{(6)}}{s^{(7)} - s^{(6)}}. \quad (8.11)$$

Substituindo estas equações na equ.(8.6) obtemos

$$f^{(1)} = e^{-2r\delta t} \left(q^{(1)} q^{(3)} f^{(7)} + q^{(1)} \tilde{q}^{(3)} f^{(6)} + \tilde{q}^{(1)} q^{(2)} f^{(5)} + \tilde{q}^{(1)} \tilde{q}^{(2)} f^{(4)} \right) \quad (8.12)$$

com $\tilde{q}^{(j)} = 1 - q^{(j)}$. Note que as equ.(8.6) e (8.12) mostram, que podemos calcular a esperança de uma vez ou quebra-la em dois pedaços. Concluimos, que para obter $f^{(1)}$:

- subimos a árvore com probabilidades $q^{(j)}$ e descemos com probabilidades $\tilde{q}^{(j)}$ somando sobre as possíveis trajetórias com os pesos adequados.

Se o tempo de maturação for $T = 2\delta t$, chegamos ao fim da árvore e podemos aplicar os critérios de exercício Europeias para opções *call* e *put* da equ.(6.2)

aos nós em $t = 2$. Para o nó "7" teríamos

$$\begin{aligned}
 \text{call:} \quad & \text{se } s^{(7)} > K \quad \rightarrow f^{(7)} = s^{(7)} - K \\
 & \text{se } s^{(7)} < K \quad \rightarrow f^{(7)} = 0 \\
 \text{put:} \quad & \text{se } s^{(7)} < K \quad \rightarrow f^{(7)} = K - s^{(7)} \\
 & \text{se } s^{(7)} > K \quad \rightarrow f^{(7)} = 0
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

e analogamente para os nós 4, 5, 6.

Obtemos finalmente o preço justo pelo qual venderíamos ou compraríamos a opção em $t = 0$. Supondo naturalmente que a figura Fig. 8.2 seja uma representação adequada da realidade, ou seja a precificação depende de nosso modelo para descrever o futuro do ativo.

Note que em nenhum momento nos referimos as probabilidades p_i com que o ativo flutua no mundo real. Estas probabilidades, mostradas na Fig(8.2), não entram nos cálculos.

Para simplificar usaremos arvores do tipo da Fig.(8.3), que são mais simples de tratar. Esta árvore chama-se *recombinante*, pois temos dois caminhos diferentes para chegar ao nó "5": temos que lembrar que existe mais de um caminho para chegar ao mesmo nó. Identificando os nós "5" e "6" da Fig.(8.1) a equ.(8.12) fica e.g. para q constante

$$f^{(1)} = B_0 B_T^{-1} \left(q^2 f^{(6)} + 2q\tilde{q}f^{(5)} + \tilde{q}^2 f^{(4)} \right), \tag{8.14}$$

onde usamos que $T = 2\delta t$ e $B_0 B_T^{-1} = e^{-2r\delta t}$. O numero de caminhos para os nós [4, 5, 6] é [1, 2, 1].

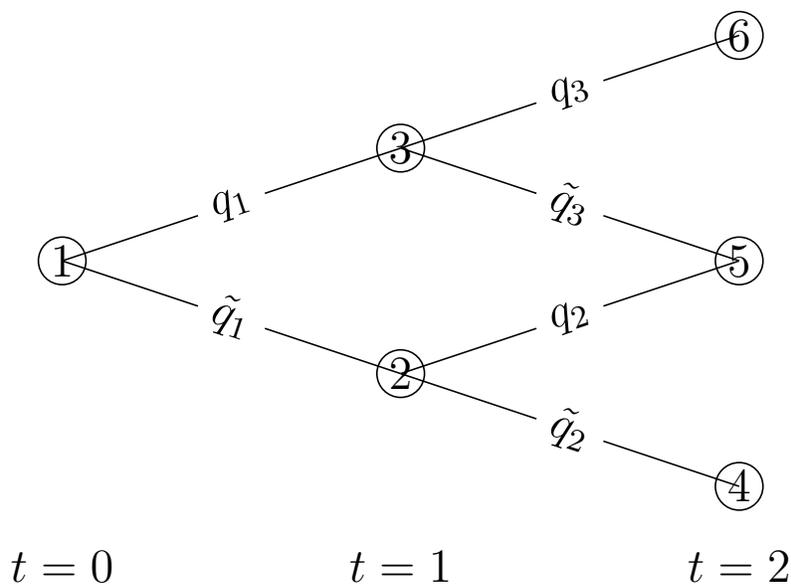


Figure 8.3: Nós e probabilidades de transição risco-neutra numa árvore recombinante binomial de dois passos.

Exercício 8.1

O preço de um ativo está hoje a \$30 e sabemos que no fim do mes será ou \$32 ou \$28. A taxa livre de risco é $r = 8\%$. Quanto vale uma opção *call* e uma opção *put* com maturação de um mes e $K = \$29$.

Exercício 8.2

Como no exercício anterior, mas com maturação de 4 meses.

Exercício 8.2

Verifique a paridade *put-call* nos exercícios anteriores.

8.2 Precificando numa árvore de 3 passos

Consideremos a seguir exemplos de evolução de um ativo na árvore recombinante da Fig.(8.4) com $n = 3$ passos. Os ativos na Fig.(8.4) sobem e baixam pelo mesmo valor $\Delta = 20$ em cada passo: $s_{now} - s_d = \Delta$, $s_u - s_d = 2\Delta$. Mas a probabilidade q depende do nó:

$$q_{now} = \frac{1}{2} + \frac{s_{now}}{2\Delta}(e^{r\delta t} - 1). \quad (8.15)$$

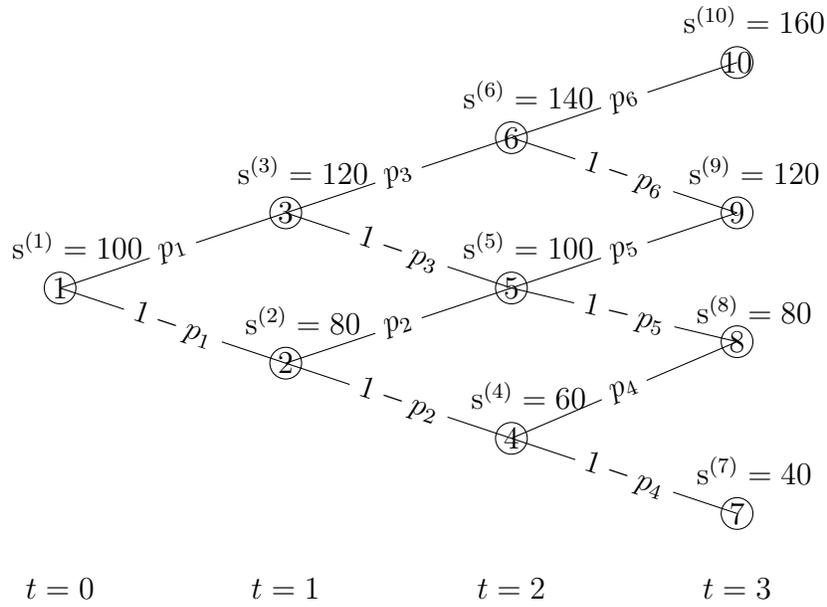


Figure 8.4: Os ativos na arvore binaria recombinante de tres passos.

Tabela 8.2: O processo X_3 para um ativo evoluindo segundo a figura 8.4.

X_3	Nó final	Trajektorias possiveis	No. de traj.
0	{7}	ddd	$1 = \binom{3}{0}$
1	{8}	udd, dud, ddu	$3 = \binom{3}{1}$
2	{9}	uud, udu, duu	$3 = \binom{3}{2}$
3	{10}	uuu	$1 = \binom{3}{3}$

Como especificado na tabela 8.4 o numero de caminhos para os nós [7, 8, 9, 10] é [1, 3, 3, 1] ou seja

$$\left[\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3} \right]$$

cuja soma é 2^3 .

Para n passos com 2^n caminhos a distribuição será a binomial $\binom{n}{m}$, cujo limite $\lim_{n \rightarrow \infty}$ é uma Gaussiana. Isto simplificará sobremaneira as nossas contas!

Vamos estender a equ.(8.14) para $T = 3\delta t$ e analisar um *call* com preço de exercício $K = 100$. Com o tempo de maturação $T = 3\delta t$, aplicamos os critérios de exercício para uma opção *call* Europeia $Z = (S - K)_+$ nos nós 7, 8, 9, 10, sabendo portanto os valores $f^{(10)} = 60$, $f^{(9)} = 20$, $f^{(8)} = 0$ e $f^{(7)} = 0$. Usando a equ.(8.4) para f_i anteriores, completamos a árvore de opções retroativamente.

Obtemos para o nó 1 da Fig.(8.5) o seguinte valor para a opção

$$f^{(1)} = e^{-3r\delta t} [q^{(1)}q^{(3)}q^{(6)}f^{(10)} + q^{(1)}q^{(3)}\tilde{q}^{(6)}f^{(9)} + q^{(1)}\tilde{q}^{(3)}q^{(5)}f^{(9)} + \tilde{q}^{(1)}q^{(2)}q^{(5)}f^{(9)}],$$

onde $q^{(i)}$ é a probabilidade de subir e $\tilde{q}^{(i)} = 1 - q^{(i)}$ a probabilidade de baixar partindo do i -ésimo nó. Verificamos também

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= e^{-r\delta t} [q^{(1)}f^{(3)} + \tilde{q}^{(1)}f^{(2)}] \\ &= e^{-2r\delta t} [q^{(1)}q^{(3)}f^{(6)} + q^{(1)}\tilde{q}^{(3)}f^{(5)} + \tilde{q}^{(1)}q^{(2)}f^{(5)}] \end{aligned} \quad (8.16)$$

Para tempos intermediários $0 < t \leq T = 3\delta t$ temos que somar sobre os caminhos, partindo do nó inicial no instante t e chegando aos possíveis nós finais e aplicar o fator exponencial $B_t/B_T = e^{-r(T-t)}$. Por exemplo

$$\begin{aligned} f^{(6)} &= e^{-r\delta t} [q^{(6)}f^{(10)} + \tilde{q}^{(6)}f^{(9)}], & t = 2 \\ f^{(2)} &= e^{-2r\delta t} q^{(2)}q^{(5)}f^{(9)}, & t = 1, \end{aligned} \quad (8.17)$$

onde t é o tempo do respectivo nó.

É essencial neste ponto introduzir uma notação, que separe a probabilidade de transição q_i do caminho para onde transitamos. Por exemplo não necessitamos conhecer as reais probabilidades p_i de transição do ativo, mas apenas os valores assumidos.

- Uma **filtração** \mathcal{F}_t é basicamente a história do processo até o tempo t .

Assim \mathcal{F}_t identifica os possíveis caminhos partindo do nó 1 em $t = 0$ até algum nó no tempo t . Por exemplo a filtração \mathcal{F}_0 consiste somente do nó 1: $\mathcal{F}_0 = \{1\}$. No tempo $t = 1$ a filtração \mathcal{F}_1 consiste de dois caminhos: $\{1, 3\}$

em caso de subida e $\{1, 2\}$ em caso de descida. Em $t = 2$ as filtrações \mathcal{F}_2 podem ser $\{1, 3, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 4\}$.

As probabilidades de transição são codificadas separadamente nas variáveis $q^{(i)}$. Esta separação é conveniente, pois podemos percorrer a mesma árvore mas com probabilidades diferentes.

Podemos reescrever as equações acima como

$$f_t = e^{-r(T-t)} \langle Z | \mathcal{F}_t \rangle_q. \quad (8.18)$$

A instrução $\langle \cdot | \mathcal{F}_t \rangle$ diz: se posicione em algum nó no instante t e tome esperanças futuras partindo do nó e chegando em $t = T$ no final da árvore. Para tomar esperanças precisamos da probabilidade q , logo o índice $\langle \cdot | \mathcal{F}_t \rangle_q$. Note que, apesar de termos tomados esperanças, ainda assim $\langle \cdot | \mathcal{F}_{t>0} \rangle$ é um processo aleatório, porque existem vários nós num certo instante $t > 0$.

A fórmula acima é fundamental para precificar opções e será amplamente usado, valendo mesmo para tempos contínuos. É fácil verificar, veja seção 16, que o *primeiro teorema fundamental* da seção 4 também vale no presente caso: precificando via martingale com a probabilidade risco-neutra q proíbe arbitragem.

Exemplo 8.1: Precificando um *call* com $K = 100$ e $r = 0$.

Para simplificar as contas vamos pôr $r = 0$, de modo que $q = 1/2$ independente dos nós da Fig.(8.4).

Aplicamos os critérios de exercício para uma opção *call* Europeia $Z = (S - K)_+$ obtendo os seguintes valores [$f^{(10)} = 160 - 100 = 60$, $f^{(9)} = 120 - 100 = 20$, $f^{(8)} = 80 - 100 < 0 \rightarrow 0$, $f^{(7)} = 40 - 100 < 0 \rightarrow 0$]. Usando a equ.(8.4) obtemos $f^{(6)} = (60 + 20)/2 = 40$, $f^{(4)} = (0 + 0)/2 = 0$ etc. Assim chegamos ao nó "1", que dá o preço do portfólio em $t = 0$. A quantia de \$15 é o valor justo pelo qual negociariamos a opção. Mostramos o resultado na Fig.(8.5).

Note que $f^{(1)} = \frac{1}{8}(f^{(10)} + 3f^{(9)}) = \frac{1}{4}(f^{(6)} + 2f^{(5)}) = \frac{1}{2}(f^{(3)} + f^{(2)})$

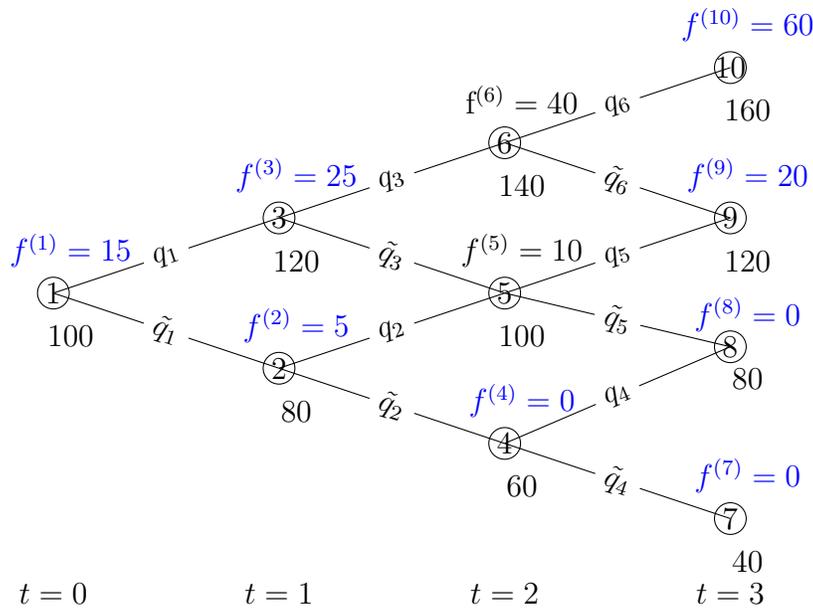


Figure 8.5: As opções *call* na árvore binária recombinante de tres passos com $K = 100$, $q_i = \frac{1}{2}$ e $r = 0$. O valor do ativo em preto está abaixo do nó.

8.3 A estratégia auto-financiante

Acabamos de percorrer a árvore para calcular o valor da opção em todos os nós. $f^{(1)}$ é o valor pelo qual negociariamos a opção sem correr riscos. Mas saber o preço justo não é suficiente:

- precisamos mostrar que existe uma estratégia, que deve ser adotada para um *hedge* perfeito.

Considere então um portfólio replicante (ϕ, ψ) de ϕ unidades do ativo e de ψ unidades do título.

$$\Pi = \phi S + \psi B. \quad (8.19)$$

Para calcular ϕ e ψ , vamos novamente adaptar a notação da seção 4:

$$q_{now} = \frac{s_{now} e^{r\delta t} - s_d}{s_u - s_d}, \quad f_{now} = e^{-r\delta t} (q_{now} f_u + (1 - q_{now}) f_d)$$

$$\phi = \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d}, \quad \psi = B_{now}^{-1} (f_{now} - \phi s_{now}). \quad (8.20)$$

Note que a equação para ψ envolve somente índices *now*. O seu papel é assegurar o valor correto f_{now} da opção. Recalculando ϕ e o valor correspondente de ψ não muda o valor do portfólio, garantindo assim que ele seja autofinanciante.

Ao invés de aplicar estas formulas diretamente, vamos repetir em detalhes o primeiro passo. Estamos em $t = 0$ no nó "1". Para replicar as opções em $t = 1 \cdot \delta t$, ϕ e ψ devem satisfazer as equações

$$\begin{aligned}\Pi_1^u &: \phi_0 s^{(3)} + \psi_0 B_1 = f^{(3)} \\ \Pi_1^d &: \phi_0 s^{(2)} + \psi_0 B_1 = f^{(2)}.\end{aligned}\quad (8.21)$$

Os processos ϕ_t, ψ_t são processos aleatórios, mas *previsíveis*!

- ϕ_t e ψ_t estão disponíveis em t , pois para calculá-los só precisamos saber a história para $t_{passado} \leq t$.

Comprando/vendendo ϕ ativos e ψ de títulos²³, o nosso portfólio $[\phi_0, \psi_0]$ vale hoje em $t = 0$

$$\Pi_0 : f^{(1)} = \phi_0 s^{(1)} + \psi_0 B_0 = f_0. \quad (8.22)$$

Desta equação e das eqs.(8.21) obtemos

$$\phi_0 = \frac{f^{(3)} - f^{(2)}}{s^{(3)} - s^{(2)}}, \quad \psi_0 = \frac{1}{B_1} \frac{s^{(3)} f^{(2)} - s^{(2)} f^{(3)}}{s^{(3)} - s^{(2)}} = \frac{1}{B_0} (f^{(1)} - \phi_0 s^{(1)}), \quad (8.23)$$

coincidindo com as eqs.(8.20) com $now = 0$. Expressamos portanto o valor da opção em $t = 0$ em termo de variáveis em $t = 1 \cdot \delta t$. Proseguindo assim até a maturação $t = T$, completamos a nossa estratégia de *hedging*. Vamos então percorrer a árvore no sentido do tempo, calculando os valores de ϕ e ψ do portfólio.

8.3.1 Hedging um call com $r = 0$

Para simplificar faremos $r = 0$ e $B_0 = 1$ e conseqüentemente podemos ignorar B_t , que também é igual a um. Ao percorrer a árvore precisaremos usar as eqs.(8.20) para calcular

$$\phi = \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d}, \quad \psi = f_{now} - \phi s_{now} \quad (r = 0). \quad (8.24)$$

²³Números negativos significam vender ao invés de comprar!

Os exemplos seguintes ilustram a **estratégia sem risco**, se usarmos estes valores para ϕ e ψ . Curtando um *call* com $\phi > 0$ executamos o seguinte:

- **Em $t = 0$ estamos no nó 1, onde o ativo vale $s_0 = s^{(1)} = 100$.**
Vendemos a opção por $f_0 = \$15$. Usamos a equ.(8.24) para calcular ϕ como $\phi = (25 - 5)/(120 - 80) = 1/2$. Gastamos $100/2 = 50$ para comprar $1/2$ do ativo s_0 . Precisamos então pedir $50 - 15 = 35$ emprestado. Resulta de acordo com a equ.(8.24)

$$\phi_0 = 1/2, \quad \psi_0 = f_0 - \phi_0 s_0 = -35, \quad (8.25)$$

com um valor de $\psi < 0$ indicando que temos que pedir emprestado. Em termos de $[\phi_0, \psi_0]$ o nosso portofolio vale

$$f_0 = \phi_0 s_0 + \psi_0. \quad (8.26)$$

- **Em $t = 1$ suponha que o ativo subiu para o nó 3, onde vale $s_1 = s^{(3)} = 120$.**

Durante este período ϕ_0, ψ_0 não mudaram, mas em $t = t_1$ verificamos, que o ativo mudou de valor para s_1 e o nosso portofolio agora vale

$$\begin{aligned} f_1 &= \phi_0 s_1 + \psi_0 = \frac{1}{2}120 - 35 = 25 \\ &\stackrel{(8.26)}{=} \phi_0 s_1 + (f_0 - \phi_0 s_0) = f_0 + \phi_0 (s_1 - s_0), \end{aligned} \quad (8.27)$$

ou seja

$$\Delta f_0 = \phi_0 \Delta s_0 \quad \begin{cases} \Delta f_0 = f_1 - f_0, \\ \Delta s_0 = s_1 - s_0. \end{cases} \quad (8.28)$$

O novo ϕ é

$$\phi_1 = (40 - 10)/(140 - 100) = \frac{3}{4}. \quad (8.29)$$

Temos que comprar mais $1/4$ do ativo por $\frac{1}{4}120 = 30$ para completar os $\frac{3}{4}$ e nossa dívida sobe para $35 + 30 = 65$. Este é o valor de $(-\psi)$ pela equ.(8.24) ou seja $\psi_1 = 25 - \frac{3}{4}120 = -65$. Isto produz a identidade

$$f_1 = \phi_1 s_1 + \psi_1. \quad (8.30)$$

Resulta então com a equ.(8.27) a igualdade

$$f_1 = \phi_0 s_1 + \psi_0 = \phi_1 s_1 + \psi_1. \quad (8.31)$$

Esta equação é verdadeira, pois ao passar de $[\phi_0, \psi_0]$ para $[\phi_1, \psi_1]$ não mudamos o valor do portfólio, mas mudamos somente a quantidade relativa de ativos comparada com a de títulos! Não injetamos dinheiro extra, mas emprestamos se for necessário: o portfólio é **auto-financiante** e muda somente se o valor dos ativos, e consequentemente dos títulos mudou.

- **Em $t = 2$ suponha que o ativo subiu para nó 6, onde vale $s_2 = s^{(6)} = 140$.**

Durante este período ϕ_1, ψ_1 não mudaram, mas em $t = t_2$ verificamos que o ativo mudou de valor para s_2 e o nosso portfólio agora vale

$$\begin{aligned} f_2 &= \phi_1 s_2 + \psi_1 = \frac{3}{4}140 - 65 = 40 \\ &\stackrel{(8.30)}{=} \phi_1 s_2 + (f_1 - \phi_1 s_1) = f_1 + \phi_1 (s_2 - s_1) \end{aligned} \quad (8.32)$$

ou seja

$$\Delta f_1 = \phi_1 \Delta s_2 \quad \begin{cases} \Delta f_2 = f_2 - f_1, \\ \Delta s_1 = s_2 - s_1 \end{cases} \quad (8.33)$$

O novo ϕ é

$$\phi_2 = (60 - 20)/(160 - 120) = 1. \quad (8.34)$$

Temos que comprar $1/4$ do ativo por $\frac{1}{4}140 = 35$ para completar uma unidade do ativo e a nossa dívida sobe para $65 + 35 = 100 = -\psi_2$. Este é o valor de $(-\psi)$ pela equ.(8.24), que produz a igualdade

$$f_2 \stackrel{(8.32)}{=} \phi_1 s_2 + \psi_1 = \phi_2 s_2 + \psi_2. \quad (8.35)$$

- **Em $t = 3$ suponha que o ativo subiu para o nó 10, onde vale $s_3 = s^{(10)} = 160$.**

Vendemos o nosso ativo por 160, pagamos a nossa dívida de $\psi_2 = -100$ e sobra 60 para entregar o opção por

$$f_3 = \phi_2 s_3 + \psi_2 = 60 \quad (8.36)$$

e satisfazer a nossa obrigação para com o comprador da opção.

Percorremos a árvore num particular caminho, que vamos chamar de *filtração* $\mathcal{F} = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{10}\}$. Neste caminho calculamos os processos previsíveis

$$\begin{aligned} \phi_{t=0,1,2} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{3}{4}, & 1 \end{bmatrix} \\ \psi_{t=0,1,2} &= \begin{bmatrix} -35, & -65, & -100 \end{bmatrix} \\ f_3 &= \phi_2 s_3 + \psi_2 = 160 - 100 = 60 \end{aligned}$$

Note que em nenhum momento tivemos injeção ou retirada de dinheiro em nosso portfólio. Ao necessitar dinheiro nos fizemos empréstimos em $t < T$, que são todos pagos, no caso $r \neq 0$ com juros, quando chegarmos a $t = T$.

Este procedimento *auto-financiante* é caracterizado pelas eqs. (8.28) e (8.33): o portfólio só muda de valor entre t e $t + \delta t$ devido a mudança do ativo e do título. A intervenção do investidor para fazer o *hedge* consiste em rebalancear a proporção ativo/título.

Podemos verificar, que esta estratégia funciona qualquer que seja o caminho ao nó final em $t = 3$ ou seja **a estratégia de hedging é independente do caminho**. Se não fosse assim, teríamos a possibilidade de arbitragem, pois poderíamos comprar duas opções pelo mesmo preço em $t = 0$. Mas pela lei de um só preço da seção 4, eles devem ter o mesmo preço em $t = 3$. Verifiquemos isto para dois caminhos.

1. Para $\mathcal{F} = \{1, 2, 5, 9\}$ teríamos a tabela

Tempo j	Ultimo Salto	Ativo S_j	Call c_j	ϕ_j	ψ_j
0	-	100	15	1/2	-35
1	desce	80	5	1/4	-15
2	sobe	100	10	1/2	-40
3	sobe	120	20	-	-

Tabela dos ativos e call s para a filtração $\mathcal{F} = \{1, 2, 5, 9\}$

Em $t = 3$ temos em ativos $120/2 = 60$. Com a dívida de 40 sobra $20 = f_3 = \phi_2 s_3 + \psi_2 = S_T - K$, com que cumprimos a nossa obrigação com o comprador. Note que no nó 5, em que ϕ baixou de 1/2 para 1/4, vendemos a fração $\frac{1}{4}$ do ativo e diminuímos a nossa dívida.

2. Para $\mathcal{F} = \{1, 3, 6, 9\}$ a tabela seria

Tempo j	Ultimo Salto	Ativo S_j	Call c_j	ϕ_j	ψ_j
0	-	100	15	1/2	-35
1	sobe	120	25	3/4	-65
2	sobe	140	40	1	-100
3	desce	120	20	-	-

Tabela dos ativos e *call* s para a filtração $\mathcal{F} = \{1, 3, 6, 9\}$

Em $t = 3$ temos um ativo de 120. Com a dívida de 100 sobra 20, que é igual a $f_3 = \phi_2 s_3 + \psi_2 = S_T - K$. Entregamos este valor ao comprador.

O mercado no mundo **real**, que não segue o nosso modelo simplista, este *hedging* perfeito em geral não existe e o resultado **depende do caminho**.

Exercício 8.1. Precificando um contrato.

Repita a estratégia de precificação para um contrato em que o mesmo critério $Z = S - K$, ao invés de $Z = (S - K)_+$, é aplicado em todos os nós finais.

Exercício 8.2. *Hedging* do comprador

Execute o *hedge* para as trajetórias acima do ponto de vista do comprador.

8.3.2 *Hedging* um *put* com $r = 0$

Aplicando as condições em $t = T$ para uma opção *put* obtemos os valores da figura (8.6).

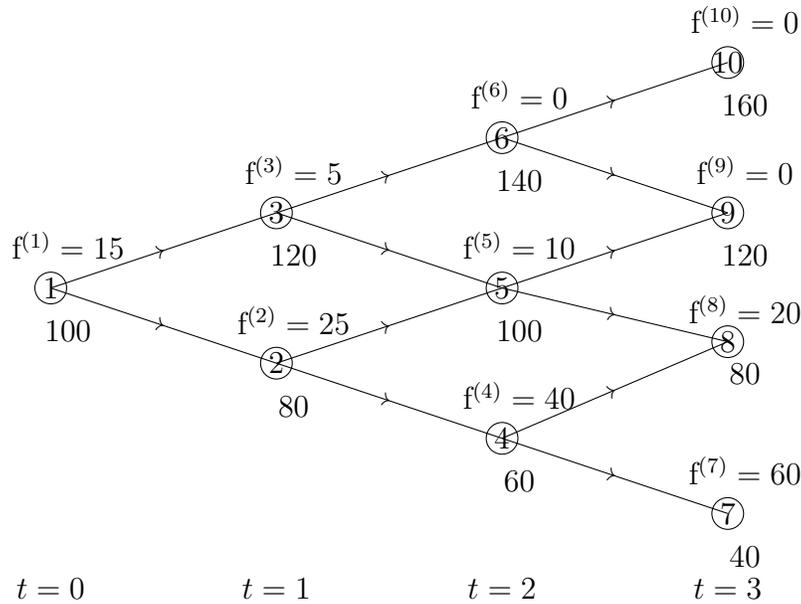


Figure 8.6: As opções *put* na árvore binária recombinante de tres passos com $K = 100$, $q = 1/2$ e $r = 0$ com os valores do ativo abaixo do nó. Os valores do *put* são a reflexão dos *calls* da Fig.8.5 por um eixo horizontal.

Considere as seguintes cenários:

1. A trajetória passa pelos nós $\{1, 3, 6, \left[\begin{smallmatrix} 10 \\ 9 \end{smallmatrix} \right]\}$

- **Em $t = 0$ estamos no nó 1, onde vale $s_0 = s^{(1)} = 100$.**
Vendemos a opção por $f_0 = \$15$. Usamos a equ.(8.24) para calcular $\phi_0 = (5 - 25)/(120 - 80) = -1/2$. Já que ϕ é negativo, *curtamos* a fração $\frac{1}{2}$ do ativo por $\frac{1}{2}100 = 50$ e convertemos o lucro em um título de 50. A nossa grana sobe para $\psi_0 = 15 + 50 = 65$, que é o valor de ψ_0 extraído do nosso portofolio

$$f_0 = \phi_0 s_0 + \psi_0 \rightarrow \psi_0 = 15 - \left(-\frac{1}{2}100\right) = 65. \quad (8.37)$$

- **Em $t = 1$ suponha que o ativo subiu para o nó 3, onde vale $s_1 = s^{(3)} = 120$.**
Durante este período ϕ_0, ψ_0 não mudaram, mas em $t = t_1$ verificamos, que o ativo mudou de valor para s_1 e o nosso portofolio

agora vale

$$f_1 = \phi_0 s_1 + \psi_0 = -\frac{1}{2}120 + 65 = 5. \quad (8.38)$$

O novo ϕ é

$$\phi_1 = (0 - 10)/(140 - 100) = -1/4 \quad (8.39)$$

e o valor de ψ_1 dado pela equ.(8.24) é

$$\psi_1 = 5 - (-\frac{1}{4}120) = 35. \quad (8.40)$$

Como devíamos a fração $1/2$ do ativo ao curtá-lo, devemos baixá-la para $1/4$, entrando o valor de $\frac{1}{4}120 = 30$ e com isto a nossa grana baixa para $65 - 30 = 35 = \psi_1$.

- **Em $t = 2$ suponha que o ativo subiu para nó 6, onde vale $s_2 = s^{(6)} = 140$.**

Durante este período ϕ_1, ψ_1 não mudaram, mas em $t = t_2$ verificamos que o ativo mudou de valor para s_2 e o nosso portofolio agora vale

$$f_2 = \phi_1 s_2 + \psi_1 = -\frac{1}{4}140 + 35 = 0. \quad (8.41)$$

Ou seja, usamos a nossa grana de 35 para comprar a fração de $1/4$ do ativo e ao devolve-lo fechar a nossa posição de venda a curta. A opção expira sem valor pois $S_T > K$.

Para $\mathcal{F} = \{1, 3, 6, 10\}$ a tabela é

Tempo j	Ultimo Salto	Ativo S_j	Put p_j	ϕ_j	ψ_j
0	-	100	15	-1/2	65
1	sobe	120	5	-1/4	35
2	sobe	140	0	-	-
3	sobe	160	0	-	-

Tabela dos ativos e put s para a filtração $\mathcal{F} = \{1, 3, 6, 10\}$

2. Considere agora a trajetória passando pelos nós $\{1, 2, 4, 7\}$

- **Em $t = 0$ estamos no nó 1, onde vale $s_0 = s^{(1)} = 100$.**
Temos $f_0 = \$15$, $\phi_0 = (5 - 25)/(120 - 80) = -1/2$ e $\psi_0 = 15 + \frac{1}{2}100 = 65$ e o nosso portofolio vale

$$f_0 = \phi_0 s_0 + \psi_0 \quad (8.42)$$

devendo 1/2 de ativo e contendo um título de 65.

- **Em $t = 1$ o ativo baixou para o nó 2, onde vale $s_1 = s^{(2)} = 80$.**
O nosso portofolio agora vale

$$f_1 = \phi_0 s_1 + \psi_0 = -\frac{1}{2}80 + 65 = 25. \quad (8.43)$$

O novo ϕ é

$$\phi_1 = (10 - 40)/(140 - 100) = -3/4 \quad (8.44)$$

e o valor de ψ_1 dado pela equ.(8.24) é

$$\psi_1 = 25 - \left(-\frac{3}{4}80\right) = 85. \quad (8.45)$$

Como deviamos a fração 1/2 do ativo ao curtá-lo, devemos *curtar* mais 1/4, cujo valor é $\frac{1}{4}80 = 20$ e a nossa grana sobe para $65 + 20 = 85 = \psi_1$.

- **Em $t = 2$ o ativo baixou para nó 4, onde vale $s_2 = s^{(4)} = 60$.**
O nosso portofolio agora vale

$$f_2 = \phi_1 s_2 + \psi_1 = -\frac{3}{4}80 + 85 = 40. \quad (8.46)$$

O novo ϕ é

$$\phi_2 = (20 - 60)/(140 - 100) = -1 \quad (8.47)$$

e o valor de ψ_1 dado pela equ.(8.24) é

$$\psi_2 = 40 - (-60) = 100. \quad (8.48)$$

Como deviamos a fração 3/4 do ativo, devemos *curtar* mais 1/4, cujo valor é $\frac{1}{4}60 = 15$ e a nossa grana sobe para $85 + 15 = 100 = \psi_1$.

- Em $t = 3$ o ativo baixou para nó **7**, onde vale $s_3 = s^{(7)} = 40$.
O nosso portofolio agora vale

$$f_3 = \phi_2 s_3 + \psi_2 = -40 + 100 = 60. \quad (8.49)$$

Ou seja, temos 100 de grana para comprar o ativo por 40 e devolve-lo para fechar a nossa posição *curtada*. Sobram 60, que entregamos ao comprador, pois lhe prometemos a venda por $K = 100$, mas o ativo só esta valendo 40.

A tabela para a evolução $\{1, 2, 4, 7\}$ é a seguinte:

Tempo j	Ultimo Salto	Ativo S_j	Put p_j	ϕ_j	ψ_j
0	-	100	15	-1/2	65
1	desce	80	25	-3/4	85
2	desce	60	40	-1	100
3	desce	40	60	-	-

Tabela dos ativos e puts para a filtração $\mathcal{F} = \{1, 2, 4, 7\}$

3. Considere ainda a trajetória $\{1, 2, 4, 8\}$

Em $t = 3$ se o ativo tivesse subido para nó **8**, onde vale $s_3 = s^{(8)} = 80$, o nosso portofolio com $\phi_2 = -1$ agora valeria

$$f_3 = \phi_2 s_3 + \psi_2 = -80 + 100 = 20. \quad (8.50)$$

Temos $\psi = 100$ em caixa, de que usamos 80 para fechar a curta, sobrando 20 para completar o valor do ativo de 80 para o valor de $K = 100$.

8.3.3 Hedging com $r \neq 0$

O valor do portofolio no tempo t é dado pela a equ.(8.18):

$$f_t = \langle B_t B_T^{-1} Z | \mathcal{F}_t \rangle_q = e^{-r(T-t)} \langle Z | \mathcal{F}_t \rangle_q. \quad (8.51)$$

Vamos ainda definir \tilde{f}_t como o valor da opção f_t descontada por e^{-rt} :

$$\tilde{f}_t = e^{-rt} f_t = B_0 B_t^{-1} f_t = \langle B_0 B_T^{-1} Z | \mathcal{F}_t \rangle_q \quad (8.52)$$

com $\tilde{f}_0 = f_0$. Nossos exemplos (8.28,8.33) mostraram que

$$\Delta f_i = \phi_i \Delta S_i, \quad r = 0, \quad (8.53)$$

onde $\Delta f_i \equiv f_{i+1} - f_i$, $\Delta S_i \equiv S_{i+1} - S_i$, caracterizando a estratégia auto-financiante. Para $r \neq 0$ a equação envolve também a evolução do título

$$\Delta f_i = \phi_i \Delta S_i + \psi_i \Delta B_i, \quad (8.54)$$

resultando na seguinte equação para grandezas descontadas

$$\Delta \tilde{f}_i = \phi_i \Delta \tilde{S}_i \quad (8.55)$$

com $\tilde{S}_i = e^{-rt} S_i = B_0 B_t^{-1} S_i$. Para verifica-la vamos repetir os passos da seção 8.3.1, mas agora para $r \neq 0$. A equ.(8.20) é

$$\phi = \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d}, \quad \psi = B_{now}^{-1} (f_{now} - \phi s_{now}), \quad (8.56)$$

onde o índice de B_i é igual ao de s_i . Avançando de $t = 0$ para $t = 1$ temos que incluir além da variação do ativo também a variação do título $B_0 \rightarrow B_1 = B_0 e^{r\delta t}$. Procedemos então da seguinte maneira:

- Em $t = 0$ o nosso portofolio vale $f_0 = \tilde{f}_0 = \langle B_0 B_T^{-1} Z | \mathcal{F}_0 \rangle_q$, que é também o valor da opção a ser comprada ou vendida. Calculamos ϕ_0 e ψ_0 usando a equ.(8.56)

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d} \\ \psi_0 &= B_0^{-1} (f_0 - \phi_0 S_0) = B_0^{-1} (\tilde{f}_0 - \phi_0 \tilde{S}_0), \end{aligned}$$

e rebalanceamos o noo portofolio para conter ϕ_0 em ativos e ψ_0 em titulos $f_0 = \phi_0 S_0 + \psi_0 B_0$.

- Em $t = 1$ chegamos com $[\phi_0, \psi_0]$ inalterados, mas nosso portofolio agora vale

$$f_1 = \phi_0 S_1 + \psi_0 B_1 = \frac{B_1}{B_0} (\phi_0 \tilde{S}_1 + \tilde{f}_0 - \phi_0 \tilde{S}_0) = \frac{B_1}{B_0} [\tilde{f}_0 + \phi_0 (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_0)].$$

ou seja

$$B_0 B_1^{-1} f_1 = \tilde{f}_1 = \tilde{f}_0 + \phi_0 (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_0). \quad (8.57)$$

Resulta para o portofolio descontado

$$\Delta \tilde{f}_0 = \phi_0 \Delta \tilde{S}_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{f}_0 = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_0, \\ \Delta \tilde{S}_0 = \tilde{S}_1 - \tilde{S}_0. \end{array} \right. \quad (8.58)$$

que é a equ.(8.55) para $i = 0$.

Calculamos ϕ_1 e ψ_1 usando a equ.(8.56) com $now = 1$:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d} \\ \psi_1 &= B_1^{-1}(f_1 - \phi_1 S_1) = B_0^{-1}(\tilde{f}_1 - \phi_1 \tilde{S}_1), \end{aligned} \quad (8.59)$$

ou seja ψ_1 é ajustado para manter o valor do portofolio, implicando

$$f_1 = \phi_1 S_1 + \psi_1 B_1. \quad (8.60)$$

Resulta, que

$$f_1 = \phi_0 S_1 + \psi_0 B_1 = \phi_1 S_1 + \psi_1 B_1. \quad (8.61)$$

Esta equação é verdadeira, pois ψ_1 será usado em $t = 2$, mas é calculado em $t = 1$ usando f_1 . Não injetamos dinheiro extra, mas emprestamos ou pedimos emprestado, se for necessario: o portofolio é **auto-financiante**.

- Em $t = 2$ chegamos com $[\phi_1, \psi_1]$ inalterados, mas nosso portofolio agora vale

$$f_2 = \phi_1 S_2 + \psi_1 B_2 = \frac{B_2}{B_0}(\phi_1 \tilde{S}_2 + \tilde{f}_1 - \phi_1 \tilde{S}_1) = \frac{B_2}{B_0}[f_1 + \phi_1(\tilde{S}_2 - \tilde{S}_1)].$$

ou seja

$$B_0 B_2^{-1} f_2 = \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 + \phi_1(\tilde{S}_2 - \tilde{S}_1). \quad (8.62)$$

Resulta para o portofolio descontado

$$\Delta \tilde{f}_2 = \phi_1 \Delta \tilde{S}_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 - \tilde{f}_1, \\ \Delta \tilde{S}_1 = \tilde{S}_2 - \tilde{S}_1. \end{array} \right. \quad (8.63)$$

que é a equ.(8.55) para $i = 1$.

Calculamos ϕ_2 e ψ_2 usando a equ.(8.56) com $now = 2$:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d} \\ \psi_2 &= B_2^{-1}(f_2 - \phi_2 S_2) = B_0^{-1}(\tilde{f}_3 - \phi_2 \tilde{S}_2). \end{aligned} \quad (8.64)$$

Resulta novamente

$$f_2 = \phi_1 S_2 + \psi_1 B_2 = \phi_2 S_2 + \psi_2 B_2. \quad (8.65)$$

- No tempo i chegamos com $[\phi_{i-1}, \psi_{i-1}]$ inalterados, mas nosso portofolio agora vale

$$f_i = \phi_{i-1}S_i + \psi_{i-1}B_i = \frac{B_i}{B_0}(\phi_{i-1}\tilde{S}_i + \tilde{f}_{i-1} - \phi_{i-1}\tilde{S}_i) = \frac{B_i}{B_0}[\tilde{f}_{i-1} + \phi_{i-1}(\tilde{S}_i - \tilde{S}_{i-1})].$$

ou seja

$$B_0 B_i^{-1} f_i = \tilde{f}_i = \tilde{f}_{i-1} + \phi_{i-1}(\tilde{S}_i - \tilde{S}_{i-1}). \quad (8.66)$$

Resulta para o portofolio descontado

$$\Delta \tilde{f}_{i-1} = \phi_{i-1} \Delta \tilde{S}_{i-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{f}_{i-1} = \tilde{f}_i - \tilde{f}_{i-1}, \\ \Delta \tilde{S}_{i-1} = \tilde{S}_i - \tilde{S}_{i-1}. \end{array} \right. \quad (8.67)$$

que é a equ.(8.55).

Calculamos $[\phi_{i+1}, \psi_{i+1}]$ para rebalancear o portofolio de modo que

$$f_i = \phi_i S_i + \psi_i B_i = \phi_{i+1} S_i + \psi_{i+1} B_i. \quad (8.68)$$

Temos obviamente

$$\frac{f_i - \phi_i S_i}{f_{i-1} - \phi_i S_{i-1}} = \frac{\psi_i B_i}{\psi_i B_{i-1}} = e^{r\Delta t}, \quad \text{com } \Delta t = 1. \quad (8.69)$$

Resulta que o portofolio

$$\tilde{\Pi}_i \equiv f_i - \phi_i S_i \quad (8.70)$$

obedece

$$\tilde{\Pi}_{i+1} = \tilde{\Pi}_i e^{r\Delta t}. \quad (8.71)$$

Já que $\tilde{\Pi}_i$ evouí como um título - $B_{i+1} = B_i e^{r\Delta t}$ - então $\tilde{\Pi}_i$ é sem risco. De fato subtraímos o termo $\sim S_i$, que é a fonte de aleatoriedade.

Usaremos a equ.(8.71) na seção 19 para obter a equação de Black-Scholes-Merton e executar a estratégia de *hedging* com $\Delta t \rightarrow dt$.

- No tempo $i = \mathbf{T}$ chegamos com $[\phi_{T-1}, \psi_{T-1}]$ inalterados, mas nosso portofolio agora vale usando a equ.(8.51)

$$f_T = \phi_{T-1} S_T + \psi_{T-1} B_T = (S_T - K)_+, \quad (8.72)$$

ou seja

$$\phi_{T-1} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad \psi_{T-1} = \begin{cases} -KB_T^{-1} & \text{ITM} \\ 0 & \text{OTM} \end{cases} \quad (8.73)$$

Temos o seguinte resumo para uma estratégia auto-financiante contendo ϕ ativos S e ψ títulos B

a.

$$f_i = \phi_i S_i + \psi_i B_i \quad (8.74)$$

e o valor da opção na maturação é $f_T = \phi_{T-1} S_T + \psi_{T-1} B_T$

b. o valor do portfólio não muda durante o mesmo período quando $[\phi_i, \psi_i] \rightarrow [\phi_{i+1}, \psi_{i+1}]$, ou seja muda somente a composição $[\phi, \psi]$. O valor do portfólio muda de um período para o próximo como

$$\Delta f_i = \phi_i \Delta S_i + \psi_i \Delta B_i, \quad (8.75)$$

onde $\Delta S_i = S_{i+1} - S_i$ e $\Delta B_i = B_{i+1} - B_i$, caracterizando-o como **auto-financiante**.

c. O portfólio descontado varia como

$$\Delta \tilde{f}_i = \phi_i \Delta \tilde{S}_i \quad (8.76)$$

Note que ϕ é sempre ≥ 0 , quando vendemos um *call* e é sempre ≤ 0 , quando vendemos um *put*. A regra é portanto

Vender *um* *call* \rightarrow *comprar* *ativos*
Comprar *um* *call* \rightarrow *vender* *ativos*

Vender *um* *put* \rightarrow *vender* *ativos*
Comprar *um* *put* \rightarrow *comprar* *ativos*

Vamos generalizar a estratégia auto-financiante para qualquer $n > 3$ passos na seção 11.

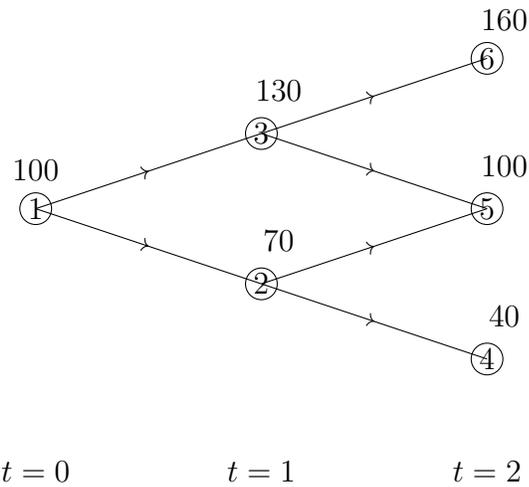


Figure 8.7: Preços dos ativos para o Exercício 8.3.

Exercício 8.3

Calcule o preço de opções *call* e *put* Europeias correspondentes a figura 8.7 com $K = 80$ e $r = 0$.

Especifique a estratégia de *hedging* calculando ϕ e ψ .

Verifique a solução para *call*:

$$\begin{aligned}
 (\phi, \psi)_{1,3,6} &= [3/4, -55; 1, -80; 1, -80], \Pi_{10} = 80; \\
 (\phi, \psi)_{1,2,5} &= [3/4, 110/3; 1/3, 40/3], \Pi_9 = 40; \\
 (\phi, \psi)_{1,2,4} &= [3/4, 110/3; 1/3, 40/3], \Pi_7 = 0.
 \end{aligned}$$

Complete para *put*:

$$\begin{aligned}(\phi, \psi)_{1,3,6} &= [x, x; x, x], \Pi_6 = 0; \\(\phi, \psi)_{1,2,5} &= [x, x; x, x], \Pi_5 = 0; \\(\phi, \psi)_{1,2,4} &= [x, x; x, x], \Pi_4 = 40.\end{aligned}$$

Exercício 8.4

Calcule o preço da opção *call* Europeia correspondente a figura 8.4 com $K = 70$ e $r = 0$. Use a paridade *put-call* para fazê-lo.

Especifique a estratégia de *hedging* calculando ϕ e ψ .

8.4 Opções Americanas

O comprador de uma opção Americana adquiriu o direito de decidir em que instante $t \leq T$ ele deve exercer a opção. Ele tem portanto a escolha quando parar e esta decisão só pode usar a informação sobre o preço da opção até o presente momento. Deve escolher o *tempo de parada* τ^{24} , que é uma variável aleatória. O retorno neste caso seria

$$(S_\tau - K)_+ \text{ no tempo } \tau.$$

Se o vendedor soubesse qual tempo de parada o comprador usará, o custo do *hedge* em $t = 0$ seria

$$\langle e^{-r\tau}(S_\tau - K)_+ \rangle_{\mathcal{Q}}$$

Como de antemão não sabemos qual seria a escolha, preparemo-nos para o pior caso e cobrar o maior valor, maximizando sobre todas as estratégias

$$\sup_{\tau} \langle e^{-r\tau}(S_\tau - K)_+ \rangle_{\mathcal{Q}} \quad (8.77)$$

Considere o seguinte exemplo de uma **opção *put* Americana**. Introduzindo a notação $s_{up} = u_{now}s_{now}$ e $s_{down} = d_{now}s_{now}$ temos

$$q_{now} = \frac{e^{r\delta t} - d_{now}}{u_{now} - d_{now}}. \quad (8.78)$$

Construimos a árvore de ativos da figura 8.4.1 com $u = 1.2$, $d = 0.8$ (escolhidos para simplificar as contas, pois q será independente do nó). Pondo ainda $r = 0.05$, $\delta t = 1$ e $\hat{e} = e^{r\delta t} = 1.0512$ obtemos $q = 0.6280$ independente do nó.

²⁴O processo parado também é uma martingale[33]

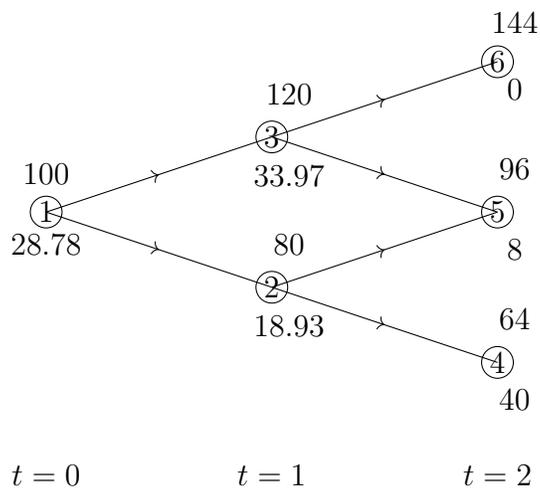


Figure 8.4.1: Preços dos ativos (números superiores) e de opções *put* Americanas (números inferiores) numa árvore binária de dois passos com $K = 104$.

Em cada instante verificamos se é vantajoso exercer a opção com $K = 104$, exercendo-a em caso afirmativo. Deste modo a opção Americana custa sempre mais que a Europeia. Afinal se voce quer mais direitos deve pagar mais por isto! Percorrendo a árvore obtemos:

- No nó "3" calculamos $f_3 = e^{-r\delta t}(qf_6 + (1 - q)f_5) = 33.97$, enquanto o retorno seria $K - S = 104 - 120 = -16$. Portanto não seria vantajoso exercer a opção e apreçamos a opção com este valor.
- No nó "2" calculamos $f_2 = e^{-r\delta t}(qf_5 + (1 - q)f_4) = 18.93$, enquanto o retorno seria $K - S = 104 - 80 = 24$. Portanto seria vantajoso exercer a opção.
- No nó "1" calculamos $f_1 = e^{-r\delta t}(qf_3 + (1 - q)f_2) = 28.78$, enquanto o retorno seria $K - S = 104 - 100 = 4$. Portanto não seria vantajoso exercer a opção.

O procedimento adotado é um dos possíveis, pois poderíamos não exercer a opção no nó "2", esperando um possível resultado melhor no futuro. De

qualquer maneira cobramos o preço de \$28.78, o de todas as escolhas o mais alto possível.

Exercício 8.5

Calcule o preço de uma opção *put* Europeia correspondente a figura 8.4.1 com $K = 104$ e compare com a Americana.

Exercício 8.6

Calcule o preço de uma opção *call* Europeia correspondente a figura 8.4.1 com $K = 104$ e compare com a Americana. O resultado surpreende²⁵?

8.5 A árvore trinomial e completeza do mercado

Podemos melhorar a aplicabilidade de nosso modelo permitindo a evolução do ativo para tres possíveis valores ao invés de somente dois. Vamos ilustrar o procedimento para um passo em analogia a precificação de uma rifa da seção 4.

Suponha que no instante $t_0 + \delta t$ o ativo possa assumir tres valores possíveis $S_u > S_m > S_d$ com

$$S_u = uS_0, S_d = dS_0, S_m = mS_0. \quad (8.79)$$

O ativo descontado deve ser uma martingale sob medida q

$$S_u q_u + S_d q_d + S_m q_m = RS_0, \quad R = e^{r\delta t} \quad (8.80)$$

ou seja

$$uq_u + dq_d + mq_m = R. \quad (8.81)$$

As mudanças dos ativos sendo proporcionais a S_0 , esta variável convenientemente concluiu.

A soma das probabilidades deve ser igual a um:

$$q_u + q_d + q_m = 1. \quad (8.82)$$

Para considerar uma situação não-trivial, vamos supor que os determinantes 2×2 das equações 8.81 e 8.82 sejam diferentes de zero. Podemos portanto

²⁵Veja seção 6.3.

expressar q_u e q_d em termos de q_m por exemplo, obtendo

$$q_u = \frac{R + (d - m)q_m - d}{u - d} \quad (8.83)$$

$$q_d = \frac{R + (u - m)q_m - u}{d - u}. \quad (8.84)$$

Exigindo

$$0 \leq q_u, q_d \leq 1$$

resulta

$$0 < q_m < \min\left(\frac{R - d}{m - d}, \frac{u - R}{u - m}\right). \quad (8.85)$$

Para que valha $q_m < 1$ temos que escolher

$$\begin{aligned} q_m &< \frac{R - d}{m - d}, \quad \text{se } R < m \\ q_m &< \frac{u - R}{u - m}, \quad \text{se } R > m. \end{aligned}$$

Seja $Z(S)$ o retorno da opção, que o portofolio $\Pi = \phi S + \psi B$ deve replicar:

$$\begin{aligned} \phi S_u + \psi R &= Z(S_u) \\ \phi S_d + \psi R &= Z(S_d) \\ \phi S_m + \psi R &= Z(S_m). \end{aligned} \quad (8.86)$$

Temos duas incognitas ϕ, ψ para tres equações, logo haverá um problema de consistencia. Para obter uma solução não-trivial o determinante 3×3 dos coeficientes deve se anular, resultando em

$$(u - d)Z(S_0m) + (d - m)Z(S_0u) + (m - u)Z(S_0d) = 0. \quad (8.87)$$

Esta condição de consistencia deve ser satisfeita para existir uma medida risco-neutra evitando a possibilidade de arbitragem. Neste caso o mercado é chamado de **completo**. Para retornos lineares $Z(S) = aS + b$, e.g. um contrato, esta condição é de fato satisfeita para quaisquer valores de u, d, m . Mas para opções vanilla com $Z(S) = (\pm[S - K])_+$ isto não é verdade. No entanto é imediato, que uma medida risco-neutra sempre existe se $K \geq u$ ou $K \leq d$ ou seja fora do intervalo (d, u) .

- Um mercado é **completo**, "se qualquer derivativo possivel puder ser protegido=*hedged* com um portofolio auto-financiante". O nosso portofolio depende de apenas **dois** itens negociaveis: S e B , enquanto que

temos **tres** estados possíveis u, d e m . A condição de equ.(8.87) reduz os estados possíveis na equ.(8.79) para dois, pois podemos e.g. usar a equ.(8.87) para fixar m .

Pode-se provar, que

um mercado é completo, se o numero de itens negociaveis for igual ao numero de estados.

Isto é verdade para o modelo binomial, pois as equ.(4.3) sempre tem solução para $S_u > S_d$.

Exercicio 8.7

Para que o ativo evolua numa arvore trinomial recombinante, vamos impor os vinculos

$$ud = 1, \quad m = 1 \tag{8.88}$$

- Qual é a variança $\mathcal{V}(S)$ de S ?
- Imponha que $\mathcal{V}(S) = S_0^2 \sigma^2 \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)$ e calcule as probabilidades risco-neutras com

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\delta t}}, \quad d = 1/u. \tag{8.89}$$

Para maiores detalher veja e.g. [17].

- Qual é a condição garantindo, que $p_u + p_d < 1$?

9 Passeios aleatórios e o processo de Wiener

Para modelar o comportamento de ativos, preço de opções etc é preciso levar em conta as flutuações do mercado. Apesar de que em princípio seja possível prever este comportamento, se soubessemos as intenções de todos os agentes, na prática isto obviamente é impossível: o mercado é rotulado de *aleatório*. Na seção 8.2 o nosso ativo executava um passeio aleatorio numa arvore recombinante, seguindo uma distribuição binomial. Vamos portanto detalhar passeios aleatórios em que o tempo é discretizado em passos com intervalos finitos Δt . Consideraremos tambem o limite do contínuo $\Delta t \rightarrow 0$.

9.1 Passeio aleatório unidimensional

Considere um passeio em que um andarilho executa uma sequencia de passos, um a cada Δt . Os passos são todos de tamanho l para direita ou para esquerda com probabilidades²⁶

$$\begin{aligned} p & : \text{ probabilidade de um passo para a direita} \\ \tilde{p} = 1 - p & : \text{ probabilidade de um passo para a esquerda.} \end{aligned} \quad (9.1)$$

Depois de N passos dos quais n são para direita e $N - n$ são para esquerda saindo de $x = 0$ em $t = 0$, ele estará no posição

$$x(N\Delta t) = nl - (N - n)l = ml, \quad m = 2n - N \quad (9.2)$$

no instante $t = N\Delta t$. Se designarmos o deslocamento no i -ésimo passo por x_i , podemos escrever

$$x(N\Delta t) = \sum_{i=1}^N x_i \quad (9.3)$$

com as esperanças

$$\begin{aligned} \langle x_i \rangle & = pl + \tilde{p}(-l) = (p - \tilde{p})l, \\ \langle x_i^2 \rangle & = pl^2 + \tilde{p}(-l)^2 = l^2, \\ \sigma_i^2 & = \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 = 4p\tilde{p}l^2. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Como os deslocamentos são independentes resulta para a média $\langle x \rangle$ e a variância

$$\mathcal{V}ar[x] = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \equiv \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (9.5)$$

o seguinte

$$\langle x(N\Delta t) \rangle = N\langle x_i \rangle = N(p - \tilde{p})l, \quad \mathcal{V}ar[x(N\Delta t)] = N\sigma_i^2 = 4Np\tilde{p}l^2. \quad (9.6)$$

Aqui usamos o seguinte resultado:

Duas variáveis A, B são independentes, se a probabilidade do produto for o produto das probabilidades $P(AB) = P(A)P(B)$. Vale então

$$\langle A + B \rangle = \sum_{A,B} P(AB)(A + B) = \sum_A P(A)A + \sum_B P(B)B = \langle A \rangle + \langle B \rangle$$

²⁶Veja [16] para uma exposição interessante da Teoria de Probabilidade.

$$\langle AB \rangle = \sum_{AB} P(AB)AB = \sum_A P(A)A \sum_B P(B)B = \langle A \rangle \langle B \rangle$$

Para a variância de variáveis independentes temos

$$\begin{aligned} \langle (A + B - \langle A + B \rangle)^2 \rangle &= \langle (A - \langle A \rangle + B - \langle B \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle + \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle + 2\langle A - \langle A \rangle \rangle \langle B - \langle B \rangle \rangle \\ &= \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle + \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle, \end{aligned}$$

já que

$$\langle A - \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle - \langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle - \langle A \rangle = 0.$$

Resulta

$$\mathcal{V}ar(A + B) = \mathcal{V}ar(A) + \mathcal{V}ar(B).$$

Para N variáveis A_i independentes temos então

$$\mathcal{V}ar\left(\sum_i^N A_i\right) = \sum_i^N \mathcal{V}ar(A_i). \quad (9.7)$$

A probabilidade de ocorrerem n passos a direita num total de N passos é a binomial

$$W(n) = \binom{N}{n} p^n \tilde{p}^{N-n}.$$

Mostramos no Apendice A, que no limite $N \rightarrow \infty$ a distribuição binomial tende a uma Gaussiana e a probabilidade do andarilho estar entre as posições ml e $(m + \Delta m)l$, com $n - Np = \frac{1}{2}(m - N(p - \tilde{p}))$, é a distribuição Gaussiana com media $\langle x \rangle = N\langle x_i \rangle = N(p - \tilde{p})l$ e variância $N\sigma_i^2 = N4p\tilde{p}l^2$

$$\begin{aligned} P[ml \leq x \leq (m + \Delta m)l] &= (8\pi Np\tilde{p})^{-1/2} e^{-\frac{[m - N(p - \tilde{p})]^2}{8Np\tilde{p}}} + \mathcal{O}(1/\sqrt{N}) \\ &= (2\pi N\sigma_i^2)^{-1/2} e^{-\frac{[x - N\langle x_i \rangle]^2}{2N\sigma_i^2}} l. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Subtraindo a media e dividindo pela raiz da variância, obtemos uma versão do **Teorema Central do Limite**:

Se $X = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ é a soma de variáveis independentes e identicamente distribuídas com media $\langle x_i \rangle$ e variância σ_i^2 , então

$$Y = \frac{X - \langle X \rangle}{\sqrt{\mathcal{V}ar(X)}} = \frac{X - N\langle x_i \rangle}{\sigma_i \sqrt{N}} \quad (9.9)$$

se aproxima de uma Gaussiana com media 0 e variança 1. Mais precisamente

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob}\left(y_1 \leq \frac{X - Nm}{\sigma\sqrt{N}} \leq y_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_1}^{y_2} e^{-y^2/2} dy. \quad (9.10)$$

Note que para N finito, esta aproximação somente é boa no centro da Gaussiana $X \sim Nm \pm \sigma\sqrt{N}$ e não nas caudas - mas lá a Gaussiana tende rapidamente a zero. O detalhe desta região central depende da distribuição de x_i .

A distribuição Gaussiana

$$N_x(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (9.11)$$

é chamada *normal*. Em termos da distribuição normal cumulativa

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x) &\equiv \int_{-\infty}^x N_y(0, 1) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x dy e^{-y^2/2}, \\ 0 \leq \mathcal{N}(x) \leq 1, \quad \mathcal{N}(0) &= 1/2, \mathcal{N}(\infty) = 1 \end{aligned} \quad (9.12)$$

podemos escrever

$$\sum_{k=k_1}^{k=k_2} \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \sim \mathcal{N}\left(\frac{k_2 - Np}{\sqrt{Npq}}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{k_1 - Np}{\sqrt{Npq}}\right). \quad (9.13)$$

Exercício 9.1.

Simule passeios aleatorios com $p = 1/2$ e $p = 2/3$.

Exercício 9.2.

Mostre que $\mathcal{N}(0) = 1/2$ sem fazer contas.

Exercício 9.3. (A qualidade da aproximação Gaussiana)

Considere o caso de variáveis aleatórias positivas distribuidas segundo a distribuição exponencial

$$p_1(x) = \theta(x)\alpha e^{-\alpha x}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) dx = 1 \quad (9.14)$$

com

$$\theta(x) = \{1 \text{ para } x > 0 \text{ e } 0 \text{ para } x \leq 0\}. \quad (9.15)$$

Estime a região central. A probabilidade da soma de duas variáveis independentes é

$$\begin{aligned}
 P(X, 2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \delta(x_1 + x_2 - X) p_1(x_1) p_1(x_2) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \theta(x_1) \alpha e^{-\alpha x_1} \theta(X - x_1) \alpha e^{-\alpha(X - x_1)} \\
 &= \alpha^2 e^{-\alpha X} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \theta(x_1) \theta(X - x_1) = \alpha^2 e^{-\alpha X} X \theta(X). \quad (9.16)
 \end{aligned}$$

Usando esta equação para relacionar $P(Y, N)$ com $P(Y, N+1)$, use indução para mostrar que para $X = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ vale

$$P(X, N) = \theta(X) \alpha^N \frac{X^{N-1} e^{-\alpha X}}{(N-1)!}, \quad (9.17)$$

que é a distribuição *Gamma* de índice N com media $m = 1/\alpha$ e variância $\sigma^2 = 1/\alpha^2$. O valor mais provável de $P(X, N)$ é dado por

$$\frac{d}{dX} X^{N-1} e^{-\alpha X} \Big|_{x^*} = 0$$

$$X^* = m(N-1).$$

Expanda $P(X, N)$ até segunda ordem em torno de x^* e mostre, que para $N \rightarrow \infty$, $P(X, N)$ tende para uma Gaussiana com media $(N-1)m = (N-1)/\alpha$ e variância $(N-1)\sigma^2 = (N-1)/\alpha^2$. Para N grande isto concorda com a equ.(9.10). Mostre ainda que os termos cúbicos são desprezíveis para

$$X - X^* \ll N^{2/3}/\alpha = mN^{2/3}.$$

Exercício 9.4

Mostre que a distribuição Gaussiana maximiza a entropia

$$S = - \int P(x) \ln P(x) dx$$

para uma variância fixa. Use dois multiplicadores da Lagrange: um para normalizar ($\int P(x) dx = 1$) e outro para impor a variância $= \sigma$.

Exercício 9.5

Calcule o valor esperado $\langle e^{ibx} \rangle$ ou seja a transformada de Fourier da distribuição Gaussiana. Tomando derivadas em relação a b calcule os momentos

$\langle x^n \rangle$ [10].

Exercício 9.6

Calcule o cumulante $\kappa_4 = \langle \delta x^4 \rangle - 3\langle \delta x^2 \rangle^2$, com $\delta x = (x - \langle x \rangle)$. Mostre que κ_4 se anula para uma distribuição Gaussiana, mas é diferente de zero para uma distribuição binomial.

Exercício 9.7

Num campeonato de tenis dois jogadores igualmente competentes disputam sete jogos. Quem ganha mais jogos é o vencedor. A organização se compromete a pagar ao vencedor um milhão de dolares de qualquer maneira. Depois do primeiro jogo um fiscal descobre um caso de covid na assistência e o campeonato é encerrado. Qual seria uma maneira justa de dividir o premio? Resposta 21 : 11.

Exercício 9.8

Considere uma moeda com as probabilidades de cara/coroa iguais a $p_a = 1/3, p_o = 2/3$. Qual é a probabilidade de obter cara no primeiro lance, se lançarmos a moeda tres vezes. Resposta:1/3. Qual é a probabilidade de obter coroa no segundo lance, se lançarmos a moeda tres vezes.

9.2 O limite do contínuo e processo de Wiener

Vamos tomar o limite do contínuo $\Delta t \rightarrow 0$. Para que o andarilho execute o passeio dele num tempo finito, devemos tambem fazer $N \rightarrow \infty$, ou seja

$$N \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0 \text{ com } t = N\Delta t > 0 \text{ fixo.} \quad (9.18)$$

O deslocamento do andarilho num intervalo Δt é $\Delta x = l$ e este obviamente deve obdecer $l \rightarrow 0$. Precisamos ainda assegurar, que a media e a variança do deslocamento sejam finitos. Segundo a equ.(9.6) temos com $N = t/\Delta t$

$$\langle x(N\Delta t) \rangle = \frac{(p - \tilde{p})l}{\Delta t} t, \quad \text{Var}[x(N\Delta t)] = 4p\tilde{p} \frac{l^2}{\Delta t} t$$

devemos impor que $(p - \tilde{p})l$ e l^2 escalem como Δt , ou seja²⁷

$$(p - \tilde{p})l = \nu\Delta t, \quad l^2 = 2D\Delta t, \quad (9.19)$$

O comportamento $l \sim \sqrt{\Delta t}$, muito diferente do comportamento "balístico" $l \sim vt$, é tipico de processos de difusão. Conseqüentemente $p - \tilde{p} \sim \sqrt{\Delta t}$. O

²⁷Com $0 \leq p \leq 1$, o produto pq é finito.

limite do contínuo dependerá de duas constantes, com D chamada *constante de difusão* e ν caracterizando o *arrasto*.

Obtemos portanto

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \nu\frac{\Delta t}{l}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\nu}{\sqrt{2D}}\sqrt{\Delta t}\right) \quad (9.20)$$

e resultando para o produto

$$p\tilde{p} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\nu^2}{2D}\Delta t\right). \quad (9.21)$$

No limite $\Delta t \rightarrow 0$ resulta $4p\tilde{p} = 1$ e obtemos para media e variança

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(p - \tilde{p})l}{\Delta t} t = \nu t \quad (9.22)$$

$$\sigma^2 = \mathcal{V}ar[x(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 4p\tilde{p}\frac{l^2}{\Delta t} t = 2Dt. \quad (9.23)$$

Partindo de $x_1 = 0$ após N passos de tamanho $l = \Delta x$ o andarilho estará no instante $t = N\Delta t$ na posição $x_N = ml$ com probabilidade dada pela equ.(9.8)

$$P[x(N\Delta t) \sim ml] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{[x - \langle x \rangle]^2}{2\sigma^2}} \Delta x. \quad (9.24)$$

Resulta neste limite a seguinte densidade de probabilidade para o processo contínuo $x(t)$

$$p_D[x(t)]dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\nu t)^2}{4Dt}} dx \text{ com } \int_{-\infty}^{\infty} p_D[x]dx = 1 \quad (9.25)$$

que é uma distribuição Gaussiana com media e variança $\sim t$:

$$\langle x(t) \rangle = \nu t, \quad \sigma^2 = \langle [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 \rangle = 2Dt. \quad (9.26)$$

A distribuição equ.(9.25) satisfaz a equação de difusão

$$\left(\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)p_D(x, t) = 0, \quad -\infty \leq x \leq \infty, \quad t > 0. \quad (9.27)$$

É tradicional re-escalar x para $W = \frac{1}{\sqrt{2D}}x$, incluindo um fator 2 por conveniência. Com isto a densidade de probabilidade satisfaz a equação

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial W^2}\right)p_D(W, t) = 0, \quad -\infty \leq W \leq \infty, \quad t > 0. \quad (9.28)$$

Fazendo ainda $\nu = \mathbf{0}$ obtemos o **processo de Wiener** $W(t)$, cuja densidade de probabilidade é

$$p[w]dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{w^2}{2t}} dw, \quad \int_{-\infty}^{\infty} p[w]dw = 1. \quad (9.29)$$

Ou seja, a probabilidade de $W(t)$ pertencer ao conjunto \mathcal{A} : $W(t) \in \mathcal{A}$ é dado por

$$p[W(t) \in \mathcal{A}] = \int_{\mathcal{A}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}. \quad (9.30)$$

Se $\mathcal{A} \rightarrow 0$ então a probabilidade também tende a zero: a probabilidade do processo "acertar" um ponto é nula.

O processo $W(t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} W(0) &= 0 \\ \langle W(t) \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} W p[W] dW = 0, \\ \langle W^2(t) \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} W^2 p[W] dW = t. \end{aligned} \quad (9.31)$$

A primeira é reflexo de $x_0 = 0$ para qualquer caminhada. A segunda segue-se do produto $W p[W]$ ser ímpar em W e a terceira também da equ.(9.26) para W .

Calculamos a função de correlação $\langle W(t_2)W(t_1) \rangle$. Notamos, que os incrementos x_i na equ.(9.3) são disjuntos²⁸ e portanto independentes. Segue-se que também os incrementos $W(t_2) - W(t_1)$ e $W(t_4) - W(t_3)$ são independentes para $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$. Logo para $t_1 < t_2$ temos

$$\langle [W(t_2) - W(t_1)]W(t_1) \rangle = \langle W(t_2) - W(t_1) \rangle \langle W(t_1) \rangle = 0,$$

que implica

$$\langle W(t_2)W(t_1) \rangle = \langle W^2(t_1) \rangle = t_1.$$

Para qualquer t_1, t_2 isto torna-se²⁹

$$\langle W(t_2)W(t_1) \rangle = \min(t_1, t_2). \quad (9.32)$$

Vamos introduzir o processo w normalmente distribuído com média nula e variância igual a 1, indicado como $w \in N(0, 1)$. Com isto temos

$$W(t) = \sqrt{t}w, \quad t \geq 0 \quad (9.33)$$

²⁸Queremos dizer: "Tem no máximo um ponto em comum".

²⁹Para uma verificação numérica veja o Apêndice F.1.

De fato $\mathcal{V}ar(W) = \langle W^2 \rangle = \langle (\sqrt{t}w)^2 \rangle = t\mathcal{V}ar(w) = t$. Denotamos estas propriedades como

$$W(t) = W(t) - W(0) = \sqrt{t}w, \quad t \geq 0. \quad (9.34)$$

Já que a origem temporal é arbitrária, podemos escrever

$$W(t) - W(s) = \sqrt{t-s}w, \quad t \geq s. \quad (9.35)$$

Estas propriedades na verdade servem para definir o processo de Wiener como:

- a. $W(0) = 0$.
- b. Os incrementos são independentes: para todo $t > 0$ os incrementos futuros $W(t+h) - W(t)$, $h \geq 0$ são independentes dos valores $W(s)$, $s \leq t$.
- c. Os incrementos $W(t_2) - W(t_1)$, $t_2 \geq t_1$ são normalmente distribuídos com média nula e variância $t_2 - t_1$:

$$W(t_2) - W(t_1) = \sqrt{t_2 - t_1}w. \quad (9.36)$$

onde w é uma variável distribuída normalmente como $N(0, 1)$.

- d. Como Wiener provou $W(t)$ é contínuo em t ³⁰.

Ao tratar o caso de processos aleatórios contínuos podemos esquecer o passeio aleatório discreto e usar o processo de Wiener como definido pelas propriedades **a,b,c,d**. Para uma verificação numérica destas propriedades e verificar a sua intuição, veja o código Scilab na seção [F.1](#). Scilab é gratuito e equivalente ao Matlab.

O processo de Wiener possui propriedades surpreendentes:

- A equ. (9.36) implica que o processo de Wiener não é diferenciável, pois

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{w\sqrt{\Delta t}}{\Delta t} \sim \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \rightarrow \infty \quad (9.37)$$

³⁰Para detalhar veja e.g. [22], cap. X.11

ou mais precisamente em termos de probabilidades temos para qualquer $A > 0$

$$\begin{aligned} \text{Prob} \left[\frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} < A \right]_{\Delta t \rightarrow 0} &= \text{Prob} \left[\frac{w\sqrt{\Delta t}}{\Delta t} < A \right]_{\Delta t \rightarrow 0} \\ &= \text{Prob} \left[\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} < A \right]_{\Delta t \rightarrow 0} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Ou seja uma fração ínfima das trajetórias possuem derivada finita. O processo é extremamente "pontudo".

- No entanto o processo de Wiener é contínuo. Pois para qualquer $\delta > 0$ temos

$$\begin{aligned} \text{Prob} [|W(t + \Delta t) - W(t)| > \delta]_{\Delta t \rightarrow 0} &= \text{Prob} [\sqrt{\Delta t} |w| > \delta]_{\Delta t \rightarrow 0} \\ &= \text{Prob} \left[|w| > \frac{\delta}{\sqrt{\Delta t}} \right]_{\Delta t \rightarrow 0} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Ou seja, a probabilidade de descontinuidades é nula.

- O processo de Wiener possui o mesmo aspecto em qualquer escala: $\frac{1}{\sqrt{c}}W(ct)$, $c > 0$ também é Wiener. $W(t)$ é um fractal.

Exercício 9.1.

Mostre que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad (9.40)$$

satisfaz a equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9.41)$$

Resolva esta equação usando a substituição $\xi = x/\sqrt{t}$ e $U(\xi) = t^{1/2}u(x, t)$. Isto transforma a equação de difusão numa equação diferencial ordinária para $U(\xi)$ de fácil solução.

Exercício 9.2.

Mostre que o limite $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \delta(x)$, onde $\delta(x)$ é a delta de Dirac. Lembre, que $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = 1$, $\forall t$. $u(x, 0)$ diverge, mas com área embaixo da

curva igual a 1.

Exercício 9.3.

Simule um processo de Wiener. Você deve partir de um gerador com distribuição uniforme entre 0 e 1 para gerar uma distribuição Gaussiana. Veja [55], capítulo 7.2 para obter uma distribuição Gaussiana.

Exercício 9.4.

Estudar a seção 2.5 de [10].

Exercício 9.5.

Um aluno argumenta assim. Para gerar um processo de Wiener lançamos uma moeda "Gaussiana" em cada instante t . Como os resultados destes lances são independentes, resulta que as probabilidades de $p[W(t_1)]$ e $p[W(t_2)]$ para $t_1 \neq t_2$ são independentes $p[W(t_1), W(t_2)] = p[W(t_1)]p[W(t_2)]$. Logo

$$\langle W(t_1), W(t_2) \rangle = \langle W(t_1) \rangle \langle W(t_2) \rangle = 0.$$

Onde ele errou?

Exercício 9.6: Calculando esperanças.

Você acabou simular um processo de Wiener $W(t)$ com incrementos $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$ em intervalos Δt e quer calcular a função de correlação $\langle W(t_1)W(t_2) \rangle$ com $t_2 > t_1$. Particione o seu gráfico $W(t)$ vs t , erguendo duas colunas de larguras Δt no pontos t_1 e t_2 . Para calcular a esperança de $W(t_1)W(t_2)$, vamos primeiro fixar $W(t_1)$ a fazer o média sobre $W(t_2)$. Como os incrementos para ir de t_1 para t_2 tem média nula, eles não mudam o seu valor de partida, que é $W(t_1)$. Portanto tomando a esperança sobre $W(t_2)$ obtemos $W(t_1)$. Multiplicando pelo fator $W(t_1)$, que ficou esperando, obtemos $W(t_1)^2$, resultando em $\langle W(t_1)^2 \rangle = t_1$. Verifique, que os seus valores para $W(t)$ satisfazem

- a. $\langle W(t_2) - W(t_1) \rangle = 0$ para trajetórias emanando de $W(t_1)$.
- b. $\langle W(t_1)^2 \rangle = t_1$

Exercício 9.7.

Supondo que w seja uma variável normal $N(0, 1)$, então o processo $Z_t = \sqrt{t}w$ é normal $N(0, t)$. Mostre que Z não é Wiener. De fato os seus incrementos $Z_{t+s} - Z_t$ normalmente distribuídos com variância $\mathcal{V}ar(Z_{t+s} - Z_t) = s + 2t - 2\sqrt{t(t+s)}$, ao invés de $\mathcal{V}ar(Z_{t+s} - Z_t) = s!$ E se s for infinitesimal $\sim ds$?

10 A distribuição log-normal para precificar opções

Devido a complexidade do mercado financeiro é impossível fazer prognósticos muito confiáveis sobre preços de ativos. Podemos no entanto tentar domar a nossa ignorância modelando as flutuações dos preços por algum processo estocástico. Poderíamos supor que os preços de ativos seguem um processo de Wiener com coeficientes constantes. Mas esta hipótese é simples demais. É que o processo de Wiener assume valores positivos e negativos, enquanto os preços de ativos são sempre positivos ou nulos. Além disso no processo de Wiener os deslocamentos são independentes. No entanto o retorno esperado de um ativo é sempre proporcional ao preço do ativo. Se o preço do ativo está em S , então a taxa de retorno esperada deve ser μS com μ uma constante, pelos menos durante um pequeno intervalo δt . Se os investidores esperam um retorno de 10% por ano e o preço do ativo está a \$100, então eles querem receber \$110. Por estas razões não propomos, que o ativo seja proporcional ao processo de Wiener, mas

$$\log S(t) \sim W(t) \tag{10.1}$$

ou seja $S(t)$ segue uma distribuição *log-normal* chamado processo de Wiener geométrico. Baseado nesta distribuição Black propôs uma fórmula[31] para a precificação de derivativos *vanilla*. Note que este processo de Wiener geométrico não contempla "caudas gordas" nas distribuições ou saltos, que ocorrem na vida real.

Obviamente há muitas outras razões pelas quais o processo de Wiener possui limitações, gerado por exemplo por fenômenos mostrados na Fig.4.2. Mas ainda assim o processo de Wiener geométrico é muito usado por sua simplicidade de cálculo.

10.1 A distribuição log-normal

Podemos obter a distribuição log-normal para a variável $x \geq 10$, substituindo $y = \ln x$ na distribuição Gaussiana

$$N_y(m, \tilde{\sigma}) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} e^{-(y-m)^2/(2\tilde{\sigma}^2)} dy$$

com média m e variância $\tilde{\sigma}^2$. Lembrando que $dy = dx/x$, obtemos a densidade log-normal

$$\mathcal{L}_{m,\tilde{\sigma}}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} e^{-(\ln x - m)^2/(2\tilde{\sigma}^2)} \frac{dx}{x}, \quad (10.2)$$

$$\int_0^\infty dx \mathcal{L}_{m,\tilde{\sigma}}(x) = 1, \quad \int_0^\infty dx \ln x \mathcal{L}_{m,\tilde{\sigma}}(x) = m.$$

Ou seja: o log de x é normalmente distribuído. A figura 10.1 mostra esta distribuição junto com uma Gaussiana.

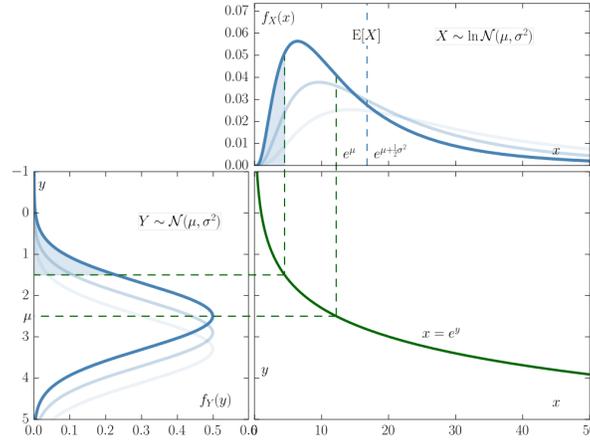


Figure 10.1: Comparando distribuições normais com log-normais e suas médias. $Y = \mu + \sigma Z$ é uma distribuição normal e $X = e^Y$ é uma distribuição log-normal.(Wikipedia).

A média é

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} e^{-(\ln x - m)^2/(2\tilde{\sigma}^2)}. \quad (10.3)$$

Com $y = \ln x$ temos

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^\infty e^y dy \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} e^{-(y-m)^2/(2\tilde{\sigma}^2)}. \quad (10.4)$$

Completando o quadrado no expoente resulta

$$-\frac{(y-m)^2}{2\tilde{\sigma}^2} + y = -\frac{[y - (m + \tilde{\sigma}^2/2)]^2}{2\tilde{\sigma}^2} + (m + \tilde{\sigma}^2/2).$$

Já que a distribuição normal é normalizada a integral sobre y dá $= 1$ e obtemos

$$\langle x \rangle = e^{m+\tilde{\sigma}^2/2}. \quad (10.5)$$

Note que $m = \langle \ln x \rangle \neq \ln \langle x \rangle = m + \sigma^2/2!$

Como

$$\langle x \rangle = \langle e^{\ln x} \rangle = \langle e^y \rangle = e^{m+\tilde{\sigma}^2/2} = e^{(\ln x) + \text{Var}(\ln x)/2},$$

provamos de quebra a identidade

$$\langle e^Y \rangle = e^{\langle Y \rangle + \frac{1}{2}\text{Var}(Y)}, \quad (10.6)$$

para qualquer processo Gaussiano Y . Alias tambem vale o converso: qualquer processo satisfazendo a equ.(10.6) é Gaussiano.

Analogamente

$$\langle x^2 \rangle = e^{2(m+\tilde{\sigma}^2)}, \quad (10.7)$$

o que dá a variança

$$\text{Var}(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = e^{2m+2\tilde{\sigma}^2}(e^{\tilde{\sigma}^2} - 1). \quad (10.8)$$

Exercicio 10.1

Calcule $\langle x^n \rangle$ para a distribuição log-normal.

Exercicio 10.2

Obtenha a solução da equação de difusão usando a tranformação de Fourier

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k, t).$$

10.2 A fórmula de Black

Para precificar opções vanilla num mercado risco-neutro, vamos aplicar a metodologia da seção 4 e exigir que sob a medida risco-neutra Q a opção descontada, tal como o ativo descontado, sejam martingales e que Q seja a log-normal \mathcal{L} . Supomos entao o seguinte.

1. A distribuição risco-neutra seja uma log-normal $\mathcal{L}_{m,\tilde{\sigma}}(x)$;
2. $\tilde{S}_T = e^{-rT} S_T$ seja uma martingales sob esta medida, implicando para o ativo

$$\langle S_T \rangle = e^{rT} S_0; \quad (10.9)$$

3. A opção desontada também é uma martingale -veja e.g. a equ.(8.18) - $f_t = e^{-r(T-t)} \langle Z | \mathcal{F}_t \rangle_q$. Uma opção *call* hoje em $t = 0$ vale portanto

$$c = e^{-rT} \langle (S_T - K)_+ \rangle_{\mathcal{L}}; \quad (10.10)$$

4. Inspirados pelo processo de Wiener a variância seja

$$\tilde{\sigma} = \sigma \sqrt{T}, \quad (10.11)$$

onde σ chama-se *volatilidade* em finanças³¹.

Quer dizer, que passamos as instruções da seção 4 para o contínuo. De acordo com a equ.(10.5) e a condição de martingale temos a relação

$$\langle S_T \rangle = S_0 e^{m + \tilde{\sigma}^2/2} = S_0 e^{rT}. \quad (10.12)$$

Resulta para a taxa livre de risco

$$r = (m + \tilde{\sigma}^2/2)/T. \quad (10.13)$$

Da equ.(10.10) uma opção *call* no dia de hoje vale

$$c = S_0 e^{-rT} \langle (s_T - k)_+ \rangle_{\mathcal{L}}, \quad (10.14)$$

onde indicamos por letras minúsculas as grandezas adimensionais $s_T = S_T/S_0$, $k = K/S_0$. A esperança acima é

$$\begin{aligned} \langle (s_T - k)_+ \rangle &= \int_k^\infty \mathcal{L}_{m, \tilde{\sigma}}(x) (x - k) dx \\ &= \int_k^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}x}} e^{-(\ln x - m)^2/(2\tilde{\sigma}^2)} (x - k) dx. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Note que a integral $\int_k^\infty \mathcal{L}_{m, \tilde{\sigma}}(x) dx$, que multiplica o fator $-k$, é a probabilidade da opção ser exercida.

Analogamente a conta da média equ.(10.4), mas com limite inferior $\neq 0$ temos com $y = (\ln x - m)/\tilde{\sigma}$ e $(y^2 - 2\tilde{\sigma}y)/2 = (y - \tilde{\sigma})^2/2 - \tilde{\sigma}^2/2$

$$\langle (s_T - k)_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\ln k - m)/\tilde{\sigma}}^\infty dy e^{-y^2/2} (e^{\tilde{\sigma}y + m} - k)$$

³¹Note que $\tilde{\sigma}$ é a variância de $\log S_T$ e não a variância de S_T .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{m+\tilde{\sigma}^2/2} \int_{(\ln k-m)/\tilde{\sigma}}^{\infty} dy e^{-(y-\tilde{\sigma})^2/2} - k \int_{(\ln k-m)/\tilde{\sigma}}^{\infty} dy e^{-y^2/2} \right]. \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{m+\tilde{\sigma}^2/2} \int_{-\infty}^{(-\ln k+m)/\tilde{\sigma}} dy e^{-(y-\tilde{\sigma})^2/2} - k \int_{-\infty}^{(-\ln k+m)/\tilde{\sigma}} dy e^{-y^2/2} \right],
\end{aligned} \tag{10.16}$$

onde usamos $\int_{-\infty}^{-x} dy e^{-y^2/2} = \int_x^{\infty} dy e^{-y^2/2}$.

Usando a equ.(10.13) para eliminar $m = rT - \tilde{\sigma}^2/2$, obtemos com $y - \tilde{\sigma} \rightarrow y$

$$\begin{aligned}
&\langle (s_T - k)_+ \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{rT} \int_{-\infty}^{(-\ln k+rT+\tilde{\sigma}^2/2)/\tilde{\sigma}} dy e^{-y^2/2} - k \int_{-\infty}^{(-\ln k+rT-\tilde{\sigma}^2/2)/\tilde{\sigma}} dy e^{-y^2/2} \right]
\end{aligned}$$

ou seja

$$\langle (S_T - K)_+ \rangle_{\mathcal{L}} = S_0 e^{rT} \mathcal{N}(\tilde{d}_+) - K \mathcal{N}(\tilde{d}_-), \tag{10.17}$$

onde $\mathcal{N}(x)$ é a distribuição normal cumulativa da equ.(9.12)

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x dy e^{-y^2/2}$$

com

$$\tilde{d}_{\pm} = \frac{\ln(S_0 e^{rT}/K) \pm \tilde{\sigma}^2/2}{\tilde{\sigma}}. \tag{10.18}$$

Inserindo $\tilde{\sigma} = \sigma\sqrt{T}$ na equ.(10.14) obtemos a formula de **Black** para uma opção *call* Europeia

$$c(S_0, T) = S_0 \mathcal{N}(d_+) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_-) \tag{10.19}$$

com

$$d_{\pm} = \frac{\ln(S_0/K) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{10.20}$$

Seguem-se dois comentarios.

1. A probabilidade da opção ser exercida é

$$Prob[S_T > K] = \langle \theta(S_T - K) \rangle_{\mathcal{L}} = \mathcal{N}(d_-), \tag{10.21}$$

com $\theta(x)$ definida na equ.(9.15).

2. A primeiro termo da equ.(10.19) é o valor esperado do ativo S_T condicionada ao exercício da opção:

$$Prob[S_T | S_T > K] = \int_K^\infty s \mathcal{L}(s) ds = S_0 \mathcal{N}(d_+). \quad (10.22)$$

3. Por simplicidade escolhemos $t = 0$ como ponto de partida, mas nada impede de escolher qualquer instante $0 < t \leq T$. Podemos repetir o mesmo raciocínio acima fazendo

$$\begin{aligned} T &\rightarrow T - t \\ S_0 &\rightarrow S_t \end{aligned} \quad (10.23)$$

para precificar as opções em qualquer $0 \leq t \leq T$. Resulta pois para uma opção *call* no instante t com o valor do ativo igual a s

$$c(s, t) = s \mathcal{N}(d_+) - K e^{-r\tau} \mathcal{N}(d_-), \quad (10.24)$$

com

$$d_\pm(s) = \frac{\ln(s/K) + (r \pm \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Voltaremos ao caso na seção 15, onde discutiremos também a estratégia auto-financiante. Iremos escrever uma equação diferencial - a equação de Black-Scholes, que também fornece a evolução temporal de opções.

Podemos também introduzir o preço-a-termo $F_T = S_0 e^{rT} = \langle S_T \rangle_Q$ para escrever mais concisamente, absorvendo o termo $\sim r$ em F_T ,

$$c(S_0, T) = e^{-rT} \left\{ F_T \mathcal{N}\left(\frac{\ln \frac{F_T}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K \mathcal{N}\left(\frac{\ln \frac{F_T}{K} - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right\}. \quad (10.25)$$

Analogamente obtemos para uma opção *put*³² Europeia

$$p(s, t) = K e^{-r\tau} \mathcal{N}(-d_-) - s \mathcal{N}(-d_+). \quad (10.26)$$

Denotando $c \equiv c(d_+, d_-)$ vemos que $p = -c(-d_+, -d_-)$ com $\mathcal{N}(-x) = 1 - \mathcal{N}(x)$.

³²Repare que $\mathcal{N}(-x) = 1 - \mathcal{N}(x)$.

10.3 Dividendos

Em geral ativos pagam dividendos aos acionistas em dias predeterminados. Para simplificar vamos supor que dividendos sejam pagos continuamente a uma taxa igual a d , medida em % por ano, tal como r . Desta maneira o ativo vale menos, pois o dono do ativo pagará os dividendos aos acionistas. Assim o valor esperado do ativo descontará como $e^{(r-d)t}$.

Na dedução da formula de Black devemos mudar a equ.(10.9) para

$$\langle S_T \rangle = e^{(r-d)T} S_0, \quad (10.27)$$

que é igual ao preço-a-termo do ativo $\tilde{F}_T = e^{(r-d)T} S_0$. Resulta para o preço de uma opção *call*

$$c(D) = S_0 e^{-dT} \mathcal{N}_c(\tilde{d}_+) - K e^{-rT} \mathcal{N}_c(\tilde{d}_-) = e^{-rT} \left(\tilde{F}_T \mathcal{N}_c(\tilde{d}_+) - K \mathcal{N}_c(\tilde{d}_-) \right) \quad (10.28)$$

com

$$\tilde{d}_\pm = \frac{\ln(S_0/K) + (r - d \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(\tilde{F}_T/K) \pm \frac{T}{2}\sigma^2}{\sigma\sqrt{T}} \quad (10.29)$$

Analogamente para uma opção *put*.

Exercício 10.2: Opções digitais

Uma opção digital paga um valor fixo, se $S_T > K$. Este valor pode ser

1. em dinheiro, digamos um real ou seja o retorno é $\langle \theta(S_T - K) \rangle$
2. uma fração fixa do ativo com retorno $\langle S_T \theta(S_T - K) \rangle$.

Mostre que o valor destas opções é $e^{-rT} \mathcal{N}(d_-)$ no primeiro caso e $e^{-rT} F_T \mathcal{N}(d_+)$ no segundo. Veja as equs.(10.21,10.22).

11 Arvore de N passos e a fórmula de Black

A imposição do ativo poder pular somente para dois valores não é uma restrição importante, se pudermos escolher δt suficientemente pequeno. No entanto para simular um processo real será preciso repetir o processo de dois

passos para um numero grande de N passos. O processo andar  numa arvore de n passos com $N\delta t = T$, onde T   o tempo de maturac o da opc o. Tomaremos o limite $\lim_{N \rightarrow \infty}$ para descrever o processo no contínuo com $\delta t = T/N \rightarrow 0$. Porém   imediatamente óbvio da equ.(8.12) por exemplo, que o numero de termos para calcular o valor da opc o explode exponencialmente para arvores não-recombinantes, o que torna inviável a obteno de uma fórmula fechada para o preo de uma opc o. Precisamos impor alguma estrutura sobre a evoluo temporal do ativo para obter formulas fechadas.

Vimos na seo 9, que um modelo "tratavel" matematicamente necessita passos independentes³³. Alem disso a probabilidade de risco-neutra deve ser independente do nó. Consideremos então a evoluo de um ativo numa arvore recombinante como fizemos na seo 8, especificando a seguinte regra: o ativo estando num certo n  com valor s_{now} , ele poderá subir ou baixar no próximo nó para os seguintes valores

$$\begin{aligned} s_u &= us_{now} = s_{now}e^{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}} \\ s_d &= ds_{now} = s_{now}e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}} \end{aligned} \quad (11.1)$$

com alguma probabilidade p . μ caracteriza o *arrasto* do ativo ou seja a variao não-aleatoria do ativo. Impondo que s_u e s_d sejam proporcionais a s_{now} , será possivel obter uma probabilidade risco-neutra independente do nó e ainda mais um processo de Wiener geometrico. Note que a aleatoriedade $\pm\sigma$ aparece no expoente e o fator $\sqrt{\delta t}$, que multiplica σ , foi escolhido para obter um resultado finito no limite do contínuo $\delta t \rightarrow 0$.

Para precificar a opc o precisamos calcular esperancas sob a probabilidade risco-neutra. Ela resulta da imposio de que o ativo descontado seja uma martingale. Resulta a equ.(8.3), que especifica q como

$$q = \frac{e^{r\delta t}s_{now} - s_d}{s_u - s_d} = \frac{e^{r\delta t} - e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}} - e^{\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t}}} = \frac{e^{(r-\mu)\delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}} \quad (11.2)$$

A dependencia em s_{now} , s_u e s_d cancelou e q   independente do nó! Usaremos q somente para δt pequeno e obtemos expandindo ate ordem δt :

$$q = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r - \mu - \sigma^2/2}{\sigma} \sqrt{\delta t} \right). \quad (11.3)$$

³³Na seo 9 a extensão dos passos era igual a l , que não   o caso de nossos ativos na rede. Poderiamos ter comeado com passos diferentes l e l' . No entanto no limite $N \rightarrow \infty$ tanto l como l' tendem a zero com uma razão possivelmente diferente de 1. Isto somente mudaria o valor das constantes ν e D .

Note a presença de $\sqrt{\delta t}$ como na equ.(9.20).

A posição do ativo na arvore recombinante segue uma distribuição binomial com $\binom{N}{n}$ caminhos subindo em n passos com probabilidade q e baixando em $N-n$ passos com probabilidade $\tilde{q} = 1-q$. A probabilidade deste caminho é

$$\binom{N}{n} q^n \tilde{q}^{N-n}.$$

Partindo de S_0 em $t = 0$, o valor S_T do ativo em $t = T$ para um caminho com n saltos para cima e $N-n$ saltos para baixo é dado por

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 u^n d^{N-n} = S_0 e^{(\mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t})n} e^{(\mu\delta t - \sigma\sqrt{\delta t})(N-n)} \\ &= S_0 e^{\mu N\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}(2n-N)} \end{aligned}$$

Como já vimos na seção 9.1 a equ.(9.2), que $m = 2n - N$ é a "posição" do andarilho/ativo. É uma variável aleatoria, que vamos chamar de X_N , de modo que temos com $\delta t = T/N$

$$S_T = S_0 e^{\mu T + \sigma\sqrt{\frac{T}{N}} X_N} = S_0 e^{\mu T + \sigma\sqrt{T} Y_N} \quad (11.4)$$

com $Y_N = X_N/\sqrt{N}$.

Naquela seção equ.(9.6) também vimos, que no $\lim_{N \rightarrow \infty}$ a distribuição de X_N tende para uma Gaussiana com media $N(q-\tilde{q})$ e variança $4Nq\tilde{q}$. Resulta para a media

$$\langle Y_N \rangle = \frac{N(q-\tilde{q})}{\sqrt{N}} = \sqrt{N} \frac{r-\mu-\sigma^2/2}{\sigma} \sqrt{\delta t} = \frac{r-\mu-\sigma^2/2}{\sigma} \sqrt{T}.$$

Note que o **arrasto μ cancela** na equ.(11.4), pois

$$\begin{aligned} \left\langle \mu T + \sigma\sqrt{T} Y_N \right\rangle_q &= \mu T + (r-\mu-\sigma^2/2)T \\ &= (r-\sigma^2/2)T \end{aligned}$$

e é portanto irrelevante para a precificação do derivativo. Para a variança obtemos

$$\mathcal{V}ar(Y_N) = \mathcal{V}ar(X_N)/N = \frac{4Nq\tilde{q}}{N} = 1 + O(\delta t),$$

pois escolhemos a aleatoriedade convenientemente na equ.(11.1). Ou seja $\ln(S_T/S_0)$ converge para uma distribuição normal com media igual a $\log S_0 +$

$(r - \frac{1}{2}\sigma^2)$ e variância $\sigma^2 T$. Podemos portanto caracterizar a evolução do ativo como

$$S_T = S_0 e^{(r - \sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T}w}, \quad (11.5)$$

com $w \sim N(0, 1)$.

Para uma opção *call* Europeia $Z = (S_T - K)_+$ e seu valor em $t = 0$ é dado pela equ.(8.18), a esperança descontada

$$c = \left\langle e^{-rT} (S_T - K)_+ \right\rangle_q \quad (11.6)$$

ou seja

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/2} \left(S_0 e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma\sqrt{T}x} - K e^{-rT} \right)_+ \quad (11.7)$$

Para que o integrando seja positivo devemos ter $x > x_0$ com

$$S_0 e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma\sqrt{T}x_0} = K e^{-rT}$$

ou seja

$$x_0 = \frac{-\ln \frac{S_0}{K} + (\frac{1}{2}\sigma^2 - r)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Resulta

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} dx e^{-x^2/2} \left(S_0 e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma\sqrt{T}x} - K e^{-rT} \right) \quad (11.8)$$

Completando as contas como seção 10 obtemos a formula da Black equ.(10.19). Ela será discutida com mais detalhes na seção 17.1. Vale aqui tambem o comentario da seção 10 de que não era necessario partir de $t = 0$. Com a substituição

$$\begin{aligned} T &\rightarrow T - t \\ S_0 &\rightarrow S_t, \\ c &\rightarrow c_t \end{aligned} \quad (11.9)$$

obtemos o valor da opção num instante $0 \leq t \leq T$ qualquer. Como prometido analisaremos nas seções seguintes o limite do contínuo $\delta t \rightarrow 0$ com mais detalhes. Neste limite o nosso procedimento discreto da seção 8.3.3 será um guia muito valioso. Pois considere e.g. a derivada da equação $f_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$

$$\frac{df}{dt} = \phi_t \frac{dS_t}{dt} + \psi_t \frac{dB_t}{dt} + \frac{d\phi_t}{dt} S_t + \frac{d\psi_t}{dt} B_t$$

Isto concorda com a descrição discreta somente se

$$\frac{d\phi_t}{dt}S_t + \frac{d\psi_t}{dt}B_t = 0,$$

o que será garantido pela estratégia auto-financiante também no limite contínuo³⁴.

Para um efetivo controle do contínuo dando sentido a diferenciais e integrais de processos aleatórios precisamos do cálculo de Ito da seção 13.

12 Martingales

Voltemos ao conceito de martingale, aqui também para processos contínuos. Nos capítulos 4 e 8.1 vimos que para $\tilde{S}_t = B_t^{-1}S_t$ vale a equação

$$\langle \tilde{S}_{t+\delta t} \rangle_q = \tilde{S}_t, \quad (12.1)$$

ou seja o ativo descontado \tilde{S}_t é uma martingale sob a medida risco-neutra q , pois a esperança no instante seguinte é igual ao valor presente. Chegamos a este resultado estudando a precificação de uma opção f . Vimos que $B_t^{-1}f_t$ também era uma martingale sob a medida risco-neutra. Vamos portanto repassar o conceito de *martingale*, um item central na precificação de ativos financeiros.

Todo processo discreto X_i satisfazendo

$$\langle X_j | X_1, \dots, X_i \rangle = X_i, \quad \forall i \leq j. \quad (12.2)$$

é uma **martingale**³⁵. Ou seja, condicionando até o instante i (conhecendo toda a história evolutiva do ativo até o instante i), a esperança nos instantes seguintes é igual a X_i .

Para precificar as nossas opções e executar a correspondente estratégia de *hedging* acompanhamos uma história do ativo na seção 8.2. Era preciso saber os valores $[\phi_t, \psi_t]$ e estes dependiam da particular trajetória, que o ativo assumiu para tempos $\leq t$. Definimos portanto uma esperança condicionada a uma particular história ou *filtração* \mathcal{F}_t . \mathcal{F}_t é o conjunto de todos os eventos, cujo desfecho é conhecido no instante t . Ela codifica as possíveis trajetórias

³⁴Em muitas publicações o autor simplesmente observa, que não devemos derivar ϕ e ψ . Eu como leitor ficaria completamente perdido com esta matemática nebulosa.

³⁵O processo também deve satisfazer a condição "técnica" $\langle |X_n| \rangle < \infty$.

começando em $t = 0$ e terminando em algum nó no tempo t . Mas não codifica a probabilidade com que o ativo evolui. Denotamos a esperança sob uma medida p de algum processo aleatório X , condicionada a uma filtração \mathcal{F}_t , como

$$E_t = \langle X | \mathcal{F}_t \rangle_p \quad (12.3)$$

Ou seja, sentamos num nó determinado pela filtração \mathcal{F}_t e tomamos a esperança futura ao longo de todos os segmentos saindo do nó. No caso de um ativo S evoluindo a partir do nó 1 no instante $t = 0$ a filtração \mathcal{F}_0 consistiria somente do nó 1, ou seja $\mathcal{F}_0 = \{1\}$. Apesar de termos tomado a esperança $\langle \dots \rangle_p$, a grandeza $\langle X | \mathcal{F}_t \rangle_p$ ainda é um processo aleatório por causa da dependencia em \mathcal{F}_t : para cada tempo temos varios nós com suas probabilidades para lá chegar.

No caso de um processo contínuo a expressão $\langle X_{n+1} | X_1, \dots, X_n \rangle$ se torna um valor esperado condicionado à historia anterior do processo³⁶

$$\langle X_j | X_1, \dots, X_i \rangle \rightarrow \langle X(t) | X(s), s < t \rangle$$

e a definição de martingale é

$$\langle X(t) | \{X(\tau), \tau \leq s\} \rangle = X(s), \forall s < t \quad (12.4)$$

ou mais concisamente³⁷

$$\langle X_t | \mathcal{F}_s \rangle = X_s, \forall s < t. \quad (12.5)$$

Pondo $s = 0$ segue-se a "conservação da esperança"

$$\langle X_t | \mathcal{F}_0 \rangle \equiv \langle X_t \rangle = X_0 = \langle X_0 \rangle, \forall 0 \leq t. \quad (12.6)$$

Derivando a equação acima obtemos a seguinte condição para que o processo X_t seja uma martingale

$$d\langle X_t \rangle = \langle dX_t \rangle = 0. \quad (12.7)$$

Alguns exemplos de martingales são :

- O passeio aleatório para $p = 1/2$ é uma martingale: como as probabilidades de ir para esquerda e para a direita são iguais, então a média não muda durante todo o processo.

³⁶Por mais detalhes veja e.g.[27].

³⁷O caso $s = t$ é trivial.

- Uma combinação linear de Martingales é uma martingale
- Seja $x_i, i = 1, \dots, n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e distribuídas identicamente com $\langle x_i \rangle = 1$ e $X_n = \prod_{i=1}^n x_i$. Então X_n é uma martingale, pois

$$\langle X_{n+1} | \mathcal{F}_n \rangle = \langle x_{n+1} \rangle \langle X_n | \mathcal{F}_n \rangle = 1 \cdot X_n$$

- Se num passeio aleatório tivermos $p \neq q = 1 - p$, podemos ainda assim construir uma martingale. Considere um passeio aleatório

$$X_{n+1} = X_n \pm 1$$

com $+1$ para um passo a direita com probabilidade p e -1 para um passo a esquerda com probabilidade q . Defina uma nova variável Y_n como

$$Y_n = (q/p)^{X_n}. \quad (12.8)$$

Y_n é uma martingale, pois

$$\begin{aligned} \langle Y_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n \rangle &= \langle Y_{n+1} | X_1, \dots, X_n \rangle = p(q/p)^{X_n+1} + q(q/p)^{X_n-1} \\ &= q(q/p)^{X_n} + p(q/p)^{X_n} = (q/p)^{X_n} = Y_n. \end{aligned} \quad (12.9)$$

- O processo aleatório $Y = \langle X | \mathcal{F}_i \rangle_p$ é automaticamente uma martingale qualquer que seja p . Apesar de termos tomado a esperança, o processo Y é aleatório por causa de sua dependência em \mathcal{F}_i . Peguemos o exemplo da Fig(12.1), mostrando um ativo S evoluindo de $t = 0$ até $T = 2$. Note que S não é uma martingale sob nenhuma probabilidade, pois não vale $120 \leq S_3 \leq 160!$

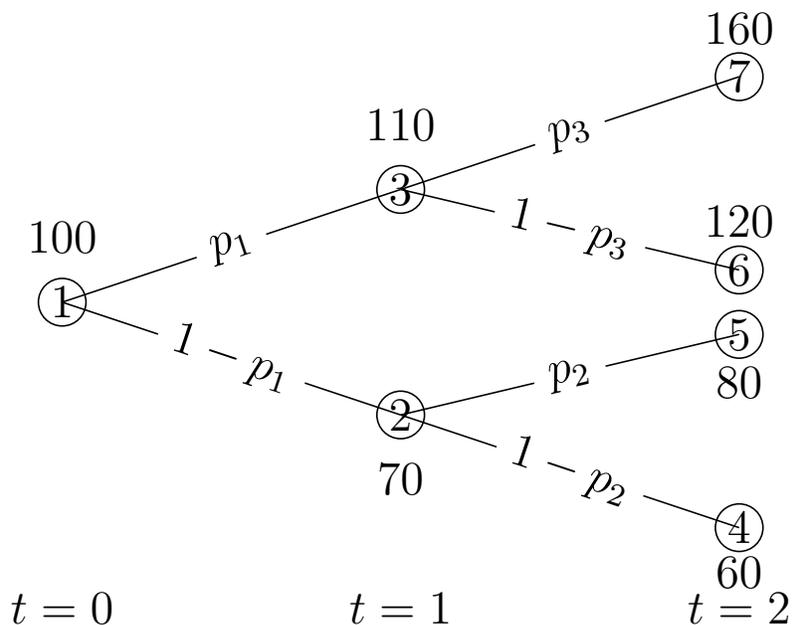


Figure 12.1: A evolução do ativo S numa árvore binária.

A tabela 12 mostra as filtrações possíveis e as esperanças correspondentes aplicando a equ.(12.3) ao ativo S . Iniciando na raiz em $t = 0$ a esperança condicionada dá o mesmo valor que a não-condicionada, pois temos que somar sobre todas as possibilidades futuras. Em $t = 1$ a aleatoriedade aparece, pois temos varias historias possíveis. Nos nós finais ela desaparece de novo, pois não há aonde evoluir e a esperança condicionada é igual ao valor de S .

Esperança	Filtração \mathcal{F}_t	Valor de $\langle S \mathcal{F} \rangle_p$
$\langle S \mathcal{F}_0 \rangle_p$	$\{1\}$	$p_1 p_3 * 160 + p_1 \tilde{p}_3 * 120 + \tilde{p}_1 p_2 * 80 + \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 * 60$
$\langle S \mathcal{F}_1 \rangle_p$	$\{1,2\}$	$p_2 * 80 + \tilde{p}_2 * 60$
	$\{1,3\}$	$p_3 * 160 + \tilde{p}_3 * 120$
$\langle S \mathcal{F}_2 \rangle_p$	$\{1,2,4\}$	60
	$\{1,2,5\}$	80
	$\{1,3,6\}$	120
	$\{1,3,7\}$	160

Tabela 12: A esperança condicional $\langle S|\mathcal{F}_i\rangle_p$

A equ.(12.2) afirma, que todo processo X é uma martingale sob a probabilidade p , se valer

$$\langle X_j|\mathcal{F}_i\rangle_p = X_i, \forall i \leq j. \quad (12.10)$$

Podemos agora verificar, que o processo aleatorio $\langle S|\mathcal{F}_i\rangle_p$ é automaticamente uma martingale qualquer que seja p , se valer

$$\left\langle \langle S|\mathcal{F}_j\rangle_p | \mathcal{F}_i \right\rangle_p = \langle S|\mathcal{F}_i\rangle_p \quad \forall i \leq j \quad (12.11)$$

É claro que calculando a esperança a partir do nó j e depois a partir do nó $i \leq j$ é o mesmo que calculando de uma vez a partir do nó i . Por exemplo da tabela 12 temos para $i = 0$ e $j = 1$

$$\begin{aligned} \langle S|\mathcal{F}_0\rangle_p &= p_1 p_3 * 160 + p_1 \tilde{p}_3 * 120 + \tilde{p}_1 p_2 * 80 + \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 * 60 \\ &= p_1 (p_3 * 160 + \tilde{p}_3 * 120) + \tilde{p}_1 (p_2 * 80 + \tilde{p}_2 * 60) \\ &= p_1 \langle S|\{1, 3\}\rangle_p + \tilde{p}_1 \langle S|\{1, 2\}\rangle_p = \left\langle \langle S|\mathcal{F}_1\rangle_p | \mathcal{F}_0 \right\rangle_p, \end{aligned}$$

onde $\langle \cdot | \mathcal{F}_0 \rangle_p$ é a instrução de tomar a esperança do processo aleatorio $\langle S|\mathcal{F}_1\rangle_p$. Para $p = \frac{1}{2}$ mostramos o resultado na Fig.(12.2). É imediato verificar que a media dos valores seguintes é igual ao valor presente para todos os nós.

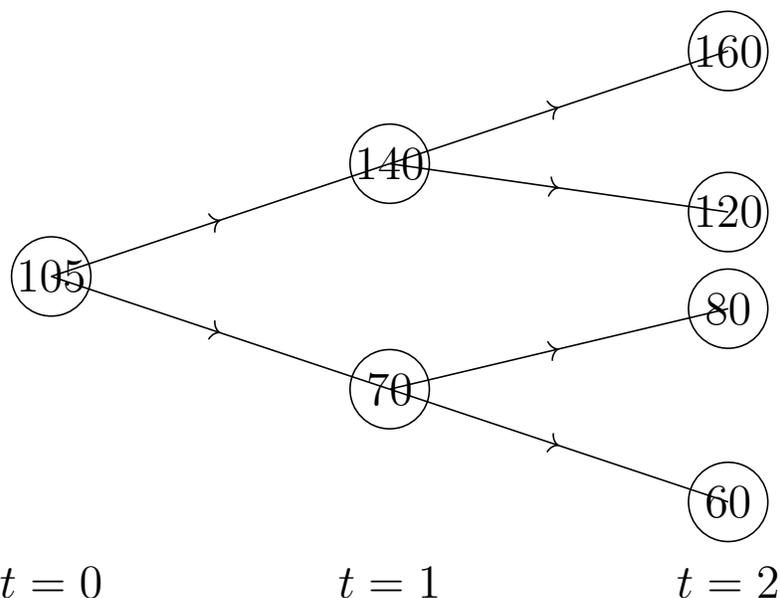


Figure 12.2: A evolução da esperança condicional $\langle S | \mathcal{F}_i \rangle_p$ para $p = \frac{1}{2}$.

- O valor de uma opção com retorno Z é dado pela equ.(8.18):

$$f_t = \langle B_t B_T^{-1} Z | \mathcal{F}_t \rangle_q = e^{r(t-T)} \langle Z | \mathcal{F}_t \rangle_q,$$

com $B_t = e^{rt} B_0$ e q é a probabilidade risco-neutra. Resulta, que o portofolio descontado

$$\tilde{f}_t = \langle B_T^{-1} Z | \mathcal{F}_t \rangle_q = B_t^{-1} f_t \quad (12.12)$$

é uma q -martingale, pois usando a equ.(12.11) temos

$$\langle \tilde{f}_{t+\delta t} | \mathcal{F}_t \rangle_q = \left\langle \langle B_T^{-1} Z | \mathcal{F}_{t+\delta t} \rangle_q | \mathcal{F}_t \right\rangle_q = \langle B_T^{-1} Z | \mathcal{F}_t \rangle_q = \tilde{f}_t. \quad (12.13)$$

Vejamos alguns exemplos de martingales baseados no processo de Wiener.

- Já que o processo de Wiener é o limite de um passeio aleatorio simetrico, deve ser uma martingale. Usando a notação $W_t \equiv W(t)$ temos de fato para $0 \leq s \leq t$

$$\langle W_t | \mathcal{F}_s \rangle = \langle (W_t - W_s) + W_s | \mathcal{F}_s \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s \rangle + \langle W_s \mid \mathcal{F}_s \rangle \\
&= 0 + W_s.
\end{aligned} \tag{12.14}$$

Aqui usamos a equ.(9.36), dizendo que $W_t - W_s$ são incrementos independentes de \mathcal{F}_s com media nula, o que implica $\langle (W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s \rangle = \langle W_t - W_s \rangle = 0$. Usamos também

$$\langle W_s \mid \mathcal{F}_s \rangle = W_s.$$

- Para que o processo $X_t = \mu t + W_t$ seja uma martigale é necessario e suficiente que $\mu = 0$.
Pois se $\mu = 0$ temos $X_t = W_t$, que é uma martingale. Se $\mu \neq 0$ teriamos

$$\langle X_t \mid \mathcal{F}_s \rangle = \langle W_t \mid \mathcal{F}_s \rangle + \mu t = W_s + \mu t = X_s + \mu(t - s)$$

e X_t não seria uma martigale por causa do termo adicional $\mu(t - s)$.

- O processo

$$Y_t = \exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right), t \geq 0 \tag{12.15}$$

para λ real é a martingale de Wald. Para demonstrar note, que para um processo Gaussiano X de média nula, a equ.(10.6) mostra, que

$$\langle e^X \rangle = e^{\frac{1}{2}\langle X^2 \rangle}. \tag{12.16}$$

Resulta para $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned}
\langle Y_t \mid \mathcal{F}_s \rangle &= \langle e^{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t} \mid \mathcal{F}_s \rangle = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t} \langle e^{\lambda W_t} \mid \mathcal{F}_s \rangle \\
&= e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t} \langle e^{\lambda(W_t - W_s) + \lambda W_s} \mid \mathcal{F}_s \rangle = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t} \langle e^{\lambda(W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s \rangle \langle e^{\lambda W_s} \mid \mathcal{F}_s \rangle \\
&\stackrel{(a)}{=} e^{\lambda W_s - \frac{1}{2}\lambda^2 t} e^{\frac{1}{2}\lambda^2(t-s)} = e^{\lambda W_s - \frac{1}{2}\lambda^2 s} = Y_s,
\end{aligned} \tag{12.17}$$

onde em (a) usamos $\langle e^{\lambda W_s} \mid \mathcal{F}_s \rangle = e^{\lambda W_s}$ e as eqs.(12.16,9.36) para $(W_t - W_s)$, que por sua vez é independente de W_s .

- Se

$$dX_t = \sigma_t X_t dW_t \tag{12.18}$$

para um processo σ_t eventualmente aleatorio, então X_t é uma martingale³⁸. De fato

$$\begin{aligned}\langle X_t + dX_t | \mathcal{F}_t \rangle &= \langle X_t | \mathcal{F}_t \rangle + \langle \sigma_t X_t dW_t | \mathcal{F}_t \rangle \\ &= X_t + \sigma_t X_t \langle dW_t | \mathcal{F}_t \rangle = X_t,\end{aligned}\tag{12.19}$$

onde \mathcal{F}_t garante, que conhecemos σ_t, X_t e podemos tira-los da esperança. Ou seja: um processo de Wiener geometrico sem arrasto é uma martingale.

Exercicio 12.1: Conservação de media

Suponha que o processo X seja uma martingale. Verifique que, se o processo tiver um valor esperado num certo instante, então a sua esperança será a mesma daí em diante:

$$\langle X_n \rangle = \langle X_{n-1} \rangle = \dots = \langle X_1 \rangle = X_0.\tag{12.20}$$

Note que aqui as esperanças não são condicionadas!

Exercicio 12..2

Contraexemplo

Exercicio 12.3

Mostre que a martingale de Wald Y_t satisfaz

$$dY_t = \lambda Y_t dW_t.\tag{12.21}$$

13 Calculo de Ito

Precisamos modelar o processo aleatório regendo ativos $S(t)$, supondo e.g. que eles seguem um processo tipo Wiener $W(t)$ ou Wiener geométrico. Mas não podemos escrever uma equação diferencial, já que neste caso as derivadas $dW(t)/dt$ e portanto $dS(t)/dt$ não existem. Precisamos ainda modelar a dependencia temporal de opções f , que dependem de S , além de possiveis outras variáveis. Mas mesmo com $f(W)$ diferenciável, a derivada

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dW} \frac{dW}{dt}$$

³⁸Contanto que obdeça a condição $\langle e^{\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds} \rangle < \infty$, para que exista a solução $X_t = X_0 e^{\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds}$.

também não existe. No entanto podemos trabalhar com diferenciais

$$df = \frac{df}{dW} dW. \quad (13.1)$$

Usando para dW a equ.(9.36)

$$dW(t) = W(t + dt) - W(t) = \sqrt{dt}w \quad (13.2)$$

com $\langle w^2 \rangle = 1$, temos

$$\langle dW^2 \rangle = dt. \quad (13.3)$$

Sabemos que $W(t)$ é um processo Gaussiano e portanto caracterizado pela media e a variância de $W(t)$. Se pudermos provar, que a variância se anula³⁹, a equação acima valerá com probabilidade 1 sem as medias $\langle . \rangle$. De fato temos

$$\mathcal{V}ar(dW^2) = \langle dW^4 \rangle - \langle dW^2 \rangle^2.$$

Para um processo Gaussiano vale $\langle dW^4 \rangle = 3\langle dW^2 \rangle^2$. Resulta portanto

$$\mathcal{V}ar(dW^2) = 3dt^2 - dt^2 = 2dt^2$$

e desprezando termos da ordem de dt^2 anulamos a variância. Somos portanto motivados a propor o *lemma de Ito*

$$(dW(t))^2 = dt. \quad (13.4)$$

Esta é uma equação central do cálculo de Ito, mas não tem nada de intuitivo! É obvio que não pode valer assim "no seco", pois o quadrado de uma variavel aleatoria continua sendo aleatoria. Na verdade ele vale somente dentro de integrais, ou seja ele é violada somente num conjunto de medida nula. Note que as trajetorias de Wiener possuem uma enorme rigidez, pois

³⁹Um processo com variância nula ainda assim é aleatorio. Pois considere o processo aleatorio $X(x)$ com x real e $0 \leq x \leq 6$, definido por

$$X(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = [1, 2, 3, 4, 5, 6] \\ 0, & \text{se } x \neq [1, 2, 3, 4, 5, 6] \end{cases}$$

com x distribuido uniformemente. Ou seja, não é impossivel escolher um numero inteiro. Mas probabilidade de escolher um numero inteiro é nula conforme a equ.(9.30). Então a probabilidade de escolher um não-inteiro é 1. Logo $\langle X \rangle = 0 = \langle X^2 \rangle$ e a variância de X é nula. A igualdade $X = 0$ é violada apenas num conjunto de medida nula.

todas tem que satisfazer o lemma de Ito com probabilidade 1. Para uma verificação numerica veja o Apendice F.

Portanto ao calcular df e colecionar corretamente todas as potencias de dt até primeira ordem, será preciso manter dW até segunda ordem, abandonando termos superiores como $dW^3, dWdt$ etc. Resulta

$$df(W) = f'(W)dW + \frac{1}{2}f''(W)(dW)^2.$$

e com o lemma temos

$$df(W) = f'(W)dW + \frac{1}{2}f''(W)dt. \quad (13.5)$$

Generalizando um pouco temos:

Se $X(t)$ for um processo estocastico satisfazendo

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad (13.6)$$

e se $f(x)$ for duas vezes continuamente diferenciavel, entao o processo estacastico $Y_t = f(X_t)$ obdece

$$\begin{aligned} dY_t &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\hat{d}^2 X_t \\ &= f'(X_t)(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X_t)dW_t^2, \end{aligned}$$

onde \hat{d}^2 indica, que temos que omitir termos $\sim dt^2$. Resulta portanto

$$dY_t = \left(\sigma_t f'(X_t)\right)dW_t + \left(\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X_t)\right)dt \quad (13.7)$$

ou seja: expandimos $df = f(x + dx) - f(x)$ em serie de Taylor até segunda ordem e omitimos termos maiores que dt .

Vejamos duas aplicações :

1. Suponha que X obdeça a equ.(13.6). Usando a equ.(13.7) com $f(x) = e^x$, resulta para $Y_t = e^{X_t}$

$$dY_t = Y_t \left(\sigma dW_t + \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt \right). \quad (13.8)$$

Se $\mu = -\sigma^2/2$, então Y_t é a martingale de Wald da equ.(12.15), pois não tem o termo de arrasto:

$$Y_t = Y_0 e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}, \quad dY_t = \sigma Y_t dW_t.$$

2. Para dois processos satisfazendo

$$dX_t = \mu_X dt + \sigma_X dW_t$$

$$dY_t = \mu_Y dt + \sigma_Y dW_t$$

e usando

$$d(xy) \equiv (x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dxdy \quad (13.9)$$

obtemos, desprezando termos $\sim dt dW_t, (dt)^2$, a identidade

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_X \sigma_Y dt. \quad (13.10)$$

- É imediato generalizar estes resultados para n -processos Wiener. Suponha que X_t possa ser expresso em termos de n processos de Wiener W_t^i independentes:

$$dX_t = \mu dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i dW_t^i \quad (13.11)$$

Temos a seguinte propriedade

$$dW_t^i dW_t^j = \delta_{ij} dt \quad (13.12)$$

Verifiquemo-la para dois processos W_1 e W_2 . Primeiro note, que

$$\langle dW_1 dW_2 \rangle = \langle dW_1 \rangle \langle dW_2 \rangle = 0.$$

Quanto a variância temos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}ar(dW_1 dW_2) &= \langle (dW_1 dW_2)^2 \rangle - (\langle dW_1 dW_2 \rangle)^2 \\ &= \langle (dW_1)^2 \rangle \langle (dW_2)^2 \rangle - 0 = dt^2 \end{aligned}$$

Podemos esquecer o termo $\sim (dt)^2$, resultando

$$\mathcal{V}ar(dW_1 dW_2) = 0.$$

Já que $dW_1 dW_2$ é um processo Gaussiano com media e variância nula, segue-se temos

$$dW_1 dW_2 = \langle dW_1 dW_2 \rangle = 0$$

com probabilidade um, demonstrando a identidade.

O processo $Y_t = f(X_t)$ com X_t obedecendo a equ.(13.11) satisfaz portanto

$$dY_t = \sum_{i=1}^n \left(\sigma_i f'(X_t) \right) dW_t^i + \left(\mu f'(X_t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 f''(X_t) \right) dt. \quad (13.13)$$

Para dois processos satisfazendo

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i dW_t^i \\ dY_t &= \nu dt + \sum_{j=1}^n \rho_j dW_t^j \end{aligned} \quad (13.14)$$

temos

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \vec{\sigma} \cdot \vec{\rho} dt \quad (13.15)$$

com $\vec{\sigma} \cdot \vec{\rho} = \sum_{i=1}^n \sigma_i \rho_i$.

Exercício 13.1 Serie de Taylor

Para calcular df usamos a serie de Taylor ate segunda ordem. É um polinomio de segundo grau em torno do ponto x_0 com as mesmas derivadas que a função original.

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \mathcal{O}(x - x_0)^3 \quad (13.16)$$

Para $x - x_0 = \delta x$ resulta

$$df = f(x_0 + \delta x) - f(x_0) = \delta x f'(x_0) + \frac{1}{2} \delta x^2 f''(x_0). \quad (13.17)$$

Para uma função de n variaveis a expansão seria

$$df = \delta \vec{x} \cdot \vec{\partial} f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \left(\delta \vec{x} \cdot \vec{\partial} f(\vec{x}_0) \right)^2 \quad (13.18)$$

com $\vec{x}_0 = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ e $(\partial f_i)^k \equiv \partial^k f / \partial x_i^k$.

Destrinche a notação acima e verifique, que as derivadas correspondem.

13.1 Integral de Ito

Neste capítulo generalizamos a integral de Riemann para variáveis estocásticas⁴⁰. Para calcular a integral $\int_{t_0}^t F(t)dW$ procederíamos usualmente escrevendo

$$\int_{t_0}^t F(t)dW = \int_{t_0}^t F(t)\frac{dW}{dt}dt.$$

Mas como a derivada de $W(t)$ não existe, precisamos uma formulação, que emprega dW diretamente. Para definir a integral $\int_{t_0}^t F(t)dW$ de uma função $F(t)$ que pode ser estocástica, vamos dividir o intervalo $[t_0, t]$ em subintervalos

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots t_{n-1} \leq t \quad (13.19)$$

e com pontos intermediários em

$$t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i. \quad (13.20)$$

Como na integral de Riemann tomaremos o limite das somas parciais

$$S_n = \sum_{i=1}^n F(\tau_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})]. \quad (13.21)$$

Na integral de Riemann a função a ser integrada deve ser de variação limitada e a escolha de τ_i é irrelevante no limite. No entanto uma função estocástica pode em princípio assumir qualquer valor e a integral depende de escolha.

De fato para exemplificar vamos calcular a esperança da discretização desta soma com $F(t) = W(t)$: Parametrizando as posições intermediárias como

$$\tau_i = (1 - \alpha)t_{i-1} + \alpha t_i, \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (13.22)$$

temos:

$$\begin{aligned} \langle S_n \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n W(\tau_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})] \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle W((1 - \alpha)t_{i-1} + \alpha t_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})] \rangle \end{aligned}$$

⁴⁰O leitor pode saltar esta seção numa primeira leitura sem muitos prejuízos. Recomendamos no entanto lê-la pelo menos em "diagonal".

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n [(1-\alpha) \min(t_{i-1}, t_i) - (1-\alpha) \min(t_{i-1}, t_{i-1}) + \alpha \min(t_i, t_i) - \alpha \min(t_i, t_{i-1})] \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha (t_i - t_{i-1}) = \alpha (t - t_0), \quad (13.23)
\end{aligned}$$

que explicita a dependencia em α .

Na integral de Ito escolhemos o ponto $\tau_i = t_{i-1}$, i.e. $\alpha = 0$, o que resulta em

$$\int_{t_0}^t F(t') dW(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n F(t_{i-1}) [W(t_i) - W(t_{i-1})] \right\}. \quad (13.24)$$

Temos os comentários:

1. O limite aqui é entendido como *limite de mínimos quadrados* (lmq). A sequencia X_n converge para X se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (X_n - X)^2 \rangle = 0. \quad (13.25)$$

2. Notemos que a função $F(t)$ toma valores no passado dos incrementos. Isto é essencial para usar a propriedade de incrementos independentes do processo de Wiener.

3. Integração por partes

Para obter esta relação vamos reescrever o somando $A_n = F(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})]$ da equ.(13.24) da seguinte maneira como

$$\begin{aligned}
A_n &= [F(t_i)W(t_i) - F(t_{i-1})W(t_{i-1})] \\
&\quad - [W(t_i)(F(t_i) - F(t_{i-1}))]. \quad (13.26)
\end{aligned}$$

No limite esta identidade se torna uma formula de integração por partes

$$[FdW]_0 = d(FW) - [WdF]_1 \quad (13.27)$$

O indice se refere ao valor de α , com $\alpha = 0$ para a integral de Ito e $\alpha = 1$ para a integral em que o integrando é inserido no ponto final do intervalo Δt . Portanto a integração por partes relaciona duas integrais diferentes!

4. A integral de Stratonovich é definida com $\alpha = 1/2$. É uma escolha mais simétrica, mas é mais difícil fazer cálculos.

Todos os processos tratados a seguir serão **adaptados**.

Um processo G é adaptado em relação ao processo $X(t)$, se para todo $t \geq 0$ a variável aleatória $G(t)$ depende de $X(s)$ somente para $s \leq t$, mas não de t . Ou seja $G(t)$ depende somente do passado de $X(t)$.

Exemplos são :

- $\int_{t_0}^t dt' W(t')$, $\int_{t_0}^t dt' G[W(t')]$, $\int_{t_0}^t dW(t') G[W(t')]$.
- $\int_{t_0}^t dt' G(t')$, $\int_{t_0}^t dW(t') G(t')$.
- Suponha que queremos modelar o preço de um ativo por um processo estocástico e estamos tentando encontrar a estratégia apropriada. Por exemplo uma estratégia em que a cada instante t compramos ou vendemos uma unidade do ativo como na equ.(8.24). Esta estratégia só será possível no contínuo, se a integral for de Ito e se $G(t) = \psi_t$ for um processo adaptado, pois temos nos basear nos valores do ativo no passado e não num futuro inacessível.

Seguem-se algumas propriedades centrais do integral de Ito[18]. Para mais detalhes veja [18], seção 4.

1.

$$\int_{t_0}^t dW(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n [W(t_i) - W(t_{i-1})] \right\} = W(t) - W(t_0). \quad (13.28)$$

2.

$$\text{Lemma de Ito: } dW(t)^2 = dt. \quad (13.29)$$

Na verdade isto quer dizer que podemos usar a identidade equ.(Ito2) somente dentro de uma integral⁴¹

$$\int_{t_0}^t G(t') [dW(t')]^2 = \int_{t_0}^t G(t') dt'. \quad (13.30)$$

⁴¹Se a função $G(t)$ for estocástica, então $G(t)$ deve ser independente dos incrementos $W(s) - W(t)$ para $s > t$, ou seja um futuro aleatório não pode afetar o passado.

Segundo a equ.(13.25), para provar esta identidade temos que verificar, que o seguinte limite de minimos quadrados se anula⁴²

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle [\sum_{i=1}^n G_{i-1}(\Delta W_i^2 - \Delta t_i)]^2 \rangle = 0 \quad (13.31)$$

De fato temos

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left\langle \sum_{i=1}^n \underbrace{(G_{i-1})^2}_{\cdot} \underbrace{(\Delta W_i^2 - \Delta t_i)^2}_{\cdot} \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{i < j} \underbrace{G_{i-1} G_{j-1}}_{\cdot} \underbrace{(\Delta W_j^2 - \Delta t_j)}_{\cdot} \underbrace{(\Delta W_i^2 - \Delta t_i)}_{\cdot} \right\rangle \right\}.$$

Os termos marcados com \cdot são independentes e podemos fatorar as medias. Usando

$$\langle \Delta W_i^2 \rangle = \Delta t_i$$

vemos que os termos mistos se anulam. Para calcular o primeiro termo, note que para um processo Gaussiano vale⁴³

$$\langle X^4 \rangle = 3\langle X^2 \rangle^2 \rightarrow \langle (\Delta W_i)^4 \rangle = 3\langle \Delta W_i^2 \rangle^2.$$

Obtemos

$$\langle (\Delta W_i^2 - \Delta t_i)^2 \rangle = 2\Delta t_i^2.$$

Resulta então

$$I = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \Delta t_i^2 \langle (G_{i-1})^2 \rangle \right] \leq 2\Delta t \int G(t)^2 dt$$

com $\Delta t = \max(\Delta t_i)$. Se $\int G(t)^2 dt$ for finito, I se anula linearmente com Δt . Significa o limite de minimos quadrados, definido pela $\lim_{n \rightarrow \infty}^{mq}$ da equ.(13.25), obdece

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^{mq} \left(\sum_{i=1}^n G_{i-1} \Delta W_i^2 - \sum_{i=1}^n G_{i-1} \Delta t_i \right) = 0.$$

Isto implica que

$$\int_{t_0}^t G(t') [dW(t')]^2 = \int_{t_0}^t G(t') dt'.$$

⁴²A soma $\sum_{i=1}^n \Delta W_i^2$ chama-se *variação quadratica*.

⁴³Expanda equ.(10.6) com $\langle X \rangle = 0$ ate ordem de X^4 .

3.

$$dW(t)^n = 0, n > 2. \quad (13.32)$$

4.

$$\int_{t_0}^t W(s)dW(s) = \frac{1}{2} [W(t)^2 - W(t_0)^2 - (t - t_0)], \quad (13.33)$$

onde aparece um termo adicional, que não está presente na integral de Riemann. Tomando esperanças com $\langle W(t)^2 \rangle = t$ vemos, que isto recupera a equ.(13.23) com $\alpha = 0$.

Para calcular a integral acima, vamos usar o lemma de Ito para a função $f(x) = x^2$. Resulta $df = d(x^2) = 2xdx + dx^2$. Ou seja, a **regra da cadeia usual não vale para $W(t)$** ! Logo temos

$$d(W^2(t)) = 2W(t)dW(t) + dt,$$

cuja integral é

$$W^2(t) - W^2(t_0) = 2 \int_{t_0}^t W(s)dW(s) + (t - t_0). \quad (13.34)$$

5.

$$\langle \int_{t_0}^t dW(t')G(t') \int_{t_0}^t dW(s')F(s') \rangle = \int_{t_0}^t dt' \langle G(t')F(t') \rangle \quad (13.35)$$

De fato temos

$$\begin{aligned} \langle \sum_i G_{i-1} \Delta W_i \sum_j F_{j-1} \Delta W_j \rangle &= \sum_i G_{i-1} F_{i-1} \langle (\Delta W_i)^2 \rangle \\ + \sum_{i>j} G_{i-1} F_{j-1} \langle \Delta W_i \Delta W_j \rangle &= \sum_i G_{i-1} F_{i-1} \langle (\Delta W_i)^2 \rangle, \end{aligned}$$

já que nos termos mistos com $i > j$ podemos fatorar as esperanças como $\langle \Delta W_i \Delta W_j \rangle = \langle \Delta W_i \rangle \langle \Delta W_j \rangle$ e estas se anulam. Com $\langle (\Delta W_i)^2 \rangle = \Delta t_i$ o resultado segue.

6. Lemma de Ito para dois processos de Wiener correlacionados.

Dois processo de Wiener $dW_i, i = 1, 2$ são correlacionados, se

$$\langle dW_t^{(1)} dW_t^{(2)} \rangle = \rho dt \quad (13.36)$$

e vamos exigir que a função de correlação ρ satisfaça $-1 \leq \rho \leq +1$. Verifiquemos que esta relação vale sem $\langle \cdot \rangle$:

$$dW_t^{(1)} dW_t^{(2)} = \rho dt. \quad (13.37)$$

Como $W_t^{(i)}$ são processos Gaussianos, basta calcular a esperança e a variância. Quanto a variância temos

$$\mathcal{V}ar(dW_1 dW_2) = \langle (dW_1 dW_2)^2 \rangle - (\langle dW_1 dW_2 \rangle)^2.$$

Usando $\langle (dW_1 dW_2)^2 \rangle = \langle dW_1^2 dW_2^2 \rangle = \langle dt^2 \rangle = (dt)^2$ e a equ.(13.36) resulta

$$\mathcal{V}ar(dW_1 dW_2) = (dt)^2 - (\rho dt)^2 = (1 - \rho^2)(dt)^2. \quad (13.38)$$

Em integrais mantemos somente termos até da ordem dt , de modo que podemos esquecer o termo $\sim (dt)^2$ obtendo

$$\mathcal{V}ar(dW_1 dW_2) = 0.$$

Ou seja, o produto $dW_1 dW_2$ é determinístico e podemos eliminar as $\langle \cdot \rangle$ da equ.(13.36), corroborando a equ.(13.37).

Exercício 13.1

Mostre que a integral de Ito $I_t = \int_0^t g(u) dW_u$ é uma martingale:

$$\langle I_t | \mathcal{F}_s \rangle = I_s, \quad s \leq t$$

para $g(u)$ adaptado. Dica: Quebre a integral em duas partes: $u \leq s$ e $u > s$.

13.2 Equações diferenciais estocásticas

Para modelar a aleatoriedade de ativos financeiros, iremos postular que eles evoluem por equações diferenciais estocásticas. A seguir apresentamos alguns exemplos importantes de equações construídas a partir do processo de Wiener $W(t)$. Note que usaremos o lemma de Ito nos cálculos de diferenças, mas será temporariamente: no final das contas será abrigado dentro de integrais.

13.2.1 $dX = a(t)dt + b(t)dW(t)$

Este é um processo de Wiener com arrasto $a(t)$ adicionado⁴⁴. A integral é

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t a(t')dt' + \int_{t_0}^t b(t')dW(t'). \quad (13.39)$$

A esperança é

$$\langle X(t) \rangle = \langle X_0 \rangle + \int_{t_0}^t a(t')dt'. \quad (13.40)$$

A função de correlação é

$$\langle [X(t) - \langle X_0 \rangle][X(s) - \langle X_0 \rangle] \rangle = \langle \int_{t_0}^t b(t')dW(t') \int_{t_0}^s b(s')dW(s') \rangle. \quad (13.41)$$

Supondo $t > s$ extenda a integral $\int_{t_0}^s$ ate t , impondo $b(s') = 0$ para $s' > s$ nesta integral. Podemos agora usar a isometria de Ito equ.(13.35) para obter

$$\langle [X(t) - \langle X_0 \rangle][X(s) - \langle X_0 \rangle] \rangle = \int_{t_0}^{\min(t,s)} dt' b(t')^2, \quad (13.42)$$

que vale para qualquer $t, s \geq t_0$.

Para $a(t), b(t)$ constantes a equação é

$$dX = a dt + b dW(t). \quad (13.43)$$

Para $X_0 = 0$ temos $\langle X \rangle = at$ e variância $\mathcal{V}ar = b^2 t$. A densidade de probabilidade é portanto

$$p[X(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2 t}} e^{-\frac{(x-at)^2}{2b^2 t}}, \quad (13.44)$$

análogo a equ.(9.25).

13.2.2 $dX = a(t)Xdt + b(t)XdW(t)$

Este processo é do tipo de Wiener geométrico ou seja X segue um processo log-normal. É muito usado para modelar o comportamento de ativos financeiros. Usando a variável

$$Y = \log X \quad (13.45)$$

⁴⁴Suporemos que as funções $a(t), b(t)$ sejam contínuas.

e o lemma de Ito temos

$$dY = \frac{1}{X}dX - \frac{1}{2X^2}(dX)^2 = [a(t) - \frac{1}{2}b^2(t)]dt + b(t)dW(t). \quad (13.46)$$

Integrando obtemos $Y(t) - Y(t_0) = \log(X(t)/X(t_0))$ ou seja

$$X(t) = X(t_0)e^{\int_{t_0}^t dt'[a(t') - \frac{1}{2}b^2(t')] + \int_{t_0}^t b(t')dW(t')}. \quad (13.47)$$

A esperança de X^n é

$$\begin{aligned} \langle X^n \rangle &= X(t_0)^n \left\langle e^{n \int_{t_0}^t dt'[a(t') - \frac{1}{2}b^2(t')] + n \int_{t_0}^t b(t')dW(t')} \right\rangle \\ &= X(t_0)^n e^{\int_{t_0}^t dt' n[a(t') - \frac{1}{2}b^2(t')]} \left\langle e^{n \int_{t_0}^t b(t')dW(t')} \right\rangle \end{aligned} \quad (13.48)$$

Para um processo Gaussiano Y vale a equ.(10.6)

$$\langle e^Y \rangle = e^{\langle Y \rangle + \frac{1}{2}\mathcal{V}ar(Y)}. \quad (13.49)$$

Usando a equ.(13.35) obtemos, já que $\langle W(t) \rangle = 0$ e $\langle dW(t)^2 \rangle = dt$,

$$\begin{aligned} \langle X^n \rangle &= X(t_0)^n e^{\int_{t_0}^t dt' n[a(t') - \frac{1}{2}b^2(t')]} e^{\frac{n^2}{2} \int_{t_0}^t dt' b^2(t')} \\ &= X(t_0)^n e^{\left[n \int_{t_0}^t dt' [a(t') + \frac{1}{2}(n(n-1)b^2(t'))] \right]}. \end{aligned} \quad (13.50)$$

Para funções constantes com $a(t) = \mu$, $b(t) = \sigma$ e $X = S$ resulta a equação

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \quad (13.51)$$

Sua solução é

$$S(t) = S(t_0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0) + \sigma W((t)-W(t_0))}. \quad (13.52)$$

A média e variância são com $t_0 = 0$

$$\langle S(t) \rangle = S(0)e^{\mu t}, \quad \mathcal{V}ar[S(t)] = S(0)^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1). \quad (13.53)$$

A densidade de distribuição correspondente é a log-normal. De fato fazendo a substituição $m \rightarrow (\mu - 1/2\sigma^2)t$ na equ.(10.2) resulta

$$\mathcal{L}[s] = \frac{1}{\sigma s \sqrt{2\pi t}} e^{-[\ln s - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t]^2 / 2\sigma^2 t}, \quad s \geq 0 \quad (13.54)$$

com $s = S/S(0)$. Isto reproduz corretamente as esperanças:

$$\begin{aligned}\langle S(t) \rangle &= S(0) \int_0^\infty s \mathcal{L}[s] ds = S(0) e^{\mu t}, \\ \langle S(t)^2 \rangle &= S(0)^2 \int_0^\infty s^2 \mathcal{L}[s] ds = S(0)^2 e^{2\mu t} e^{\sigma^2 t}.\end{aligned}\quad (13.55)$$

Note que tanto μ como σ^2 tem dimensão $[t^{-1}]$. Note ainda que o valor mais provável de $S(t)$ dado por $S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t}$ é menor que o valor medio $e^{\mu t}$.

Para que a evolução de $S(t)$ seja uma martingale é necessario que $\mu = 0$, pois aí temos

$$\langle S(t) \rangle = S(0) \quad (\mu = 0). \quad (13.56)$$

Este resultado está de acordo com a equ.(12.6) e o processo $S(t)$ com $\mu = 0$ é a martingale de Wald equ.(12.15). Idem o processo $X(t)$ é uma martingale se $a(t) = 0$. Uma caracterização muito util de uma martingale é : estes processos construidos a partir de um processo de Wiener são martingales, se o arrasto se anular.

13.2.3 Equação de Ornstein-Uhlenbeck

$$dX = -kXdt + \sqrt{D}dW(t) \quad (13.57)$$

A solução desta equação é

$$X(t) = [X(0) + \sqrt{D} \int_0^t e^{kt'} dW(t')] e^{-kt},$$

o que verificamos facilmente derivando a solução. A média e a variança são :

$$\langle X(t) \rangle = X(0) e^{-kt} \quad (13.58)$$

e

$$\begin{aligned}\text{Var}\{X(t)\} &= \left\langle [X(t) - \langle X(t) \rangle]^2 \right\rangle = \left\langle \left[\sqrt{D} e^{-kt} \int_0^t e^{kt'} dW(t') \right]^2 \right\rangle \\ &= D e^{-2kt} \int_0^t e^{kt'} dW(t') \int_0^t e^{ks'} dW(s') = D e^{-2kt} \int_0^t e^{2kt'} dt' \\ &= \frac{D}{2k} (1 - e^{-2kt}).\end{aligned}\quad (13.59)$$

Usando o truque da equ.(13.42), obtemos para função de correlação

$$\begin{aligned}
\langle X(t), X(s) \rangle &= X(0)^2 e^{-k(t+s)} + D \left\langle \int_0^t e^{-k(t-t')} dW(t') \int_0^s e^{-k(s-s')} dW(s') \right\rangle \\
&= X(0)^2 e^{-k(t+s)} + D \int_0^{\min(t,s)} e^{-k(t+s-2t')} dt' \\
&= \left\{ X(0)^2 - \frac{D}{2k} \right\} e^{-k(t+s)} + \frac{D}{2k} e^{-k|t-s|}. \tag{13.60}
\end{aligned}$$

No limite $t, s \rightarrow \infty$ para $k > 0$, obtemos

$$\langle X(t), X(s) \rangle \rightarrow \frac{D}{2k} e^{-k|t-s|},$$

que é invariante por translação temporal, pois depende somente da diferença $t - s$.

Para modelar a evolução de uma taxa de juros $r(t)$ aleatoria podemos usar a seguinte equação tipo Ornstein-Uhlenbeck

$$d\mathbf{r} = (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{r})dt + \sigma d\mathbf{W}(t), \tag{13.61}$$

que rege o modelo de *Vasicek/Hull-White*. O termo adicional $\sim \theta$ força o "retorno a media", que reflete esta tendencia da taxa de juros. Poi se r_t for abaixo de θ/α o arrasto puxa r_t para cima e se r_t for acima de θ/α o arrasto puxa r_t para baixo.

A solução é

$$r_t = \theta/\alpha + (r_0 - \theta/\alpha)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s. \tag{13.62}$$

Fazendo a integral obtemos

$$r_t = \theta/\alpha + (r_0 - \theta/\alpha)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \tilde{W}_s \left(\frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha} \right), \tag{13.63}$$

de modo que r_t é normalmente distribuido com media $\theta/\alpha + (r_0 - \theta/\alpha)e^{-\alpha t}$ e variança $\sigma^2 \frac{1-e^{-2\alpha t}}{2\alpha}$.

Exercicio 13.1

Mostre que a solução da equação

$$dX(t) = (AX(t) + a(t))dt + \sigma(t)dW(t) \tag{13.64}$$

é

$$X(t) = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}a(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(t). \quad (13.65)$$

Aqui X_t é um vetor $1 \times n$. A é uma matriz $n \times n$, a é $1 \times n$, os dois determinísticos, e $W(t)$ é um processo de Wiener n -dimensional. **Exercício 13.2** Considere o processo X_t satisfazendo a equação

$$dX_t = \vec{\sigma}(t) \cdot d\vec{W}_t + \mu_t dt, \quad (13.66)$$

onde $\vec{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$ e μ_t são processos aleatórios adaptados e \vec{W}_t é um vetor de n processos de Wiener independentes. Verifique a solução

$$X_t = X_0 + \int_0^t \vec{\sigma}(s) \cdot d\vec{W}_s + \int_0^t \mu_s ds \quad (13.67)$$

e que a volatilidade total de X_t é $\sqrt{\sigma_1(t)^2 + \dots + \sigma_n(t)^2}$, calculando a variância de X_t .

Exercício 13.3 Demostre a equ.(13.63).

1. Para aquecer mostre que uma combinação linear com um número finito de termos de distribuições Gaussianas também é uma Gaussiana. Veja e.g. exercício 9.1.
2. Calcule a média e a variância de r_t da equ.(13.62)
3. Conclua pela veracidade da equ.(13.63).

14 A formula de Feynman-Kac e a equação de Fokker-Planck

Vamos expor uma conexão entre processos estocásticos X e uma equação diferencial *parabólica*⁴⁵, da qual a equação de difusão e a equação de Black-Scholes são exemplos. Obteremos uma solução da equação diferencial em termos de uma esperança do processo aleatório X . Isto fornecerá o preço de opções vanilla - a ser usada na seção 16.

⁴⁵A equação $au_{xx} + 2bu_{xt} + cu_{tt} + du_x + eu_t + fu = 0$, com $u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$ etc, é parabólica, se $b^2 - 4ac = 0$. Consideraremos o caso: $b = c = 0$.

Para isto consideremos o processo $X_s \equiv X(s)$ com s no intervalo $s \in [t, T]$ satisfazendo a equação

$$dX_s = a(X_s, s)ds + b(X_s, s)dW_s. \quad (14.1)$$

Imporemos a condição inicial $X_t = x$, onde x e t são dados e fixos⁴⁶.

14.1 A formula de Feynman-Kac

Para obter a equação diferencial associada considere uma função diferenciável $f(x, t)$. A diferencial do processo $f(X_s, s)$ é

$$\begin{aligned} df(X_s, s) &= \frac{\partial f}{\partial s}(X_s, s)ds + [d_x f(x, s)]_{x=X_s} \\ &= \frac{\partial f}{\partial s}(X_s, s)ds + \left\{ (a(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x, t)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) f(x, t) \right\}_{x=X_s} ds \\ &\quad + b(X_s, s) \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dW_s. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Introduzindo o gerador infinitesimal \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = a(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x, t)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (14.3)$$

a equação para df fica assim

$$df(X_s, s) = \left[\frac{\partial f}{\partial s}(X_s, s) + \mathcal{A}f(X_s, s) \right] ds + b(X_s, s) \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dW_s. \quad (14.4)$$

Integrando entre de t a T resulta

$$f(X_T, T) = f(X_t, t) + \int_t^T \left[\frac{\partial f(X_s, s)}{\partial s} + \mathcal{A}f(X_s, s) \right] ds$$

⁴⁶Para que a solução da equ.(14.1) seja única, é suficiente que as funções $a(x, t)$ e $b(x, t)$ tenham derivadas contínuas e sejam limitadas e.g. $|a(x, t)| \leq A|x|$, $A > 0 \forall t$. Suporemos isto daqui em diante. Um contra-exemplo é a equação

$$dX_t = 3X_t^{1/3} dt + 3X_t^{2/3} dW_t$$

com a condição inicial $X_0 = 0$. Temos duas soluções $X_t = 0$ e $X_t = W_t^3$, porque as funções $a(x, t)$ e $b(x, t)$ não são contínuas em $x = 0$.

$$+ \int_t^T b(X_s, s) \frac{\partial f(X_s, s)}{\partial x} dW_s. \quad (14.5)$$

Suponha agora que queiramos resolver a seguinte equação diferencial parcial

$$\boxed{\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \mathcal{A}f(x, t) = 0.} \quad (14.6)$$

Impondo esta condição, o termo entre [...] na equ.(14.5) se anula e ela se reduz a

$$f(X_T, T) = f(X_t, t) + \int_t^T b(X_s, s) \frac{\partial f(X_s, s)}{\partial x} dW_s \quad (14.7)$$

e a equ.(14.4) se torna

$$df(X_s, s) = b(X_s, s) \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dW_s. \quad (14.8)$$

Tomando a esperança $\langle \cdot | \mathcal{F}_t \rangle$ da equ.(14.5) e notando⁴⁷ que $\langle dW_s | \mathcal{F}_t \rangle = 0$, resulta $\langle f(X_T, T) | \mathcal{F}_t \rangle = \langle f(X_t, t) | \mathcal{F}_t \rangle$.

A unicidade da solução da equ.(14.6) exige uma condição: fixar $f(x, t)$ para algum instante. Vamos escolher a condição final, que é a relevante para precificar opções,

$$f(x, T) = \Phi(x) \quad (14.9)$$

com a função $\Phi(x)$ dada⁴⁸. Para o processo X_t já escolhemos a condição inicial $X_t = x$ e obtendo assim $f(X_t, t) = f(x, t)$. Com isto a solução da equação diferencial (14.6) fica

$$\boxed{f(x, t) = \langle \Phi(X_T) | \mathcal{F}_t \rangle_{X_t=x},} \quad (14.11)$$

com o processo X_t satisfazendo a a equ.(14.1)

$$dX_s = a(X_s, s)ds + b(X_s, s)dW_s$$

⁴⁷Repare, que $dW_s = W_{s+ds} - W_s$, portanto é independente de $b(X_s, s) \frac{\partial f(X_s, s)}{\partial x}$ e a esperança fatora: $\langle b(X_s, s) \frac{\partial f(X_s, s)}{\partial x} dW_s \rangle = \langle b(X_s, s) \frac{\partial f(X_s, s)}{\partial x} \rangle \langle dW_s \rangle$. Lembre, que $| \mathcal{F}_t$ indica, que o processo é conhecido até o instante t .

⁴⁸Imporemos, que $\Phi(x)$ seja integravel e satisfaça [19]

$$|\Phi(x)| \leq M e^{a|x|^2} \text{ para } x \rightarrow \infty \text{ (} M, a > 0 \text{)} \quad (14.10)$$

com $0 < t < 1/4a$. Com isto garantimos a existencia de integrais do tipo equ.(10.15) de $\Phi(x)$ com uma gaussiana.

e condição inicial $X_t = x$.

Sob as condições enunciadas acima para $a(x, t), b(x, t)$ - funções limitadas com derivadas contínuas - a solução é única.

A equação acima é a famosa formula de **Feynman-Kac**[24] e representa a solução da equação diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + a(x, t)\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{2}b(x, t)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = 0 \quad (14.12)$$

em termos da esperança de um processo estocástico associado. Ela também é chamada de *Kolmogorov regressiva* devido a condição final (14.9) $T > t$.

A equação de **Black-Scholes** a ser tratada na seção 16.2 possui um termo adicional $rf(x, t)$. Vamos generalizar um pouco e adicionar um termo tipo "potencial"⁴⁹ $V(x, t)f(x, t)$ considerando a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + a(x, t)\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{2}b(x, t)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \\ - V(x, t)f(x, t) + g(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (14.13)$$

com $V(x, t) > 0, g(x, t)$ funções dadas e a condição final equ.(14.9).

Para incorporar estes termos considere o processo

$$Y(s) = e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} f(X_s, s) + \int_t^s e^{-\int_t^u V(X_\tau, \tau) d\tau} g(X_u, u) du. \quad (14.14)$$

Usando a equ.(13.9) para diferenciar $Y(s)$ obtemos

$$\begin{aligned} dY(s) &= d_s \left(e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} \right) f(X_s, s) + e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} d_s f(X_s, s) \\ &+ \left\{ d_s \left(e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} \right) df(X_s, s) \right\} + d_s \left(\int_t^s e^{-\int_t^u V(X_\tau, \tau) d\tau} g(X_u, u) du \right). \end{aligned}$$

O termo entre $\{\cdot\}$ é da ordem de $dsdf$ e podemos despreza-lo⁵⁰. Usando a equ.(14.2) para df resulta

$$dY(s) = e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} \left(\left[-V(X_s, s)f(X_s, s) + g(X_s, s) \right] \right)$$

⁴⁹Impomos $V(x, t)$ positivo e limitado. Com isto a solução é a única com crescimento no máximo polinomial. Na verdade existe no máximo uma única solução não-negativa para $t \geq 0, \forall x$ [19].

⁵⁰Note que $d(e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau}) = -V(X_s, s)e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} ds \sim ds$.

$$+ \frac{\partial f}{\partial s}(X_s, s)] ds + \mathcal{A}f(X_s, t) + b(X_s, s) \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dW_s, \quad (14.15)$$

onde obtivemos os termos adicionais $\sim V(x, t), \sim g(x, t)$. Supondo que $f(x, t)$ satisfaça a equ.(14.13) resulta

$$dY(s) = e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} b(X_s, s) \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dW_s. \quad (14.16)$$

Tomando esperanças resulta $\langle dY(s) | \mathcal{F}_t \rangle = 0$ e obtemos

$$\langle Y(T) | \mathcal{F}_t \rangle_{X_t=x} = \langle Y(t) | \mathcal{F}_t \rangle_{X_t=x}.$$

Da equ.(14.14) vemos, que o lado direito é igual a $f(x, t)$ e inserindo a definição de $Y(T)$ no lado esquerdo resulta finalmente

$$f(x, t) = \left\langle e^{-\int_t^T V(X_\tau, \tau) d\tau} \Phi(X_T) + \int_t^T ds e^{-\int_t^s V(X_\tau, \tau) d\tau} g(X_s, s) | \mathcal{F}_t \right\rangle_{X_t=x} \quad (14.17)$$

Esta representação é indentica ao integral de trajetoria de Feynman, veja e.g. [10]⁵¹.

Para $g(x, t) = 0$ e $V(x, t) = r = \text{constante}$ a equação diferencial é

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + a(x, t) \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \frac{1}{2} b(x, t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - r f(x, t) = 0, \quad (14.18)$$

cuja solução tem a seguinte representação

$$f(x, t) = e^{-r(T-t)} \langle \Phi(X_T) | \mathcal{F}_t \rangle_{X_t=x}. \quad (14.19)$$

Note que $f(x, t)$, por ser uma esperança, é uma **martingale** analogamente ao caso discreto da equ.(12.11). Pois vejamos.

⁵¹Na integral de Feynman as esperanças são tomadas com um peso $\sim e^{iS_c}$, onde S_c é a ação classica do sistema $S_c \sim \int (T - V)$ e a equação diferencial é a equação de Schrödinger. Podemos passar desta equação para equação de difusão fazendo a substituição $i \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$. Isto implica $(T - V) \rightarrow -(T + V)$. O termo $\sim T$ não aparece em nossa formula, porque as trajetorias de Wiener já incorporam o termo gaussiano $\sim e^{-T}$: é o chamado "caso livre" em teoria de campos. Para detalhes veja [32]

Da definição de martingales no contínuo temos

$$\left\langle \langle X | \mathcal{F}_s \rangle_{\mathcal{P}} | \mathcal{F}_t \right\rangle_{\mathcal{P}} = \langle X | \mathcal{F}_t \rangle_{\mathcal{P}}, \quad \forall t \leq s.$$

Inserindo $X = B_T^{-1}Z = \tilde{f}_T$, $s = T$, $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ nesta equação, resulta

$$\left\langle \langle B_T^{-1}Z | \mathcal{F}_T \rangle_{\mathcal{Q}} | \mathcal{F}_t \right\rangle_{\mathcal{Q}} = \langle B_T^{-1}Z | \mathcal{F}_t \rangle_{\mathcal{Q}}$$

ou seja

$$\langle \tilde{f}_T | \mathcal{F}_t \rangle_{\mathcal{Q}} = \tilde{f}_t, \quad (14.20)$$

quer dizer, que \tilde{f}_t é uma \mathcal{Q} -martingale.

Note ainda que a esperança é $\langle \cdot | \mathcal{F}_t \rangle$, de modo que $f(x, t)$ independe de X_s , $s < t$. Com isto $f(x, t)$ depende somente de x e t e não do caminho para lá chegar.

Temos pois o seguinte resultado:

O processo $f(\mathbf{X}_t, t)$ é uma **martingale** condicionada a filtração \mathcal{F}_t , se e somente se $f(x, t)$ satisfizer a equação diferencial

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \mathcal{A}f(x, t) = 0. \quad (14.21)$$

O enunciado "se e somente se" requer que mostremos que $f(x, t)$ satisfaz a equação diferencial, se for uma martingale. Isto é imediato, pois a condição de martingale impõe que $df \sim dW$. Anulando os termos que não sejam $\sim dW$ na equ. (14.15) resulta na equação diferencial acima.

Para $a(x, t) = rx$, $b(x, t) = \sigma x$ obtemos a famosa equação de Black-Scholes-Merton (BSM)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - fr = 0.} \quad (14.22)$$

Pondo $\phi(X_T) = Z$ com Z o retorno de opções *call* e *put*, sua solução (14.19) é a versão contínua da equ. (8.18). Na seção 16.1 calcularemos explicitamente a esperança $\langle \cdot | \mathcal{F}_t \rangle$.

Exercício 14.1

Obtenha a solução da equação

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(x, t) = 0$$

com $\sigma = \text{constante}$ e $f(x, T) = x^2$. Para isto considere o processo

$$dX_s = 0 ds + \sigma dW_s, \text{ com } X_t = x.$$

Integre a equação acima obtendo $X_s = x + \sigma(W_s - W_t)$. Mostre que

$$f(x, t) = \langle X_T^2 \rangle = \sigma^2(T - t) + x^2.$$

Use $\langle X^2 \rangle = \langle X \rangle^2 + \text{Var}[X]$.

Generalizando um pouco, se $f(x, T) = f_0(x)$, então a solução é

$$f(x, t) = \langle f_0(X_T) \rangle = \langle f_0(x + \sigma(W_T - W_t)) \rangle = \langle f_0(x + \sigma\sqrt{T - t}w) \rangle.$$

A esperança é

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-w^2/2} f_0(x + \sigma\sqrt{T - t}w) \\ &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(x - w, t) f_0(w) dw \end{aligned}$$

Obtenha a função $G(x, t)$ e compare com a *função de Green* do apêndice C.

14.2 A equações de Fokker-Planck

A equação de Fokker-Planck rege a dinâmica da probabilidade do processo estocástico X da equ.(14.1):

$$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW(t). \quad (14.23)$$

Para obter a equação de Fokker-Planck consideremos uma função auxiliar arbitrária $f(x)$, mas diferenciável. Para poder integrar por partes e esquecer os termos de fronteira⁵² suporemos, que $f(x)$ se anula fora de uma região compacta. A diferencial de $f[X(t)]$ é pela equ.(14.2)

$$\begin{aligned} df[X(t)] &= f'[X(t)]dX(t) + \frac{1}{2}f''[X(t)]dX(t)^2 + \dots \\ &= \mathcal{A}_{x,t}f[X(t)] + b(X, t)f'[X(t)]dW(t). \end{aligned} \quad (14.24)$$

⁵²Para uma discussão deste ponto veja [18], seção 3.4.1.

com $\mathcal{A}_{x,t}$ dado pela equ.(14.3: $\mathcal{A}_{x,t} = a(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}b(x,t)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$). Tomando esperanças obtemos com $\langle dW(t) \rangle = 0$

$$\left\langle \frac{d}{dt} f[X(t)] \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle f[X(t)] \rangle = \langle a(X,t)\partial_x f + \frac{1}{2}b(X,t)^2\partial_x^2 f \rangle. \quad (14.25)$$

Seja $p(X, t|x_0, t_0)$ a probabilidade de observar o valor X no instante t , dado que o processo assumiu o valor $X(t_0) = x_0$ no instante $t_0 < t$. A esperança da função $f[X(t)]$ é então

$$\langle f[X(t)] | \mathcal{F}_{t_0} \rangle_{X_{t_0}=x_0} = \int dx p(x, t|x_0, t_0) f[x]. \quad (14.26)$$

No lado direito acima X virou uma variavel de integração e somamos sobre todos os valores finais possíveis. Note que $\int dx p(x, t|x_0, t_0) = 1$ ou mais geral

$$Prob.(X_t \in A | X(t_0) = x_0) = \int_A dx p(x, t|x_0, t_0).$$

A propria definição da probabilidade condicionada reza

$$\int dx_0 p(x, t|x_0, t_0) p(x_0, t_0) = p(x, t),$$

da qual segue que $\lim_{t \rightarrow t_0} p(x, t|x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$.

Derivando a equ.(14.26) e usando a equ.(14.25), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f[X(t)] \rangle &= \int dx f(x) \partial_t p(x, t|x_0, t_0) \\ &= \int dx [a(x, t)\partial_x f + \frac{1}{2}b(x, t)^2\partial_x^2 f] p(x, t|x_0, t_0). \end{aligned} \quad (14.27)$$

Integrando por partes para isolar $f(x)$ resulta

$$\int dx f(x) \partial_t p(x, t|x_0, t_0) = \int dx f(x) [-\partial_x (a(x, t)p) + \frac{1}{2}\partial_x^2 (b(x, t)^2 p)]. \quad (14.28)$$

Já que $f(x)$ é arbitraria, obtemos a equação de *Fokker-Planck* para a probabilidade condicionada

$$\partial_t p(x, t|x_0, t_0) + \partial_x [a(x, t)p(x, t|x_0, t_0)]$$

$$-\frac{1}{2}\partial_x^2[\mathbf{b}(x,t)^2\mathbf{p}(x,t|x_0,t_0)] = \mathbf{0}. \quad (14.29)$$

Esta equação é também chamado equação de *Kolmogorov progressiva*, porque utilizamos uma condição inicial em $[x_0, t_0]$ e não final como na equ.(14.12). Utilizaremos esta equação na dedução da equação de Dupire na seção 21.

Podemos escrever a equ.(14.29) como

$$\partial_t p(x, t|x_0, t_0) - \mathcal{A}^* p(x, t|x_0, t_0) = 0. \quad (14.30)$$

O operador

$$\mathcal{A}^* h(x, t) = -\partial_x [a(x, t)h(x, t)] + \frac{1}{2}\partial_x^2 [b(x, t)^2 h(x, t)] \quad (14.31)$$

é chamado *operador infinitesimal adjunto*⁵³.

Para o caso particular $a(x, t) = 0, b(x, t) = \sigma$ com $\sigma = \text{constante}$ temos

$$\begin{aligned} dX &= \sigma dW_t \\ \partial_t p(x, t|x_0, t_0) &= \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_x^2 p(x, t|x_0, t_0), \end{aligned} \quad (14.32)$$

cuja solução com a condição inicial

$$p(x, t|x_0, t_0) \rightarrow \delta(x - x_0) \text{ para } t \rightarrow t_0$$

é

$$p(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(t-t_0)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2(t-t_0)}}. \quad (14.33)$$

Ela aparecerá de novo sob o nome de *função de Green* no apêndice C.

14.3 Formula de Feynman-Kac multidimensional

Opções e outros derivativos dependem em geral de mais de uma variável aleatória. Por exemplo de vários ativos aleatórios $X_i(t), i = 1, 2, \dots, n$. Reunimos sob o vetor coluna

$$\mathbf{X}_t = [X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)]'$$

⁵³”adjunto” aparece, porque fizemos uma integração por partes. Lembre a demonstração em Mecânica Quântica, que o operador momento angular $L = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$ é autoadjunto para adequadas condições de contorno.

A seguir vamos obter correspondente formula de Feynman-Kac. Como os passos são analogos a seção 14.1, seremos bastante concisos.

Suponhamos, que os X_t^i satisfaçam

$$dX_t^{(i)} = a_i(X_t^{(j)}, t)dt + b_i(X_t^{(j)}, t)dW_t^{(i)}, \quad i = 1, 2..n, \quad (14.34)$$

onde $a_i(X_t^{(j)}, t)$ são $i = 1, 2, ..n$ funções das n variaveis $X_t^{(j)}$ e do tempo. Supnhamos ainda, que os processos de Wiener sejam correlacionados como

$$dX_t^{(i)} dX_t^{(j)} = \rho_{ij}dt, \quad \rho^{ij} \in [-1, 1] \quad (14.35)$$

Com a notação vetorial $X_t^i \rightarrow \mathbf{X}_t, W_t^i \rightarrow \mathbf{W}_t$ e $a_i(\mathbf{X}_t, t) \rightarrow \mathbf{a}, b_i(\mathbf{X}_t, t) \rightarrow \mathbf{b}$ temos

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{a}dt + \mathbf{b}d\mathbf{W}_t. \quad (14.36)$$

Usando a equ.(13.18) a diferencial do processo $f(\mathbf{X}_t, t)$ é

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{A}f \right] dt + \nabla f \cdot \mathbf{b}d\mathbf{W}_t$$

com

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \rho_{ij} b_i b_j \partial_{ij} f + \sum_{i=1}^n a_i \partial_i f \quad (14.37)$$

e $\partial_i f = \frac{\partial}{\partial x^i} f(x^i, t)|_{x^i=X^{(i)}}$. Tomando esperanças e supondo, que f satisfaça

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{A}f = 0 \quad (14.38)$$

e com $\langle \nabla f \cdot \mathbf{b}d\mathbf{W}_t | \mathcal{F}_t \rangle = 0$ resulta

$$df = 0 \rightarrow f(\mathbf{X}_T, T) = f(\mathbf{X}_t, t)$$

com a condição final $f(\mathbf{X}_T, T) = \Phi(\mathbf{X}_T)$. Seguindo os mesmos passos da seção 14.1, obtemos para solução da equação

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{A}f - rf = 0 \quad (14.39)$$

a seguinte representação

$$f(\mathbf{x}, t) = e^{-r(T-t)} \langle \Phi(\mathbf{X}_T) | \mathcal{F}_t \rangle_{\mathbf{X}_t=\mathbf{x}}. \quad (14.40)$$

15 A estrutura no contínuo e o teorema de Girsanov

Vamos transportar a estrutura de precificação de opções da seção 8 para contínuo $\Delta t \rightarrow 0$. Apesar do mercado na vida real operar necessariamente em intervalos discretos, o limite do contínuo permite a obtenção de equações diferenciais. Estas são mais tratáveis do que equações de diferenças. Na árvore este limite já foi discutido na seção 11, onde supusemos que o ativo pode evoluir para dois valores s_u e s_d dados pela equ.(11.1). Esta foi adaptada para convergir neste limite para um processo de Wiener geométrico, que já vimos no capítulo 10.

Para iniciar vamos supor, que o ativo S_t siga no mundo real um processo de Wiener geométrico:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (15.1)$$

onde W_t é o processo de Wiener da equ.(9.29) com a distribuição de probabilidade/medida \mathcal{P} :

$$\text{Prob}_{\mathcal{P}}\{W_t \in dw\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-w^2/2t} dw. \quad (15.2)$$

μ é a arrasto e $\sigma \geq 0$ é a *volatilidade*.

Para que o ativo descontado com taxa r seja uma martingale, devemos encontrar uma medida que mude $\mu \rightarrow r$. Adicionando e subtraindo o termo $rS_t dt$ na equação acima temos

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right). \quad (15.3)$$

Se encontrarmos uma medida \mathcal{Q} sob a qual

$$\tilde{W}_t = \lambda t + W_t, \quad \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}, \quad \sigma > 0 \quad (15.4)$$

seja Wiener, então S_t obdecerá

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t \quad (15.5)$$

e o ativo descontado $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ não terá arrasto. Será portanto uma martingale sob a medida \mathcal{Q} e poderemos precificar opções usando esta medida. Ao mudar de \mathcal{P} para \mathcal{Q} devemos impor que as duas medidas sejam *equivalentes*.

Basicamente isto diz que toda historia possível sob a medida original \mathcal{P} , também é possível sob a medida \mathcal{Q} . Por simplicidade considere o caso de uma arvore. Seja p_{ij} a probabilidade de passar do nó i para o nó j e q_{ij} a correspondente na medida \mathcal{Q} . Então $[q_{ij}, 1 - q_{ij}]$ deve-se anular somente nos elos em que $[p_{ij}, 1 - p_{ij}]$ se anularem. Assim todo caminho possível numa medida também será possível na equivalente e mantemos o conjunto de caminhos possíveis.

Explicitando:

- W_t é um processo de Wiener sob a medida \mathcal{P} dada pela equ.(15.2).
- Analogamente \tilde{W}_t deve ser Wiener sob \mathcal{Q} :

$$\text{Prob}_{\mathcal{Q}}\{\tilde{W}_t \in d\tilde{w}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\tilde{w}^2/2t} d\tilde{w} \quad (15.6)$$

- $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t = r S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$

Temos que absorver o termo $\lambda = \frac{\mu-r}{\sigma}$ na medida. É facil ver que as medidas são relacionadas pelo fator multiplicativo⁵⁴

$$\mathcal{D}_t \equiv \frac{\mathcal{DQ}}{\mathcal{DP}} = e^{-\lambda^2 t/2 - \lambda W_t}, \quad \lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}, \quad (15.7)$$

que é a martingale de Wald equ.(12.15), satisfazendo portanto - veja a equ(12.21) -

$$d\mathcal{D}_t = \lambda \mathcal{D}_t dW_t, \quad \mathcal{D}_s = \langle \mathcal{D}_t | \mathcal{F}_s \rangle, s \leq t \quad (15.8)$$

A relação entre a duas medidas é

$$\langle \cdot \rangle_{\mathcal{Q}} = \int \cdot \mathcal{DQ} = \int \cdot \frac{\mathcal{DQ}}{\mathcal{DP}} \mathcal{DP} \equiv \langle \cdot \mathcal{D}_t \rangle_{\mathcal{P}}, \quad (15.9)$$

analogo a mudança de variaveis para funções $dq = \frac{dq}{dp} dp$. As duas medidas são equivalentes, pois $\frac{\mathcal{DQ}}{\mathcal{DP}} > 0$ e as duas medidas se anulam nos mesmos eventos.

A nova medida é corretamente normalizada

$$\langle \mathbf{1} \rangle_{\mathcal{Q}} = 1,$$

⁵⁴ \mathcal{D} é um caso particular da derivada Radon-Nicodym.

pois

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{1} \rangle_Q &= \langle \mathcal{D}_\lambda \rangle_P = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-\frac{w^2}{2t}} e^{-\frac{\lambda^2 t}{2} - \lambda w} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-(w+\lambda t)^2/2t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2/2t} = 1.\end{aligned}\quad (15.10)$$

Para que \tilde{W}_t seja Wiener sob a medida \mathcal{Q} , devemos mostrar que

$$\langle \tilde{W}_t \rangle_Q = 0, \quad \langle \tilde{W}_t^2 \rangle_Q = t. \quad (15.11)$$

Como \mathcal{D}_λ envolve W_t na exponencial, é mais conveniente calcular a esperança de $e^{\theta W_t}$ com θ uma constante arbitraria. Lembrando que $\langle W_t \rangle_P = 0$ e $\langle W_t^2 \rangle_P = t$ e a equ.(10.6) para uma distribuição Gaussiana

$$\langle e^{\theta X} \rangle = e^{\theta \langle X \rangle + \frac{\theta^2}{2} \text{var}(X)}, \quad (15.12)$$

calculamos

$$\begin{aligned}\langle e^{\theta \tilde{W}_t} \rangle_Q &= \langle e^{-\lambda^2 t/2 - \lambda W_t + \theta \tilde{W}_t} \rangle_P = \langle e^{-\lambda^2 t/2 - \lambda W_t + \theta W_t + \theta \lambda t} \rangle_P \\ &= e^{-\lambda^2 t/2 + \theta \lambda t} \langle e^{(\theta - \lambda) W_t} \rangle_P = e^{-\lambda^2 t/2 + \theta \lambda t} e^{\frac{1}{2}(\theta - \lambda)^2 t} = e^{\frac{1}{2}\theta^2 t}.\end{aligned}\quad (15.13)$$

Resulta pois

$$\langle e^{\theta \tilde{W}_t} \rangle_Q = e^{\frac{1}{2}\theta^2 t}. \quad (15.14)$$

Já que θ é arbitrario, a equ.(15.12) requer que

$$\langle \tilde{W}_t \rangle_Q = 0, \quad \langle \tilde{W}_t^2 \rangle_Q = t, \quad (15.15)$$

vindicando as equs.(15.11).

Resumindo temos

- Se W_t é Wiener sob $\langle \cdot \rangle_P$, então $\tilde{W}_t = W_t + \lambda t$ é Wiener sob $\langle \cdot \rangle_Q$

e \mathcal{Q} é a medida risco-neutra.

Note que a volatilidade σ permanece intocada ao passar de \mathcal{P} para \mathcal{Q} . Mudámos o arrasto de S_t por meio de uma mudança de medida. Na verdade tudo que uma mudança de medida pode fazer num processo de Wiener é mudar o arrasto, sem afetar a volatilidade σ . Isto é facil de verificar, pois temos

$$\left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 = (\mu dt + \sigma dW_t)^2 = \sigma^2 dt \quad (15.16)$$

e esta relação vale independente de tomarmos esperanças. A possibilidade da esperança poder mudar o arrasto é formalizado pelo teorema de *Girsanov*: existe uma medida *equivalente* de probabilidade \mathcal{Q} sob a qual \tilde{W}_t é uma martingale. Por outro lado podemos extrair o valor da volatilidade σ de qualquer trajetória, pois todas dão o mesmo valor para σ . Já que o custo de *hedging* é determinado por σ e σ é independente da trajetória, podemos utilizar o esquema BS para inferir a volatilidade a partir dos dados, que o mercado fornece sobre o ativo S_t - veja seção 21.

Generalizando um pouco podemos enunciar o **Teorema de Girsanov** para processos μ, r, λ adaptados e dependentes do tempo

$$\mu, r, \lambda \rightarrow \hat{\mu}(t), \hat{r}(t), \hat{\lambda}(t)$$

com $0 < \int_0^T ds \hat{\lambda}^2(s) < \infty$ ⁵⁵. A equ.(15.7) é o caso particular, quando estas funções são constantes.

Seja $W(t), 0 \leq t \leq T$ um processo de Wiener sob a medida \mathcal{P} . Adicionando um arrasto obtemos o processo

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \hat{\lambda}(s) ds. \quad (15.17)$$

Por meio da *derivada de Radon-Nikodym (RN)*

$$\hat{\mathcal{D}}_\lambda(t) = e^{-\int_0^t \hat{\lambda}(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \hat{\lambda}^2(s) ds} \quad (15.18)$$

obtemos a nova medida de probabilidade \mathcal{Q}

$$\langle \cdot \cdot \rangle_{\mathcal{Q}} \equiv \langle \cdot \cdot \hat{\mathcal{D}}_\lambda(t) \rangle_{\mathcal{P}} \quad (15.19)$$

e o processo $\tilde{W}(t)$ é uma martingale sob a medida \mathcal{Q} não possuindo arrasto.

O converso deste teorema também vale: se W_t é Wiener sob \mathcal{P} e se \mathcal{Q} for uma medida equivalente, então existe um processo adaptado $\hat{\lambda}(t)$ satisfazendo a equ.(15.17)⁵⁶.

⁵⁵Se esta condição não for satisfeita, o processo é chamado de *martingale local*.

⁵⁶Para mais detalhes veja [15, 27].

Este teorema será usado nas seções 29 e 31.

Exercício 15.1

Suponha que \tilde{f}_t seja uma martingale sob a medida Q . Qual é a medida sob a qual $f_t = e^{rt} \tilde{f}_t$ é uma martingale?

Exercício 15.2

Mostre que a derivada de Radon-Nikodym da equ.(15.18) é uma martingale, diferenciando $\tilde{\mathcal{D}}_\lambda$. Mostre que $\langle \tilde{\mathcal{D}}_\lambda \rangle_P = 1$.

15.1 Girsanov para tempos discretos

Vamos explicitar o funcionamento de \mathcal{D} numa árvore de dois passos. Usaremos a notação (fazendo $t = T$ e omitindo o índice temporal) na equ.(15.7)

$$\mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}Q}{\mathcal{D}P} = e^{-\lambda^2 T/2 - \lambda W_T}, \quad (15.20)$$

Da equ.(15.8) temos para tempos $0 \leq t \leq T$

$$\mathcal{D}_t = \left\langle \frac{\mathcal{D}Q}{\mathcal{D}P} \middle| \mathcal{F}_t \right\rangle, \quad (15.21)$$

pois a derivada \mathcal{D} é uma martingale.

Notemos, que no discreto temos probabilidades p_i, q_i , que codificam tanto um valor - a probabilidade, como uma "geometria" - de onde para onde caminha o processo. Estas duas propriedades são separadas: $\langle \cdot \rangle_P, \langle \cdot \rangle_Q$ codificam a medida/probabilidade e \mathcal{F}_s codifica a "geometria".

Exemplo 15.1

Suponha que lançemos duas moedas com probabilidades $P(u) = 1/3$ e $P(d) = 2/3$ e probabilidades $Q(u) = Q(d) = 1/2$. Os possíveis valores são $\Omega = \{uu, ud, du, dd\}$. Então a derivada RN é $Q(\omega)/P(\omega)$ com $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(uu) &= (1/2)^2 / (1/3)^2 = 9/4, & \mathcal{D}(ud) &= (1/2)^2 / (1/3 * 2/3) = 9/8, \\ \mathcal{D}(du) &= 9/8, & \mathcal{D}(dd) &= (1/2)^2 / (2/3)^2 = 9/16. \end{aligned}$$

O processo RN é ilustrado na Fig.15.1 e podemos verificar a equ.(15.21) nela, tomando as esperanças adequadas. Incluindo o índice em \mathcal{D}_t tomaríamos a derivada até o instante $t < T$. Por exemplo para $t = 1$ temos duas trajetórias e as possíveis derivadas seriam $\frac{q_1}{p_1}, \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{p}_1}$, se os caminhos fossem $X_0 \rightarrow X_1, X_0 \rightarrow \tilde{X}_1$ respectivamente.

Na filtração $\mathcal{F}_{0\bar{1}}$ resulta a igualdade de $\mathcal{D}_1^{(0\bar{1})} = \frac{q_1}{p_1}$, pois

$$\mathcal{D}_1^{(0\bar{1})} = p_2 \frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} + \tilde{p}_2 \frac{q_1 \tilde{q}_2}{p_1 \tilde{p}_2} = \frac{q_1 q_2}{p_1} + \frac{q_1 \tilde{q}_2}{p_1} = q_1 \left(\frac{q_2 + \tilde{q}_2}{p_1} \right) = \frac{q_1}{p_1}.$$

Na filtração \mathcal{F}_{01} temos analogamente

$$\mathcal{D}_1^{(01)} = p_2 \frac{\tilde{q}_1 q_2}{\tilde{p}_1 p_2} + \tilde{p}_2 \frac{\tilde{q}_1 \tilde{q}_2}{\tilde{p}_1 \tilde{p}_2} = \frac{\tilde{q}_1 q_2}{\tilde{p}_1} + \frac{\tilde{q}_1 \tilde{q}_2}{\tilde{p}_1} = \tilde{q}_1 \left(\frac{q_2 + \tilde{q}_2}{\tilde{p}_1} \right) = \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{p}_1}.$$

Podemos dividir por q_i sem medo, porque se algum q_i se anular, o correspondente p_i também anular-se-a, pois as medidas \mathcal{P} e \mathcal{Q} são equivalentes.

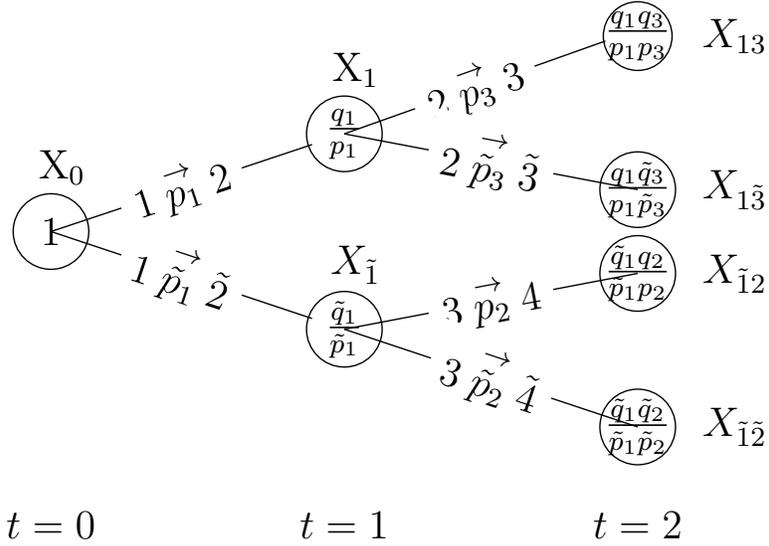


Figure 15.1: O processo \mathcal{D}_t ($\tilde{p}_i = 1 - p_i, \tilde{q}_i = 1 - q_i$)

Numa notação adaptado ao contínuo, podemos escrever para um processo especificado em $t = T$

$$\langle X_t | \mathcal{F}_0 \rangle_Q = \langle X_t | \mathcal{D}X_T | \mathcal{F}_0 \rangle_P$$

Para tempos $t < T$ a derivada \mathcal{D}_t deve substituir corretamente os p 's por q 's. Deve portanto valer a seguinte equação

$$\langle X_t | \mathcal{F}_s \rangle_Q = \mathcal{D}_s^{-1} \langle \mathcal{D}_t X_t | \mathcal{F}_s \rangle_P, \quad s < t \quad (15.22)$$

Para saber quanto vale $\langle X_t \rangle_Q$ calculamos $\langle \mathcal{D}_t X_t \rangle_P$. Se quisermos saber $\langle X_t | \mathcal{F}_s \rangle_Q$, devemos mudar a medida de s ate t , fornecido por $\mathcal{D}_t / \mathcal{D}_s$.

Vamos ver a mecanica da substituição em datalhe, primeiro na arvore!

$s = 0, t = 1$

$$\begin{aligned} \langle X_1 | \mathcal{F}_0 \rangle_Q &= X_1 q_1 + X_{\bar{1}} \tilde{q}_1 \\ \mathcal{D}_0^{-1} \langle \mathcal{D}_1 X_1 | \mathcal{F}_0 \rangle_P &= 1 [p_1 \frac{q_1}{p_1} X_1 + \tilde{p}_1 \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{p}_1} X_{\bar{1}}] = X_1 q_1 + X_{\bar{1}} \tilde{q}_1 \end{aligned} \quad (15.23)$$

$s = 1, t = 2$

$$\begin{aligned} \langle X_2 | \mathcal{F}_1 \rangle_Q &= X_{12} q_2 + X_{\bar{1}\bar{2}} \tilde{q}_2 \\ \mathcal{D}_1^{-1} \langle \mathcal{D}_2 X_2 | \mathcal{F}_1 \rangle_P &= \frac{p_1}{q_1} [\frac{q_1 q_2}{p_1 p_2} X_{12} + \frac{q_1 \tilde{q}_2}{p_1 \tilde{p}_2} X_{\bar{1}\bar{2}}] = X_{12} q_2 + X_{\bar{1}\bar{2}} \tilde{q}_2 \end{aligned} \quad (15.24)$$

Para provar a equ.(15.22) no contínuo vamos usar a função "indicatriz" $1_{\mathcal{A}}$ para um evento $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_s$:

$$1_{\mathcal{A}} = \begin{cases} 1, & \text{se o evento ocorre} \\ 0, & \text{se o evento não ocorre} \end{cases} \quad (15.25)$$

Simplificando a notação $\langle \cdot \rangle_P \equiv \langle \cdot \rangle \equiv \langle \cdot | \mathcal{F}_T \rangle$ verificamos, que

$$\begin{aligned} \left\langle 1_{\mathcal{A}} \frac{1}{\langle \mathcal{D} | \mathcal{F}_s \rangle} \langle X_t \mathcal{D} | \mathcal{F}_s \rangle \right\rangle_Q &= \left\langle \mathcal{D} 1_{\mathcal{A}} \frac{1}{\langle \mathcal{D} | \mathcal{F}_s \rangle} \langle X_t \mathcal{D} | \mathcal{F}_s \rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \langle \mathcal{D} | \mathcal{F}_s \rangle \frac{1_{\mathcal{A}}}{\langle \mathcal{D} | \mathcal{F}_s \rangle} \langle X_t \mathcal{D} | \mathcal{F}_s \rangle \right\rangle = \left\langle 1_{\mathcal{A}} \langle X_t \mathcal{D} | \mathcal{F}_s \rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \langle \mathcal{D} X_t 1_{\mathcal{A}} | \mathcal{F}_s \rangle \right\rangle = \left\langle \mathcal{D} X_t 1_{\mathcal{A}} | \mathcal{F}_s \right\rangle = \left\langle X_t 1_{\mathcal{A}} | \mathcal{F}_s \right\rangle_Q \\ &= \langle X_t 1_{\mathcal{A}} \rangle_Q = \left\langle \langle X_t | \mathcal{F}_s \rangle 1_{\mathcal{A}} \right\rangle_Q \end{aligned} \quad (15.26)$$

Usamos $\langle \cdot 1_{\mathcal{A}} \rangle = \langle \cdot 1_{\mathcal{A}} | \mathcal{F}_s \rangle$, pois de qualquer maneira \mathcal{A} é nulo fora de \mathcal{F}_s . Já que \mathcal{A} é arbitrário, segue-se a equ.(15.22).

16 Precificação via Martingales e Arbitragem

Já vimos que o conceito de arbitragem é uma chave para precificação de derivativos. Usámos este conceito no caso discreto para impor limites na probabilidade risco-neutra q e no preço de opções na seção 4. No contínuo o procedimento é analogo ao exposto naquela seção.

Por tratar de processos aleatórios, temos que reformular o nosso conceito de arbitragem das equ.(4.26) em termo de probabilidades. Pois não temos agora dois estados possíveis, que o ativo possa assumir, mas S_t pode assumir qualquer valor $S_t \geq 0$. Nesta situação voce poderia observar o mercado e verificar que o ativo assumiu um particular valor, que não viola a equ.(??). No entanto em outro instante o valor da ativo poderia sim violar esta equação. Nesta situação existe ou não a possibilidade de arbitragem?

Um portofolio é de arbitragem, se o seu valor hoje satisfizer

$$\Pi(0) \text{ for } \leq 0 \quad (16.1)$$

e no futuro:

1. possuir probabilidade nula de ter valor negativo

$$\text{Prob}_{\mathcal{P}}[\Pi(T) < 0] = 0 \quad (16.2)$$

2. possuir probabilidade não-nula de ter valor positivo:

$$\text{Prob}_{\mathcal{P}}[\Pi(T) > 0] > 0 \quad (16.3)$$

As condições equ.(16.1,16.3) implicam, que a esperança do portofolio no futuro seja positiva: $\langle \Pi(T) \rangle > 0$. Isto quer dizer, que custa nada para formar o portofolio e no futuro possuir um valor positivo. Ou seja: é uma maquina de fazer dinheiro de graça. Em nosso mercado ideal não admitimos esta possibilidade. Podemos agora enunciar o

Primeiro Teorema Fundamental

Um modelo não permite arbitragem, se e somente se existir uma medida de martingale risco-neutra \mathcal{Q} .

Que a existencia da medida \mathcal{Q} proibe arbitragem é facil de provar.

Vamos supor que o portofolio é de arbitragem satisfazendo portanto as equs.(16.1),(16.2) e (16.3). Mas é facil de ver, que a existencia da medida \mathcal{Q} força $\Pi(0) > 0$ contradizendo a equ.(16.1).

A equ.(16.3) afirma que $\langle \Pi(T) | \mathcal{F}_0 \rangle_{\mathcal{P}} > 0$. Devido a equivalencia das medidas \mathcal{Q} e \mathcal{P} , esta relação tambem vale para \mathcal{Q} :

$$\langle \Pi(T) | \mathcal{F}_0 \rangle_{\mathcal{Q}} > 0.$$

O portofolio deve descontar pela taxa r ⁵⁷, resultando em

$$\Pi(0) = e^{-rT} \langle \Pi(T) | \mathcal{F}_0 \rangle_{\mathcal{Q}} > 0. \quad (16.4)$$

Devido a equivalencia esta relação também vale para \mathcal{P} :

$$\langle \Pi(T) | \mathcal{F}_0 \rangle_{\mathcal{P}} > 0.$$

Violamos portanto a hipotese equ.(16.1) e a existencia de \mathcal{Q} proibe arbitragem⁵⁸. Num instante $0 \leq t \leq T$ temos portanto

$$\Pi(t) = e^{r(t-T)} \langle Z | \mathcal{F}_0 \rangle_{\mathcal{Q}} \quad (16.5)$$

e o portofolio $\tilde{\Pi}(t) = e^{-rt} \Pi(t)$ deve ser uma martingale sob a medida \mathcal{Q} para proibir arbitragem.

O reverso - se não existir uma medida \mathcal{Q} , então temos a possibilidade de arbitragem⁵⁹ - também é verdade, mas é bastante tecnica é não discutir-lamos⁶⁰.

Outra questão é se podemos sempre construir um portofolio replicante e auto-financiante em termo dos ativos subjacentes⁶¹. Em caso afirmativo o modelo é chamado de **completo**. A resposta é dada pelo **Segundo Teorema Fundamental**

Um modelo é completo, sse a medida risco-neutra \mathcal{Q} for unica

Veja [23] pg.138 para a prova.

Vamos portanto impor, que a opção descontada \tilde{f}_t seja uma martingale sob a medida \mathcal{Q} . Também é claro, que o valor do portofolio replicante deve

⁵⁷No expoente e^{-rT} figura necessariamente a taxa livre de risco r e não alguma taxa \hat{r} diferente. Pois se $\hat{r} > r$, implicando que o derivativo correspondente $\hat{f} < f$, pedimos dinheiro emprestado ao banco a taxa r . Investimos imediatamente na compra de um portofolio \hat{f} , que crescerá a uma taxa maior resultando num ganho positivo em $t = T$. Temos portanto uma arbitragem. Por outro lado, se $\hat{r} < r$, vendemos o portofolio a curta e investimos a grana num banco. Novamente temos uma arbitragem.

⁵⁸Supusemos aqui, que a estrategia seja *limitada*, proibindo apostas tipo *dobrar o investimento inicial*. Ou seja proibimos que o estrategista possa assumir dividas ilimitadas. Veja [23], cap.10 e [33], pg. 253 para detalhes.

⁵⁹Na seção 4 provamos este resultado no caso discreto: se q estiver fora do intervalo $[0, 1]$, ou seja que não existe probabilidade risco-neutra q , então existe arbitragem .

⁶⁰Para mais detalhes veja [23].

⁶¹Na seção 8.5 vimos um mercado incompleto.

ser unico para evitar arbitragem. Pois suponha que existe um portofolio no tempo $0 \leq t \leq T$ com preço diferente de f_t . Então compramos o de menor preço, vendemos aquele com preço maior e embolsamos a diferença. Como os portofolios são auto-financiantes, não entra nem sai grana até a maturação. O vendedor executa a estratégia $[\phi_t, \psi_t]$ baseada em martingales e pode satisfazer sem custo as suas obrigações, usando o opção comprada para isto.

16.1 Precificando pela formula de Feynman-Kac

Sabendo que existe uma medida risco-neutra \mathcal{Q} sob a qual $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ é uma martingale, podemos agora obter o preço de um derivativo com retorno Z maturando em $t = T$. Para opções Europeias *call* e *put* o retorno é $Z = (S_T - K)_+, (K - S_T)_+$ respectivamente.

Considere então um portofolio replicante, que no instante T vale $\Pi(T) = Z$. Tanto \tilde{S}_t como \tilde{f}_t são martingales sob a medida risco-neutra \mathcal{Q} com S_t evoluindo conforme a equ.(15.5): $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$. Portanto pela equ.(14.21) f_t satisfaz a equação diferencial (14.22)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - f_t r = 0, \quad (16.6)$$

cujas solução é fornecida pela formula de Feynman-Kac

$$f(s, t) = e^{-r(T-t)} \langle \Phi(S_T) | \mathcal{F}_t \rangle_{S_t=s} \quad (16.7)$$

com $\Phi(S_T) = Z$. Para calcular a esperança, que figura nesta equação, precisamos de $S(T)$. Para obtê-lo evoluindo a partir de $S(t) = s$ com $0 \leq t \leq T$, integramos a equ.(15.5) resultando

$$S(u) = s e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(u-t) + \sigma(\tilde{W}_u - \tilde{W}_t)}. \quad (16.8)$$

No instante T obtemos

$$S_T = s e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma \tilde{W}_{T-t}}. \quad (16.9)$$

Substituindo S_T na equação para $f(s, t)$ resulta para uma opção *call* com $Z = (S_T - K)_+$

$$\begin{aligned} c(s, t) &= e^{-r\tau} \left\langle [s e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma \tilde{W}_\tau} - K]_+ \right\rangle_{\mathcal{Q}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{w} e^{-\tilde{w}^2/2\tau} [s e^{\sigma\tilde{w} - \frac{1}{2}\sigma^2\tau} - e^{-r\tau} K]_+ \end{aligned} \quad (16.10)$$

com $\tau = T - t$. A condição $[]_+$ fornece o limite $\tilde{w}_1 = -\frac{\ln(s/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma}$ e obtemos com $y = (\tilde{w} - \sigma\tau)/\sqrt{\tau}$ o valor da opção *call*

$$\begin{aligned} c(s, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \left\{ \int_{\tilde{w}_1}^{\infty} s e^{-(\tilde{w} - \sigma\tau)^2/2\tau} d\tilde{w} - K e^{-r\tau} \int_{\tilde{w}_1}^{\infty} e^{-\tilde{w}^2/2\tau} d\tilde{w} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ s \int_{y_+}^{\infty} dy e^{-y^2/2} - K e^{-r\tau} \int_{y_-}^{\infty} dy e^{-y^2/2} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ s \int_{-\infty}^{d_+} dy e^{-y^2/2} - K e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{d_-} dy e^{-y^2/2} \right\}. \end{aligned} \quad (16.11)$$

Introduzindo a distribuição normal cumulativa com argumentos

$$d_{\pm} = \frac{\ln(s/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}. \quad (16.12)$$

obtemos finalmente

$$c(s, t) = s\mathcal{N}(d_+) - K e^{-r\tau}\mathcal{N}(d_-), \quad (16.13)$$

que é igual a equ.(10.24). Analogamente para *put* temos

$$p(s, t) = -c(-d_+, -d_-).$$

Exemplo 16.1

Suponha que o retorno de um derivativo X seja

$$\Phi(X) = \begin{cases} S^n(T), & \text{se } S(T) > K \\ 0, & \text{se } S(T) \leq K \end{cases} \quad (16.14)$$

com n inteiro.

Da equ.(16.9) temos extraído $\sqrt{\tau}$ de \tilde{W} :

$$S_T^n = s^n e^{n(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + n\sigma\sqrt{\tau}w}.$$

Substituindo como na equ.(16.10) resulta para este derivativo

$$f_n(s, t) = e^{-r\tau} \left\langle [s^n e^{n(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + n\sigma\sqrt{\tau}w}]_{S_T > K} \right\rangle_Q$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{s^n e^{((n-1)r - n\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tilde{w}_1}^{\infty} d\tilde{w} e^{-\tilde{w}^2/2 + n\sigma\sqrt{\tau}w} \\
&= \frac{s^n e^{(n-1)r\tau + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tilde{w}_1}^{\infty} d\tilde{w} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{w} - n\sigma\sqrt{\tau})^2}
\end{aligned}$$

com $\tilde{w}_1 = \frac{\ln(K/s^n) - n(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{n\sigma\sqrt{\tau}}$. O limite para a variável $\tilde{w} - n\sigma\sqrt{\tau}$ é

$$\tilde{w}_1 - n\sigma\sqrt{\tau} = -\frac{\ln(s/k) + (r + (n - \frac{1}{2})\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

com $k = K^{1/n}$. Fazendo a integral resulta

$$f_n(s, t) = s^n e^{(n-1)r\tau + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2\tau} \mathcal{N}(d) \quad (16.15)$$

com

$$d = \frac{\ln(s/k) + (r + (n - \frac{1}{2})\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}. \quad (16.16)$$

16.2 A equação de Black-Scholes e a estratégia auto-financiante

Já vimos, que f_t deve satisfazer uma equação diferencial com a solução (16.13), se tanto a opção descontada \tilde{f}_t como o ativo descontado \tilde{S}_t são martingales sob medida \mathcal{Q} :

$$\tilde{f}_t \equiv B_t^{-1} f_t = e^{-rt} f_t \quad \text{e} \quad \tilde{S}_t \equiv B_t^{-1} S_t = e^{-rt} S_t.$$

É instrutivo obter as eqs.(14.6,14.8) mais diretamente. Diferenciando \tilde{f}_t temos

$$d(B^{-1}f) = d(e^{-rt}f) = e^{-rt} \left[\frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial f}{\partial t} dt \right] - f_t r e^{-rt} dt.$$

Com o ativo obdecendo

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t, \quad d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t$$

resulta

$$d(B^{-1}f) = B^{-1} \left[\frac{\partial f}{\partial S} (rS dt + \sigma S d\tilde{W}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt \right] - f r e^{-rt} dt$$

$$= B^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - fr \right) dt + \sigma B^{-1} S \frac{\partial f}{\partial S} d\tilde{W}. \quad (16.17)$$

Zerando o termo $\sim dt$ para que $B^{-1}f$ seja uma martingale resulta a equação de Black-Scholes-Merton (BSM)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0. \quad (16.18)$$

O termo aleatorio é $df_t = \sigma B_t^{-1} S_t \frac{\partial f}{\partial S} d\tilde{W}_t = \frac{\partial f}{\partial S} \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t = \frac{\partial f}{\partial S} d\tilde{S}_t$ ou seja⁶²

$$d\tilde{f}_t = \frac{\partial f}{\partial S} d\tilde{S}_t. \quad (16.19)$$

Integrando esta equação com a condição inicial \tilde{f}_0 resulta $\tilde{f}_t = \tilde{f}_0 + \int_0^t \phi_{t'} d\tilde{S}_{t'}$. Podemos portanto escrever o valor da opção em $t = 0$ como

$$\begin{aligned} f_0 &= f_t e^{-rt} - \int_0^t e^{-rt'} \phi_{t'} (dS_{t'} - rS_{t'} dt') \\ &= f_t e^{-rt} - \int_0^t e^{-rt'} \sigma \phi_{t'} S_{t'} d\tilde{W}_{t'}. \end{aligned} \quad (16.20)$$

Vamos mostrar, que deve valer

$$\phi_t = \frac{\partial f}{\partial S}. \quad (16.21)$$

para que o portofolio seja auto-financiante. De fato diferenciando $f_t = B_t \tilde{f}_t$ temos⁶³ $df_t = B_t d\tilde{f}_t + \tilde{f}_t dB_t$. Inserindo $d\tilde{f}_t = \phi_t d\tilde{S}_t$ e $\tilde{f} = \psi_t + \phi_t \tilde{S}_t$ resulta

$$df_t = B_t \phi_t d\tilde{S}_t + \tilde{f}_t dB_t = B_t \phi_t d\tilde{S}_t + (\psi_t + \phi_t \tilde{S}_t) dB_t$$

⁶²Já que tanto \tilde{f}_t como \tilde{S}_t são \mathcal{Q} -martingales, o *teorema de representação de martingales* garante, que existe um processo previsível ϕ_t satisfazendo $d\tilde{f}_t = \phi_t d\tilde{S}_t$. Como assim? Os dois processos são martingales sob a mesma medida, portanto não tem drift, a unica propriedade que os diferencia é a amplitude de cada processo: eles diferem somente pela volatilidade e na verdade um é um processo re-escalado do outro. Podemos portanto em cada instante definir um processo ϕ_i , que faz este re-escalamento. Para mais detalhes veja [30, 33]. O teorema de representação de martingales mostra, que **qualquer martingale é algum multiplo**, eventualmente dependendo do tempo, de um **processo de Wiener!**

⁶³Já que B_t não é aleatório, σ_B na equ.(13.10) é nulo.

$$\begin{aligned}
&= \phi_t(B_t d\tilde{S}_t + \tilde{S}_t dB_t) + \psi_t dB_t \\
&= \phi_t d(B_t \tilde{S}_t) + \psi_t dB_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t
\end{aligned}$$

mostrando portanto, que o portfólio muda somente devido a variação de S_t e B_t .

Pouco adianta dispor da solução equ.(16.13) da equação BSM, se não soubermos executar um *hedge* salvando-nos de possíveis perdas. Generalizemos então a nossa **estratégia auto-financiante** do caso discreto, apresentada no capítulo 8.3.3, para o contínuo. Para isto formamos um portfólio Π_t , que conterá:

1. Uma quantidade ϕ de ativos S_t , que obedecem a equ.(15.5):

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t.$$

O valor descontado $\tilde{S}_t = B_t^{-1} S_t$ é uma martingale sob a medida risco-neutra \mathcal{Q} .

2. Uma quantidade ψ de títulos B_t obedecendo

$$dB_t = rB_t dt.$$

O nosso portfólio deve replicar a opção com preço f_t dado pela equ.(16.13) e portanto devemos ter num instante t

$$\Pi_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = f_t. \quad (16.22)$$

Vamos então executar a seguinte estratégia de *hedging* ilustrada pela venda de uma opção vanilla.

1. Nos instantes $t = 0$ recebemos $f(S_0, 0)$ ao vender a opção e o nosso portfólio vale $\Pi_0 = f(S_0, 0)$. Devemos possuir $\phi = \frac{\partial c}{\partial S}(S_0, 0)$ unidades do ativo e investir simultaneamente o restante em títulos para render juros.
2. No instante $0 < t \leq T$ devemos possuir $\phi = \frac{\partial c}{\partial S}(S_t, t)$ unidades do ativo e investir simultaneamente o restante em títulos para render juros. Fazendo isto o nosso portfólio vale

$$\Pi_t = f_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t \quad (16.23)$$

ou seja o portofolio **replicante** deve conter

$$\begin{aligned}\phi_t &= \frac{\partial f}{\partial S}(S_t, t) && \text{unidades do ativo} \\ \psi_t &= (f_t - \frac{\partial f}{\partial S}(S_t, t)S_t)/B_t && \text{unidades de titulos} \quad (16.24)\end{aligned}$$

valendo f_t por construção ou seja é replicante para qualquer t . O portofolio muda somente devido a mudanças de S_t e B_t . O *hedging* altera somente a **proporção relativa do ativo e do titulo!**

3. Na maturação $t = T$ temos usando a equ.(16.13)

$$\begin{aligned}[\phi_T, \psi_T] &= \mathcal{N}\left(d_{\pm}(\ln(S_T/K)/(0))\right) = \mathcal{N}(\pm\infty) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } S_T > K \text{ (ITM)} \\ 0, & \text{se } S_T < K \text{ (OTM)}. \end{cases} \quad (16.25)\end{aligned}$$

Portanto o portofolio replica o retorno, satisfazendo

$$\Pi_T = f_T = \phi_T S_T + \psi_T B_T = \begin{cases} (S_T - K)_+ & \text{para call} \\ (K - S_T)_+ & \text{para put} \end{cases} \quad (16.26)$$

É claro, que este procedimento funciona para qualquer retorno dependendo de um só ativo subjacente - o modelo é completo neste sentido.

Devemos executar este processo de *hedging*, ou seja ajustar a relação entre a quantidade ϕ_t de ativos e ψ_t de titulos continuamente. Na pratica isto é impossivel, mas podemos fazer um *hedge* em intervalos pequenos. Porem é preciso lembrar que um *hedge* envolve custos: encontrar ativos adequados para comprar e curtar!

Nota Chamamos atenção para uma diferença importante em relação ao caso discreto.

1. Em geral ϕ_t é dependente do tempo e o nosso *hedge* só funciona durante um tempo infinitesimal dt .
2. O valor a ser inserido nas equ.(16.24) pode se qualquer um com $0 \leq S_t \leq \infty$. Como assim, se supusemos que o ativo deve obdecer a equação $dS/S = \mu dt + \sigma dW$!?

Lembre que a precificação é independente da probabilidade governando a evolução de S_t e o teorema de Girsanov garante a existencia de medida \mathcal{Q} e portanto na equ.(16.13) só aparecem r e σ . O valor de S

que aparece nesta equação não restringe S ter sido obtido por alguma equação de evolução, mas pode ser qualquer valor $0 \leq S_t \leq \infty$. No entanto é crucial usar o valor "correto" de σ !

Exemplo 16.1: Autofinanciando e derivando um produto

Podemos também verificar que f_t é auto-financiante procedendo da seguinte maneira.

$$df = d(\phi_t S_t + \psi_t B_t) = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t + S_t d\phi_t + B_t d\psi_t. \quad (16.27)$$

e para ser auto-financiante é preciso que

$$A = S_t d\phi_t + B_t d\psi_t = 0. \quad (16.28)$$

De fato derivando $\psi_t = \frac{f_t - \phi_t S_t}{B_t}$ resulta

$$d\psi_t = -\frac{f_t - \phi_t S_t}{B_t^2} dB_t + \frac{df_t - S_t d\phi_t - \phi_t dS_t}{B_t}.$$

Inserindo esta derivada em A e usando $dB_t = rB_t$ obtemos

$$\begin{aligned} A &= S_t d\phi_t - \frac{f_t - \phi_t S_t}{B_t} dB_t + df_t - S_t d\phi_t - \phi_t dS_t \\ &= -r(f_t - \phi_t S_t)dt + df_t - \phi_t dS_t = (df_t - r f_t dt) - \phi(dS_t - S_t dt) \\ &= d(e^{-rt} f_t) - \phi d(e^{-rt} S_t) = d\tilde{f}_t - \phi d\tilde{S}_t. \end{aligned}$$

Portanto escolhendo em consonância com a equ.(16.19): $d\tilde{f} = \phi d\tilde{S}_t$ temos $A = 0$ e o portofolio é de fato auto-financiante.

Exercício 16.1

Supondo que o ativo siga um processo de Wiener $S_t = W_t$ e que $r = 0$, mostre que os seguintes portofolios $f_t = \phi_t S_t + \psi_t B_0$ são auto-financiantes[15], satisfazendo portanto a equ.(??).

1. $\phi_t = \psi_t = 1$
2. $\phi_t = 2W_t, \psi_t = -W_t^2 - t$

16.3 Densidade de probabilidade risco-neutra no modelo BSM

Podemos reescrever o valor da $c(S, t)$ introduzindo a **probabilidade risco-neutra** p_Q do modelo BSM. Para expor o fator $c(S_T, T) = (S_T - K)_+$, vamos trocar a variável de integração \tilde{w} na equ.(16.10) por

$$S_T = se^{\sigma\tilde{w} + \mu\tau} \rightarrow \tilde{w} = (\ln \frac{S_T}{s} - \mu\tau)/\sigma$$

com $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$. Com $dS_T = S_T\sigma d\tilde{w}$ resulta para $c(S, \tau)$ da equ.(16.10)

$$c(S, t) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty p_Q(S_T, T|S, t)c(S_T, T)dS_T, \quad (16.29)$$

com a probabilidade risco-neutra p_Q dada por

$$p_Q(S_T, T|S, t) = \frac{e^{-\left(\ln \frac{S_T}{S} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\right)^2 / (2\sigma^2\tau)}}{\sigma S_T \sqrt{2\pi\tau}}. \quad (16.30)$$

$p_Q(S_T, T|S, t)$ é a função de Green equ.(C.10) da equação de difusão em outra roupagem. Também já vimos esta distribuição na equ.(10.15).

$p_Q(S_T, T|S, t)$ é a densidade de probabilidade de transição risco-neutra para o valor terminal S_T em $t = T$ dado que no instante t o preço era S . Ou seja, sabendo o valor do ativo hoje, qual seria a probabilidade de assumir o valor S_T na maturação. Dado que as transições de um certo S para qualquer um dos possíveis valores de S_T são eventos exclusivos e completos temos de fato como na equ.(10.2)

$$\int_0^\infty p_Q(S_T, T|S, t)dS_T = 1. \quad (16.31)$$

Para $S = S_0, t = 0$ podemos escrever a equ.(16.29) da seguinte maneira

$$c(S_0, K, T)e^{rT} = \int_K^\infty dS_T p_Q(S_T, T|S_0, 0)(S_T - K). \quad (16.32)$$

Derivando duas vezes em relação a K resulta

$$e^{rT} \frac{\partial^2 c}{\partial K^2} = p_Q(S_T, T|S_0, 0) \geq 0, \quad (16.33)$$

que na verdade é uma relação independente de modelos para S , pois podemos defini-la pelo equ.(16.32). A mesma relação vale para uma opção *put*. Podemos e.g. obter a derivada segunda diretamente de dados do mercado através de uma opção *call* borboleta em torno de K .

Se por acaso obtivemos o preço de uma opção vanilla por meio de algum modelo, podemos testa-lo calculando $p_Q(S_T, T|S_0, 0)$ pela segunda derivada. Se a densidade for nula em algumas regiões importantes para a precificação, então devemos descartar este modelo. Se a densidade for negativa em algumas regiões, então o modelo permite arbitragem.

16.4 Parametros dependentes do tempo

Raramente os parametros r, σ são constantes, mas dependem do tempo. Suponhamos então que $r_t \equiv r(t)$ e $\sigma_t \equiv \sigma(t)$ sejam processos adaptados e as equações para o título e o ativo sejam

$$\begin{aligned} dB_t &= r_t B_t dt \\ dS_t &= S_t(r_t dt + \sigma_t d\tilde{W}_t) \end{aligned} \quad (16.34)$$

com \tilde{W}_t Wiener sob a medida risco-neutra \mathcal{Q} . A equ.(13.52) fornece as soluções

$$\begin{aligned} B_t &= B_0 e^{\int_0^t ds r_s} \\ S_t &= S_0 e^{\int_0^t ds (r_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2) + \int_0^t ds \sigma_s d\tilde{W}_s} \end{aligned} \quad (16.35)$$

Conforme a equ.(14.14) o preço de um derivativo com retorno Z é

$$f_t = \langle e^{-\int_t^T r_s ds} Z | \mathcal{F}_t \rangle_Q. \quad (16.36)$$

Para precificar um derivativo usamos a equ.(16.35) com a condição inicial $S(t) = s$

$$S_T = s e^{\int_t^T d\tau (r_\tau - \frac{1}{2}\sigma_\tau^2) + \int_t^T d\tau \sigma_\tau d\tilde{W}_\tau}.$$

Acabamos de relegar τ a mera variável de integração. S_T depende somente das seguintes integrais:

$$r_t^T = \int_t^T d\tau r(\tau), \quad \sigma_t^T = \int_t^T d\tau \sigma^2(\tau), \quad (16.37)$$

pois quanto ao termo aleatorio note o encadeamento seguinte:

$$\left(\int_t^T d\tau \sigma_\tau d\tilde{W}_\tau \right)^2 = \int_t^T d\tau \sigma_\tau d\tilde{W}_\tau \int_t^T d\tau' \sigma_{\tau'} d\tilde{W}'_{\tau'} \rightarrow \int_t^T d\tau \sigma_\tau^2$$

Um derivativo $f(S_T, t)$ dependerá portanto tambem somente de r_t^T e σ_t^T .

No entanto ao computar a esperança $\langle \cdot \rangle_Q$, usamos a densidade de probabilidade do processo de Wiener. Nela τ aparece isoladamente em $e^{-x^2/2\tau}$. Para sanar este problema vamos usar o processo $X_t = \sigma \tilde{W}_t$. Isto é equivalente a trocar a exponencial acima por $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2\tau}}$, que se torna $e^{-\frac{x^2}{2\sigma_t^T}}$.

Lembrando a equ.(14.17) usamos a equ.(16.10) agora com parametros dependendo de t :

$$\begin{aligned} c(s, t) &= \frac{e^{-r_t^T}}{\sqrt{2\pi\sigma_t^T}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/2\sigma_t^T} [s e^{x+r_t^T - \frac{1}{2}\sigma_t^T} - K]_+ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^T}} \int_{-\infty}^{\infty} dx [s e^{-(x-\sigma_t^T)^2/2\sigma_t^T} - e^{-r_t^T} K]_+, \end{aligned} \quad (16.38)$$

que é identico a equ(16.11) com as substituições

$$r\tau, \sigma^2\tau \rightarrow r_t^T, \sigma_t^T.$$

Podemos portanto faze-las diretamente na equ.(16.13) para obter

$$c(s, t) = s\mathcal{N}(\tilde{d}_+) - K e^{-\int_t^T d\tau r_\tau} \mathcal{N}(\tilde{d}_-) \quad (16.39)$$

com

$$\tilde{d}_\pm(s) = \frac{\ln(\frac{s}{K}) + \int_t^T d\tau (r(\tau) \pm \frac{1}{2}\sigma^2(\tau))}{\sqrt{\int_t^T d\tau \sigma^2(\tau)}}. \quad (16.40)$$

Para outra dedução veja apendice D.

Exercicio 16.2

Para obter a formula equ.(16.39) introduza as seguintes variaveis

$$\tilde{S}(t) = S(t)e^{-a(t)}, \quad \tilde{f}(\tilde{S}, t) = f(S, t)e^{-a(t)}, \quad \tau = b(t).$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}|_S &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{f}(S e^{-a(t)}, t) e^{a(t)} \right) |_S = \left(\frac{\partial \tilde{f}(\tilde{S}, t)}{\partial t} - \dot{a} S \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{S}} \right) e^{a(t)} + \dot{b} \tilde{f} \\ S \frac{\partial f}{\partial S} &= \tilde{S} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{S}}\end{aligned}$$

com $\dot{a}(t) = da(t)/dt$ etc. Substituindo as derivadas na equ.(16.18) obtenha

$$\begin{aligned}\dot{b}(t) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} + (r(t) + \dot{a}(t)) \tilde{S}(t) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{S}} \\ + \frac{1}{2} \sigma^2(t) \tilde{S}^2(t) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \tilde{S}^2} - (r(t) + \dot{a}(t)) \tilde{f} = 0.\end{aligned}\quad (16.41)$$

Escolhendo

$$a(t) = \int_t^T d\tau r(\tau) = r_t^T, \quad b(t) = \int_t^T d\tau \sigma^2(\tau) = \sigma_t^T$$

resulta

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \tilde{S}^2(t) \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \tilde{S}^2} = 0, \quad (16.42)$$

cuja solução é $\tilde{f}(\tilde{S}, \tau)$. Retornando as variáveis originais verifique que

$$f(S, t) = e^{\int_t^T d\tau r(\tau)} \tilde{f}(S(t) e^{-a(t)}, b(t)) \quad (16.43)$$

reproduz a equ.(16.39).

17 A equação de Black-Scholes II

Vamos inserir a equação BSM no contexto histórico e apresentar mais uma dedução desta equação. A custo de algumas repetições esta seção pode ser digerida sem ter passado pela seção 16. Já vimos no caso discreto, que não é necessário conhecer o valor μ do arrasto do ativo para a precificação de opções. Como fica explícito nesta seção, isto também é verdade no contínuo.

Em 1973 Black, Scholes e Merton[25] mostraram, que é possível obter uma equação diferencial para um derivativo f_t dependendo de somente um ativo, cuja solução é a equ.(16.13). A equação indica ainda a estratégia a ser

seguida para um *hedge* perfeito, fornecendo e.g. o valor de ϕ da equ.(16.19). Os trabalhos de Black-Scholes e Merton geraram uma explosão [26] no campo de derivativos. Lá pelo ano 2007 da ordem de um quadrilhão de dolares por ano em derivativos foram negociados. Ajustando pela inflação, isto é 10 vezes mais do que o valor de todos os bens manufaturados durante o século passado. Por seu trabalho pioneiro Scholes e Merton receberam o prêmio Nobel de Economia em 1997, mas Black já tinha falecido nesta data.

O modelo teve tanto sucesso, que foi aplicado desastrosamente também em situações para os quais não foi inventado⁶⁴.

Para opções *call* e *put* Europeias as formulas analíticas para o preço das opções dependem apenas de um parametro desconhecido: a volatilidade σ . O modelo é muito usado para inferir a volatilidade a partir de observáveis accesíveis S_0, K, T, r como veremos no captítulo 21. Para obter a equação de Black-Scholes-Merton, vamos lembrar as propriedades, que o mercado deve ter.

1. O mercado é liquido e fundo. Liquido quer dizer: sempre existem opções para comprar e vender. Fundo quer dizer: existe uma taxa livre de risco r constante e acessível para todos para negociar qualquer quantidade de grana.
2. Não há possibilidades de arbitragens sem risco, pois a solução da equação BSM é unica.
3. A venda *curta* é permitida.
4. Não há custo envolvido nas transações e eventuais dividendos são pagos continuamente.

Considere um certo derivativo, cujo preço f seja uma função contínua do preço do ativo subjacente S e do tempo t : $f(S, t)$, mas independe de outros aspectos do mercado como e.g. demanda e oferta. A opção $f(S, t)$ é portanto uma função de *duas* variaveis independentes e S não é necessariamente igual a um S_t específico! A dependencia no tempo t permite, que a opção possua *valor temporal*. Quanto mais distante do instante de maturação T , mais uma opção *call* valerá para o mesmo valor de S . Pois assim possibilita ganhos

⁶⁴Num mercado real ajustes contínuos não são possíveis, o que também implica, que o modelo é vulnerável a saltos abruptos do mercado como na Segunda Feira Negra de 1987 [21].

praticamente ilimitados, se o ativo subir acentuadamente. Se o ativo baixar, a perda é limitado ao valor do premio. No instante $t = T$ a opção assume seus valores "intrinsecos" e não terá mais valor temporal.

Como flutuações de f são acoplados a flutuações de S , isto permite compor um portofolio sem risco replicando o derivativo. De fato derivando $f(S, t)$ resulta

$$df_t = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Suponha que o ativo obedeça um processo de Wiener geométrico como na seção 15

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (17.1)$$

Inserindo dS_t na equação para df_t e usando o lemma de Ito equ.(13.4) para converter $dW_t^2 \rightarrow dt$ resulta

$$\begin{aligned} df_t &= \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 (dW)^2 + \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ &= \left(\sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S} \right) dW_t + \left(\mu S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Por outro lado o portofolio $f_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$ precisa ser auto-financiante

$$df_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t. \quad (17.3)$$

Com $dB_t = r B_t dt$ e a equ.(17.1) para dS_t resulta

$$df_t = \sigma S_t \phi_t dW_t + (\mu S_t \phi_t + r \psi_t B_t) dt.$$

Inserindo $\psi_t B_t = f_t - \phi_t S_t$ obtemos⁶⁵

$$df_t = \sigma S_t \phi_t dW_t + \left(r f_t + (\mu - r) S_t \phi_t \right) dt. \quad (17.4)$$

Comparando com a equ.(17.2) resulta igualando os termos em dW_t

$$\phi_t = \frac{\partial f}{\partial S}, \quad (17.5)$$

⁶⁵Note que efetivamente usamos o valor de f_t no instante t para calcular o valor de $f_{t+\delta t}$ no instante $t + \delta t$.

relação, que identifica explicitamente a função adaptado da equ.(??). Igualando os termos em dt

$$\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = r f_t + (\mu - r) S \frac{\partial f}{\partial S}. \quad (17.6)$$

Já que os termos $\sim \mu$ cancelam, obtemos finalmente

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r f, \quad (17.7)$$

que é a equação de **Black-Scholes-Merton**.

Note que a equação vale para **qualquer opção** contendo um só ativo subjacente. Obteremos formulas fechadas para opções vanilla, cujos retornos são lineares em S , na proxima seção.

A equação de BSM permite calcular o valor de opções conhecendo a evolução do ativo subjacente $S(t)$, a equ.(17.1) em nosso caso. Ou seja ela fornece uma precificação **relativa!** Para obter a solução desta equação a derivadas parciais, necessitamos de condições iniciais (ou finais) e de contorno. Como vimos na seção 14 no caso de um dominio semi-infinito $0 \leq S < \infty$ a integrabilidade da condição final é suficiente. Num dominio finito $0 \leq S < L$ é necessario especificar condições em $S = 0$ e $S = L$ - veja seção E.

Ja vimos, que a solução é dada pela equ.(16.13). Relegamos ao apendice B a verificação explicita, que a solução acima satisfaz a equação BSM e ao apendice C a solução "explicita", transformando-a na equação de difusão, metodo este, que foi usado por Black-Scholes.

Introduzindo a notação

$$df = \mu_f f dt + \sigma_f f dW_t, \quad (17.8)$$

a equ.(17.2) informa que

$$\mu_f = \frac{1}{f} \left(\mu S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right), \quad \sigma_f = \frac{\sigma S_t \phi_t}{f}, \quad (17.9)$$

onde μ_f é o arrasto da opção e σ_f é a volatilidade da opção. Da equ.(17.6) resulta

$$\frac{\mu_f - r}{\sigma_f} = \frac{\mu - r}{\sigma}. \quad (17.10)$$

As razões acima são chamadas de *Sharpe ratios*: para impedir arbitragem as razões de Sharpe do ativo e da opção devem ser iguais.

No numerador de $\frac{\mu-r}{\sigma}$ temos $\mu - r$, onde μ é retorno do ativo acima do retorno do título sem risco r e no denominador temos a volatilidade σ , que é uma medida do risco. Assim a razão de Sharpe é o retorno extra por unidade de risco, também chamado de *o preço de risco do mercado*. Note, que a razão de Sharpe **não** é adimensional, mas possui dimensão

$$\dim[\lambda] = 1/\sqrt{t}$$

e é portanto medido em $\%/ \sqrt{t}$.

Costuma-se usar como unidade temporal o valor de um ano, pois assim o valor $\lambda = 1$ separa ativos preferíveis pelos investidores ($\lambda > 1$) dos outros com $\lambda < 1$. Para gerar razões de Sharpe mais altos, um trader deve procurar ativos com retorno μ mais altos e/ou diminuir os seus riscos σ .

Exercício 17.1.

Mostre que a equação de BSM com S pagando dividendos a taxa d é

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - d)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (17.11)$$

Exercício 17.2 (Volatilidade local).

Se substituirmos a equ.(17.1) por

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_{loc}(t, S_t) S_t dW_t \quad (17.12)$$

nada muda na dedução da equação de BSM. Verifique que obteríamos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \sigma_{loc}(t, S)^2 \frac{S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf. \quad (17.13)$$

É claro que em geral não temos uma solução exata e será necessário recorrer a aproximações numéricas. A *volatilidade local* dependendo de t e $S(t)$ será tratado na seção 21.

Exercício 17.3.

A equação BSM é uma equação diferencial determinística para f_t . No entanto f_t é uma variável aleatória como já foi evidenciado na Fig.12.1. Isto é uma contradição?

17.1 Comentários sobre a equação de BSM

Seguem-se aqui alguns comentários sobre a equação de BSM.

- O modelo BS não permite arbitragem pelo *Primeiro Teorema*, pois existe uma medida risco-neutra.
- O modelo BS é completo pelo *Segundo Teorema*: podemos replicar qualquer opção $f(S, t)$, pois a medida risco-neutra é única.
- Particularmente na area financeira vale a afirmação: "Todos os modelos estão errados, mas alguns são uteis". Pode até ser surpreendente, que o modelo de Black-Scholes depois de 50 anos apos sua introdução ainda seja intensamente usado para precificar opções. Isto a despeito de seus defeitos como distribuições log-normais, volatilidade constante. É que o modelo possui uma solução exata, que pode ser calculada rapidamente para milhares de opções. Modelos mais complicados podem até descrever melhor a dinamica do mercado, mas necessitam computações complexas como simulações Monte Carlo. Portanto existe uma constante procura para obter um equilibrio entre precisão e velocidade para gerar resultados.
- Das eqs.(17.5,B.6) sabemos que a quantidade de ativos do portofolio para uma opção *call* é

$$\phi_t = \frac{\partial c}{\partial S} = \mathcal{N}(d_+)$$

com $0 \leq \phi_t \leq 1$. O valor do titulo para o *hedging* é

$$B_t \psi_t = c_t - \phi_t S_t = -K e^{r(T-t)} \mathcal{N}(d_-),$$

que é sempre negativo para uma opção *call*, mas limitado por K . Para um *put* temos $-1 \leq \phi_t \leq 0$.

Como na maturação $c(S_T, T) = (S_T - K)_+$

$$\Delta = \begin{cases} 1, & \text{se } S_T > K \text{ (ITM)} \\ 0, & \text{se } S_T < K \text{ (OTM)}, \end{cases} \quad (17.14)$$

o valor de Δ é usado pelos investidores para aquilatar a probabilidade da opção ser exercida.

- Dependencia temporal.
Para $T \rightarrow 0$ a opção tende ao seu valor intrinseco $(S_T - K)_+$ para um *call*. Para $T \rightarrow \infty$ *call* $\rightarrow S$ e para valores intermediarios temos curvas do tipo mostrado na Fig.(6.2).

- Como é que a opção varia com a volatilidade? Conforme σ aumenta, será que o preço da opção diminui, porque o ativo é de maior risco ou será que o preço aumenta, porque o ativo tem mais chances de subir? Qual é a sua intuição?

- O que acontece quando a volatilidade $\sigma \rightarrow 0$? Já que o ativo é sem risco, o seu preço crescerá como $S_0 e^{rT}$ e o retorno de uma opção *call* será $(S_0 e^{rT} - K)_+$ na maturação em $t = T$. Descontando temos o seu valor em $t = 0$ como

$$e^{-rT}(S_0 e^{rT} - K)_+ = (S_0 - K e^{-rT})_+.$$

A equação de BSM dá o mesmo resultado. Pois em $t = 0$ para $\sigma = 0$ vale

$$d_+ = d_- \sim \frac{\ln(e^{rT} S_0 / K)}{\sigma \sqrt{T}}$$

e temos

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} [\mathcal{N}(d_+), \mathcal{N}(d_-)] = \begin{cases} 1, & \text{se } S_0 > K e^{-rT} \\ 0, & \text{se } S_0 < K e^{-rT} \end{cases} \quad (17.15)$$

Inserindo na equ.(16.13) dá $(S_0 - K e^{-rT})_+$, que coincide com o limite inferior dado pela equ.(6.10): sem risco não tem petisco. Idem para a opção *put*.

- Para $\sigma \rightarrow \infty$ com os outros parâmetros fixos, temos $\mathcal{N}(d_+) \rightarrow 1$ e $\mathcal{N}(d_-) \rightarrow 0$ como podemos ver da equ.(16.12). A opção *call* então vale S . A opção *put* vale $K e^{-rt}$. Portanto as opções aumentam com σ atingindo para $\sigma \rightarrow \infty$ os seus máximos vistos na seção 6.1.
- O gráfico do preço de c, p em termos do preço do ativo S é do tipo mostrado nas curvas azuis da Fig.(6.2). Portanto as probabilidades $\mathcal{N}(d_i)$ codificam o valor temporal \mathcal{TV} das opções.
- O modelo de BS supõe que haja somente um ativo e que os parâmetros sejam constantes. Para precificar derivativos com parâmetros dependentes do tempo veja o apêndice D.

Os agentes do mercado cobram taxas para administrar os investimentos dos clientes, alguns % do ativo S_0 . Para isto é conveniente ter a disposição uma fórmula aproximada simples.

- Se K for igual ao preço a termo $F_T = S_0 e^{(r-d)T}$, a opção chama-se ATM⁶⁶. É uma escolha bastante popular para uma opção, que acabou de aparecer no mercado e a expectativa do mercado é que as chances do ativo subir acima de K e cair abaixo de K sejam parecidas. Expandindo a equ.(10.28) em torno de $K = F_T$, obtemos

$$\begin{aligned} c &= S_0 e^{-rT} F_T \left(\mathcal{N}\left(\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right) - \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-dT} S_0 \sigma \sqrt{T} + \mathcal{O}[(\sigma\sqrt{T})^3]. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Para $d \sim 0$ simplifica como

$$c \sim 0.4\sigma\sqrt{T}S_0. \quad (17.17)$$

Esta formula é muito usado por investidores, pois fornece um valor típico para opções vanilla. Se por exemplo quisermos comprar uma opção com $T = 1$ ano, com ativo subjacente $S_0 = 1000\$$ e volatilidade $\sigma = 10\%$, o preço será $c \sim 0.4 \cdot 0.1 \cdot 1000 = 40\$$.

Para completar o exemplo da seção 7.2.1 poderíamos verificar, se os custos iniciais c_1, c_2 sejam razoáveis, usando por exemplo a formula de Black. Para ter uma ideia suponhamos, que as opções estejam ITM com $S_0 \sim K e^{rT}$ com $r = 5\%$ e suponhamos também, que a volatilidade seja 20%, i.e. $\sigma = 0.2$. Obteríamos $c \sim 0.4\sigma\sqrt{T}S_0 = 0.4 * 0.2 * 0.5S_0 = 0.04S_0$. Ou seja, as opções custam da ordem de 4% de S_0 .

- Ajustando o risco VaR ⁶⁷.
 VaR mede o valor do robustez do portfólio, tipicamente medindo o valor em dollar, que poderíamos perder com 1% de probabilidade em 10 dias. Os bancos são obrigados a manter em depósito da ordem de quatro VaR . Para calcular o VaR , precisamos saber a volatilidade σ , já que é ela que rege as excursões das flutuações. Para um investimento de S_0 temos⁶⁸

$$VaR = 2.33S_0\sigma(10 \text{ dias}) \quad (17.18)$$

⁶⁶Em inglês *at-the-money*. Há outras definições de ATM: quando o preço do dia S_t no instante t for igual a K .

⁶⁷“Value at Risk”.

⁶⁸Uma Gaussiana $G(x)$ com media zero contém 1% de area para $x > 2.33$ -desvios padrão.

- Suponha que façamos um contrato a termo para comprar um ativo S por um preço K numa data futura $t = T$. Isto é igual a um *call*, sem a possibilidade da escolha de exercer ou não, pois sempre será exercido. Uma instituição financeira intermediando um contrato destes, precisa lhe atribuir um preço para e.g. cobrar taxas de administração. Pondo $\mathcal{N}(d_{\pm}) = 1$ na equ.(10.19) resulta para o preço do contrato

$$c = S_0 - Ke^{-rT}, \quad (17.19)$$

igual ao limite inferior de c da equ.(6.10). Se o ativo paga dividendos a taxa d , obtemos da equ.(10.28)

$$c = S_0e^{-dT} - Ke^{-rT} = e^{-rT}(F_T - K) \quad (17.20)$$

com $F_T = e^{(r-d)T}S_0$.

18 As gregas em BSM

Alem do tempo t , uma opção f depende dos seguintes parametros:

$$S, K, r, \sigma, T$$

e é importante explicitar esta dependencia codificada nas derivadas de f . Em financês elas se chamam as *gregas*⁶⁹:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial f}{\partial S}, & \Gamma &= \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \\ \Theta &= \frac{\partial f}{\partial t} \\ \nu &= \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ \rho &= \frac{\partial f}{\partial r} \end{aligned} \quad (18.1)$$

e por razões que se perderam na historia, a letra ν chama-se *vega*. Não contemplamos aqui derivadas terceiras etc, pois controlando o risco até segunda ordem já é uma tarefa formidavel. Tanto opções *call* como *put* são convexas, valendo portanto

$$\Gamma \geq 0. \quad (18.2)$$

⁶⁹Para evitar confusão Δ foi chamado de ϕ nas seções anteriores. Para derivadas maiores há uma pletora de nomes!

De fato para uma opção *call* temos e.g. da equ.(10.14)

$$ce^{rT} = \langle (S_T - K)_+ \rangle_{\mathcal{Q}}.$$

Da linearidade da medida e usando a equ.(6.5) segue-se que

$$\text{convex}[ce^{rT}] = \text{convex} \left[\langle (S - K)_+ \rangle_{\mathcal{Q}} \right] = \left\langle \text{convex}[(S - K)_+] \right\rangle_{\mathcal{Q}} \geq 0. \quad (18.3)$$

Obviamente temos convexidade tanto em S como em K !

Notamos tambem, que derivando a equ.(16.29) resulta

$$e^{r(T-t)} \partial^2 c(S, t) / \partial K^2 = p_{\mathcal{Q}}(K, T | S, t) \geq 0 \quad (18.4)$$

ou seja

$$\partial^2 c / \partial K^2 \geq 0 \quad (18.5)$$

valido em geral, contanto que exista uma densidade de probabilidade risco-neutra⁷⁰. Idem para *put*:

$$e^{r(T-t)} \partial^2 p / \partial K^2 = p_{\mathcal{Q}}(S_T, T | S, t) \geq 0, \quad \partial^2 p / \partial K^2 \geq 0. \quad (18.6)$$

Das equações da seção (B) obtemos para opções *vanilla* no mundo BSM com $\tau = T - t$

$$\begin{aligned} \Delta_c &= \mathcal{N}(d_+) \geq 0 & \Delta_p &= \mathcal{N}(d_+) - 1 \leq 0 & (18.7) \\ \Gamma_c &= \frac{\mathcal{N}'(d_+)}{\sigma S \sqrt{\tau}} \geq 0 & \Gamma_p &= \Gamma_c \\ \Theta_c &= -\frac{\sigma S \mathcal{N}'(d_+)}{2\sqrt{\tau}} - rK e^{-r\tau} \mathcal{N}(d_-) & \Theta_p &= -\frac{\sigma S \mathcal{N}'(d_+)}{2\sqrt{\tau}} + rK e^{-r\tau} \mathcal{N}(-d_-) \\ &= -\frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \Gamma + r(c - \Delta S) & &= \\ \nu_c &= S \sqrt{\tau} \mathcal{N}'(d_+) \geq 0 & \nu_p &= \nu_c \\ &= S^2 \tau \Gamma & & \\ \rho_c &= K \tau e^{-r\tau} \mathcal{N}(d_-) \geq 0 & \rho_p &= -K \tau e^{-r\tau} \mathcal{N}(-d_-) \leq 0 \end{aligned}$$

Para uma opção *call* longa, i.e. refletindo a posição do comprador, temos a seguinte tabela⁷¹.

⁷⁰Em particular não é necessario supor que os processos sejam Wiener, podendo inclusive haver saltos em S .

⁷¹Para o comprador invirta o sinal como na seção 4.

Tabela mostrando a dependencia do preço de uma opção *call*

Parametro	Razão Intuitiva	c_{BS}
$S(t)$	lucro potencial cresce	$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S} > 0$
t	menos valor temporal \mathcal{TV}	$\Theta_c = \frac{\partial c}{\partial t} < 0$
T	mais valor temporal \mathcal{TV}	$\frac{\partial c}{\partial T} > 0$
K	lucro potencial decresce	$\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_-) < 0$
r	valor presente de K decresce	$\rho_c > 0$
σ	chance $S_T > K$ aumenta	$\nu_c > 0$

(18.8)

O raciocínio intuitivo é corroborado pela fórmula de Black-Scholes mostrada na última coluna.

Exercício 18.1 (Precificando uma opção digital).

O preço de uma opção digital é $e^{-rT}\langle \theta(S_T - K) \rangle_Q$. Calculemos a probabilidade sob medida risco-neutra de $S_T > K$ ou $\log S_T > \log K$. Sabemos da equ(15.5: $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$), que

$$\log S_T = \log S_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}\mathcal{N}(0, 1).$$

Precisamos então da probabilidade de

$$\mathcal{N}(0, 1) > \frac{\log(K/S_0) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Verifique que ela é igual a $\mathcal{N}(d_-)$ e o preço da opção digital é $e^{-rT}\mathcal{N}(d_-)$. É, como deve ser, o fator que multiplica K num *call*.

Exercício 18.2.

Complete a tabela acima para uma opção *put*. É útil usar a paridade *put-call*.

Exercício 18.3.

Suponha que uma opção *call* seja ATM no instante $t = T$ ou seja $S = S_T = K$. Verifique que $\Delta_c^{ATM} = 1/2$.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
fazer grafico de gregas

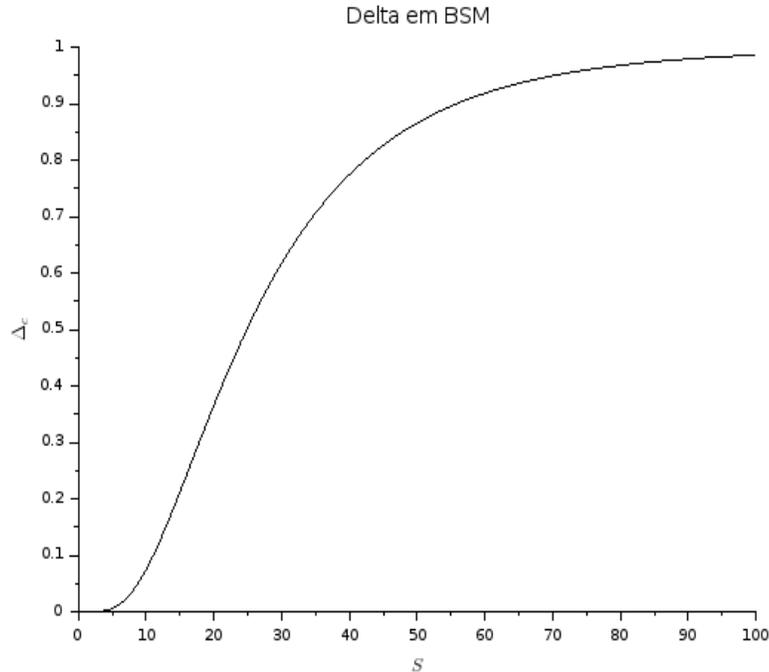


Figure 18.1: Δ_c de uma opção *call* em função do ativo com $K = 50, \tau = 4, r = 5\%, \sigma = 20\%$.

A figura 18.1 mostra, que para $S \ll K$ Delta tende a zero, demonstrando que a probabilidade da opção ser exercida é pequena. O numero pequeno de ativos é necessario para *hedge* a pequena probabilidade, que o vendedor tenha que entrega-los ao comprador na maturação. Para $S \gg K$ Delta tendo a um, indicando que a opção será exercida com grande probabilidade e é melhor, que o vendedor se proteja comprando ativos.

19 *Hedging* opções no contínuo

Ao tratar com opções a primeira coisa que usualmente fazemos é calcular o preço. Mas seria inutil, precificar sem saber como se proteger contra perdas. O procedimento para *hedge* opções é identico ao que já fizemos usando a arvore da sec.8.3 no caso discreto e na seção 16.2 no caso contínuo. Mas é importante voltar ao caso, pois temo-nos que proteger não só contra

flutuações do ativo subjacente, mas contra as outras variáveis e não só até primeira ordem de derivadas. Note porém que na prática é impossível *hedge* continuamente, assunto este que abordaremos na seção 25.

Um trader num banco de investimento.

Nestas notas sempre supusemos, que os portfólios considerados sejam autofinanciantes, pois queríamos demonstrar que na maturação o vendedor pôde satisfazer suas obrigações e hedging nada mais era do que um rebalanceamento entre e.g. ativos e títulos. Mas imagine o *trader* de um banco sentado em sua mesa de trabalho. Ele cisma em comprar um milhão de dollar de *call* da companhia DreadCo para um de seus clientes. Para se proteger contra perdas o trader calcula o Delta e deve então comprar ΔS de ativos da DreadCo, sendo que qualquer compra deve ser financiada com juros r emprestados do banco. Mas ele é do próprio banco? O banco empresta para si mesmo?

Na vida real um trader⁷² administra uma dezena de contratos, possivelmente em mercados diferentes com volatilidades diferentes. Deve fazer um grande esforço para determinar o Δ correto para cada contrato. Com este Δ ele faz seu *hedge* e o banco lhe empresta (ou ele empresta ao banco) a grana, ele pagando(recebendo) juros pela CDI mais uma taxa FTP(Funds Transfer Pricing) para transferir a grana. O importante é que no fim do dia o Profit&Loss - o chamado de P&L - dele esteja "controlado", ou seja está dentro de limites pre-estabelecidos.

Assim ele não verifica na maturação, se o *hedge* funciona para cada contrato. Portanto não insistiremos na questão do autofinanciamento a não ser em casos específicos, e.g. na seção 25.

Considere um *call* e vejamos como se proteger de aleatoriedades do ativo. Lembre-se, que um *call* se valoriza pelo aumento do preço do ativo ($\Delta_c \geq 0$), o que favorece o comprador, mas prejudica o vendedor. Devemos portanto adquirir um instrumento que faça o contrário para eliminar a dependência do portfólio das flutuações do ativo: se compramos um *call*, devemos curtar um

⁷²Se voce joga na investopedia, voce não trabalha num banco e deve continuar verificando, se voce esta protegido corretamente!

numero⁷³ ϕ de ativos. Se vendemos um *call*, devemos comprar um numero ϕ de ativos.

Especificamente veja os seguintes exemplos, que também ilustramos na seção 7 e que seguem a regra do fim da seção 8.3.

- **Call curto/ativo longo com Δ_c dado.**

Suponhamos que o preço de uma unidade do ativo seja $S_t = \$100$, o preço de uma unidade da opção *call* seja $c = \$6$ e $\Delta_c = 0.5$.

Um investidor lançou/vendeu 1000 opções *call* por \$6.000. Para se proteger contra subidas do ativo, o investidor deve comprar $\Delta_c \times 1000 = 500$ unidades do ativo por \$50.000. Esta variação do ativo deve compensar a variação da opção. Se por exemplo o preço do ativo subir por $dS = \$1$, isto acarreta um ganho de \$500 por conta dos 500 ativos comprados pelo investidor. Por outro lado esta subida acarreta um aumento de $dc = \Delta_c dS = 0.5 \times \$1 = \$0.5$ por opção ou no total um valor de $1000 \times \$0.5 = \500 . Isto resulta numa perda para o investidor, pois a sua obrigação em relação ao comprador aumentou por este valor. Mas o portfólio não muda, o ganho no ativo compensando a perda no valor da opção. O portfólio é *delta neutro* - tanto para o vendedor como o comprador.

- **Put curto/ativo curto com Δ_p dado.**

Suponha que um investidor lançou um *put*. O comprador adquiriu o direito de vender o ativo pelo preço K . O investidor teme que o preço do ativo caia abaixo de K , porque neste caso terá que pagar ou entregar ao comprador a diferença $K - S_T$. O Δ_p de um *put* é negativo. Logo para se proteger o investidor curta a quantidade $|\Delta_p|$ do ativo e lucra, se o ativo cair abaixo de K . Com este lucro ele satisfaz sua obrigação em relação ao comprador.

Seja $S_t = \$100$ o preço de uma unidade do ativo e o preço de uma unidade da opção *put* $p = \$6$ e $\Delta_p = -0.5$. Um investidor vendeu 1000 opções *put* por \$6.000. Para se proteger contra descidas, o investidor deve curtir $|\Delta_p| \times 1000 = 500$ unidades do ativo por \$50.000. Esta variação do ativo deve compensar a variação da opção. Se por exemplo o preço do ativo baixar por \$1, isto acarreta um ganho de \$500 por

⁷³Para evitar confusão chamamos Δ de ϕ nesta seção, a não ser que Δ seja especificado com índices.

conta dos 500 ativos curtados pelo investidor. Por outro lado o preço da opção muda por $dp = \Delta_p dS = -0.5 \times \$1 = -\$0.5$ e esta baixa isto acarreta uma perda de $1000 \times \$0.5 = \500 , pois aumenta a obrigação do lançador. O portofolio não muda, o ganho no ativo compensando a perda na opção.

19.1 Hedging com BSM

Vamos supor que o ativo siga um processo de Wiener geometrico

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (19.1)$$

com W_t uma processo de Wiener sob medida \mathcal{Q} e precificamos opções por BSM, e.g. para *call* pela equ.(16.13: $c(s, t) = s\mathcal{N}(d_+) - Ke^{-r\tau}\mathcal{N}(d_-)$). Usamos esta tambem para calcular as gregas. Vamos lembrar a estratégia de hedging já vista na seção 16.2. O portofolio replicante $\Pi = \phi_t S_t + \psi_t B_t$ tambem deve ser auto-financiante, satisfazendo portanto

$$d\Pi = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t. \quad (19.2)$$

ou

$$d\Pi - \phi_t dS_t = \psi_t dB_t.$$

Usando $dB_t = rdtB_t$ para a evolução do titulo, resulta que o portofolio *delta-hedged*

$$\tilde{\Pi}_t = \Pi - \phi_t S_t \quad (19.3)$$

evolui como

$$d\tilde{\Pi}_t = d\Pi - \phi_t dS_t = \psi_t dB_t = \psi_t B_t rdt = (\Pi - \phi_t S_t) rdt = r\tilde{\Pi}_t dt.$$

Ou seja o portofolio $\tilde{\Pi}_t$ evolui como a taxa do titulo B_t sem risco

$$d\tilde{\Pi}_t = r\tilde{\Pi}_t dt \quad (19.4)$$

garantindo ausencia de arbitragem:

- A** Se $\tilde{\Pi}$ valesse mais, emprestaríamos a grana para comprar o portofolio pagando a taxa r e o venderíamos em $t + dt$ embolsando a diferença. Se valesse menos curtariamos $\tilde{\Pi}$ para comprar titulos, que renderiam mais.

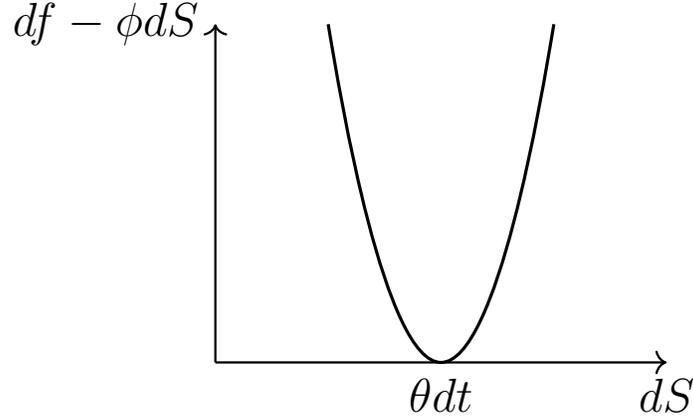


Figure 19.1: Portofolio delta-hedged $df - \phi dS$ vs dS com $\phi = \frac{\partial f}{\partial S}$.

A equação $d\tilde{\Pi}_t = r\tilde{\Pi}_t dt$ com a equ. (16.21): $\phi = \frac{\partial f}{\partial S}$ implicam a equação BSM para o portofolio replicante $\Pi_t = f_t$. Pois expandindo $f(S, t)$ até primeira ordem em dt temos

$$f(S + dS, t + dt) = f(S, t) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS)^2. \quad (19.5)$$

Inserindo isto na equação para $d\tilde{\Pi}_t$ e usando $(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$ e $\phi = \frac{\partial f}{\partial S}$ resulta

$$\begin{aligned} d\tilde{\Pi}_t &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (dS)^2 - \phi_t dS_t \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 \right) dt = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) dt, \end{aligned} \quad (19.6)$$

que implica a equação BSM

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0. \quad (19.7)$$

Essencialmente repetimos o raciocinio da seção 17 de tras para frente, mas voltaqmos ao assunto para resaltar pontos, que mudarão com *hedging* discreto. Mostramos $d\tilde{\Pi}$ na Fig.(19.1). Ou seja subtraímos a tangente a $f(S, t)$ sobrando uma curva concava $\sim S^2$ com tangente horizontal:

$$d\tilde{\Pi}(S, t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 = \left(\theta + \frac{1}{2} \Gamma \sigma^2 S^2 \right) dt, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} > 0, \quad (19.8)$$

O ativo e conseqüentemente a opção e ϕ mudam continuamente no tempo. Precisamos pois rebalancear continuamente o nosso portofolio ajustando o delta - obtido da equ.(19.7) - para eliminar o risco associado a flutuações do ativo S . No mercado financeiro este rebalanceamento costuma ser feito diariamente - pelo menos antes da IA. Veremos no entanto na seção 25, que para um δt finito, é em geral impossível construir um portofolio, que ao mesmo tempo seja replicante e auto-financiante.

Exemplo 19.1 %Suponha que um investidor lançou um *put* com maturação de 5 meses e $K = \$70$ milhões para venda ativos valendo hoje $\$80$ milhões com $r = 8\%$ e a volatilidade seja 25% por ano. A situação é a seguinte:

$$S_0 = 80 \cdot 10^6, K = 70 \cdot 10^6, r = 0.08, \sigma = 0.25, T = 5/12.$$

Da equ.(10.20) temos

$$\begin{aligned} d_+ &= \frac{\ln(80/70) + (0.08 + 0.25^2/2)(5/12)}{0.25\sqrt{5/12}} = 1.114, \\ d_- &= \frac{\ln(80/70) + (0.08 - 0.25^2/2)(5/12)}{0.25\sqrt{5/12}} = 0.953, \\ c &= 13.21 \times 10^6, \quad p = 0.925 \times 10^6 \end{aligned} \quad (19.9)$$

e verificamos $S - K^{-rT} = c - p$. Resulta para delta

$$\Delta_p = \mathcal{N}(d_+) - 1 = 0.8675 - 1 = -0.1324.$$

O investidor deve curtar 13.24% de S_0 e investir o restante para gerar um portofolio *delta neutro* $\tilde{\Pi} = p - \Delta_p S = (13.21 + 0.1324 * 80) * 10^6 = 23.802 * 10^6 \$$. O Δ do portofolio muda de um dia para outro e devemos monitorar a quantidade a ser curtada. Se por exemplo o valor do portofolio baixar para $\$78$ milhões, o delta muda para

$$d_+ = 0.9578, \mathcal{N}(d_+) - 1 = -0.1690.$$

Devemos curtar a quantidade adicional $(16.90 - 13.24)\% = 3.66\%$ de S_0 .

Se por outro lado o ativo aumentar para $\$82$, o delta será $\Delta_p = -10.24$ e neste caso devemos recomprar $(13.24 - 10.24)\% = 3\%$ do portofolio original.

Exemplo 19.2 Hedging um call

Suponha, que queremos vender uma opção *call* sob 1000 ativos subjacentes

nas seguintes condições

$$\begin{aligned} S_0 &= 365, & K &= 370 \\ \sigma &= 20\%, & r &= 2\%, \\ T &= 1/4 \text{ ano}, & e^{rT} &= 1.005 \end{aligned} \quad (19.10)$$

Aplicando BSM equ.(16.13) com $t = 0$ obtemos:

$$c_0 = \$13.094.$$

e vendemos a opção por \$13.094.

Vejamos o risco, que corremos, sem fazer um *hedge* contínuo, mas somente uma vez. Consideremos dois casos possíveis: $S_T < K$ e $S_T > K$. Suponha, que não possuímos ativos, mas também fazemos nada.

1. Em T o preço do ativo é 360 ou seja $S_T < K$. Embolsamos **\$13.160 = 1.005 · \$13.094**, pois a opção não é exercida.
2. Em T o preço do ativo é 390 ou seja $S_T > K$. Temos que comprar o ativo por 390 e entregar por 370, perdendo 20 por ativo negociado. É um valor maior que os \$13.160 recebido pela venda da opção e perdemos **\$6.840**.

Agora suponha que tenhamos comprado um ativo por 365 como proteção contra um aumento do ativo. Vejamos o que acontece agora nos dois casos.

1. Em T o preço do ativo é 360 ou seja $S_T < K$. A opção não é exercida em embolsamos os \$13.160, mas perdemos pela depreciação do ativo o valor $365 - 360 = \$5$. Mesmo assim o lucro é $13.160 - 5 = \mathbf{\$8.116}$.
2. Em T o preço do ativo é 380 ou seja $S_T > K$. Vendemos nossos ativos por 380 ganhando $380 - 365 = \$15$, mas perdemos o valor de $380 - 370 = \$10$ para pagar o comprador. Mesmo assim o lucro ainda é $13.16 + (15 - 10) = \mathbf{\$18.16}$.

Agora vamos fazer um *hedge* a BSM. O número de opções é $n_c = 1000$ e temos que comprar um certo número n_s de ativos. O valor do portfólio é $\Pi = -n_c c_0 + n_s S$. Para ser Δ -neutro devemos impor $\partial\Pi/\partial S = 0$ ou seja

$$n_s = n_c \frac{\partial c_0}{\partial S} = n_c \Delta_c$$

Resulta $\Delta_c = \mathcal{N}(d_+) = 0.485$, $\mathcal{N}(d_-) = 0.445$ e precisamos comprar $n_s = 485$ unidades do ativo para *hedge* as opções.

É claro que devemos fazer este *hedge* continuamente conforme a evolução do ativo até a maturação para um *hedge* perfeito. Isto é, se a volatilidade se mantiver constante - o que acontece raramente! Mesmo assim consideremos o seguinte

Exemplo 19.3 BSM-*hedge* com σ constante

Suponha, que um banco queira vender uma opção *call* nas seguintes condições

$$\begin{aligned} S_0 &= 49, & K &= 50 \\ \sigma &= 20\%, & r &= 5\%, \\ T &= 1/52 \text{ ano}, & e^{rT} &= 1.005 \end{aligned} \tag{19.11}$$

Aplicando BSM obtemos para o preço da opção *call* o valor de $c = \$0.7362$. Reajustando o *hedge* quatro vezes por semana, resulta para os tempos até maturação

$$\tau = [0.0769, 0.0576, 0.0384, 0.01923, 0].$$

Vamos analisar dois casos: um ITM e outro OTM.

1. Suponha que nas proximas cinco semanas o valor do ativo seja

$$S_t = [49, 48, 47, 52, 53].$$

Usando a função Scilab $[f_t, \mathcal{N}(d_+), \mathcal{N}(d_-)] = \text{Vanilla}(S, K, r, \sigma, \tau, 1, 0.01)$ obtemos os seguintes resultados para a opção

t	0	1	2	3	4
S_t	49	48	47	52	53
c_t	0.7362765	0.2875877	0.0521464	2.0945588	3.
$\mathcal{N}(d_+)$	0.3946819	0.2219243	0.0656649	0.9282297	1.
$\mathcal{N}(d_-)$	0.3734965	0.2078945	0.0607989	0.9243456	1.

A decomposição entre ativos e titulos é dada por

$$c_t = \underbrace{\mathcal{N}(d_+)c_t}_{\text{ativos}} + \underbrace{(c_t - \mathcal{N}(d_+)c_t)}_{\text{titulos}},$$

ou seja em $t = [0, 1, 4]$ temos

$$\begin{aligned} 0.7362 &= 0.3946 * 49 + (0.7360 - 0.3946 * 49) = 19.338 + (-18.602) \\ 0.2875 &= 0.2219 * 48 + (0.2875 - 0.2219 * 48) = 10.652 + (-10.364) \\ 3 &= 1 * 3 + (3 - 1 * 3) = 3 \end{aligned}$$

e assim por diante fazendo empréstimos. Note que $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \rightarrow 1$ na maturação, pois o opção está ITM. O retorno é $(S_T - K)_+$ como deve ser e temos \$3 para satisfazer a nossa obrigação para com o comprador.

2. Suponha que nas proximas cinco semanas o valor do ativo seja

$$S_t = [49, 48, 47, 46, 42].$$

obtemos os seguintes resultados para a opção, $\mathcal{N}(d_+)$ e $\mathcal{N}(d_-)$

t	0	1	2	3	4
S_t	49	48	47	46	42
c_t	0.7362765	0.2875877	0.0521464	0.0005612	0.
$\mathcal{N}(d_+)$	0.3946819	0.2219243	0.0656649	0.0015491	0.
$\mathcal{N}(d_-)$	0.3734965	0.2078945	0.0607989	0.0014153	0.

Em $t = 4$ o nosso portofolio é nulo, pois a opção não é exercida.

Note, que só precisamos conhecer os valores do ativo até o instante do *hedge* e não volores futuros.

19.2 Hedging Gamma, volatilidade σ

Suponha, que temos um portofolio $\tilde{\Pi}_0$ mantido Δ -neutro negociando continuamente no ativo subjacente. Mas o gamma Γ_0 do portofolio é positivo. A tabela 18.8 mostra, que isto que acontece no mundo BSM, se possuirmos opções Europeias. Ela tambem mostra, que $\Gamma > 0 \rightarrow \nu > 0$ ou seja não é possível ter Γ sem ν .

Para começar vamos ficar alem de Δ -neutro tambem Γ -neutro. Para isto precisamos incluir e.g. opções vanilla *call* e *put* disponiveis no mercado, cujos Gammas Γ 's são positivos. Mas como isto tambem mudaria o Δ , precisamos adicionar ativos tambem, que convenientemente possuem $\Gamma = 0$:

$$\Delta_S = 1, \Gamma_S = 0. \tag{19.12}$$

O portofolio portanto conterà alem de Π_0 tambem opções *call* com Δ_c e Γ_c e ativos adicionais S :

$$\Pi(S, t) = \tilde{\Pi}_0(S, t) - n_c c(S, t) + n_s S, \quad (19.13)$$

onde $n_c = \Gamma_0/\Gamma_c$ e $n_s = n_c \Delta_c$. Com isto temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial S} &= -n_c \Delta_c + n_s = -n_c \Delta_c + n_c \Delta_c = 0, \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} &= \Gamma_0 - n_c \Gamma_c = \Gamma_0 - \Gamma_0/\Gamma_c \Gamma_c = 0. \end{aligned}$$

Atingimos Γ e Δ neutralidade, contanto que a volatilidade permaneça constante, ou seja: estamos tomando uma posição em relação a volatilidade. Na verdade o trader administra varios contratos e então se empenhara em manter a neutralidade de modo que a soma de todos os Γ 's de seus contratos seja nula. Ele levará em conta tambem "valor temporal" do dinheiro, a grana do nosso portofolio rendendo/pagando juros⁷⁴ a taxa r .

Exemplo 19.4

Suponha, que um banco tenha vendido um certo numero n_c de opções *call* sob $n_s = 1000$ de ativos subjacentes. Suponha, que queremos estar Γ -neutro ou seja obter proteção contra flutuações do ativo no exemplo ?? com um numero $n_s = 1000$ de ativos e n_c de opções *call*. Neste caso temos que usar mais uma opção para proteção. Não podemos simplesmente usar mais ativos, porque $\frac{\partial^2 S}{\partial S^2} = 0$ e precisamos algo não-linear. Por outro lado comprando ou vendendo ativos não muda o valor do portofolio. Suponha que existe uma opção *put* com $K_p = 355$ e adquirimos n_p delas. Com um *call* curto o nosso portofolio vale então

$$\Pi = n_s S + n_p p(t, S) - n_c c(t, S)$$

e de $\frac{\partial \Pi}{\partial S} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = 0$ e com $\phi_p = \phi_c - 1$ temos

$$\begin{cases} n_s &= n_c \cdot \Delta_c - n_p \cdot \Delta_p \\ 0 &= n_c \cdot \Gamma_c - n_p \cdot \Gamma_p \end{cases}$$

Resolvendo para n_p, n_s obtemos

$$\begin{cases} n_p &= \frac{\Delta_c}{\Delta_p} n_c \\ n_s &= n_c (\Delta_c - \frac{\Gamma_c}{\Gamma_p} \cdot \Delta_p) = n_c (\Delta_c - \Delta_p). \end{cases}$$

⁷⁴Lembra, que a contabilidade do caixa do trader envolve juros!

Exemplo 19.5

Suponha que sua posição é presentemente Delta-neutro, i.e. $\Delta=0$. Mas seu $\Gamma = -3.000$. No entanto voce consegue encontrar uma opção *call* com $\Delta_c = 0.620$ e $\Gamma_c = 1.500$. Voce precisa zerar o seu portofolio ou seja

$$\Gamma_{\Pi} = 1 \cdot \Gamma_{\text{posição presente}} + n_c \Gamma_c = 0$$

necessitando $-3.000 + n_c \cdot 1.50 = 0$. Compre portanto $n_c = 3.000/1.5 = 2.000$ *call* para zerar o seu Gamma. O problema é que o Delta do novo portofolio é

$$\Delta_{\Pi} = 1 \cdot 0 + 2.000 \cdot \Delta_c = 2.000 \cdot 0.62 = 1.240.$$

Portanto voce deve vender 1.240 de ativos para ficar Delta-neutro. Note que esta venda não muda o Γ e voce é Δ - e Γ -neutro.

Exercício 19.4.

Suponha que voce possui uma opção *call* com $\Delta = 0.60$ e $\Gamma = 0.05$ e $\theta = -9.1$ (θ tal como r, σ são cotados "por ano".) e que o ativo valha hoje \$100. Quantas unidades do ativo voce compraria ou venderia para fazer um Δ -hedge da opção? Quanto seria a variação de seu portofolio apos o Δ -hedge, se o ativo subir ou baixar por 1% de um dia para o outro? Suponha 365 dias por ano e $r = 0$. Use a equ. (19.8: $d\Pi(S, t) = \theta dt + \frac{1}{2}\Gamma dS^2$). (Resposta: 0\$). O mesmo para um *put*, se o ativo subir ou baixar por 5%? (Resposta: \$0.6. Para n unidades do ativo $n \cdot \$0.6$.)

Exercício 19.5.

Voce possui 100 *put* s, com $\Delta = -0.3, \Gamma = 0.04, \theta = -7.0$. Quantos items do ativo, cada um valendo \$100, voce deveria curtir ou comprar para fazer um Δ -hedge? Apos faze-lo, quanto voce espera ganhar ou perder, se o ativo subir 1% no proximo dia? Suponha 365 dias por ano e $r = 0$.

20 Calibrando BSM e volatilidade implicita

Vamos ver o que acontece, se um *trader* usar o modelo de BSM para precificar uma opção e.g. um *call* e fizer um *hedge*. Ele supõe então que o ativo obedeça

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t$$

sob a medida risco-neutra com algum σ constante e calcula o preço do derivativo. Mas *traders* podem acessar dados do mercado para saber por quais

preços os derivativos estão sendo negociados e raramente o preço BSM calculado coincide com as indicações do mercado. Um atitude possível é *calibrar* o seu modelo BSM contra o mercado: ajustar o valor da volatilidade σ do modelo BSM para refletir os preços do mercado e usar este valor de σ para por exemplo precificar opções exóticas até o próximo rebalanceamento. No modelo BSM σ é o único parâmetro a ser ajustado, o que não será verdade para os modelos a ser vistos na seção 22.

A calibração é feita da seguinte maneira. Usamos a equação de BSM de maneira reversa: conhecendo o valor fornecido pelo mercado de opções *vanilla*⁷⁵ $f_M(S_0, K, T, \sigma)$, ajustamos o valor de σ na equ.(10.19) minimizando a discrepância entre o valor BSM e $f_M(S_0, K, T, \sigma)$. Ou seja, usamos a equação

$$f_M(S_0, K, T, \sigma) = f_{BS}(S_0, K, T, \sigma_{BS}(S_0, K, T)). \quad (20.1)$$

onde no lado esquerdo inserimos os valores do mercado e extraímos o que se chama *volatilidade implícita*⁷⁶ σ_{BS} . A solução é única, pois o f é uma função crescente de σ , mas temos que obter esta solução numericamente⁷⁷. Usamos o modelo de BSM para obter uma grandeza não negociável σ em termo de opções negociáveis. Certamente não estamos supondo aqui, que o modelo BSM descreva bem o mercado, mas usamos BSM como uma máquina, que fornece σ em troca de valores de opções do mercado!

Tudo bem, mas no mundo BSM σ é constante independentemente de S_0, K, T . No entanto a volatilidade implícita σ_{BS} resultante da calibração não é constante, pelo contrário pode ser bastante aleatória. Podemos ver isto na Fig.(20.1) da ref.[38] mostrando calibramento diário. A Fig.20.2 mostra os índices VIX e S%P, onde observamos volatilidades mais altas em períodos de crise. Este procedimento de calibrar a opção no instante t obviamente só pode usar tempos t' no passado $t' < t$, esperando com isto adivinhar a volatilidade real futura em $t + dt$. Algo difícil de fazer e na verdade estamos apostando na volatilidade futura. Note ainda que, mesmo fixando K e T , temos que fazer uma calibração para cada(!) opção e para cada S_0 !

⁷⁵Estas opções são negociadas com frequência e seus preços são bastante acessíveis.

⁷⁶Podemos ver resultados para ativos listados na S&P 500 no site <https://br.investing.com/indices/volatility-s-p-500>.

⁷⁷Implementado por exemplo no Scilab.

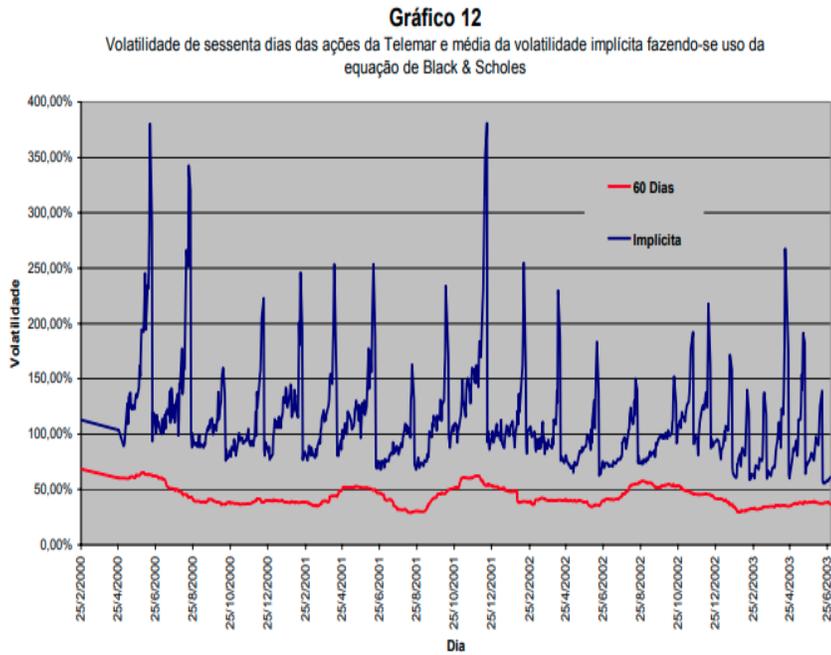


Figure 20.1: Volatilidade implícita e volatilidade média em 2000-2003.

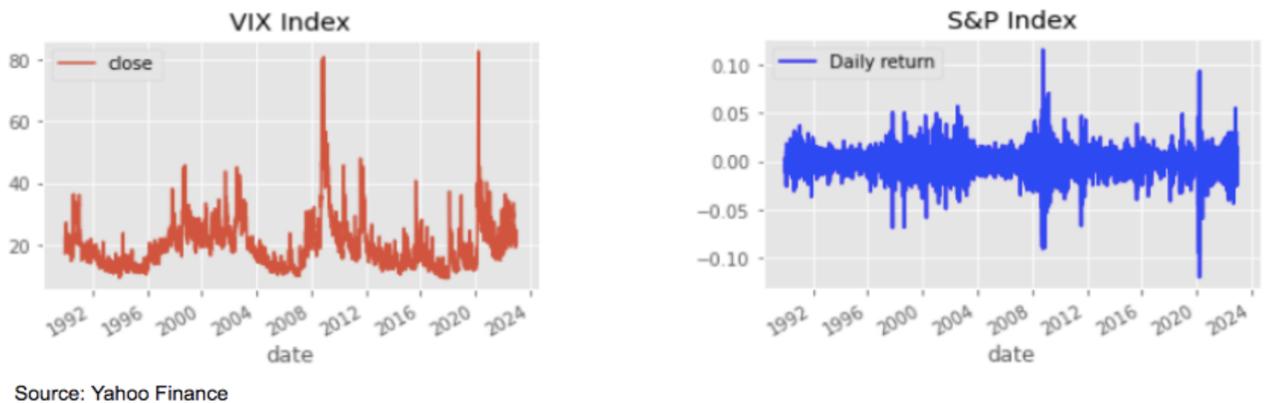


Figure 20.2: Indices VIX e S&P vs. t .

Temos agora um modelo BSM, que replica "bem" opções vanilla num in-

stante t , pois acabamos de calibra-lo e podemos operar no mercado. Vendemos por exemplo uma opção *call* em $t < T$ pelo preço $c(S_t, t, \sigma_{BS})$ fornecido pela equ.(16.13). Mas precisamos nos proteger de riscos: executamos o *hedge* baseado no modelo. Para calcular o Δ_c de uma opção *call* no instante t , usamos a equação

$$\Delta_c(S_t, t, \sigma_{BS}) = \mathcal{N}(d_+(S_t)), \quad d_{\pm}(s) = \frac{\ln(s/K) + (r \pm \sigma_{BS}^2/2)\tau}{\sigma_{BS}\sqrt{\tau}}, \quad \tau = T - t.$$

Montamos um portofolio auto-financiante Π_t contendo a quantidade $\phi_t = \partial f_t / \partial S_t$ de ativos e títulos no valor restante de $\Pi_t - \phi_t S_t$

$$\Pi_t = \underbrace{\phi_t S_t}_{\text{ativos}} + \underbrace{\Pi_t - \phi_t S_t}_{\text{títulos}}. \quad (20.2)$$

A variação do portofolio autofinanciante em dt - o P&L - é $d\Pi_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t = \phi_t dS_t + \psi_t r B_t dt$ ou seja

$$d\Pi_t = \phi_t dS_t + (\Pi_t - \phi_t S_t) r dt \quad (20.3)$$

com $\Pi(0) = c(0, S(0))$.

20.1 Um dia na vida de um *trader*

Voce está sentado em sua mesa de trader e tem que negociar calls e usa o modelo BSM com uma certa volatilidade σ_{BS} para precificação.

Mas suponha agora, que o preço do ativo seja na verdade bem modelado pela equação

$$dS_t = \mu(t, S) S_t dt + \sigma_{loc}(S, t) S_t dW_t, \quad (20.4)$$

onde $\sigma_{loc}(S, t)$ chama-se ***volatilidade local*** a ser abordada na seção 21. Temos agora um portofolio *hedged* com Δ calculado usando a equação BSM com volatilidade σ_{BS} , mas sua evolução segue a equação acima com algum $\sigma_{loc}(S, t)$. $\sigma_{loc}(S, t)$ pode inclusive ter sido extraído do mercado, neste caso chamada de ***volatilidade historica***.

Já sabemos que o valor do arrastos não deve ser importante, mas o valor da volatilidade é crucial e o erro cometido deve ser proporcional de diferença das volatilidades ($\sigma_{BS} - \sigma_{loc}$). Pois vejamos. Seja $Y(t)$ diferença entre o portofolio $\Pi(t)$ evoluindo segundo equ.(20.4) e o valor de uma opção BSM $f(S(t), t)$

$$Y(t) = \Pi_t - f(t, S_t)$$

com $Y(0) = 0$, ou seja eles coincidem no instante inicial, mas evoluem com volatilidades diferentes. A sua variação no tempo dt é dado pela diferença das equações BSM: equ.(17.7) para σ constante e a equ.(17.13) para $\sigma_{loc}(t, S)$. Cancelando os termos $rS \frac{\partial c}{\partial S} = rS \Delta_t$, pois $\Pi(t)$ na equ.(20.2) usou $\Delta_t = \phi_t$, obtemos

$$dY(t) = rY_t dt + \frac{1}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\sigma_{BS}^2 - \sigma_{loc}^2) dt. \quad (20.5)$$

De fato usando a equação de BSM (17.7) para $\partial f / \partial t$, a equ.(20.3) com $\phi_t = \partial f / \partial S$ para $d\Pi_t$ e a equ.(20.4) para dS obtemos

$$\begin{aligned} dY &= d\Pi - df = \phi_t dS + (\Pi - \phi_t S) r dt - \frac{\partial f}{\partial t} dt - \frac{\partial f}{\partial S} dS - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 \\ &= \phi_t dS + \Pi r dt - r S \phi_t dt \\ &\quad - \left(-r S \phi_t - \frac{\sigma_{BSM}^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + r f \right) dt - \phi_t dS - \frac{\sigma_{loc}^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dt \\ &= \Pi r dt - r f dt + \frac{(\sigma_{BS}^2 - \sigma_{loc}^2) S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dt, \end{aligned}$$

onde usamos $dW_t^2 = dt$ no termo em azul e a equação BSM para $\frac{\partial f}{\partial t}$. Resulta então

$$dY_t = rY_t dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} S_t^2 (\sigma_{BS}^2 - \sigma_{loc}^2) dt. \quad (20.6)$$

Integrando com $Y(0) = 0$ e $\Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ obtemos o $P\&L$

$$Y_T = \frac{1}{2} \int_0^T e^{r(T-t)} \Gamma S_t^2 (\sigma_{BS}^2 - \sigma_{loc}^2) dt. \quad (20.7)$$

Segundo a equ.(18.3: $\Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} > 0$) tanto para opções *put* como *call*. Na equação acima a volatilidade σ_{loc} pode ser uma função dada fornecida por um modelo nosso ou até a *volatilidade realizada*. Quer dizer contanto que $\sigma_{BSM}^2 > \sigma_{loc}^2$, a nossa estratégia de *Delta-hedging* resulta num ganho, pois $Y_t > 0$.

Por outro lado Γ depende do ativo aleatório S e se o preço fizer saltos seria difícil manter esta condição e obter vantagens. Concluimos, que *hedging* eficiente depende pois de uma boa estimativa da volatilidade, assunto a ser tratado nas próximas seções.

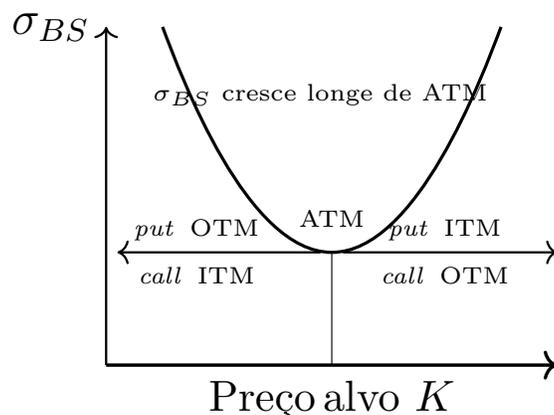


Figure 20.3: Sorriso convencional da volatilidade implícita σ_{BS} vs preço alvo K com S_0 fixo.

20.2 Sorrisos de volatilidade

O CBOE publica índices da volatilidade implícita como o VIX-Volatility Index. O VIX é calculado a partir de um grande número de opções *call* e *put* da Standard&Poor por períodos de 30 dias. A volatilidade implícita muitas vezes exibe a forma \cup no gráfico σ_{BS} vs K ilustrado na Fig.20.3, o que gerou o nome "sorrisos de volatilidade". Acabou-se usando este qualificativo para qualquer volatilidade não constante. Além disso a volatilidade também varia com a maturação T . Temos portanto para cada instante t uma "superfície de volatilidade" $\sigma_t(K, T)$.

Sorrisos de volatilidade são geradas na volatilidade implícita conforme o ativo muda de $S_T > K$ (ITM) para $S_T < K$ (OTM) com σ_{BS} maior para ITM, OTM e menor para *calls* com $S_T = K$ (ATM). Portanto temos $\frac{\partial c}{\partial K} < 0$ e $\frac{\partial p}{\partial K} > 0$. O sorriso também costuma diminuir próximo a maturação em $t = T$ como vemos na Figura 20.4.

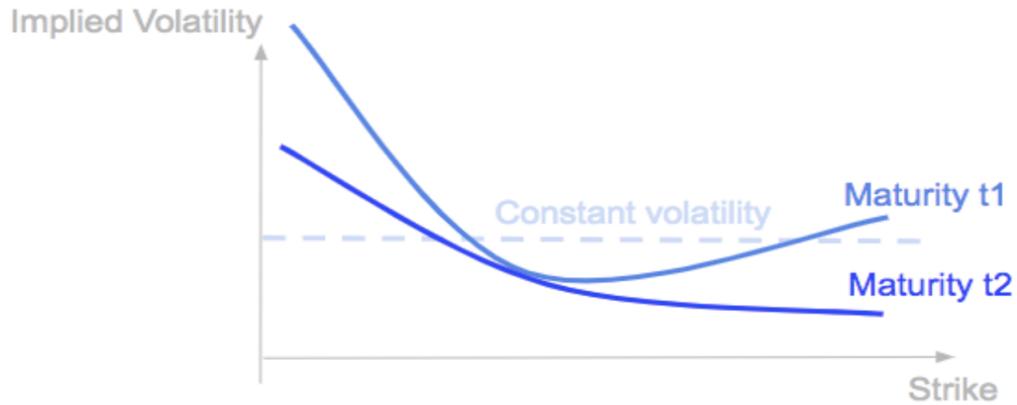


Figure 20.4: Volatilidade vs. preço alvo K para duas maturidades t_1 e $t_2 > t_1$.

O sorriso sugere que opções OTM e ITM com maiores σ_{BS} são mais procurados que opções ATM. Demanda aumento o preço! Pois considere investidores que perderiam dinheiro, se o ativo cair. Eles comprariam opções *put* OTM com baixo K . Por outro lado aqueles que perderiam, se o ativo subir, comprariam opções *call* OTM com alto K . Como há mais compradores que vendedores, o preço de opções OTM é maior. Já que o preço calibrado contra o mercado aumenta com a volatilidade, resulta que a volatilidade é maior para OTM com S/K 's diferentes de 1. A figuras 20.5 mostra o exemplo de uma superfície de volatilidade implícita σ_{BS} em função de T e S/K , porem não simétrico. Isto mostra que o presente argumento sobre a demanda de opções *vanilla* não pode ser a historia toda. σ poderá depender de t e S ou inclusive seguir um processo estocastico proprio: será preciso lançar mão de modelos específico para uma descrição adequada de σ . Mas veremos a seguir, que podemos extrair a volatilidade sem comprometer-nos com algum modelo específico e com isto precificar corretamente opções vanilla.

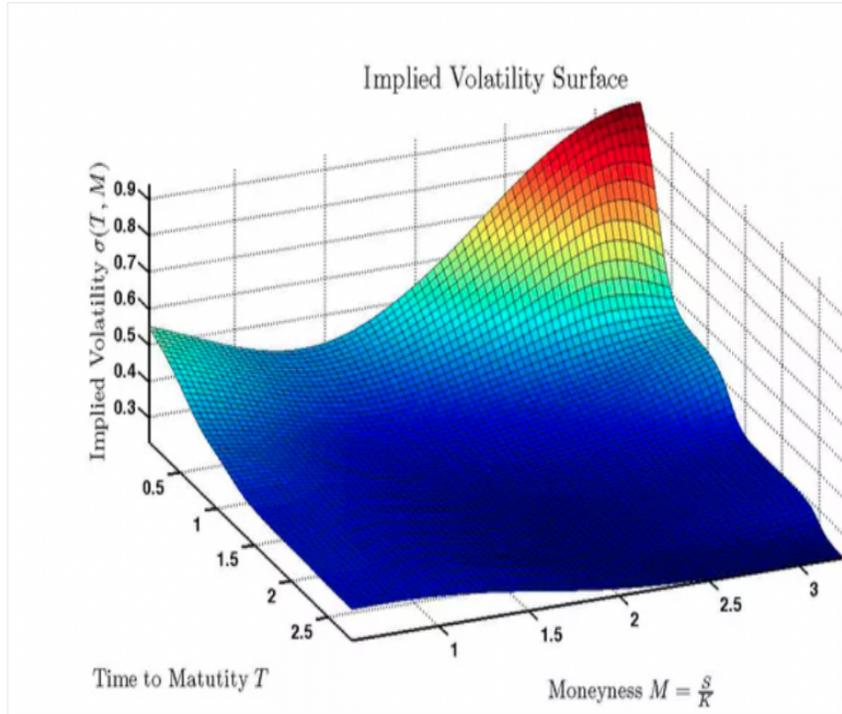


Figure 20.5: Superfície de volatilidade $\sigma_{BS}(S/K, T)$ com um sorriso convencional, porem não *mu*uito simetrico. T é medido em anos.

Uma explicação para o sorriso de volatilidade é sua possível dependência no ativo S e do tempo. Introduzimos então a *volatilidade local*, que podemos obter a partir de preços vanilla do mercado usando a fórmula de Dupire.

21 A volatilidade local e a equação de Dupire

No modelo BSM a volatilidade é constante. A volatilidade local $\sigma(S, t)$ (VL) é a generalização mais simples mantendo um só ativo subjacente. A função $\sigma(S, t)$ é uma função determinística, que codifica a volatilidade do mercado: num particular instante t ela fornece o valor de todos ativos negociados no mercado, supondo que $S(t)$ obedeça a equ. (20.4)

$$dS = \mu_t S_t dt + \sigma_{loc}(S_t, t) S_t dW_t \quad (21.1)$$

A volatilidade não é um item negociado no mercado, mas pode ser destilado a partir por exemplo de opções vanilla - realizado pela **equação de Dupire**. Uma vantagem de modelos de volatilidade local é a sua facilidade de calibração, já que a única fonte de aleatoriedade é o preço do ativo S . Uma vez obtida a volatilidade local por construção precifica exatamente opções vanilla para qualquer K e T e podemos usa-la para precificar opções exóticas.

No modelo BSM a volatilidade é constante. A volatilidade local $\sigma(S, t)$ é a generalização mais simples. A função $\sigma(S, t)$ codifica a volatilidade do mercado: num particular instante t ela fornece o valor de todos ativos negociados no mercado, supondo que S obedeça a equação

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma(S, t) S_t dW_t. \quad (21.2)$$

A volatilidade não é um item negociado no mercado, mas pode ser destilado a partir por exemplo de opções vanilla, como faremos a seguir. A partir daí podemos obter preços de opções vanilla usando a maquinaria BSM equ.(16.38).

Para sobreviver bem no mercado é essencial ter uma boa estimativa da volatilidade. A equação de Dupire expressa a superfície de volatilidade $\sigma(K, T)$ em termo dos preços de opções *vanilla* $f(S, K, T, \dots)$ do mercado. Os valores destas opções são muito mais acessíveis do que as volatilidades em si.

Suponhamos uma evolução do ativo sob medida risco-neutra Q seja

$$dS_t = (r - d) S_t dt + \sigma(S_t, t) S_t dW_Q, \quad (21.3)$$

onde d é a taxa de dividendos e $\sigma(S_t, t)$ é a **volatilidade local**. O valor de uma opção *call* Europeia é

$$c(S, t, K, T) = e^{-r(T-t)} \langle (S_T - K)_+ \rangle_Q = e^{-r(T-t)} \langle (S_T - K) \theta(S_T - K) \rangle_Q \quad (21.4)$$

Tomando derivadas em relação a T e K iremos destilar uma relação para a volatilidade local em termo de opções e suas derivadas a seguir.

Mas primeiro vejamos as condições, que estas derivadas devem satisfazer para evitar arbitragem.

1. $\frac{\partial c}{\partial K} \leq 0$

Na maturação temos $c(K + dK) - c(K) = (S_T - K - dK)_+ - (S_T - K)_+ \leq 0$, logo ausencia de arbitragem assegura, que isto vale para qualquer instante e $\frac{\partial c}{\partial K} < 0$.

2. $\frac{\partial c}{\partial T} \geq 0$

Para mostrar que $\frac{\partial c}{\partial T} > 0$ note que a função $f(x) = (x - K)_+$ é convexa e portanto podemos usar a desigualdade de Jensen equ.(6.6) $\langle f(x) \rangle \geq f(\langle x \rangle)$. Condicionando em S_t e tomando a esperança sobre S_t , temos para $t < T$ com a notação $E_t[X] = \langle X | \mathcal{F}_t \rangle$

$$\begin{aligned} E_0[(S_T - K)_+] &= E_0[E_t[(S_T - K)_+]] \geq E_0[(E_t[S_T] - K)_+] \\ &= E_0[(S_t - K)_+]. \end{aligned}$$

Um argumento de arbitragem seria o seguinte.

Se $\frac{\partial c}{\partial T} \leq 0$, vendemos um *call* com $T = T_1$ e compramos um mais barato com $T = T_2 \geq T_1$, embolsando a diferença D . Para simplificar consideremos $r = 0$. Se em T_1 tivermos $S_{T_1} \leq K$ a opção em T_1 vale nada o nosso lucro é $(S_{T_2} - K)_+ + D$. Por outro lado se $S_{T_1} > K$, a opção é exercida, curtamos o ativo necessário, mas ficamos com K . Em T_2 pode ocorrer

1. $S_{T_2} > K$. Usamos o nosso K para comprar ativos em fechamos a curta de T_1 , embolsando o valor D .
2. $S_{T_2} < K$. Compramos o ativo por S_{T_2} , fechamos a curta de T_1 , embolsando $K - S_{T_2} + D > D > 0$

21.1 A equação de Dupire I

Para determinar a dependencia em relação a T , explicitamente via T e implicitamente via S_T , calculemos a diferencial de $c(S, t, K, T)$ com K fixo⁷⁸:

$$\begin{aligned} d_T c(S, t, K, T)|_K &= \frac{\partial c}{\partial T} dT + \frac{\partial c}{\partial S_T} dS_T + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_T^2} dS_T^2 \\ &= e^{-r(T-t)} \left\langle \left[-r(S_T - K)dT + dS_T \right] \theta(S_T - K) + \frac{1}{2} \delta(S_T - K) dS_T^2 \right\rangle, \end{aligned}$$

levando em conta a dependencia explicita em T e a implicita via S_T . Frequentemente supriremos os argumentos S, t para simplificar a notação!

Usando a equ.(21.3: $dS_t = (r - d)S_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dW_Q$) com $t = T$ resulta

$$d_T c|_K =$$

⁷⁸Note que $\langle \dots \rangle_Q$ é a medida sob a qual $S(t)$ é uma martingale e portanto é certamente independente de K e de T . Logo $d_T \langle \dots \rangle_Q = \langle d_T \dots \rangle_Q$

$$e^{-r(T-t)} \left\langle -r(S_T - K)\theta(S_T - K)dT + \theta(S_T - K) \left((r-q)S_T dT + \sigma(S_T, T) S dW_Q \right) + \frac{1}{2} \delta(S_T - K) S_T^2 \sigma^2(S_T, T) dT \right\rangle_Q.$$

Logo fazendo $S_T = K$ no ultimo termo, resulta

$$d_T c|_K = e^{-r(T-t)} \left\langle \theta(S_T - K)(rK - qS_T)dT + \delta(S_T - K) \frac{1}{2} K^2 \sigma^2(K, T) dT + \theta(S_T - K) \sigma(S_T, T) S_T dW_Q \right\rangle_Q. \quad (21.5)$$

Usando $\langle dW_Q \rangle_Q = 0$ obtemos

$$d_T c|_K = e^{-r(T-t)} \left\langle \theta(S_T - K)(rK - qS_T) + \frac{1}{2} \delta(S_T - K) K^2 \sigma^2(K, T) \right\rangle_Q dT,$$

onde fizemos $S_T \rightarrow K$ no termo contendo a $\delta(S_T - K)$. As derivadas da equ.(21.4) em relação a K são

$$\begin{aligned} \partial_K c(S, t, K, T) &= -e^{-r(T-t)} \langle \theta(S_T - K) \rangle_Q, \\ \partial_K^2 c(S, t, K, T) &= -e^{-r(T-t)} \langle \delta(S_T - K) \rangle_Q. \end{aligned} \quad (21.6)$$

Para expressar os termos $\sim \theta(S_T - K)$ usamos a equação para $\partial_K c$:

$$\begin{aligned} \langle S_T \theta(S_T - K) \rangle_Q &= \langle (S_T - K + K) \theta(S_T - K) \rangle_Q \\ &= \langle (S_T - K)_+ \rangle_Q + \langle \theta(S_T - K) \rangle_Q = e^{r(T-t)} c(S, t, K, T) + \langle \theta(S_T - K) \rangle_Q \end{aligned}$$

Resulta a seguinte equação

$$\frac{\partial c}{\partial T} \Big|_K = -(r-q)K \frac{\partial c}{\partial K} - qc + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial K^2} K^2 \left\langle \sigma^2(K, T | S_T = K) \right\rangle_Q. \quad (21.7)$$

Isolando a volatilidade local e notando, que podemos eliminar esperança $\langle \cdot \rangle_Q$, pois não há mais variáveis aleatorias, resulta a **equação de Dupire** em termos de $c(S, t, K, T)$ [45]

$$\boxed{\frac{1}{2} \langle \sigma_{loc}^2(K, T | S_T = K) \rangle = \frac{\frac{\partial c}{\partial T} \Big|_K + (r-q)K \frac{\partial c}{\partial K} \Big|_T + qc}{K^2 \frac{\partial^2 c}{\partial K^2} \Big|_T}} \quad (21.8)$$

A volatilidade local $\sigma_{loc}^2(S, t)$ é uma função de duas variáveis. Usando a equação de Dupire destilamos esta função $\sigma_{loc}^2(x, y)$ para todos $x = K$ e $y = T$ de opções *call* $c(S, t, K, T)$ negociadas no mercado num certo instante t . A variável temporal sofre aqui uma certa "transmutação": T é o tempo de maturação contado a partir de um certo instante inicial t de uma opção vanilla, enquanto a variável t na função $\sigma(S, t)$ rotula a evolução do ativo para, em princípio, qualquer instante. A equação 21.8 fixa a dinâmica da volatilidade $\sigma(S, t)$. Note porem, que as opções $c(S, t, K, T)$ também evoluem com tempo. Precisamos portanto frequentemente recalibrar a volatilidade local⁷⁹. Esta deficiência é aliviada nos modelos de *volatilidade aleatoria* da seção 22.

Argumentos de Arbitragem

No instante $t < T$ usamos um conjunto de ativos subjacentes S para obter opções *call* com maturidade futura T com preço alvo K . Num particular modelo o denominador da equ.(21.8) é sempre positivo, pois a opção é uma função convexa de K . No mercado a derivada é calculada como

$$\frac{\partial^2 C(K, T)}{\partial K^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{c(K - \epsilon, T) + c(K + \epsilon, T) - 2c(K, T)}{\epsilon^2}, \quad (21.9)$$

a chamada opção borboleta. Ausencia de arbitragem obviamente proibe opções borboleta com preços negativos.

No entanto a positividade do numerador requer uma prova[37], pois temos $\frac{\partial c}{\partial K} < 0$ e $\frac{\partial c}{\partial T} > 0$. Para isto vamos re-escrever o numerador como

$$\left. \frac{\partial c}{\partial T} \right|_K + (r - q)K \left. \frac{\partial c}{\partial K} \right|_T + qc = e^{-qT} \frac{d}{dT} [e^{qT} c(S_0, K e^{(r-q)T}, T)]. \quad (21.10)$$

Devemos provar que

$$V(t, T_1, T_2) = e^{qT_2} c(K e^{(r-q)T_2}, T_2) - e^{qT_1} c(K e^{(r-q)T_1}, T_1) > 0, \quad \text{para } T_2 > T_1.$$

⁷⁹É claro, que recalibração somente é possível para um conjunto discreto de valores x, y - desafio a ser encarado na seção 25.

ou seja $V(t, T_1, T_2)$ deve ser uma função crescente em T ⁸⁰:

$$e^{qT_2}c(Ke^{(r-q)T_2}, T_2) \geq e^{qT_1}c(Ke^{(r-q)T_1}, T_1) \text{ para } T_2 \geq T_1. \quad (21.11)$$

Temos duas possibilidades aqui:

1. Em nosso mundo ideal em que \tilde{S}_t é uma martingale sob a medida risco-neutra \mathcal{Q} e a opção *call* é uma esperança descontada sob esta mesma medida e veremos, que o numerador equ.(21.11) é positivo.
2. Para o valor de opções gerado pelo mercado o numerador é positivo, mas somente se proibirmos arbitragem.

Provemos então a positividade nestes dois casos.

1. O termo em T_2 é

$$e^{qT_2}c(kF_{T_2}, T_2) = e^{qT_2}e^{-rT_2}\langle (S_{T_2} - kF_{T_2})_+ \rangle_Q.$$

Precisamos de um gancho para acessar a opção em T_1 . Para isto vamos calcular esta esperança condicionada ao ativo ser igual a S_{T_1} em T_1 e tomando esperanças em relação a S_{T_1}

$$e^{qT_2}c(kF_{T_2}, T_2) = e^{-(r-q)T_2}\langle \langle (S_{T_2} - kF_{T_2})_+ \rangle_Q | S_{T_1} \rangle_Q, \quad (21.12)$$

obtendo portanto

$$\begin{aligned} e^{qT_2}c(kF_{T_2}, T_2) &= e^{-(r-q)T_2}\langle \langle (S_{T_2} - kF_{T_2})_+ \rangle_Q | S_{T_1} \rangle_Q \\ &= \frac{1}{F_{T_2}}\langle \langle (S_{T_2} - kF_{T_2})_+ \rangle_Q | S_{T_1} \rangle_Q. \end{aligned}$$

A função $f(x) = (x - K)_+$ é convexa e portanto podemos usar a desigualdade de Jensen equ.(6.6)

$$\langle f(x) \rangle \geq f(\langle x \rangle).$$

⁸⁰Note que os fatores $Ke^{(r-q)T}$ garantem a mesma *forward-moneyness* para ambas as opções. Pois ela é obtida, dividindo o preço alvo pelo valor do ativo a-termo $F_T = S_0e^{(r-q)T}$, temos

$$\frac{Ke^{(r-q)T_2}}{F_{T_2}} = \frac{Ke^{(r-q)T_1}}{F_{T_1}} = k$$

com algum valor para $k > 0$.

na equação acima obtendo

$$\left\langle \left\langle (S_{T_2} - kF_{T_2})_+ \right\rangle_Q \middle| S_{T_1} \right\rangle_Q \geq \left\langle \left(\left\langle S_{T_2} \middle| S_{T_1} \right\rangle_Q - kF_{T_2} \right)_+ \right\rangle_Q$$

Por definição $\tilde{S}_t = e^{-(r-q)t} S_t$ é uma martingale:

$$\langle e^{-(r-q)T_2} S_{T_2} \middle| S_{T_1} \rangle = e^{-(r-q)T_1} S_{T_1},$$

ou seja $\langle S_{T_2} \middle| S_{T_1} \rangle_Q = \frac{F_{T_2}}{F_{T_1}} S_{T_1}$. Com isto temos

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\langle (S_{T_2} - kF_{T_2})_+ \right\rangle_Q \middle| S_{T_1} \right\rangle_Q = \\ & \left\langle \left\langle S_{T_2} \middle| S_{T_1} \right\rangle_Q - kF_{T_2} \right\rangle_Q = \left\langle \left(\frac{F_{T_2}}{F_{T_1}} S_{T_1} - kF_{T_2} \right)_+ \right\rangle_Q = \frac{F_{T_2}}{F_{T_1}} \left\langle (S_{T_1} - kF_{T_1})_+ \right\rangle_Q. \end{aligned}$$

Otemos finalmente o resultado desejado

$$\begin{aligned} e^{qT_2} c(kF_{T_2}, T_2) & \geq e^{qT_2} e^{-rT_2} \frac{F_{T_2}}{F_{T_1}} \left\langle (S_{T_1} - kF_{T_1})_+ \right\rangle_Q \\ & = e^{qT_1} \times e^{-rT_1} \left\langle (S_{T_1} - kF_{T_1})_+ \right\rangle_Q = e^{qT_1} c(kF_{T_1}, T_1), \end{aligned}$$

que mostra "algebricamente" que o numerador é positivo.

2. Agora suponha, que estas nossas opções vanilla venham precificadas pelo mercado. Ainda assim ausencia da arbitragem garante positividade. Suponha, que a condição acima seja violada

$$e^{qT_2} c(K e^{(r-q)T_2}, T_2) < e^{qT_1} c(K e^{(r-q)T_1}, T_1).$$

Mostremos que isto proporciona arbitragem usando a seguinte estratégia:

Em $t = 0$

1. compre uma opção com maturidade T_2 e preço alvo kF_{T_2} , a de menor preço
2. venda $e^{-q(T_2-T_1)}$ opções com maturidade T_1 e preço alvo kF_{T_1} , embolsando a diferença positiva.

Em T_1 assuma a seguinte posição Δ

$$\begin{aligned} \text{se } S_{T_1} < kF_{T_1} & : \quad \Delta = 0 \\ \text{se } S_{T_1} > kF_{T_1} & : \quad \Delta = -1. \end{aligned}$$

Em T_2 nosso P&L contém

1. recebendo o retorno da opção comprada $(S_{T_2} - kF_{T_2})_+$,
2. fechando/pagando a opção vendida em T_1 acrescida de juros r e descapitalizado por q

$$e^{r(T_2-T_1)}e^{-q(T_2-T_1)}(S_{T_1} - kF_{T_1})_+ = F_{T_2-T_1}(S_{T_1} - kF_{T_1})_+ \\ = (F_{T_2-T_1}S_{T_1} - kF_{T_2})_+$$

3. a grana gerada pela posição Δ entrada em T_1 e vendida em T_2

$$\Delta(S_{T_2} - F_{T_2-T_1}S_{T_1}) = -\theta(S_{T_1} - kF_{T_1})(S_{T_2} - F_{T_2-T_1}S_{T_1})$$

ou seja: recebemos S_{T_2} pela venda em T_2 , mas tivemos que pagar um preço-a-termos em T_1 para liquidar a posição Δ em T_2 .

O nosso P&L em T_2 é

$$(S_{T_2} - kF_{T_2})_+ - (F_{T_2-T_1}S_{T_1} - kF_{T_2})_+ + \Delta(S_{T_2} - F_{T_2-T_1}S_{T_1}) \\ = (S_{T_2} - kF_{T_2})_+ - \left[(\hat{S}_{T_1} - kF_{T_2})_+ + \theta(S_{T_1} - kF_{T_1})(S_{T_2} - \hat{S}_{T_1}) \right] \\ = f(S_{T_2}) - [f(\hat{S}_{T_1}) + f'(\hat{S}_{T_1})(S_{T_2} - \hat{S}_{T_1})]$$

com $\hat{S}_{T_1} = F_{T_2-T_1}S_{T_1}$, onde $f(x) = (x - kF_{T_2})_+$, cuja derivada é $f'(x) = \theta(x)$. Já que $f(x)$ é uma função convexa, qualquer tangente fica abaixo do grafo de $f(x)$ e o nosso P&L é positivo.

Note porem, que temos que manter a posição até a maturidade para obter um ganho e não podemos "remarcas" as opções conforme o mercado muda.

Podemos portanto de um lado extrair a volatilidade local, se soubermos no instante $t < T$ o preço de opções vanilla para qualquer T e K , a superfície de volatilidade sendo supostamente livre de arbitragem. Com isto podemos precificar derivativos mais complexos.

Esta extração por outro lado fixa a evolução de ativo dada pela equ.(21.3) - esta limitação é superada por modelos de volatilidade aleatoria da seção 22 - não será no entanto facil de mante-los livre de arbitragem! Note que processos com volatilidades σ' diferentes, mas com os mesmos valores para $\langle \sigma'_{loc}(K, T | S_T = K) \rangle, \forall T, K$ geram a mesma volatilidade e que as conclusões

desta seção valem não somente para opções *call* com $\langle (S_T - K)_+ \rangle$, mas para qualquer função convexa $f(x)$ com $x = \frac{S_T}{K}$ [37].

Neste ponto podemos esquecer esta equação de evolução do ativo, cujo papel é se esgota com a obtenção da equação de Dupire. No entanto o processo de calcular as derivadas na equação de Dupire é bastante instável, pois temos que tomar derivadas de dados ruidosos e isto requer interpolações ou outros métodos de regularização [46] e é difícil evitar a possibilidade de arbitragem. Outro problema é que em geral o mercado fornece o preço destas opções somente para um conjunto discreto de T e K . Abordaremos esta problemática na seção 25.

Exercício 21.1

Verifique a equ.(21.12) para o caso BSM.

21.2 A equação de Dupire II

Podemos re-escrever a equação de Dupire como uma equação diferencial parecida com a equação BSM para opções *call*

$$\frac{\partial c}{\partial T} + (r - q) \frac{\partial c}{\partial K} - \frac{1}{2} \sigma^2(K, T) K^2 \frac{\partial^2 c}{\partial K^2} - qc = 0. \quad (21.13)$$

As soluções com a condição inicial $c(K, T = 0) = (S_0 - K)_+$, fornecem os preços de opções *call* com maturidade T e preço alvo K . Para opções *put* basta mudar a condição inicial para $C(K, T = 0) = (K - S_0)_+$.

Podemos também obter a equação de Dupire via equação de Fokker-Planck. Para isto vamos introduzir a probabilidade risco-neutra $p_{\mathcal{Q}}(S_0; S, t)$ do ativo assumir o valor S no tempo t , dado que era S_0 em $t = 0$ - veja a equ.(16.30) para o caso BSM. Temos então para uma opção *call*

$$c(S, t, K, T) = e^{-rT} \langle (S_T - K)_+ \rangle_{\mathcal{Q}} = e^{-rT} \int_K^{\infty} (s - K) p_{\mathcal{Q}}(S_0, s, T) ds. \quad (21.14)$$

Diferenciando em relação a T com a notação simplificada $c_T = c(S_0, K, T)$, $c_K \equiv \frac{\partial c}{\partial K}|_T$, $c_T \equiv \frac{\partial c}{\partial T}|_K$ temos

$$c_T = -rc + e^{-rT} \int_K^{\infty} (s - K) \frac{dp_{\mathcal{Q}}(S_0; s, T)}{dT} ds$$

Usando a equação de Fokker-Planck (14.29: $\partial_t p = -\partial_x[ap] + \frac{1}{2}\partial_x^2[b^2p]$) correspondente a equ.(21.3) para dp_Q/dT resulta

$$c_T = -rc + e^{-rT} \int_K^\infty ds(s - K) \left(-\partial_s[(r - q)s p] + \frac{1}{2}\partial_s^2[(\sigma s)^2 p] \right),$$

onde abusamos um pouco da notação suprimindo os argumentos S_t, t de a, b e p . Integrando uma vez por partes o termo ∂_s e duas vezes o termo ∂_s^2 obtemos

$$c_T = -rc + (r - q)e^{-rT} \int_K^\infty sp(s, T) ds + \frac{1}{2}e^{-rT}(\sigma K)^2 p(K, T),$$

onde o ultimo termo é o integrando no limite inferior e supusemos, que

$$\lim_{S_T \rightarrow \infty} (S_T - K)S_T p(S, S_T, T) = 0.$$

Usando ainda

$$c_K = -e^{-rT} \int_K^\infty p_Q(s, T; S_0) ds, \quad c_{KK} = e^{-rT} p_Q(K, T : S_0) \quad (21.15)$$

e notando que

$$e^{-rT} \int_K^\infty sp_Q ds = e^{-rT} \int_K^\infty (s - K)p_Q ds + K e^{-rT} \int_K^\infty p_Q ds = c - Kc_K,$$

segue-se que

$$\begin{aligned} c_T &= -rc + (r - q)(c - Kc_K) + \frac{1}{2}(\sigma K)^2 c_{KK} \\ &= -(r - q)Kc_K - qc + \frac{1}{2}(\sigma K)^2 c_{KK}. \end{aligned} \quad (21.16)$$

Resulta finalmente a **equação de Dupire** em termos de $c(S, t, K, T)$

$$\boxed{\frac{1}{2}\sigma^2(S, t, K, T) = \frac{\frac{\partial c}{\partial T}|_K + (r - q)K \frac{\partial c}{\partial K}|_T + qc}{K^2 \frac{\partial^2 c}{\partial K^2}|_T}} \quad (21.17)$$

22 Volatilidade Aleatoria(VA)

A volatilidade implicita é na verdade aleatoria, pois depende de ativo subjacente $S(t)$, que é aleatorio. Mas pode ocorrer, que haja outras fontes de volatilidade alem das flutuações do ativo. Isto acontece por exemplo, se as flutuações das opções não seguirem as do ativo. Seria bastante auspicioso poder independentemente

- 1) calibrar hoje um modelo ao sorriso do mercado
- e
- 2) especificar a dinamica futura da volatilidade, apesar de que isto dificulta garantir ausencia de arbitragem e que não poderemos calibrar a maioria destes modelos à superficie de volatilidade. Tambem veremos, que estes modelos **não são completos!**

Poderiamos então modelar a volatilidade aleatoria(VA) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \\ d\sigma_t &= a(S_t, \sigma_t) dt + b(S_t, \sigma_t) dW_t^\sigma \\ dW_t dW_t^\sigma &= \rho dt, \end{aligned} \quad (22.1)$$

com a, b especificando a dinamica de σ_t e W_t^σ é um movimento Browniano com correlação $\langle dW_t dW_t^\sigma \rangle = \rho dt$, i.e. W_t^σ é correlacionado com o processo Wiener do preço do ativo W_t para $\rho \neq 0$. Podemos expandir W_t^σ em termos de dois processos Wiener independentes W_t, W_t' como

$$W_t^\sigma = \rho W_t + \tilde{\rho} W_t'. \quad (22.2)$$

Impondo que $\langle dW_t^\sigma dW_t^\sigma \rangle = \rho dt$, resulta $\tilde{\rho} = \sqrt{1 - \rho^2}$. Assim W_t^σ é normalmente distriuido e seus incrementos são independetes, já que os de W_t e W_t' o são. A equação para σ fica:

$$d\sigma_t = a(S_t, \sigma_t) dt + b(S_t, \sigma_t) (\rho dW_t + \tilde{\rho} dW_t'). \quad (22.3)$$

Para $b(S_t, \sigma_t) \rightarrow 0$ o modelo se reduz ao BSM com termos dependentes do tempo. Este fato ajuda a adquirir alguma intuição sobre o comportamento dos preços de opções neste modelo de VA.

Podemos tambem neste contexto introduzir medidas \mathcal{Q} equivalentes a \mathcal{P} , que terão derivadas Randon-Nikodym como na equ.(15.18)

$$\frac{d\mathcal{Q}}{d\mathcal{P}} = \exp \left(\int_0^T \lambda_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds \right) + \int_0^T \zeta_s dW_s' - \frac{1}{2} \int_0^T \zeta_s^2 ds \quad (22.4)$$

Pondo $\lambda = (r - \mu)/\sigma$ e $\zeta = \zeta(S, \sigma)$ e usando a equ.(22.3) obtemos as equações sob medida \mathcal{Q} como

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma_t S_t d\tilde{W}_t \\ d\sigma_t &= \tilde{a}(S_t, \sigma_t) dt + b(S_t, \sigma_t) d\tilde{W}_t^\sigma \end{aligned} \quad (22.5)$$

onde $\tilde{W}_t, \tilde{W}_t^\sigma$ processos \mathcal{Q} -Wiener com $\langle \tilde{W}_t \tilde{W}_t^\sigma \rangle = \rho dt$ e

$$\tilde{a}(S, \sigma) = a + b(\rho\lambda + \tilde{\rho}\zeta)$$

e vemos que $\tilde{a}(S, \sigma)$ faz o papel para σ_t , que a taxa r faz para o ativo S_t . O valor de uma opção $f(S_t, \sigma_t, t)$ com ativo subjacente S_t e retorno $Z(S_T)$ é

$$f(S_t, \sigma_t, t) = e^{-r(T-t)} \langle Z(S_T) | S_T, \sigma_t \rangle_{\mathcal{Q}}.$$

Mas como σ não é um instrumento que possa ser negociado, argumentos de arbitragem não determinam seu arrasto, deixando ζ e conseqüentemente $\tilde{a}(S(t), \sigma(t))$ arbitrário.

Modelos de volatilidade estocastica não são **completos**: há dois processos de Wiener e um so ativo e a medida risco-neutra não é unica, resultando em preços diferentes, já que dependem e.g. das flutuações de $S(t)$: o preço de opções depende do caminho! É uma instancia do Segundo Teorema Fundamental da seção 16 afirmando, que um modelo é completo, sse a medida risco-neutra for unica. Com $\sigma(t)$ uma variavel dinamica precisamos-nos proteger contra as flutuações desta variavel, fazendo um σ -*hedge*. Devemos então incluir em nosso portofolio um item negociavel não-linear em S , por exemplo outra opção $g(S, \sigma, t)$. Desta maneira o modelo será **completo**.

Formemos então um portofolio contendo alem da opção $f(S, \sigma, t)$ tambem outra opção $g(S, \sigma, t)$. O ativo subjacente é o mesmo, mas K e/ou T podem ser diferentes. O portofolio Π conterà além da opção com preço f , uma quantidade $-\Delta$ do ativo e a quantidade $-\delta$ da opção g :

$$\Pi = f - \Delta S - \delta g.$$

As opções $f(S, \sigma, t), g(S, \sigma, t)$ satisfazem a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \tilde{a} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} + \rho \sigma S b \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial \sigma} = r f. \quad (22.6)$$

Vamos calcular a diferencial $d\Pi$ e fixar Δ e δ para anular as aleatoriedades como fizemos na dedução de equação BSM. Obtemos usando as equ.(22.1)

$$d\Pi = -\Delta dS$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} b^2 dt \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial S} \sigma b S \rho dt \right\} \\
& \quad - \delta \left\{ f \rightarrow g \right\}
\end{aligned} \tag{22.7}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
d\Pi = dt & \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} b^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial S} \sigma b S \rho \right. \\
& \left. - \delta \left(\frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} b^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial S} \sigma b S \rho dt \right) \right\} \\
& + \left[\frac{\partial f}{\partial S} - \delta \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \Delta \right] dS + \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma} - \delta \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right] d\sigma
\end{aligned}$$

Imporemos

$$\frac{\partial f}{\partial S} - \delta \frac{\partial g}{\partial \sigma} - \Delta = 0 \tag{22.8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} - \delta \frac{\partial g}{\partial \sigma} = 0. \tag{22.9}$$

Impondo estas condições matamos os termos $\sim dS$ e $\sim d\sigma$ obtendo

$$\begin{aligned}
d\Pi = dt & \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} b^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial S} \sigma b S \rho \right. \\
& \left. - \delta \left(\frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} b^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial S} \sigma b S \rho dt \right) \right\} \tag{22.10}
\end{aligned}$$

Igualando o resultado com a variação do portofolio, que agora é livre de risco

$$d\Pi = r\Pi dt = r(f - \Delta S - \delta g) dt.$$

resulta

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} b^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial S} \sigma b S \rho - r f \\
& - \delta \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} b^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma \partial S} \sigma b S \rho - r g \right) + r \Delta S = 0.
\end{aligned}$$

Inserimos o valor de Δ obtendo

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} b^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial S} \sigma b S \rho + \frac{\partial f}{\partial S} r S - r f$$

$$= \delta \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} b^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma \partial S} \sigma b S \rho + \frac{\partial g}{\partial S} r S - r g \right).$$

Agora inserimos o valor de δ e obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial_t f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} b^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial S} \sigma b S \rho + \frac{\partial f}{\partial S} r S - r f}{\partial \sigma f} \\ &= \frac{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} b^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial \sigma \partial S} \sigma b S \rho + \frac{\partial g}{\partial S} r S - r g}{\partial \sigma g}. \end{aligned}$$

O lado esquerdo é função somente de f e o direito somente função de g . Portanto as frações são iguais a uma "constante" de separação, que chamamos de $\tilde{a}(S, \sigma, t)$. Constante aqui quer dizer independentes das variáveis em relação aos quais tomamos derivadas ou seja independentes S, σ, t . Obtemos assim a equ.(22.6), tanto para f como para g .

Já que f descontado é uma martingale devido as equ.(22.8), o processo $Y(t) = f(t, S(t), \sigma(t))$ obdece

$$dY_t = rY_t dt + d\hat{W}_t, \quad (22.11)$$

e da equ.(22.7) segue-se, que

$$d\hat{W}_t = \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S d\tilde{W} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} b d\tilde{W}^\sigma. \quad (22.12)$$

Acabamos de criar um modelo completo, pois temos dois itens negociáveis S_t e Y_t , um para cada processo de Wiener com uma única medida risco-neutra associada

$$\begin{aligned} dS(t) &= rS(t)dt + \sigma(t)S(t)d\tilde{W}_t \\ dY_t &= rY_t dt + d\hat{W}_t, \end{aligned} \quad (22.13)$$

Porem temos agora uma **infinitude de modelos** indexados pela função $\zeta(S, t)$. Cada escolha - a criterio do investidor - de ζ determinará uma volatilidade $\hat{\sigma}$. Podemos calibr o modelo ao mercado fixando as funções $a(x, y)$ e $b(x, y)$. Por exemplo se soubermos os preços de uma particular opção \tilde{g} para "todos" os valores de K e T , então podemos calibrar via BSM a solução⁸¹ da equ.(22.6) para f de modo a obter os valores do mercado \tilde{g} . Portanto a volatilidade σ_t deve satisfazer a equação

$$Y(t) = f_{BSM}(S, \sigma, t).$$

⁸¹Note porem, que teremos que obter a solução numericamente!

Poderemos então precificar outras opções, e.g. exóticas, utilizando a volatilidade $\sigma(t, S_t)$. No entanto isto é mais difícil de executar do que Δ -*hedge* com a equ.(22.8), pois para implementar a equ.(22.9) temos que usar opções vanilla, que são menos líquidas que ativos e envolvem maiores custos de transação.

Ao invés de discutir maneiras de fixar a função \tilde{a} , apresentamos dois modelos populares especificando as funções $a(S, \sigma)$ e $b(S, \sigma)$. A falta de completude dos modelos se reflete na dependência destes parâmetros.

23 Volatilidade Aleatoria: Modelos

Quando um trader é confrontado com um sorriso de volatilidade livre de arbitragem, a escolha do modelo pode impactar significativamente tanto a precificação como a estratégia de *hedging* além de simples *Delta-hedging*. Vamos apresentar dois modelos populares fixando as funções $a(S, \sigma)$ e $b(S, \sigma)$ da equ.(22.1), que controlam o comportamento da volatilidade.

A volatilidade inicial σ_0 controla o nível da volatilidade e b é a *volatilidade da volatilidade: vol-vol*. Com vol-vol alto a probabilidade de eventos extremos - eventos com S longe da média - aumenta com o concomitante aumento do preço para opções OTM. O parâmetro ρ controla a correlação entre a variação do ativo e da volatilidade. Se $\rho < 0$, retornos negativos surgem mais com alta volatilidade. É o que observamos tipicamente no mercado com volatilidade alto em tempos de crise.

Consideremos dois modelos, cujas equações de movimento são

1. O modelo **SABR**[47] (Stochastic Alpha, Beta, Rho):

$$dS_t = \alpha_t S_t^\beta dW_t \quad (23.1)$$

$$d\alpha_t = \xi \alpha_t dZ_t \quad (23.2)$$

$$dZ_t dW_t = \rho dt \quad (23.3)$$

$$0 \leq \alpha, \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (23.4)$$

- 2.

$$dS_t = \mu_t S_t dt + S_t \sqrt{\nu_t} dW_t^1 \quad (23.5)$$

$$d\nu_t = \alpha_t dt + \xi \nu_t^\gamma dW_t^2 \quad (23.6)$$

com os processos de Wiener correlacionados como

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt.$$

com $0 < \gamma < 1$. O parametro ξ controla a volatilidade da volatilidade. Formariamos um portofolio replicando a opção contendo o ativo, um título e um outro ativo dependendo da volatilidade.

Para $\alpha_t = -\lambda(\nu_t - \bar{\nu})$ e $\gamma = 1/2$ obtemos o famoso modelo de **Heston**[41], que para este valor de γ é exatamente soluvel.

Em todos estes modelos temos um item negociavel e dois processos estocasticos. Logo a medida risco-neutra não é unica!

Resaltamos, que:

- No modelo de volatilidade local estruturas futuras da superficie de volatilidade são determinadas em $t = 0$, mas mudam ao recalibrarmos o modelo ao sorriso do mercado. Nos modelos VA atribuímos uma dinamica propria à volatilidade. Os parametros são ajustados no inicio e em geral não são reajustados.
- No modelo SABR o nivel da volatilidade é controlado pelo valor inicial α_0 de α_t , a kurtose por ξ e a assimetria da volatilidade por β e ρ . $\beta = 0.5$ é um valor costumeiro.

Somente para $\beta = [0, 1]$ o modelo é exatamente soluvel, mas tem boas estimativas para $\epsilon = \alpha^2 T$ pequeno.

- A escolha da raiz $\sqrt{\nu_t}$ no modelo de Heston torna-o *exatamente soluvel*: o valor dos preços de opções vanilla se reduz a uma integral unidimensional. É uma das razões responsavel por sua enorme popularidade. O termo $\lambda(\nu_t - \bar{\nu})dt$ favorece o retorno a media $\bar{\nu}$ com λ controlando a velocidade do retorno. Este retorno é ausente no modelo SABR, o que prejudica a sua aplicabilidade para tempos "longos".

•

23.1 O modelo SABR

Faremos uma expansão assintotica para $\epsilon \ll 1$.

23.2 O modelo de Heston

Neste modelo o preço de opções vanilla pode ser obtido fazendo um integração numerica. Isto permite uma calibração rapida a sorrisos de volatilidade ajustando os cinco parametros. As equações definindo o modelo são

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + S_t \sqrt{\nu_t} dW_t^1, \quad \mu = r - \hat{d} \\ d\nu_t &= -\lambda(\nu_t - \bar{\nu}) dt + \xi \sqrt{\nu_t} dW_t^2, \\ \langle dW_t^1 dW_t^2 \rangle &= \rho dt, \end{aligned} \quad (23.7)$$

onde incluímos um retorno à media $\bar{\nu}$ e dividendos com taxa \hat{d} . A volatilidade $\sigma = \sqrt{\nu}$ é aleatoria e W_t^i são processos de Wiener sob medida risco-neutra Q , portanto o valor de $\mu = r - d$. A escolha da raiz quadrada é crucial para a solubilidade do modelo!

Passemos pelos parametros e suas funções. Na vida real a distribuição do ativo não segue um processo de Wiener geomtrico, mas a *distribuição historica* em geral é mais estreito no centro e possui caudas gordas como ilustrado na Fig.23.1. Dos retornos diarios da S&P de 1950 até 2022 podemos extrair a probabilidade historica. Resulta, que retornos abaixo de 3% são proximos a 0.7%, enquanto que uma estimativa Gaussiana daria algo como 0.1% - resultando num fator 7 entre as duas.

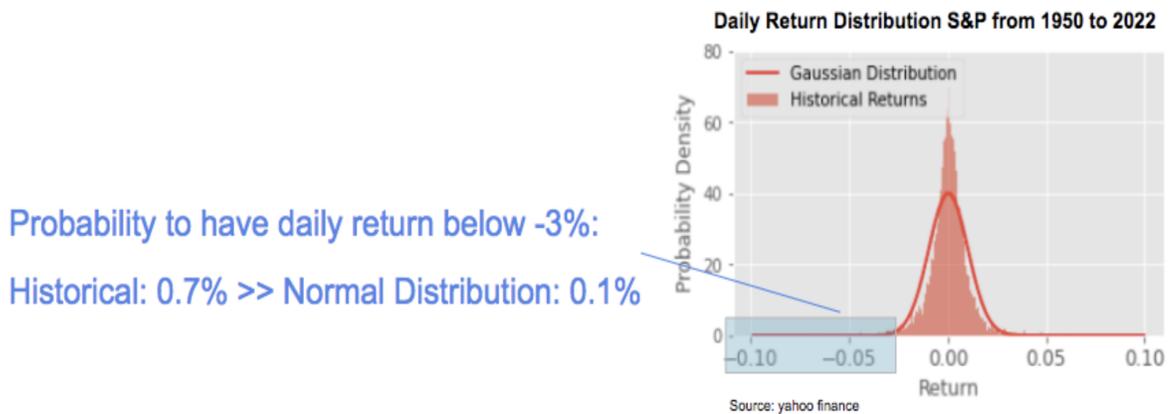


Figure 23.1: As distribuições Gaussiana e historica com cauda esquerda em azul.

O nivel da volatilidade é controlada pela variança inicial ν_0 , como vemos na Fig. 23.2.

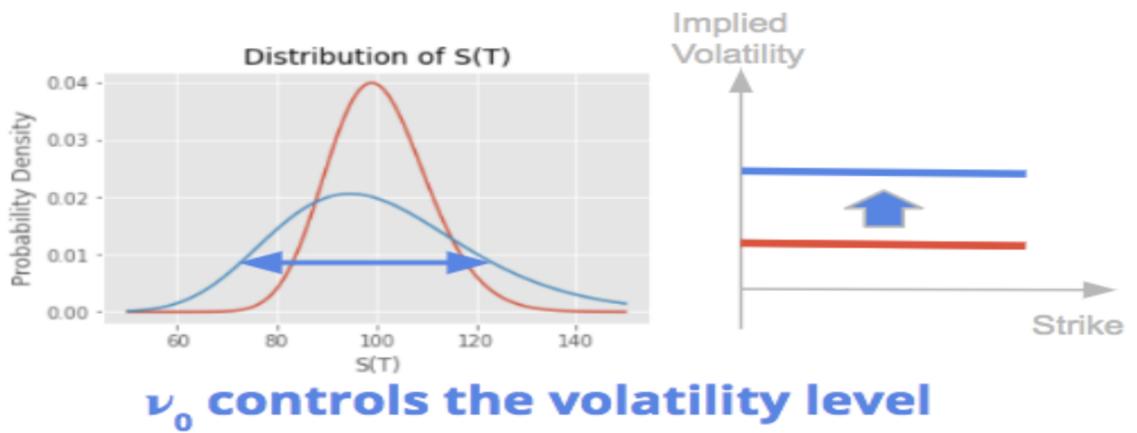


Figure 23.2: ν_0 controla o nível da volatilidade.

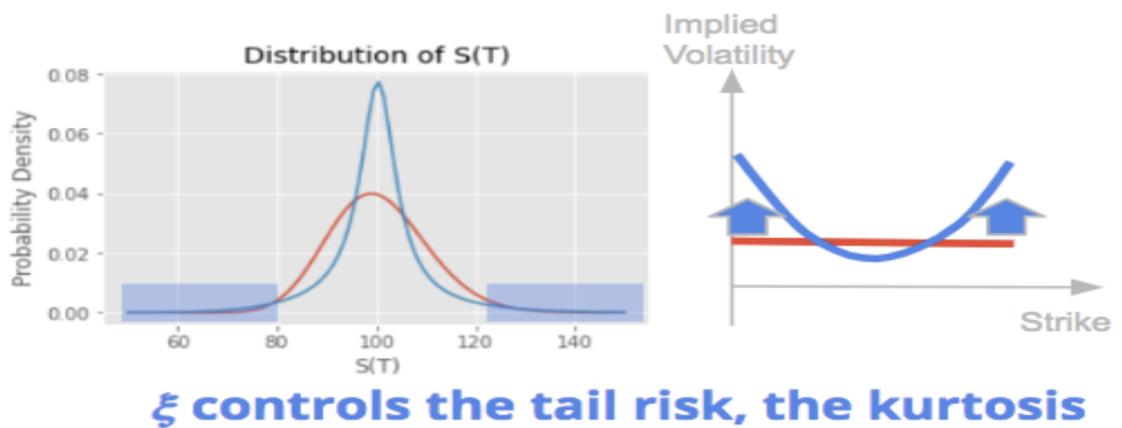


Figure 23.3: ξ controla o risco de cauda: a kurtose.

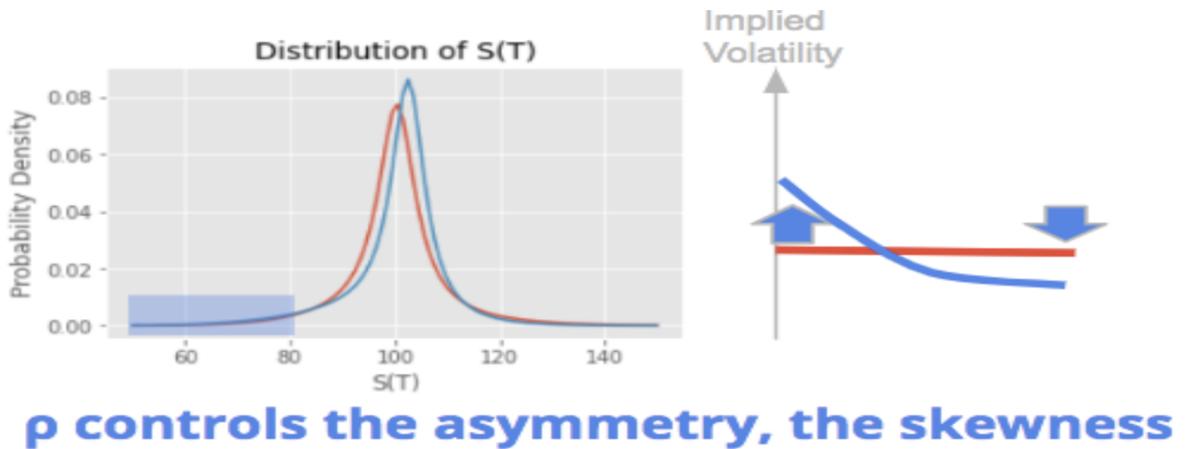


Figure 23.4: ρ controla o risco a assimetria.

O parâmetro ξ é a *volatilidade da volatilidade* visto no Fig. 23.3. Volatilidade mais alta aumenta a probabilidade de eventos extremos, aumentando a cauda da distribuição de S_T . Isto traduz-se em maior risco e preços mais altos para opções OTM e aumenta as asas da volatilidade implícita criando assim o sorriso.

A correlação ρ afeta a assimetria da distribuição do retorno $Z(S_T)$. Por exemplo um $\rho < 0$ resulta em probabilidade alta para retornos negativos acompanhados com volatilidade alta. É o que tipicamente acontece em períodos de crise. Implica em preço /risco mais alto, portanto volatilidade implícita mais alta, para opções *put* OTM na esquerda e volatilidade implícita mais baixa, para opções *call* OTM na direita no eixo S_T .

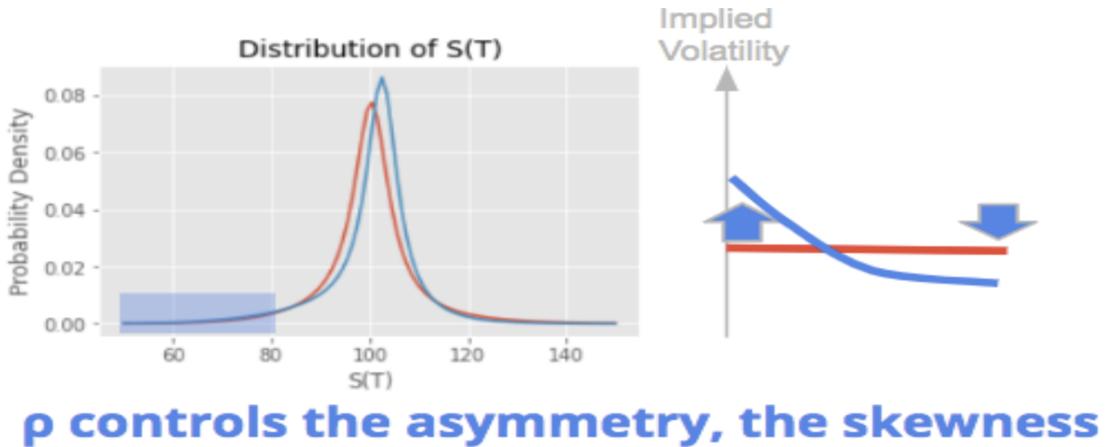


Figure 23.5: ρ determina a assimetria da volatilidade implícita.

Vamos agora a solução exata do modelo de Heston. Introduzindo o ativo a termo

$$F_t = S_t e^{(T-t)\mu},$$

que obedece

$$dF/F = \sqrt{\nu_t} dW_t^1$$

e $x = \log(F_t/K)$, que obedece⁸²

$$dx = dF_t/F_t - (dF_t)^2/2F_t^2 = \sqrt{\nu_t} dW_t^1 - \frac{1}{2}\nu_t dt,$$

obtemos

$$dx = -\frac{1}{2}\nu dt + \sqrt{\nu} dW^1 \quad (23.8)$$

$$d\nu = -\lambda(\nu - \bar{\nu})dt + \eta\sqrt{\nu} dW^2, \quad (23.9)$$

onde tiramos o subscrito t para evitar confusões, pois indicaremos a seguir derivadas parciais por índices. A diferencial de uma opção não descontada $\tilde{f}(x, \nu, t)$ é

$$\begin{aligned} d\tilde{f} &= \tilde{f}_t dt + \tilde{f}_x dx + \tilde{f}_\nu d\nu + \frac{1}{2}(\tilde{f}_{xx}(dx)^2 + 2\tilde{f}_{x\nu} dx d\nu + \tilde{f}_{\nu\nu}(d\nu)^2) \\ &= \tilde{f}_t dt + \tilde{f}_x \left(-\frac{1}{2}\nu dt + \sqrt{\nu} dW^1\right) + \tilde{f}_\nu \left(-\lambda(\nu - \bar{\nu})dt + \eta\sqrt{\nu} dW^2\right) \end{aligned}$$

⁸²Lembre que $d(\log x) = dx/x - \frac{1}{2}(dx)^2/x^2 + \dots$

$$+\frac{1}{2}(\tilde{f}_{xx}\nu dt + 2\tilde{f}_{x\nu}\eta\nu\rho dt + \tilde{f}_{\nu\nu}(\eta^2\nu dt)) \quad (23.10)$$

Zerando o termo $\sim dt$, já que \tilde{f} deve ser uma martingale resulta

$$\tilde{f}_t - \frac{1}{2}\nu\tilde{f}_x - \lambda(\nu - \bar{\nu})\tilde{f}_\nu + \frac{1}{2}(\nu\tilde{f}_{xx} + 2\eta\nu\rho\tilde{f}_{x\nu} + \eta^2\nu\tilde{f}_{\nu\nu}) = 0 \quad (23.11)$$

Notamos que todos os termos são lineares em ν e

$$d\tilde{f} = \tilde{f}_x\sqrt{\nu}dW^1 + \tilde{f}_\nu\eta\sqrt{\nu}dW^2.$$

Introduzindo $\tau = T - t$ pelas mesmas razões que na equ.(C.2), temos que resolver a equação acima com $\tilde{f}_t = -\tilde{f}_\tau$.

Para uma opção *call* temos que $\tilde{c}(t, S) = \langle (S - K) \rangle_{\mathcal{Q}}$. Vamos parametrizar a solução do modelo de Heston como⁸³

$$\tilde{c}(\tau, x, \nu) = K[e^x P_1(\tau, x, \nu) - P_0(\tau, x, \nu)] \quad (23.12)$$

com $P_j, j = 0, 1$ duas probabilidades crescendo de 0 para 1, quando x cresce de $-\infty$ para $+\infty$ ⁸⁴.

Substituindo esta parametrização na equ.(23.11) obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial P_j}{\partial \tau} - \left(\frac{1}{2} - j\right)\nu\frac{\partial P_j}{\partial x} + (a - \nu b_j)\frac{\partial P_j}{\partial \nu} \\ & + \frac{1}{2}\left(\nu\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + 2\eta\nu\rho\frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial \nu} + \eta^2\nu\frac{\partial^2 P_j}{\partial \nu^2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (23.13)$$

com $a = \lambda\bar{\nu}, b_j = \lambda - j\rho\eta$.

Precisamos impor as condições iniciais em $\tau = 0$: $\tilde{c}(0, x, \nu) = (S - K)_+$, ou seja

$$P_j(\tau \rightarrow 0, x, \nu) = \theta(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0, \forall \nu \\ 0 & \text{para } x \leq 0, \forall \nu \end{cases} \quad (23.14)$$

⁸³A solução da equação de BSM equ.(16.13)

$$\tilde{c}(t, S) = FN(d_+) - KN(d_-), \quad F = e^{\mu\tau} S,$$

tambem possui este formato. Veja tambem a equ.(10.15) e os comentarios apos a equ.(10.20) para uma motivação.

⁸⁴Devemos verificar, que a eventual solução satisfaça estas propriedades.

Para resolver a equação diferencial usaremos a transformada de Fourier em x

$$\tilde{P}_j(\tau, k, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} P_j(\tau, x, \nu) \quad (23.15)$$

e as condições de contorno devem garantir a existencia das integrais ocorrendo nas transformadas de Fourier, e.g. da inversa

$$P_j(\tau, x, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{P}_j(\tau, u, \nu). \quad (23.16)$$

Para calcular a transformada de Fourier de $P_j(0, x, \nu)$, note primeiro que

$$\theta(x) \equiv \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ikx}}{\nu(k - \nu\epsilon)}, \quad (23.17)$$

mas omitiremos a instrução do limite daqui para frente para simplificar a notação. Invertendo esta transformada de Fourier resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \theta(x) = \frac{1}{\nu(k - \nu\epsilon)}. \quad (23.18)$$

Para qualquer função $\zeta(u)$ "suficientemente bem comportada" temos a identidade⁸⁵

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2\nu\pi} \frac{\zeta(k)}{u - \nu\epsilon} &= \int \frac{dk}{2\pi\nu} \frac{\zeta(k)}{k} + \frac{1}{2}\zeta(0) \\ &= \int \frac{du}{2\pi\nu} \frac{\zeta(k)}{u} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k)\zeta(k) \end{aligned} \quad (23.19)$$

com a integral *valor principal*(pv) definida como

$$\int = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right]. \quad (23.20)$$

Já que a função $\zeta(u)$ é arbitraria, podemos reescrever esta equação como

$$\frac{1}{k - \nu\epsilon} = pv\left(\frac{1}{k}\right) + \nu\pi\delta(k), \quad (23.21)$$

⁸⁵O termo $\sim \delta(0)$ resulta da integral num semicirculo no plano complexo u evitando o polo em $k = 0, \epsilon = 0$.

supondo sempre que ela será usada como integrando de integrais convergentes.

Com isto a condição inicial fica

$$\tilde{P}_j(0, k, \nu) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \theta(x) dx = \frac{1}{i(k - i\epsilon)} = p\nu \left(\frac{1}{ik} \right) + \frac{1}{2} \delta(k). \quad (23.22)$$

A transformada de Fourier das equ.(23.13) é

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial \tau} - \left(\frac{1}{2} - j \right) \nu ik \tilde{P}_j + (a - \nu b_j) \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial \nu} \\ & - \frac{1}{2} (\nu k^2 \tilde{P}_j + 2i\eta\nu\rho k \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial \nu} + \eta^2 \nu \frac{\partial^2 \tilde{P}_j}{\partial \nu^2}) = 0. \end{aligned} \quad (23.23)$$

Com a notação

$$\alpha = -\frac{k^2}{2} - \frac{ik}{2} + jk \quad (23.24)$$

$$\beta = \lambda - \rho\eta j - i\rho\eta k \quad (23.25)$$

$$\gamma = \frac{\eta^2}{2} \quad (23.26)$$

resulta

$$-\frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial \tau} + \nu \left\{ \alpha \tilde{P}_j - \beta \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial \nu} + \gamma \frac{\partial^2 \tilde{P}_j}{\partial \nu^2} \right\} + \bar{\nu} \lambda \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial \nu} = 0. \quad (23.27)$$

Já que as equações são lineares em $\nu, \bar{\nu}$, parametrizemos a solução como

$$\begin{aligned} \tilde{P}_j(u, \nu, \tau) &= \exp(\bar{\nu} C(k, \tau) + \nu D(k, \tau)) \tilde{P}_j(k, \nu, 0) \\ &= \frac{e^{\bar{\nu} C(k, \tau) + \nu D(k, \tau)}}{i(k - i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (23.28)$$

Derivando a parametrização acima temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial \tau} &= \left(\bar{\nu} \frac{\partial C(k, \tau)}{\partial \tau} + \nu \frac{\partial D(k, \tau)}{\partial \tau} \right) \tilde{P}_j \\ \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial \nu} &= D \tilde{P}_j \\ \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial \nu^2} &= D^2 \tilde{P}_j. \end{aligned} \quad (23.29)$$

Comparando os termos em $\nu, \bar{\nu}$ e lembrando que $a = \lambda\bar{\nu}$ resulta da equ.(23.27)

$$\frac{\partial C(u, \tau)}{\partial \tau} = \lambda D(k, \tau) \quad (23.30)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = \alpha - \beta D + \gamma D^2 \equiv \gamma(D - r_+)(D - r_-) \quad (23.31)$$

com

$$r_{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} \quad (23.32)$$

A equação para D é

$$d\tau = \frac{dD}{\gamma(r_+ - r_-)} \left(\frac{1}{D - r_+} - \frac{1}{D - r_-} \right)$$

ou seja

$$\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} d\tau = \left(\frac{dD}{D - r_+} - \frac{dD}{D - r_-} \right).$$

Integrando com as condições iniciais $C(0, k) = 0, D(0, k) = 0$ resulta com $g \equiv r_-/r_+$

$$\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\tau = \log \left\{ g \frac{D - r_+}{D - r_-} \right\} \quad (23.33)$$

ou seja com $d = \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$

$$\begin{aligned} D(\tau, k) &= r_- \frac{1 - e^{-d\tau}}{1 - g e^{-d\tau}} \\ C(\tau, u) &= \lambda \left\{ r_- \tau - \frac{2}{\eta^2} \log \left(\frac{1 - g e^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right\} \end{aligned} \quad (23.34)$$

Invertendo a transformada de Fourier equ.(23.28) obtemos

$$P_j(\tau, x, \nu) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int dk e^{ikx} \frac{\exp [\bar{\nu} C_j(\tau, k) + \nu D_j(\tau, k)]}{ik} \quad (23.35)$$

Como o integrando para u negativo é o complexo conjugado, temos finalmente

$$P_j(\tau, x, \nu) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp [\bar{\nu} C_j(\tau, k) + \nu D_j(\tau, k) + ikx]}{ik} \right\} \quad (23.36)$$

O índice j em C_j e D_j é para lembrar, que r_{\pm} dependem de j via α e β !

Tanto o logaritmo com a raiz quadrada podem assumir valores complexos, pois dependendo dos parametros, os argumentos destas funções podem tornar-se negativos. Precisamos portanto proceder com cuidado. Não será necessario usar as infinitas folhas de Riemann do logaritmo⁸⁶, mas só precisamos o "valor principal" definido como

$$\log z = \log(|z|e^{i\phi}) = \log |z| + i\phi, \quad -\pi < \phi < \pi. \quad (23.37)$$

Igualmente o valor principal para a raiz é definido como

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\phi/2}, \quad 0 \leq \phi/2 < \pi. \quad (23.38)$$

Por causa destas propriedades do logaritmo e da raiz quadrada, a equ.(23.36) só foi destilada apos muita confusão. Pode-se verificar, que a integral é finita e o resultado correto é obtido usando o *valor principal* tanto para o logaritmo, quanto para a raiz quadrada[53].

O modelo de Heston é incompleto, pois a medida risco-neutra depende do parametro ξ . Precisamos portanto de uma adequada estrategia de *hedging*.

xx

23.2.1 Condições de contorno de Feller

Condições de contorno Feller

24 Volatilidade Local Aleatoria (VLA)

Na seção 23 apresentamos modelos com valores particulares para as funções α e β na equ.(22.1). Nestes ajustamos os parametros do modelo para obter o sorriso correto de opções vanilla e com isto precificar opções exóticas. Mas tivemos-nos restringir a valores especificos de K e T . Outro problema é que os modelos VL e VA precificam as opções exóticas de maneira diferente. Resolveremos estas deficiencias agora incluido no modelo de *Volatilidade Local Aleatoria* (VLA) uma componente (VL) e outra (VA).

⁸⁶ $\log x \rightarrow \log(xe^{2i\pi n}) = \log x + 2i\pi n$ para n inteiro!

De uma das muitas escolhas para modelo de volatilidade estocastica, escolhemos um modelo tipo Heston com "correção"

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + A(S, t) S \sigma dW^S \\ d\sigma &= -\lambda(\sigma - \bar{\sigma}) dt + \nu \sigma dW^\sigma \\ dW^S dW^\sigma &= \rho dt. \end{aligned} \quad (24.1)$$

com os parametros $\lambda, \nu, \bar{\sigma}, \rho$ determinados calibrando o modelo a superficie de volatilidade para alguns valores de K e T . A função adimensional $A(S, t)$, que é a novidade aqui, a determinar.

Vamos repetir os passos, que levaram a equação de Dupire, onde supusemos que $dS_t = (r - d)S_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dW_Q$. Trocando nesta equação o termo $\sigma(S_t, t)S_t dW_Q$ por $A(S, t)S \sigma dW^S$, resulta no lado esquerdo da equação de Dupire a grandeza

$$\langle A(S, t)^2 \sigma | S_T = S \rangle = \langle \sigma_{loc}^2(t, S | S_t = S) \rangle$$

Mas precisamos da função $A(S, t)$ e não somente a sua esperança. Entra aqui em cena um teorema assaz inesperado - pelo menos para alguns.

O teorema de **Gyöngy**[50, 54]:

Seja ξ_t um processo estocastico regido por

$$d\xi_t = \beta_t dt + \gamma_t dW_t, \quad (24.2)$$

onde β_t e δ_t são processos estocasticos adaptados e limitados. Então existe um processo x_t regido por

$$dx_t = \tilde{\beta}(t, x_t) dt + \tilde{\gamma}(t, x_t) dW_t, \quad (24.3)$$

com $\tilde{\beta}(t, x_t)$ e $\tilde{\gamma}(t, x_t)$ deterministicos, cuja solução x_t possui a mesma distribuição de probabilidade que ξ_t para qualquer t . Os coeficientes são dados por

$$\tilde{\beta}(t, x) = \langle \beta_t | \xi_t = x \rangle \quad (24.4)$$

$$\tilde{\gamma}(t, x)^2 = \langle \gamma_t^2 | \xi_t = x \rangle \quad (24.5)$$

Podemos agora usar o teorema de Gyöngy para obter

$$A(S, t)^2 = \frac{\sigma_{local}^2(S, t)}{\langle \sigma_t^2 | S \rangle}, \quad (24.6)$$

faltando calcular $\langle \sigma_t^2 | S \rangle$, que seria um problema não-linear, pois o processo S_t depende por sua vez da função $A(S, t)$.

Podemos circundar este problema usando a equação de Fokker-Planck equ.(14.29)

$$\begin{aligned} \partial_t p(x, t | x_0, t_0) + \partial_x [a(x, t)p(x, t | x_0, t_0)] \\ = \frac{1}{2} \partial_x^2 [b(x, t)^2 p(x, t | x_0, t_0)]. \end{aligned} \quad (24.7)$$

Aumentando para duas variáveis $x \rightarrow S, \sigma$ como na seção 14.3, resulta para a probabilidade $p(S, \sigma, t)$ de observar os valores S, σ no instante t

$$\begin{aligned} \partial_t p = -\frac{\partial(\mu S p)}{\partial S} - \frac{\partial}{\partial \sigma} [(-\lambda(\sigma - \bar{\sigma})p)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} [S^2 A(S, t)^2 \sigma^2 p] \\ + \rho \frac{\partial^2}{\partial S \partial \sigma} [\nu S A(S, t) \sigma^2 p] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} (\nu^2 \sigma^2 p) \end{aligned} \quad (24.8)$$

Teremos que resolver esta equação numericamente, discretizando as variáveis $\log S$ e σ "espaiciais" numa rede bidimensional e o tempo t . Usamos $\log S$ para um melhor resultado.

A condição inicial é

$$p(S, \sigma, 0) = \delta(\sigma - \sigma_0) \delta(S - S_0),$$

cuja versão discretizada é

$$p(S, \sigma, 0) = \begin{cases} 1/(\Delta S \Delta \sigma), & \text{para } S = S_0, \sigma = \sigma_0 \\ 0, & \text{alhores} \end{cases} \quad (24.9)$$

onde ΔS e $\Delta \sigma$ são os espaçamentos de S e σ na rede, além de

$$A(S_0, 0) = \frac{\sigma_{loc}(S, 0)}{\sigma_0}.$$

Com esta condição inicial descontínua usaremos o método Crank-Nicholson[55] da equ.(E.13). Suponha que chegamos em $t = t_n$. Aproximemos $A(S, t)$ no intervalo $[t_n, t_{n+1})$ por $A(S, t_n)$ obtendo $p(S, \sigma, t_{n+1})$. Para calcular $\langle \sigma_t^2 | S \rangle$ usemos

$$\langle \sigma_t^2 | S \rangle = \frac{\int \sigma^2 p(S, \sigma, t_{n+1}) d\sigma}{p(S, t_{n+1})}$$

com $p(S, t_{n+1}) = \int p(S, \sigma, t_{n+1}) d\sigma$. Na verdade podemos também obter $p(S, t_{n+1})$ diretamente derivando a superfície de volatilidade implícita, que

usamos para calibrar o modelo, ou seja $p(S, t_{n+1}) = e^{rT} \frac{\partial^2 \sigma_{loc}}{\partial K^2}$ da equ.(16.33). Para testar este metodo de *indução para frente* devemos precificar opções vanilla e verificar, se os preços coincidem com o sorriso de volatilidade usado para calibrar o modelo.

A maioria dos bancos de investimentos usa VLA acoplado ao metodo acima em seus sistemas de precificação .

xxxx verdade ?????????????????? xxxx

25 Delta-Hedging no discreto

Se fizermos um Δ -*hedge* continuamente a la BSM o portofolio replicante $\Pi_t = f_t$ será imune a variações δS_t do ativo subjacente até primeira ordem em δS_t . No entanto isto não é mais verdade, se o *hedge* é executado em instantes discretos t_k com $[\phi, \psi]$ mantidos constantes nos intervalos $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, k_T$ com $t_{k_T} = T$ e $\delta t = t_k - t_{k-1}$.

Pois vejamos. BSM fornece o valor $f(S, t)$ e o delta $\phi(t) = \frac{\partial f}{\partial S}(S, t)$. De um lado o portofolio replicante

$$\Pi(t) = \phi(t)S(t) + \psi(t)B(t), \quad \psi(t) = (\Pi(t) - \phi(t)S(t))/B(t)$$

evolui como

$$\Pi(t + \delta t) = \phi(t + \delta t)S(t + \delta t) + \psi(t + \delta t)B(t + \delta t). \quad (25.1)$$

Por outro lado o portofolio deve ser auto-financiante

$$\begin{aligned} \Pi(t + \delta t) &= \Pi(t) + \phi(t)\Delta S(t) + \psi(t)\Delta B(t) \\ &= \phi(t)S(t + \delta t) + \psi(t)B(t) \end{aligned} \quad (25.2)$$

Supondo por exemplo que a replicação seja exata no instante t , i.e. $\Pi(t) = f(t)$ e obtemos $\Pi(t + \delta t)$ usando a equ.(25.2). Mas não temos certeza que exista um ϕ que garanta $\Pi(t + \delta t) = f(t + \delta t)$ ou seja replicação exata neste instante. Pois comparando as eqs.(25.1,25.2) obtemos a seguinte condição de auto-financiamento⁸⁷

$$(\phi(t + \delta t) - \phi(t))S(t + \delta t) + (\psi(t + \delta t) - \psi(t))B(t + \delta t) = 0. \quad (25.3)$$

Repetindo!

⁸⁷No continuo a grandeza correspondente é a equ.(16.28: $A = S_t d\phi_t + B_t d\psi_t$), que se anula usando $d\tilde{f} = \phi d\tilde{S}$.

Em $t = t_{k-1}$ o nosso portofolio vale $\Pi_{k-1} = \phi_{k-1}S_{k-1} + \psi_{k-1}B_{k-1}$. Ao chegar no instante $t_k = t_{k-1} + \delta t$ registramos os novos valores S_t e B_t , mas ϕ, ψ ainda são os do instante t_{k-1} . O nosso portofolio vale então $\Pi_k = \phi_{k-1}S_k + \psi_{k-1}B_k$. *Re-hedging* com os novos valores de ϕ, ψ temos tambem

$$\Pi_k = \phi_k S_k + \psi_k B_k$$

resultando portanto

$$\Pi_k = \phi_{k-1}S_k + \psi_{k-1}B_k = \phi_k S_k + \psi_k B_k, \quad (25.4)$$

que implica

$$\boxed{(\phi_k - \phi_{k-1})S_k + (\psi_k - \psi_{k-1})B_k = 0} \quad (25.5)$$

que é a equ.(25.3) reescrita em termos dos tempos discretos.

Com tempo continuo o portofolio auto-financiante replica exatamente a opção. Aqui teremos que escolher entre satisfazer a condição de autofinanciamento ou minimizer o erro de replicação.

Vamos enumerar os erros a serem esperados.

1. Usamos a equação BSM para calcular o valor da opção f_t , que é adequado para dt infinitesimal, mas não δt finito. Em particular $(dW)^2 \neq \delta t$.
2. *Delta-hedge*: impondo $\phi(t_k) = \frac{\partial f(t_k)}{\partial S}$, ou seja escolhendo o delta do portofolio igual ao delta BSM, zeramos o erro de replicação, mas somente até primeira ordem em δt .

Então para satisfazer a condição de autofinanciamento equ.(25.5) escolhemos:

$$\psi_k = \psi_{k-1} - (\phi_k - \phi_{k-1}) \frac{S_k}{B_k}, \quad (25.6)$$

$$\psi_{k_T-1} = \psi_0 - \sum_{k=1}^{k_T-1} (\phi_k - \phi_{k-1}) \frac{S_k}{B_k}. \quad (25.7)$$

e usamos BSM para calcular f_t e

$$\phi_t = \frac{\partial f_t}{\partial S_t}, \quad (25.8)$$

usando e.g. a equ.(16.39) e pondo $t = t_k$. Iteramos a estratégia para $k = 0, 1, \dots, k_T - 1$ com a condição inicial é $\Pi_0 = f_0 = \phi_0 S_0 + \psi_0 B_0$ $\phi_0 = \frac{\partial f_0}{\partial S}$, $\psi_0 = \frac{f_0 - \phi_0 S_0}{B_0}$.

Vamos então executar a seguinte **estratégia de hedging auto-financiante** para vender um *call*.

1. Em $t = 0$ ($\tau = T, k = 0$) vendemos um *call* por c_0 . Compramos $\phi_0 S_0$ ativos e investimos simultaneamente o restante⁸⁸ $c_0 - \phi_0 S_0 = B_0 \psi_0$. O nosso portofolio replicante valendo então

$$\Pi_0 = \phi_0 S_0 + \psi_0 B_0 = \underbrace{\phi_0 S_0}_{\text{ativos}} + \underbrace{(c_0 - \phi_0 S_0)}_{\text{titulos}} = c_0 \quad (25.9)$$

2. Em $t = \delta t$ ($k = 1$) o ativo mudou para S_1 e a grana rendeu juros a taxa r . Portanto o portofolio vale

$$\Pi_1 = \phi_0 S_1 + \psi_0 B_1 = \underbrace{\phi_0 S_1}_{\text{ativos}} + \underbrace{(c_0 - \phi_0 S_0) e^{r\delta t}}_{\text{titulos}}. \quad (25.10)$$

Somos instruídos a possuir $\phi_1 S_1$ ativos. Temos pois comprar (ou vender, dependendo do sinal) o adicional

$$\phi_1 S_1 - \phi_0 S_1$$

de ativos, que investimos para render juros. Temos portanto

$$\Pi_1 = \underbrace{\phi_0 S_1}_{\text{ativos}} + \underbrace{(c_0 - \phi_0 S_0) e^{r\delta t}}_{\text{titulos}} + \underbrace{(\phi_1 - \phi_0) S_1}_{\text{ativos}} - \underbrace{(\phi_1 - \phi_0) S_1}_{\text{titulos}} \quad (25.11)$$

O valor do portofolio Π_1 não mudou ao fazermos o *rehedging*, pois somente mudamos a proporção entre o ativo subjacente e o título. Simplificando resulta para Π_1 o valor

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \underbrace{\phi_1 S_1}_{\text{ativos}} + \underbrace{(c_0 - \phi_0 S_0) e^{r\delta t}}_{\text{titulos}} - \underbrace{(\phi_1 - \phi_0) S_1}_{\text{titulos}} \\ &= \phi_1 S_1 + \psi_1 B_1 \end{aligned} \quad (25.12)$$

com

$$\psi_1 = (c_0 - \phi_0 S_0) - (\phi_1 - \phi_0) \frac{S_1}{B_1} = \psi_0 - (\phi_1 - \phi_0) \frac{S_1}{B_1}, \quad (25.13)$$

que é a equ.(25.6) para ψ_1 .

⁸⁸Para enfatizar a inicialização usamos B_0 , mas quando convier usaremos $B_0 = 1$!

3. Em $t = 2\delta t (k = 2)$ o ativo mudou para S_2 e a grana rendeu juros a taxa r . Portanto o portfólio vale

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= \phi_1 S_2 + \psi_1 B_2 \\ &= \underbrace{\phi_1 S_2}_{\text{ativos}} + \underbrace{(c_0 - \phi_0 S_0) e^{2r\delta t}}_{\text{titulos}} - \underbrace{(\phi_1 - \phi_0) S_1 e^{r\delta t}}_{\text{titulos}}.\end{aligned}\quad (25.14)$$

Somos instruídos a possuir $\phi_2 S_2$ ativos. Temos pois comprar (ou vender, dependendo do sinal) o adicional

$$\phi_2 S_2 - \phi_1 S_2$$

de ativos, que investimos para render juros. Temos portanto

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= \underbrace{\phi_1 S_2}_{\text{ativos}} + \underbrace{(c_0 - \phi_0 S_0) e^{2r\delta t}}_{\text{titulos}} - \underbrace{(\phi_1 - \phi_0) S_1 e^{r\delta t}}_{\text{titulos}} \\ &\quad + \underbrace{(\phi_2 - \phi_1) S_2}_{\text{ativos}} - \underbrace{(\phi_2 - \phi_1) S_2}_{\text{titulos}}\end{aligned}$$

e simplificando resulta

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= \underbrace{\phi_2 S_2}_{\text{ativos}} + \underbrace{(c_0 - \phi_0 S_0) e^{2r\delta t}}_{\text{titulos}} - \underbrace{(\phi_1 - \phi_0) S_1 e^{r\delta t}}_{\text{titulos}} - \underbrace{(\phi_2 - \phi_1) S_2}_{\text{titulos}} \\ &= \phi_2 S_2 + \psi_2 B_2\end{aligned}\quad (25.15)$$

com

$$\begin{aligned}\psi_2 &= (c_0 - \phi_0 S_0) - (\phi_1 - \phi_0) \frac{S_1}{B_1} - (\phi_2 - \phi_1) \frac{S_2}{B_2} \\ &= \psi_1 - (\phi_2 - \phi_1) \frac{S_2}{B_2}\end{aligned}\quad (25.16)$$

que é a equ.(25.6) para ψ_2 .

4. Em todos instantes t_k usamos os valores de ϕ_k e acertamos o novo *hedge* para possuir $\phi_k S_k$ em ativos e $(\Pi_k - \phi_k S_k)$ em títulos.
5. Chegando em $t = T (k = k_T)$ estamos ainda com $[\phi_{k_T-1}, \psi_{k_T-1}]$, mas com novos valores $[S_k, B_k]$ o portfólio valendo

$$\Pi_{k_T} = \phi_{k_T-1} S_{k_T} + \psi_{k_T-1} B_{k_T}$$

$$= \underbrace{\phi_{k_T-1} S_{k_T}}_{\text{ativos}} + \underbrace{\left((c_0 - \phi_0 S_0) - \sum_{k=1}^{k_T-1} (\phi_k - \phi_{k-1}) \frac{S_k}{B_k} \right)}_{\text{titulos}} B_{k_T}, \quad (25.17)$$

onde usamos a equ.(25.7) para ψ_{k_T-1} .

Note que fazemos nenhum *hedge* neste instante, pois tanto o ativo como o titulo atingiram os seus valores finais S_T e B_T e vamos imediatamente vender todo o portofolio para satisfazer nossas eventuais obrigações. Portanto podemos até fazer um rebalanceamento, mas seria inocuo.

Π_{k_T} deveria igualar o retorno $(S_T - K)_+$. Portanto o erro de replicação para uma opção *call* em nossa estrategia auto-financiante é

$$E_{k_T} = (S_T - K)_+ - \Pi_{k_T}. \quad (25.18)$$

Alem disso perdemos a estrutura do contínuo: a formula de Feynman-Kac e a precificação via martingales. Somos portanto sujeito a arbitragens mesmo nos instantes t_k ! Nada garante que $\Pi_k = c_k, k = 1, 2, \dots$ e teremos um erro de replicação $e_k = \Pi_k - c_k$ com possibilidade de arbitragem.

No limite $\delta t \rightarrow 0$ obtemos da equ.(25.17) com c_t, ϕ_t não necessariamente BSM

$$c_T = \phi_T S_T + (c_0 - \phi_0 S_0) e^{rT} - \int_0^T e^{r(T-s)} [S_s d\phi_s]_1, \quad (25.19)$$

onde $[S_s d\phi_s]_1$ indica a integral com o integrando na posição final, ao invés de estar na posição inicial como exige a integral de Ito.

Para converter S_i para a posição inicial vamos usar a equ.(13.27) de integração por partes:

$$\begin{aligned} & e^{-rs} [S_s d\phi_s]_1 - \phi_s d[e^{-rs} S_s] \\ &= d(e^{-rs} S_s \phi_s) - e^{-rs} \phi_s [dS_s - r S_s ds]. \end{aligned} \quad (25.20)$$

Mudando a notação $\phi_t \rightarrow \Delta_t$, a integral para c_0 é

$$\begin{aligned} c_0 &= c_T e^{-rT} - e^{-rT} \Delta_T S_T + \Delta_0 S_0 \\ &+ e^{-rT} \Delta_T S_T - \Delta_0 S_0 - \int_0^T e^{-rs} \Delta_s [dS_s - r S_s ds]. \end{aligned} \quad (25.21)$$

Cancelando o termo $-e^{-rT} \Delta_T S_T + \Delta_0 S_0$ obtemos

$$c_0 = c_T e^{-rT} - \int_0^T e^{-rs} \Delta(S_s, s) [dS_s - r S_s ds]. \quad (25.22)$$

$\Delta(S_t, t)$ codifica a nossa estratégia de *hedging*. Até aqui não fizemos nenhuma hipótese sobre a evolução do ativo e portanto não sabemos os valores de S_s . Agora, se ele evoluir como $dS = rSdt + \sigma Sd\tilde{W}$ então temos

$$c_0 = c_T e^{-rT} - \int_0^T e^{-rt} \Delta(S_s, t) \sigma S_t d\tilde{W}_t. \quad (25.23)$$

A presença de $\Delta(S_s, s)$ mostra explicitamente a dependência no caminho aleatório do ativo S , a não ser que $\Delta = \Delta_{BS}$. Isto mostra que descontando o portfólio pelo fator e^{-rT} é necessário, mas não suficiente para evitar arbitragem. Somente no mundo BSM a expressão equ.(25.23) é um *hedge* perfeito, i.e. quando $\Delta_i = \Delta_i^{BSM} = N(d_+)$ esta fórmula produz um resultado único independente do caminho e sem risco.

A equação acima é a equ.(16.20), que obtivemos integrando a condição de auto-financiamento $dc_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$. Como $dS_t = S(t+dt) - S(t)$ as variáveis ϕ_t, ψ_t aparecem na posição inicial resultando portanto na integral de Ito. Isto se inverte ao integrarmos sobre $d\phi$!

Tomado esperanças obtemos com $\langle d\tilde{W}_t \rangle_{\mathcal{Q}} = 0$

$$\left\langle \frac{c_0}{B_0} \right\rangle_{\mathcal{Q}} = \frac{c_0}{B_0} = \left\langle \frac{c_T}{B_T} \right\rangle_{\mathcal{Q}} \quad (25.24)$$

ou com $B_0 = 1$

$$c_0 = \left\langle \frac{c_T}{B_T} \right\rangle_{\mathcal{Q}}. \quad (25.25)$$

Contanto que o ativo siga um processo de Wiener geométrico com arrasto r , este resultado - a fórmula BSM para um *call* - vale qualquer que seja $\Delta(S_t, t)$, inclusive $\Delta(S_t, t) = 0$, ou seja é independente da estratégia de *hedging*! [9].

Aqui supusemos conhecer os valores de Δ_i . No entanto no mundo real isto raramente é verdade e devemos recorrer a algo mais elaborado incluindo e.g. o controle da volatilidade [9] do cap.21, mas agora para tempos discretos!

Veja o Apendice F.2 como operar no modelo BSM usando Scilab.

25.1 O erro de replicação

Vamos supor que em $t = 0$ o portfólio replique a opção em $t = 0$: $\Pi(0) = f(0)$. Mas não temos garantia, que esta igualdade seja mantida para $t > 0$ pois Π e $f(t)$ podem evoluir diferentemente. Para esmuiçar o erro $\Delta f(t)$ -

$\Delta\Pi(t)$ de replicação, vamos supor δt "suficientemente" pequeno para poder expandir $f(t + \delta t)$ somente ate primeira ordem em δt

$$\Delta f(S, t) = f(t + \delta t) - f(t) = \frac{\partial f(t)}{\partial t} \delta t + \frac{\partial f(t)}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\Delta S)^2. \quad (25.26)$$

Usando esta equação com $t = t_k$ e a eq.(25.2: $\Delta\Pi_k = \phi_k \Delta S_k + \psi_k \Delta B_k$) com $\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$, $\Delta S_k = S_{k+1} - S_k$ e $\Delta B_k = B_{k+1} - B_k = r B_k \delta t$ obtemos

$$\begin{aligned} \Delta f_k - \Delta\Pi_k &= \frac{\partial f_k}{\partial t} \delta t + \frac{\partial f_k}{\partial S} \Delta S_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} (\Delta S_k)^2 \\ &\quad - \phi_k \Delta S_k - \psi_k \Delta B_k \\ &= \left(\frac{\partial f_k}{\partial S} - \phi_k \right) \Delta S_k + \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} - \psi_k r B_k \right) \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial S^2} (\Delta S_k)^2. \end{aligned}$$

Com a equ.(25.8: $\phi_k = \partial f_k / \partial S$) sobra para o erro replicante

$$\begin{aligned} (\Delta f - \Delta\Pi)_k &= \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} - \psi_k r B_k \right) \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial S^2} (\Delta S_k)^2 \\ &= \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} - r \left(f_k - \frac{\partial f_k}{\partial S} S_k \right) \right) \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial S^2} (\Delta S_k)^2. \end{aligned} \quad (25.27)$$

Anular este erro requereria satisfazer uma equação BSM no discreto enfrentando a aleatoriedade de $(\Delta S_k)^2$:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + r S_k \frac{\partial f_k}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_k}{\partial S^2} \frac{(\Delta S_k)^2}{\delta t} - r f_k = 0, \quad (25.28)$$

o que é algo difícil⁸⁹ de encarar! Não podendo eliminar o erro instantaneamente, podemos impor um criterio menos exigente: anular o erro na media[37].

Exercicio 25.1 (Hedging discreto) . .

Use Scilab para estimar a media e variança do erro de replicação E_{k_T} .

Exercicio 25.2 (Hedging um call curto) . .

Use Scilab para calcular a sequencia das operações ilustradas acima. Precifica por BSM e calcule os erros.

⁸⁹No continuo com $\Delta \rightarrow d$ e $(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$ $f(t)$ satisfaz a equação BSM.

26 Mais que um ativo subjacente e ativos não-negociáveis

Muitas opções populares envolvem mais que um ativo subjacente, que podem ser correlacionados. Vejamos alguns exemplos.

26.1 Dois ativos dependendo do mesmo processo de Wiener

Suponha que tenhamos dois ativos subjacentes $S_t^i, i = 1, 2$, seguindo o mesmo processo de Wiener

$$dS_t^i = S_t^i(\mu_i dt + \sigma_i dW_t), \quad i = 1, 2. \quad (26.1)$$

Conforme a equ.(15.4) introduzimos uma nova medida \mathcal{Q} sob a qual os preços descontados sejam uma martingale. Segue-se, que o processo

$$\tilde{W}_t = W_t + \left(\frac{\mu_i - r}{\sigma_i}\right)t \quad (26.2)$$

deve ser Wiener sob medida \mathcal{Q} para $i = 1$ e $i = 2$. Mas para isto é necessário, que as duas razões de Sharpe sejam iguais

$$\lambda = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}, \quad (26.3)$$

tal como na equ.(17.10). Ou seja, para ser negociável em nosso mercado ideal definido por um ativo S_t e um numerário B_t , um outro ativo \hat{S}_t deve compartilhar com S_t de uma medida martingale risco-neutra. Se tivermos mais que um ativo ($n_S \geq 2$), todos os ativos, que são negociados no mercado, devem ter as mesmas razões de Sharpe.

Se as razões de Sharpe não forem iguais, teríamos possibilidade de arbitragem! Pois temos somente um processo de Wiener ($n_W = 1$), cuja medida podemos mudar via teorema de Girsanov. Mas temos dois ou mais ativos aleatórios, que deveriam ser martingales sob esta medida. Generalizando: se tivermos $n_S > n_W$ temos possibilidade de arbitragem.

Podemos aumentar o número n_W de processos de Wiener para evitar arbitragem. Mas se $n_W > n_S$, teríamos mais de uma medida risco-neutra.

Isto exclui a possibilidade de arbitragem, mas o mercado seria incompleto. Resumindo temos

$$\begin{aligned} n_S > n_W &\rightarrow \text{arbitragem} \\ n_S < n_W &\rightarrow \text{mercado incompleto} \end{aligned}$$

Temos pois o teorema de Harrison/Pliska sobre **ausencia de arbitragem e completeza**:

1. Um mercado é livre de arbitragem, sse existir pelo menos uma medida risco-neutra e
2. neste caso o mercado é completo, sse existir somente uma medida risco-neutra

Se $n_S = n_W$ o mercado é completo sem possibilidade de arbitragem - a não ser que recorremos a outras restrições como na equ.(26.3).

Exercício 26.1.

Verifique, que não podemos formar um portofolio replicante auto-financiante com dois ativos evoluindo independentemente e um só título. Para isto replique as contas da seção 16.2 para este caso.

26.2 n ativos seguindo n processos de Wiener

Acabamos de tratar com ativos independentes, ms isto em geral não é o caso. Consideremos portanto um modelo, que contem um título B_t , n processos de Wiener indendentos e n diferentes ativos $S_t^i, i = 1, 2, ..n$ correlacionados, obdecendo as equações

$$\begin{aligned} dB_t &= r_t B_t dt, \\ dS_t^i &= S_t^i \left(\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t) dW_t^j + \mu_t^i dt \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (26.4)$$

Os ativos são correlacionados pela matriz de correlação $\Sigma_t = \sigma_{ij}(t)$ ⁹⁰. Incluimos uma dependencia temporal no arrasto e na volatilidade.

⁹⁰Como veremos, deve ser inversível.

Integrando obtemos

$$\begin{aligned} B_t &= e^{\int_0^t r_s ds}, \\ S_t^i &= S_0^i \exp\left(\sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_{ij}(s) dW_s^j + \int_0^t \left(\mu_s^i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2(s)\right) ds\right). \end{aligned} \quad (26.5)$$

Vamos adicionar um arrasto $\lambda_t = [\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^n]$ aos processos de Wiener:

$$\tilde{W}_t^i = W_t^i + \int_0^t \lambda_s^i ds, \quad (26.6)$$

para que sejam \mathcal{Q} -Wiener. Com isto os ativos descontados $\tilde{S}_t^i = B_t^{-1} S_t^i$ obedecem,

$$d\tilde{S}_t^i = \tilde{S}_t^i \left(\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t) d\tilde{W}_t^j + (\mu_t^i - r_t - \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t) \lambda_t^j) dt \right) \quad (26.7)$$

Para anular os arrastos impomos

$$\mu_t^i - r_t - \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t) \lambda_t^j = 0, \forall t. \quad (26.8)$$

Em forma matricial temos

$$\Sigma_t \lambda_t = \mu_t - r_t,$$

onde λ_t, μ_t são vetores coluna e r_t é o vetor $[r_t, r_t, \dots, r_t]'$. Impondo que Σ_t seja inversível para qualquer t temos

$$\lambda_t = \Sigma_t^{-1} (\mu_t - r_t). \quad (26.9)$$

Ou seja $\mu_t - r_t$ pertence a imagem de Σ_t : $\mu_t - r_t \in \mathcal{Im}[\Sigma_t]$.

Podemos então formar um portfólio $\Pi_t = \sum_{j=1}^n \phi_t^j S_t^j + \psi_t B_t$ consistindo de $S_t^i, i = 1, 2, \dots, n$ e um título B_t . O preço de uma opção f_t com retorno Z seria

$$f_t = \frac{B_t}{B_T} \langle Z | \mathcal{F}_t \rangle_{\mathcal{Q}} \quad (26.10)$$

O teorema de representação de martingales garante, que existe um vetor $\phi_t = [\phi_t^1, \phi_t^2, \dots, \phi_t^n]$ tal que analogamente a equ.(16.20)

$$\tilde{f}_t = \tilde{f}_0 + \int_0^t \phi_s \cdot d\tilde{S}_s \quad (26.11)$$

com $\mathbf{S}_t = [S_t^1, S_t^2, \dots, S_t^n]'$. A estratégia de *hedging* consiste portanto em manter um portfólio replicante e auto-financiante

$$df_t = \phi_t \cdot dS_t + \psi_t dB_t$$

com $\phi_t^j = \frac{\partial f_t}{\partial S_t^j}$.

27 Mudando de Numerario com Multiplos ativos independentes

Suponha que temos n ativos subjacentes $S_t^i, i = 1, \dots, n$ e mais dois ativos B_t e C_t e queremos escolher um dos dois como numerario. Por exemplo um em reais e outro em dollar ou qualquer instrumento negociavel. Escolhendo B_t como numerario, devemos achar uma medida em que

$$S_t^i/B_t, i = 1, \dots, n \quad e \quad C_t/B_t$$

sejam \mathcal{Q}^B -martingales. O valor do derivativo com retorno Z no instante t com maturação T será

$$f_t = \frac{B_t}{B_T} \langle Z | \mathcal{F}_t \rangle_{\mathcal{Q}^B}. \quad (27.1)$$

No entanto se escolhermos C_t como numerario, temos que encontrar uma outra medida \mathcal{Q}^C sob a qual

$$S_t^i/C_t, i = 1, \dots, n \quad e \quad B_t/C_t$$

sejam \mathcal{Q}^C martingales e o valor da opção seria

$$f_t = \frac{C_t}{C_T} \langle Z | \mathcal{F}_t \rangle_{\mathcal{Q}^C}. \quad (27.2)$$

Surge a questão: será que os valores obtidos usando numerarios diferentes são realmente o iguais? É melhor que sejam!

Verifiquemos que de fato são. Das equações para f_t vemos que deve valer

$$\frac{B_t}{B_T} \langle Z | \mathcal{F}_t \rangle_{\mathcal{Q}^B} = \frac{C_t}{C_T} \langle Z | \mathcal{F}_t \rangle_{\mathcal{Q}^C} \quad (27.3)$$

para que o valor de f_t seja independente do numerario usado.

- Para verificar esta relação usamos a equ.(15.22) válida para qualquer processo X_t

$$\mathcal{D}_s \langle X_t | \mathcal{F}_s \rangle_{\mathcal{Q}^C} = \langle \mathcal{D}_t X_t | \mathcal{F}_s \rangle_{\mathcal{Q}^B}, \quad s < t. \quad (27.4)$$

Se X_t for uma \mathcal{Q}^C -martingale, a equação se torna

$$\mathcal{D}_s X_s = \langle \mathcal{D}_t X_t | \mathcal{F}_s \rangle_{\mathcal{Q}^B},$$

mostrando que $\mathcal{D}_s X_s$ é uma \mathcal{Q}^B -martingale. Logo a razão entre esta martingale e a \mathcal{Q}^C -martingale X_t é \mathcal{D}_s .

As \mathcal{Q}^B -martingales são

$$1, C_t/B_t, S_t^i/B_t$$

e as \mathcal{Q}^C -martingales são

$$B_t/C_t, 1, S_t^i/C_t,$$

onde incluímos a martingale constante (= 1). A razão comum entre eles é $\frac{C_t}{B_t}$ e temos portanto

$$\mathcal{D}_t = \frac{C_t}{B_t}. \quad (27.5)$$

Usando a equ.(27.4) com $s \rightarrow t, t \rightarrow T, X_T = Z$ resulta

$$\frac{C_t}{B_t} \langle Z | \mathcal{F}_t \rangle_{\mathcal{Q}^C} = \frac{C_T}{B_T} \langle Z | \mathcal{F}_t \rangle_{\mathcal{Q}^B},$$

que é a equ.(27.3).

Em particular o investidor em reais e o outro em dollar da seção 28 concordarão sobre o preço dos derivativos.

28 Quantos

Quanto é uma opção, que paga na moeda errada ou seja: numa moeda diferente daquela usada para negociar o ativo. Ela dependerá portanto da taxa de cambio, que em geral é aleatoria. É crucial identificar corretamente as quantidades negociáveis em nosso mercado brasileiro, quando são cotadas e.g. na bolsa de Nova York em dollar. Considere por exemplo uma opção *call*

com ativo subjacente S , e.g. ações da Rockwell, com preço de exercício cotado em dollar⁹¹, pagando no tempo de exercício o valor $(S_T - K)_+$. Ela é negociável em dollar, mas não em real. Para torna-la negociável em reais multiplicamo-la pela taxa de cambio C_t .

Seja então C_t o valor de um dollar em reais no instante t , que tem sido $C_t > 1$. E seja B_t o título em reais crescendo a taxa de r_B , D_t o título analogo no mercado americano crescendo a taxa r_A e ativo S_t cotado em dollar. Introduzindo dois processos de Wiener $W_t^{(1)}$ e $W_t^{(2)}$ independentes, o nosso modelo é descrito pelas equações

$$\begin{aligned} B_t &= B_0 e^{r_B t} \\ D_t &= D_0 e^{r_A t} \\ S_t &= S_0 e^{\mu_1 t + \sigma_1 W_t^{(1)}} \\ C_t &= C_0 e^{\mu_2 t + \sigma_2 (\rho W_t^{(1)} + \tilde{\rho} W_t^{(2)})} \end{aligned} \quad (28.1)$$

com $\tilde{\rho} = \sqrt{1 - \rho^2} \neq 0$. Supusemos aqui uma correlação ρ entre o ativo S_t e a taxa de cambio C_t .

Temos tres itens negociáveis em reais: a ação da Rockwell em reais $C_t S_t$, o título americano convertido para reais $C_t D_t$ e o título em reais B_t . Descontando-os pelo numerario em reais temos dois processos

$$X_t^{(1)} = B_t^{-1} C_t D_t \quad X_t^{(2)} = B_t^{-1} C_t S_t$$

e devemos achar processos de Wiener sob os quais estes processos sejam martingales.

Derivando as equ.(28.1) obtemos

$$\begin{aligned} dX_t^{(1)} &= X_t^{(1)} \left(\sigma_2 (\rho dW_t^{(1)} + \tilde{\rho} dW_t^{(2)}) + (\mu_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 + r_A - r_B) dt \right) \\ dX_t^{(2)} &= X_t^{(2)} \left((\sigma_1 + \rho \sigma_2) dW_t^{(1)} + \tilde{\rho} \sigma_2 dW_t^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. (\mu_2 + \mu_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 + \rho \mu_1 \mu_2 + \frac{1}{2} \sigma_2^2 - r_B) dt \right) \end{aligned} \quad (28.2)$$

Podemos condensá-las em forma vetorial pondo

$$\begin{pmatrix} X_t^{(1)} \\ X_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_t^{-1} C_t D_t \\ B_t^{-1} C_t S_t \end{pmatrix}$$

⁹¹Ignoramos questões de fuso horario.

Introduzindo a abreviações

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + r_A - r_B, \\ \nu_2 &= \mu_2 + \mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\mu_1\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r_B \\ \sigma_{11} &= \rho\sigma_2, & \sigma_{12} &= \tilde{\rho}\sigma_2 \\ \sigma_{21} &= \sigma_1 + \rho\sigma_2, & \sigma_{22} &= \tilde{\rho}\sigma_2\end{aligned}$$

vemos que $X_t^{(i)}$ satisfaz

$$dX_t^{(i)} = X_t^{(i)} \left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} dW_t^{(j)} + \nu_i dt \right). \quad (28.3)$$

Teremos que efetuar uma mudança de medida para que os dois processos $X_t^{(i)}, i = 1, 2$ não tenham arrasto. Como temos duas fontes de risco $W_t^{(i)}, i = 1, 2$ teremos duas razões de Sharpee $\lambda_i, i = 1, 2$. Como na equ.(15.4) adicionemos um arrasto λ_i a $W_i(t)$, de maneira que

$$\tilde{W}_t^{(i)} = W_t^{(i)} + \lambda_i t \quad (28.4)$$

seja Wiener sob a nova medida \mathcal{Q} . A equação para $X_i(t)$ em termos de $\tilde{W}_t^{(i)}$ é

$$dX_t^{(i)} = X_t^{(i)} \left(\sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} d\tilde{W}_t^{(j)} + \left(\nu_i - \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} \lambda_j \right) dt \right). \quad (28.5)$$

Para zerar o arrasto devemos impor

$$\nu_i - \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij} \lambda_j = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\lambda} \quad (28.6)$$

ou seja $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\nu}$. Explicitando as componentes temos pois

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\sigma_2 & \tilde{\rho}\sigma_2 \\ \sigma_1 + \rho\sigma_2 & \tilde{\rho}\sigma_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + r_A - r_B \\ \mu_2 + \mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\mu_1\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r_B \end{pmatrix}.$$

Com

$$\begin{pmatrix} \rho\sigma_2 & \tilde{\rho}\sigma_2 \\ \sigma_1 + \rho\sigma_2 & \tilde{\rho}\sigma_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{\tilde{\rho}\sigma_1\sigma_2} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}\sigma_2 & -\tilde{\rho}\sigma_2 \\ -(\sigma_1 + \rho\sigma_2) & \rho\sigma_2 \end{pmatrix} \quad (28.7)$$

resulta

$$\lambda_1 = \frac{\mu_1 + \frac{1}{2}\sigma_1 + \rho\sigma_1\sigma_2 - r_A}{\sigma_1} \quad (28.8)$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu_2 + \frac{1}{2}\sigma_2 - \rho\sigma_1\sigma_2 + r_A - r_B}{\tilde{\rho}\sigma_2} \quad (28.9)$$

Sob medida \mathcal{Q} os processos $X_i(t), i = 1, 2$ são martingales e sob esta medida S_t e C_t obedecem

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{(r_A - \rho\sigma_1\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)t + \sigma_1 \tilde{W}_1(t)} \\ C_t &= C_0 e^{(r_B - r_A - \frac{1}{2}\sigma_2^2)t + \sigma_2(\rho\tilde{W}_1(t) + \tilde{\rho}\tilde{W}_2(t))} \end{aligned} \quad (28.10)$$

que dependem inter-alia das taxas de desconto r_B, r_A .

Exercício 28.1.

A distribuição Gaussiana de duas variáveis normais x_1, x_2 , que não são independentes é

$$p(x_1, x_2) \sim e^{-a_{11}x_1^2 - a_{12}x_1x_2 - a_{22}x_2^2},$$

com a_{ij} uma matriz positiva. Calcule a_{ij} de modo que $\langle x_i \rangle = 1, \langle x_1, x_2 \rangle = \rho$.

Exercício 28.2.

Mostre, que $W_3(t) = \rho W_1(t) + \tilde{\rho} W_2(t)$ também é um processo de Wiener e a correlação entre $W_1(t)$ e $W_3(t)$ é igual a $\langle W_1(t)W_3(t) \rangle = \rho t$.

Exercício 28.3.

Introduzindo o vetor

$$V_t = [\log S_t, \log C_t], \quad (28.11)$$

mostre, que a média de V_t é $\langle V_t \rangle = [\log S_0 + \mu_1 t, \log C_0 + \mu_2 t]$ e sua matriz de covariância é

$$Cov(V) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} t. \quad (28.12)$$

28.1 Precificando

Tendo a disposição a medida livre de risco \mathcal{Q} , podemos precificar nossa opção Quanto.

- Precifiquemos primeiro um contrato a termo. Vamos reescrever a equ.(28.10) isolando um preço a termo

$$S_T = e^{-\rho\sigma_1\sigma_2 T} F e^{\sigma_1\sqrt{T}w - \frac{1}{2}\sigma_1^2 T} \quad (28.13)$$

com $F = S_0 e^{r_A T}$ e w um processo normalmente distribuido com $\mathcal{N}(0, 1)$ sob medida \mathcal{Q} . Usando a equ.(10.6): $\langle e^Y \rangle = e^{\langle Y \rangle + \frac{1}{2} \text{Var}(Y)}$ obtemos o valor do contrato-a-termo em $t = 0$ em reais como

$$V_0 = e^{-r_B T} \langle S_T - K \rangle_{\mathcal{Q}} = e^{-r_B T} (F_Q - K), \quad (28.14)$$

com $F_Q = S_0 e^{r_A T - \rho \sigma_1 \sigma_2}$. Para zerar o valor do contrato-a-termo devemos ter

$$K = F_Q = e^{-\rho \sigma_1 \sigma_2 T} F. \quad (28.15)$$

- O preço de uma opção *call* com K medido em reais é $e^{-rT} \langle (S_T - K)_+ |_{\mathcal{F}_0} \rangle_{\mathcal{Q}}$, ou seja

$$c_0 = e^{-rT} \left(F_Q \mathcal{N}(l_+) - K \mathcal{N}(l_-) \right) \quad (28.16)$$

com

$$l_{\pm} = \frac{\log \frac{F_Q}{K} \pm \frac{1}{2} \sigma_1^2 T}{\sigma_1 \sqrt{T}} \quad (28.17)$$

com σ_1 a volatilidade do ativo S_t . Esta formula é igual a formula original de Black, mas como novo preço-a-termo F_Q .

A estrategia ϕ_t, ψ_t é

$$\begin{aligned} \phi_t &= e^{-rT} \mathcal{N} \left(\frac{\log \frac{F_t}{K} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 (T-t)}{\sigma_1 \sqrt{T-t}} \right) \\ \psi_t &= -K e^{-rT} \mathcal{N} \left(\frac{\log \frac{F_t}{K} - \frac{1}{2} \sigma_1^2 (T-t)}{\sigma_1 \sqrt{T-t}} \right) \end{aligned} \quad (28.18)$$

com $F_t = e^{(r_B - r_A)(T-t)} C_t$.

Será que os investidores em reais e os em dolares, que usam medidas \mathcal{Q}^B e \mathcal{Q}^C diferentes, concordam sobre o preço dos derivativos. Para a demonstração veja a seção 27.

Note que $K = F_Q$ e não simplesmente F ! Já que σ_1 e σ_2 são positivos, temos que $F > F_Q$, se $\rho > 0$ ou seja correlação positiva entre o ativo e a taxa de cambio e o contrario, se $\rho < 0$.

Exemplo 28.1.

Vamos precificar um contrato-a-termo. Suponha que o valor de um ativo da firma Dreadco é negociada por \$100 na bolsa de Nova York, que a taxa de

desconto do dolar seja 2% por ano e que a taxa de desconto do real seja 5%. Suponha ainda a volatilidade $\sigma_2 = \sigma_{Dreadco} = 20\%$ e a volatilidade da taxa de cambio seja $\sigma_1 = 12\%$ e a correlação entre os dois seja 20% e o preço $K = \$50$. Supondo seis meses de maturação temos

$$S_0 = 100, K = 50, u = 0.02, r = 0.05, \sigma_1 = 0.12, \sigma_2 = 0.20, \rho = 0.3, T = 0.5$$

seguinto-se, usando a equ.(28.14), que

$$F = 100e^{0.02 \times 0.5} = 101.004$$

O valor do contrato em reais é

$$V_0 = e^{-0.05 \times 0.5} (e^{-0.3 \times 0.12 \times 0.20 \times 0.5} F - 50) = 47.025.$$

Exercício 28.4

Suponha que \tilde{C}_t seja a taxa de cambio dando o valor de um real em dolar ou seja a taxa ao contrario de C_t . Repita os calculos usando C_t^{-1} ao invés de C_t . Mostre que a unica mudança é que $\rho \rightarrow -\rho$ com o novo valor a-termo $F_Q \rightarrow S_0 e^{+\rho \sigma_1 \sigma_2}$.

29 Precificando opções com barreiras

Uma opção de barreira *knock-out* é uma opção vanilla, mas que expira sem valor se o ativo atinge um certo valor L - a barreira - durante a vigencia do contrato. O caso contrario é a barreira *knock-in*, que possui valor somente, se o ativo atinge a barreira. Uma vez que a barreira é atingida, a opções vive normalmente até a expiração.

Opções de barreira são muito populares. As condições adicionais, que as barreiras impoem, reduzem o preço da opção. Se um agente acredita, que seja pouco provavel que a barreira será atingida, então poderia comprar uma opção *knock-out*. Ela é mais barata e a barreira terá pouca chance de afetar a opção. Analogamente se alguem quiser proteger a sua posição, mas somente se o ativo atingir um certo valor, poderia comprar uma opção *knock-in*.

Um portofolio contendo uma opção knock-in *ki* e uma knock-out *ko* é equivalente a possuir uma opção vanilla sem barreira k_0 , ou seja

$$ki + ko = k_0. \tag{29.1}$$

Pois a condição vanilla k_0 para uma opção *call* é $S_T \geq K$ para ser exercida. Com M_T^- o mínimo em $[0, T]$ da trajetória do ativo podemos decompor

$$\begin{aligned}
& S_T \geq K \\
= & \{S_T \geq K\}\{S_T \text{ atinge a barreira}\} + \{S_T \geq K\}\{S_T \text{ não atinge a barreira}\} \\
& = \{S_T \geq K\}\{M_T^- \leq L\} + \{S_T \geq K\}\{M_T^- > L\} \\
& = ki + ko \tag{29.2}
\end{aligned}$$

Para precificar estas opções vamos usar o princípio de reflexão.

29.1 O princípio de reflexão

Consideremos primeiro um processo de Wiener com barreira. A figura 29.1 mostra um processo de Wiener que toca a barreira em $l = -1$ pela primeira vez, continua na trajetória pontilhada e termina no instante $t = T$ no valor $W_T > x > l$. A probabilidade deste processo seria a probabilidade conjunta

$$P(W_T > x, m_T^- \leq l), \quad l < 0, x > l \tag{29.3}$$

onde m_T^- é o valor mínimo de W_T no intervalo $[0, T]$ ⁹². Note que o mínimo é necessariamente menor que zero, pois W_t se inicia em zero. Só consideramos o caso $x > l$, pois se $x < l$ a barreira é atingida de qualquer maneira. Aqui a complicação é que temos duas condições a serem satisfeitas, ou seja temos que calcular uma probabilidade conjunta

Se a barreira for positiva a condição de atingir a barreira seria

$$P(W_T > x, m_T^+ \geq l), \quad l > 0, x < l \tag{29.4}$$

onde m_T^+ é o valor máximo de W_T no intervalo $[0, T]$.

Consideremos a trajetória **negrito-pontilhada** da Fig.29.1, que atravessa a barreira e termina num ponto acima dela, satisfazendo portanto o critério equ.(29.3). Para reduzir as duas condições a uma só procedemos da seguinte maneira. Geramos um novo trecho em **negrito** a partir do ponto em que a trajetória toca a barreira, refletindo a trajetória **negrito-pontilhada** pela barreira em $l = -1$. Este novo trecho termina num ponto abaixo da barreira Já que o processo de Wiener é simétrico as duas trajetórias mostradas na

⁹²A condição $P(m_T^- \leq l)$ é igual a $P(m_T^- < l)$, pois no contínuo a probabilidade da trajetória atingir um ponto $W_t = z$ é igual a zero: o ponto z tem extensão nula.

figura possuem a mesma densidade de probabilidade. Como o processo de Wiener é contínuo, o processo refletido passa necessariamente pela barreira, já que $2l - x < l$. Podemos então esquecer o condição $m_T \leq l$ e manter uma só condição - uma simplificação enorme! Segue-se, que a distribuição deste W_T é normalmente distribuída conforme a equ.(9.12)

$$\mathbf{P}(W_T > x, m_{\bar{T}} \leq l) = \mathcal{N}\left(\frac{2l - x}{\sqrt{\sigma T}}\right), \quad l < 0, x > l. \quad (29.5)$$

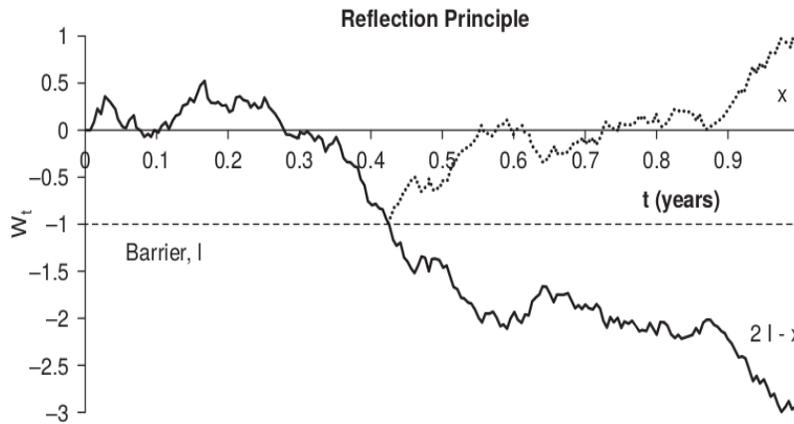


Figure 29.1: A trajetória negrito-pontilhada toca a barreira em $l = -1$ e continua na pontilhada. A trajetória negrito-pontilhada e a pontilhada possuem a mesma densidade de probabilidade.

Para precificar opções devemos encarar a possibilidade de um processo de Wiener com arrasto. Queremos um resultado analgo a equ.(29.5) para um processo obdecendo

$$dZ_t = \nu dt + \sigma dW_t. \quad (29.6)$$

29.1.1 Condições envolvendo o mínimo de W_t

Designando $m_{\bar{T}}$ o mínimo entre $[0, T]$ do processo Z_t , vamos provar o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbf{P}(Z_T > x, m_{\bar{T}} \leq l) &= e^{2\nu l \sigma^{-2}} \mathbf{P}(Z_T \leq 2l - x + 2\nu T) \\ &= e^{2\nu l \sigma^{-2}} \mathcal{N}\left(\frac{2l - x + \nu T}{\sigma \sqrt{T}}\right), \quad l < 0, x > l. \end{aligned} \quad (29.7)$$

Para limpar o notação vamos por $\sigma = 1$ e reinserir a volatilidade no fim. Basta lembrar, que nas exponenciais só devem aparecer grandezas sem dimensão, ou seja: $\nu t, \sigma^2 t, \frac{\nu}{\sigma^2}, \sigma W_t, Z_t$.

Lembremos agora o teorema de Girsanov da equ.(15.5)⁹³. Fazemos uma mudança de medida de \mathcal{P} para uma nova medida \mathcal{Q} afim de remover o arrasto νt de Z_t . Ela é dada aplicando

$$\vec{\mathcal{D}} = \frac{DQ}{DP} = e^{-\nu W_t - \frac{1}{2}\nu^2 t}, \quad (29.8)$$

onde usamos uma notação sugestiva de mudança de variáveis

$$\int \cdot DQ = \int \cdot \frac{DQ}{DP} DP.$$

Para mudar de volta para a medida original \mathcal{P} mudamos $\nu \rightarrow -\nu$ e $W_t \rightarrow Z_t$:

$$\overleftarrow{\mathcal{D}} = \frac{DP}{DQ} = e^{\nu Z_t - \frac{1}{2}\nu^2 t}. \quad (29.9)$$

É que se W_t for Wiener na medida original \mathcal{P} , ele tem um arrasto na nova \mathcal{Q} . Na nova o processo de Wiener é $Z_t = W_t + \nu t$, que não tem arrasto⁹⁴:

$$\begin{aligned} \langle W_T \rangle_{\mathcal{P}} &= 0, & \langle Z_T \rangle_{\mathcal{P}} &= \nu t \\ \langle W_T \rangle_{\mathcal{Q}} &= -\nu t, & \langle Z_T \rangle_{\mathcal{Q}} &= 0. \end{aligned}$$

A mudança de medida para a volta satisfaz então

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\mathcal{D}} = \frac{DP}{DQ} &= e^{\nu Z_t - \frac{1}{2}\nu^2 t} = e^{\nu W_t + \nu^2 t - \frac{1}{2}\nu^2 t} = e^{\nu W_t + \frac{1}{2}\nu^2 t} \\ &= \frac{1}{e^{-\nu W_t - \frac{1}{2}\nu^2 t}} = \frac{1}{\vec{\mathcal{D}}} = \left(\frac{DQ}{DP} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (29.10)$$

como era de se esperar.

Podemos expressar a probabilidade de ocorrência de um evento \mathcal{A} por uma esperança. Pois seja $1_{\mathcal{A}}$ uma variável aleatória, que é igual a 1, se o evento ocorrer e zero alhures. Então temos

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}) = \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle_{\mathcal{P}} \quad (29.11)$$

⁹³Lá tínhamos um processo W_t com arrasto μ , que queríamos mudar para r . Introduzimos um processo $\tilde{W}_t = \lambda t + W_t$ com $\lambda = \frac{\mu-r}{\sigma}$. Para o presente caso fazemos $\mu \rightarrow \nu, r \rightarrow 0$.

⁹⁴Ou seja na equ.(15.4) fazemos a substituição $\mu \rightarrow 0, r \rightarrow \nu$

Por exemplo, numa distribuição Gaussiana \mathcal{G} , seja \mathcal{A} o evento de um andarilho estar numa posição x com $x_1 \leq x \leq x_2$. Então temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathcal{G}}(x_1 \leq x \leq x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} dx e^{-x^2/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \theta(x_2 - x) \theta(x - x_1) e^{-x^2/2} = \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle_{\mathcal{G}} \end{aligned}$$

A probabilidade de um evento \mathcal{A} nas duas medidas é

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}) = \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle_{\mathcal{P}} = \langle 1_{\mathcal{A}} \overleftarrow{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{Q}}. \quad (29.12)$$

Ou usando a nossa notação sugestiva

$$\int 1_{\mathcal{A}} DP = \int 1_{\mathcal{A}} \frac{DP}{DQ} DQ$$

Vamos então calcular o lado esquerdo da equ.(29.7: $\mathcal{A} = (Z_T > x, M_T^- \leq l)$) na nova medida \mathcal{Q} , mas aplicando o fator $\overleftarrow{\mathcal{D}}$ para obter o resultado na medida velha ou seja a probabilidade

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_T > x, m_T^- \leq l) &= \langle 1_{\{Z_T > x, m_T^- \leq l\}} \overleftarrow{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{Q}} \\ &= \langle 1_{\{Z_T > x, m_T^- \leq l\}} e^{\nu Z_t - \frac{1}{2}\nu^2 t} \rangle_{\mathcal{Q}} \end{aligned} \quad (29.13)$$

Como Z_t não tem arrasto em $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{Q}}$, podemos usar o princípio da reflexão equ.(29.5). Olhando para o processo contínuo de Fig.(29.1), ou seja substituindo $Z_T \rightarrow 2l - Z_T$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_T > x, m_T^- \leq l) &= \langle 1_{\{Z_T < 2l - x\}} e^{\nu(2l - Z_t) - \frac{1}{2}\nu^2 t} \rangle_{\mathcal{Q}} \\ &= e^{2\nu l} \langle 1_{\{Z_T < 2l - x\}} e^{-\nu Z_t - \frac{1}{2}\nu^2 t} \rangle_{\mathcal{Q}}. \end{aligned} \quad (29.14)$$

Agora é só calcular integrais Gaussianas ou então perceber, que o fator exponencial é uma transformação de Girsanov mudando o arrasto de Z_t para $-\nu$. A probabilidade de Z_T com arrasto $-\nu$ ser menor que $2l - x$ é igual a probabilidade \mathcal{P}' de Z_T com arrasto $+\nu$, ser menor que $2l - x + 2\nu T$. Acertando as dimensões $\nu l \rightarrow \nu l \sigma^{-2}$ obtemos

$$\mathbf{P}(Z_T > x, m_T^- \leq l) = e^{2\nu l \sigma^{-2}} \mathbf{P}'(Z_T \leq 2l - x + 2\nu T)$$

$$= e^{2\nu l \sigma^{-2}} \mathcal{N}\left(\frac{2l - x + \nu T}{\sigma \sqrt{T}}\right), \quad l < 0, x > l,$$

que é a equ.(29.7)⁹⁵. Note que o arrasto νT comeu o fator dois em $2\nu T$.

Vamos usar esta formula do minimo para obter mais dois resultados, que serão usados para a precificação de opções:

$$\mathbf{P}(m_T^- \leq l) \text{ e } \mathbf{P}(m_T^- \geq l).$$

Para usar o resultado da equ.(29.7) vamos separar os casos $Z_T > 0$ e $Z_T < 0$:

$$\mathbf{P}(m_T^- \leq l) = \mathbf{P}(Z_T > l, m_T^- \leq l) + \mathbf{P}(Z_T < l, m_T^- \leq l).$$

Mas a condição $m_T^- \leq l$ é redundante, se o valor de Z_T for menor que l e temos

$$\mathbf{P}(m_T^- \leq l) = \mathbf{P}(Z_T > l, m_T^- \leq l) + \mathbf{P}(Z_T < l). \quad (29.15)$$

Usando a equ.(29.7) com $x = l$, temos para o primeiro termo

$$\mathbf{P}(Z_T > l, m_T^- \leq l) = e^{2\nu l \sigma^{-2}} \mathcal{N}\left(\frac{l + \nu T}{\sigma \sqrt{T}}\right). \quad l < 0, x > l.$$

Logo obtemos dois resultados para o minimo m_T^- .

A probabilidade do minimo do processo Z_t ser menor que l é

•

$$\mathbf{P}(m_T^- \leq l) = \mathcal{N}\left(\frac{l - \nu T}{\sigma \sqrt{T}}\right) + e^{2\nu l \sigma^{-2}} \mathcal{N}\left(\frac{l + \nu T}{\sigma \sqrt{T}}\right). \quad (29.16)$$

Já que $\mathbf{P}(m_T^- \geq l) = 1 - \mathbf{P}(m_T^- \leq l)$ e $1 - \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(-x)$ temos tambem

•

$$\mathbf{P}(m_T^- \geq l) = \mathcal{N}\left(\frac{\nu T - l}{\sigma \sqrt{T}}\right) - e^{2\nu l \sigma^{-2}} \mathcal{N}\left(\frac{l + \nu T}{\sigma \sqrt{T}}\right). \quad (29.17)$$

⁹⁵Lembre, que $dZ_t = \nu dt + \sigma dW_t$ ou seja Z_T é um processo com media νT e variança σ :
 $\mathbf{P}(Z_T < l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{-\infty}^l e^{-(x-\nu T)^2/2\sigma^2 T} dx = \mathcal{N}(l - \nu T)$.

29.1.2 Condições envolvendo o maximo de W_t

Para precificar opções com a barreira cruzada de baixo para cima precisamos afirmações similares para o maximo de W_T , Seja entao m_t^+ o maximo no intervalo $[0, t]$. Podemos relacionar o maximo ao minimo de $-W_t$, pois temos

$$m_t^+ = \max(\nu t + \sigma W_t) = -\min(-\nu t - \sigma W_t). \quad (29.18)$$

Vamos designar com Z'_t o processo com arrasto $-\nu$ e volatilidade σ . Já que $-W_t$ tambem é um processo de Wiener, temos da equ.(29.17) para a probabilidade do processo Z'_t

- $$\begin{aligned} \mathbf{P}(m_T^+ \leq y) &= \mathbf{P}_{Z'_t}(m_T^- \geq -y) \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{-\nu T + y}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{2\nu y\sigma^{-2}} \mathcal{N}\left(\frac{-\nu T - y}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned} \quad (29.19)$$

e com $\mathbf{P}(m_T^+ \geq y) = 1 - \mathbf{P}(m_T^+ \leq y)$

$$\mathbf{P}(m_T^+ \geq y) = \mathcal{N}\left(\frac{\nu T - y}{\sigma\sqrt{T}}\right) + e^{2\nu y\sigma^{-2}} \mathcal{N}\left(\frac{-\nu T - y}{\sigma\sqrt{T}}\right). \quad (29.20)$$

Analogamente temos da equ.(29.7: $x, y, \nu \rightarrow -x, -y, -\nu$)

- $$\mathbf{P}(Z_T \leq x, m_T^+ \geq y) = e^{2\nu y\sigma^{-2}} \mathcal{N}\left(\frac{x - 2y - \nu T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \quad (29.21)$$

Dai resulta imediatamente

- $$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_T \leq x, m_T^+ \leq y) \\ = \mathcal{N}\left(\frac{x - \nu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{2\nu y\sigma^{-2}} \mathcal{N}\left(\frac{x - 2y - \nu T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned} \quad (29.22)$$

29.2 Precificando vanillas com barreira

Acabamos de tratar o processo de Wiener com barreira. Mas para precificar opções temos que reformular estes resultados para o nosso ativo, que segue um processo de Wiener geometrico. Lembrando que sob medida \mathcal{Q} temos

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Usando a equ.(13.46)

$$d \log(S_t/S_0) = (r - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW_t \quad (29.23)$$

resulta a solução

$$S_t/S_0 = e^{\nu t + \sigma W_t}, \quad \nu = r - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (29.24)$$

Para usar nosso resultado equ.(29.7) temos que identificar Z_t com $\log(S_t/S_0)$. Z_t é adimensional, pois dividimos por S_0 . Logo as grandezas adimensionais apropriadas correspondendo a L e K são

$$l = \log(L/S_0) < 0, \quad x = \log(K/S_0), \quad x > l. \quad (29.25)$$

Temos que distinguir 4 casos para uma opção *call* :

$$S_0 \leq L, L \leq K$$

Em particular

1. $S_0 > L$, é chamado de *down*, pois a barreira é cruzado de cima para baixo. Temos *down-and-in* c_{di} e *down-and-out* c_{do} .
2. $S_0 < L$, é chamado de *up*, pois a barreira é cruzado de baixo para cima. Temos *up-and-in* c_{ui} e *up-and-out* c_{uo} .

Vamos primeiro precificar opções com barreiras L menores que o preço alvo K : $L \leq K$.

1. **Opção *call down-and-in* c_{di} com $L \leq K$**

Consideremos uma opção *call knock-in* com $S_0 > L$ ou seja do tipo *down*, indicando que a barreira deve ser cruzada na descida. O retorno desta opção é condicionada a $M_T^- \leq L$, onde $M_T^- = \min\{S_t : t \in [0, T]\}$. As duas condições a serem satisfeitas são

$$(S_T - K)_+ 1_{M_T^- \leq L}. \quad (29.26)$$

O valor da opção é

$$e^{-rT} \langle (S_T - K)_+ 1_{M_T^- \leq L} \rangle. \quad (29.27)$$

Para o termo $\sim K$ podemos usar diretamente a equ.(29.7) com $Z_t = \log(S_T/S_0)$. Obtemos

$$\begin{aligned} e^{-rT} \langle K 1_{\{S_T \geq K, M_T^- \leq L\}} \rangle &= K e^{-rT} e^{2l(r - \frac{\sigma^2}{2})\sigma^{-2}} \mathcal{N}\left(\frac{2l - x + \nu T}{\sqrt{\sigma T}}\right) \\ &= K e^{-rT} \left(\frac{L}{S_0}\right)^{-1+2r\sigma^{-2}} \mathcal{N}\left(\frac{\log(\frac{L^2}{S_0 K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (29.28)$$

Para calcular o termo $e^{-rT} \langle S_T 1_{\{S_T \geq K, m_T \leq L\}} \rangle$, note que fizemos um procedimento analogo para obter a formula de Black equ.(10.19). Vamos que os termos $\sim S_T$ e $\sim K$ diferem por $(r + \frac{1}{2}\sigma^2 T) \rightarrow (r - \frac{1}{2}\sigma^2 T)$, alem de $K \rightarrow S_0$ e o fator e^{-rT} desaparece.

Fazendo esta substituição na equ.(29.28) obtemos para o preço de um $call_{di}$ $S_0 \geq L, K \geq L$ o valor

$$\begin{aligned} c_{di} &= S_0 \left(\frac{L}{S_0}\right)^{1+2r\sigma^{-2}} \mathcal{N}(e_+) - K e^{-rT} \left(\frac{L}{S_0}\right)^{-1+2r\sigma^{-2}} \mathcal{N}(e_-) \\ &= \left(\frac{L}{S_0}\right)^{1+2r\sigma^{-2}} \left\{ S_0 \mathcal{N}(e_+) - \frac{K S_0^2}{L^2} e^{-rT} \mathcal{N}(e_-) \right\} \end{aligned} \quad (29.29)$$

com

$$e_{\pm} = \frac{\log\left(\frac{L^2}{S_0 K}\right) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sqrt{\sigma T}} \quad (29.30)$$

Introduzindo a notação $c_{BS}(S_0, T, K)$ para a opção $call$ Black-Scholes, dada pela equ.(10.19), podemos escrever

$$c_{di}(S_0, T, K, L) = \left(\frac{L}{S_0}\right)^{1+2r\sigma^{-2}} c_{BS}(S_0, T, K \frac{S_0^2}{L^2}). \quad (29.31)$$

Note que a barreira deve ser redundante, se partirmos dela e a opção deve valer igual a opção sem barreira. De fato

$$c_{di}(S_0 = L, T, K, L) = c_{BS}(S_0, T, K)$$

.

2. Opção $call$ *down-and-out* c_{do} com $S_0 \geq L, K \geq L$

Usando a equ.(29.2) obtemos para o preço de um $call-do$

$$c_{do}(S_0, T, K, L) = c_{BS}(S_0, T, K)$$

$$-\left(\frac{L}{S_0}\right)^{1+2r\sigma^{-2}} c_{BS}(S_0, T, K \frac{S_0^2}{L^2}). \quad (29.32)$$

Note que a opção deve valer nada so de inicio já partimos da barreira. De fato $c_{do}(S_0 = L, T, K, L) = 0$.

3. Os valores de **opções *up-and-out* e *up-and-in*** com $L \leq K$ são

$$c_{uo} = 0, \quad c_{ui} = c_{BS}. \quad (29.33)$$

Para valer algo a opção *up-and-out* não deve atingir a barreira. Logo tambem ficará abaixo de K , satisfazendo automaticamente a condição ($S_T \geq K$).

Para valer algo a opção *up-and-in* deve atingir K . Logo ficará tambem acima de L , satisfazendo automaticamente a condição ($M_T^- \geq L$).

4. Podemos obter o valor de uma opção *put* usando a paridade *put -call* da equ.(6.18: $p - c = Ke^{-rT} - S_0$) ou a equ.(10.26).

Vamos agora precificar opções com barreiras L maiores que o preço alvo K : $L \geq K$.

1. **Opção *call down-and-out* c_{do} com $S_0 \geq L \geq K$.**

Uma opção *down-and-out* terá retorno positivo, se a barreira não for atingida: $M_T^- > L$. Neste caso a condição de exercicio $S_T \geq K$ na opção *call* é redundante. Pois se o minimo for maior que L , então S_T será forçosamente tambem será.

O retorno da opção *call -down-and-out*

$$(S_T - K) 1_{(M_T^- \geq L)}, \quad S_0 > L \geq K$$

e podemos usar a equ.(29.17). Resulta então para o termo $\sim e^{-rT} K$

$$Ke^{-rT} \langle 1_{(M_T^- \geq L)} \rangle = Ke^{-rT} \left\{ \mathcal{N}\left(\frac{-\log(\frac{L}{S_0}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{L}{S_0}\right)^{-1+2r\sigma^{-2}} \mathcal{N}\left(\frac{\log(\frac{L}{S_0}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right\}.$$

Adicionando o termo $\sim S_T$ com as mudanças devidas temos para $\mathbf{S}_0 \geq L \geq K$

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{do}(\mathbf{S}_0, T, K, L) \\ &= S_0 \mathcal{N}\left(\frac{\log(\frac{S_0}{L}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - K e^{-rT} \mathcal{N}\left(\frac{\log(\frac{S_0}{L}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ & \quad - S_0 \left(\frac{L}{S_0}\right)^{1+2r\sigma^{-2}} \mathcal{N}(h_+) + K e^{-rT} \left(\frac{L}{S_0}\right)^{-1+2r\sigma^{-2}} \mathcal{N}(h_-) \end{aligned} \quad (29.34)$$

com

$$h_{\pm} = \frac{\log\left(\frac{L}{S_0}\right) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sqrt{\sigma}T}. \quad (29.35)$$

Novamente temos $c_{do}(S_0 = L, T, K, L) = 0$.

2. **Opção call down-and-in c_{di} com $\mathbf{S}_0 \geq L \geq K$.**

Usando a equ.(29.2) resulta

$$\mathbf{c}_{di}(\mathbf{S}_0, T, K, L) = c_{BS}(S, T, K) - c_{do}(S_0, T, K, L) \quad (29.36)$$

3. **Opção up-and-in com $\mathbf{S}_0 \geq L \geq K$.**

Para *up-and-in* valer algo, é necessário que a barreira seja atingida e portanto S_T estará acima de K . A condição $S_T > K$ é portanto redundante e devemos usar $\max(S_T) \geq L$ equ.(29.20).

Para o termo $\sim K$ podemos usar diretamente a equ.(29.20), obtendo

$$\begin{aligned} e^{-rT} \langle K 1_{M_T^+ \geq L} \rangle &= K e^{-rT} \left\{ \mathcal{N}\left(\frac{-\log(\frac{L}{S_0}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{L}{S_0}\right)^{-1+2r\sigma^{-2}} \mathcal{N}\left(\frac{-\log(\frac{L}{S_0}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (29.37)$$

Adicionando o termo $\sim S_T$ com as devidas mudanças obtemos para $\mathbf{S}_0 \geq L \geq K$

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{ui}(\mathbf{S}_0, T, K, L) = S_0 \mathcal{N}(g_+) - K e^{-rT} \mathcal{N}(g_-) \\ & \quad - S_0 \left(\frac{L}{S_0}\right)^{1+2r\sigma^{-2}} \mathcal{N}(h_+) + K e^{-rT} \left(\frac{L}{S_0}\right)^{-1+2r\sigma^{-2}} \mathcal{N}(h_-) \end{aligned} \quad (29.38)$$

com

$$g_{\pm} = \frac{\log\left(\frac{S_0}{L}\right) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sqrt{\sigma}T}.$$

4. **Opção *up-and-out*** com $S_0 \geq L \geq K$.

Para valer algo a opção *up-and-out* não deve atingir L . Para ficar acima de K deve ainda satisfazer a condição $(S_T - K) > 0$, além de $M_T^+ < L$. Usando a equ.(29.2) temos

$$c_{uo} = c_{BS}(S, T, K) - c_{ui}(S_0, T, K, L). \quad (29.39)$$

Vemos que a barreira diminui o preço da opções comparado com os de vanilla. Para mais detalhes veja [39].

Exercício 29.1. Repita os argumentos para obter a precificação de *puts*. Temos por exemplo para $S_0 \leq L, K \leq L$

$$\begin{aligned} & p_{ui}(S_0, T, K, L) \\ &= -S_0 \left(\frac{L}{S_0}\right)^{1+2r\sigma^{-2}} \mathcal{N}(-e_+) + K \left(\frac{L}{S_0}\right)^{-1+2r\sigma^{-2}} \mathcal{N}(-e_-) \end{aligned} \quad (29.40)$$

29.3 Hedging opções com barreira

Negociar com opções de barreira sem saber como *hedge* é um empreendimento temerario. O fato é que *hedge* com barreiras é bastante mais complicado que *hedge* com opções vanilla. Em particular variações bruscas nas gregas podem ocorrer perto da barreira. Δ_c nem sempre é positivo, nem Δ_p é sempre negativo como ocorre nas o opções vanilla.

Considere por exemplo a opção *down-and-out* c_{do} da equ.(29.32) com $S_0 \geq L, K \geq L$:

$$c_{do}(S_0, T, K, L) = c_{BS}(S_0, T, K) - \left(\frac{L}{S_0}\right)^{1+2r\sigma^{-2}} c_{BS}(S_0, T, K \frac{S_0^2}{L^2}).$$

Observando que a opção $c_{BS}(S, T, K)$ é da forma $Kf(S/K)$, podemos escreve-la no instante τ como

$$c_{do}(S, \tau, K, L) = c_{BS}(S, \tau, K) - \left(\frac{L}{S}\right)^{-1+2r\sigma^{-2}} c_{BS}(L^2/S, \tau, K) \quad (29.41)$$

Portanto uma estrategia é fazer um *hedge* para uma opção *call* vendida e $\left(\frac{L}{S}\right)^{-1+2r\sigma^{-2}}$ de uma *call* comprada sob L^2/S de ativo. Se a barreira não é atingida, temos um *hedge* a-la BSM normal. Se ela é atingida $c_{do}(S = L, \tau, K, L) =$

0 e ela expira sem valor, mas temos que rebalancear neste instante. A relação

$$c_{BS}\left(\frac{L^2}{S}, K\right) = \frac{K}{S} p_{BS}\left(S, \frac{L^2}{S}\right) \quad (29.42)$$

é útil para usar *put* ao invés de *call* para *hedge*.

Podemos expressar alguns das opções de barreira em termos de opções *call* ou *put*, indicando uma possível estratégia a ser seguida. Para mais detalhes veja e.g. [40], cap.9 e [9] cap. 12.

Exercício 29.2. Verifique a relação equ.(29.42), mostrando que o retorno é igual e portanto pela lei de um preço vale sempre.

30 Processos com saltos

O que é um salto? O processo de Wiener não comporta "saltos" do ativo. No entanto é difícil identificar qual variação de um ativo aleatório merece o nome de *salto*. Na prática devemos incluir saltos, se isto melhora a descrição dos dados, que queremos modelar. Veja [57] para uma discussão.

Vamos considerar somente saltos, que obedecem uma estatística de Poisson.

30.1 Processo de Poisson

O processo de Poisson descreve uma coleção de pontos distribuídos aleatoriamente numa reta $0 \leq t$.

- Postulamos ainda que as probabilidades de k_a pontos no intervalo I_a e k_b pontos no intervalo I_b são independentes, se os intervalos I_a e I_b forem disjuntos.
- O processo depende de um parâmetro λ :
A probabilidade de encontrar um ponto no intervalo dt é igual a λdt e a de encontrar nenhum ponto em dt é $1 - \lambda dt$. Estamos supondo dt suficientemente pequeno para conter no máximo um ponto.

Para $t \geq 0$ vamos calcular as probabilidades $p_n(t)$ de encontrar n pontos no intervalo $[0, t]$. A probabilidade de encontrar nenhum ponto em $[0, t + dt]$ é o

produto de encontrar nenhum ponto entre $[0, t]$ e nenhum ponto entre $[t, dt]$:

$$p_0(t + dt) = p_0(t)(1 - \lambda dt) \rightarrow \frac{p_0(t + dt) - p_0(t)}{dt} = \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t). \quad (30.1)$$

Integrando temos

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}. \quad (30.2)$$

Para obter a probabilidade de encontrar um e somente um ponto entre $[0, t + dt]$ note o seguinte. Há duas maneiras exclusivas de encontrar um ponto em $[0, t + dt]$: nenhum ponto em $[0, t]$ e um ponto em $[t, t + dt]$; ou um ponto em $[0, t]$ e nenhum ponto em $[t, t + dt]$. Temos portanto

$$p_1(t + dt) = p_0(t)\lambda dt + p_1(t)(1 - \lambda dt) \quad (30.3)$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda(e^{-\lambda t} - p_1(t)) \rightarrow p_1(t) = \frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t} \quad (30.4)$$

A probabilidade de observar n pontos entre $[0, t]$ deve ser⁹⁶

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad (30.5)$$

pois assim os termos $\sim \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ somam para $e^{+\lambda t}$ matando a exponencial $e^{-\lambda t}$ dando a correta normalização de $p_n(t)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1. \quad (30.6)$$

O numero medio de pontos em $[0, t]$ é

$$\begin{aligned} \langle n_t \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\ &= \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} = \lambda t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = \lambda t. \end{aligned} \quad (30.7)$$

Segue-se que podemos usar esta relação para extrair o parametro λ de dados empiricos supostamente Poissonianos consistindo de uma sequencia de pontos numa reta.

⁹⁶Veja tambem equ.(A.16).

- Suponha que a observação de um processo forneceu o número de *pontos* em N intervalos $I = [0, T]$, cada um grande suficiente para conter um número "razoável" de *pontos*. Contamos o número de *pontos* nestes N intervalos e tomamos a média aritmética: isto dá λT . Sabendo T obtemos λ .
- Ou podemos dividir o intervalo $[0, T]$ em sub-intervalos pequenos de tamanho δT contendo no máximo um ponto. Temos portanto $T/\delta T$ sub-intervalos, que contem no máximo um *ponto*. Calculamos

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_T}{T}, \quad (30.8)$$

onde n_T é o número subintervalos contendo um *ponto*.

Na próxima seção usaremos $N(t)$, o número de saltos até o tempo t . $N(t)$ é constante, exceto quando ocorre um salto incrementado $N(t) \rightarrow N(t) + 1$. Temos

$$\text{Prob}[N(t) = n] = p_n(t). \quad (30.9)$$

A média de $N(t)$ é

$$\langle N(t) \rangle = \langle n_t \rangle = \lambda t. \quad (30.10)$$

Exercício 30.1.

Calcule $\langle N(t)^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n(t)$. Mostre que a variância de $N(t)$ satisfaz $\text{Var}(N(t)) = \langle N(t) \rangle$ ou seja: a média é igual a variância. Dica: $\frac{n^2}{n!} = \frac{n-1+1}{(n-1)!}$.

Exercício 30.2.

Faça um gráfico de $p_n(t)$ para $n = 0, 1, 2, 3$.

Exercício 30.3.

Faça um gráfico de $p_n(T)$ vs. n com λT fixo.

30.2 Ativos lognormais com saltos

Suponhamos que o nosso ativo obedeça um processo de Wiener geométrico com saltos Poissonianos de tamanho J , onde J pode ser aleatório:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t + (J - 1)dN(t). \quad (30.11)$$

Ao ocorrer um salto S_t muda para JS_t . Reescrevamos a equação acima como

$$S(t + dt) = S(t) + S(t)(\mu dt + \sigma dW_t + (J - 1)dN(t)).$$

Vamos tomar esperanças, notando que incrementos de W_t e saltos são independentes e que $\langle dW_t \rangle = 0$. Da equ.(30.7) temos $\langle dN(t) \rangle = \lambda dt$. Note que isto é igual a taxa de ocorrerem saltos entre t e $t + dt$ ou seja λdt . Segue-se que

$$\langle S(t + dt) \rangle = \langle S(t) \rangle + \langle S(t) \rangle (\mu dt + \sigma dW_t + \langle J - 1 \rangle \lambda dt). \quad (30.12)$$

Como de costume teremos que encontrar uma medida sob a qual o ativo descontado seja uma martingale como na equ.(10.9), que implica com r constante

$$\langle S(t + dt) \rangle = e^{rdt} S(t) = (1 + rdt) S(t) = S(t) + rdt S(t)$$

ou tomando esperanças

$$\langle S(t + dt) \rangle = e^{rdt} \langle S(t) \rangle = (1 + rdt) \langle S(t) \rangle = \langle S(t) \rangle + rdt \langle S(t) \rangle.$$

Comparando com a equ.(30.12), requer que $r = \mu + \lambda \langle J - 1 \rangle$ ou

$$\mu = r - \lambda \langle J - 1 \rangle. \quad (30.13)$$

O preço de uma opção Europeia com retorno $Z_T(S)$ será então

$$e^{-rT} \langle Z_t(S) \rangle \quad (30.14)$$

com S evoluindo como

$$dS_t = (r - \lambda \langle J - 1 \rangle) S_t + \lambda \langle J - 1 \rangle S_t dt \quad (30.15)$$

A evolução de $\log S_t$ é

$$d \log S_t = (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dW_t + \log J dN_t. \quad (30.16)$$

Pois os processos W_t e N_t são independentes. Se um salto ocorre, S_t muda para $J S_t$, o que é equivalente em adicionar $\log J$ a $\log S_t$. Integrando obtemos para $\log S_T$

$$\log S_T = \log S_0 + (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) T + \sigma \sqrt{T} N(0, 1) + \sum_{i=1}^{N(T)} \log J_i, \quad (30.17)$$

onde J_i é o i -ésimo salto.

Para simplificar suponhamos que só haja um salto de tamanho J , o que dá

$$\log S_T = \log S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}N(0, 1) + N(T) \log J \quad (30.18)$$

ou

$$\log S_T = \log S_0 + (\mu - r)T + N(T) \log J + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}N(0, 1). \quad (30.19)$$

Para $N(T)$ fixo isto é o preço de uma opção BS com preço do ativo igual a $S_0 e^{(\mu-r)T} J^{N(T)}$.

Resulta para uma opção com saltos Poissonianos o preço :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{n!} f_{BS}(S_0 e^{(\mu-r)T} J^n, r, \sigma, K, T), \quad (30.20)$$

onde $f_{BS}(S, \sigma, K, T)$ é o preço Black-Scholes com ativo valendo hoje S .

Podemos facilmente generalizar para uma distribuição log-normal de amplitude de saltos $J \rightarrow p(J)$. Pois suponhamos que os saltos obedeçam

$$J = J_0 e^{\frac{1}{2}\nu^2 + \nu N} \quad (30.21)$$

com N normalmente distribuído.

xxxxxxxxxxxxx é inútil a não ser que soubermos como fazer hedges.

31 Taxas de juro

Uma das dores de cabeça de uma empresa é a taxa de juros, que ela tem que pagar para levantar empréstimos. Pois suponha que voce queira criar uma empresa para fabricar drones, mas não tem grana suficiente. Investirá o que tem e levantará o resto no mercado financeiro. Por quanto voce vai "alavancar" sua empresa? Mas talvez precisará deste adicional somente daqui a um ano. Qual será então o juro com que terá que arcar? No outro lado os bancos dispõem muito esforço para calcular juros "adequados", que irão cobrar dos clientes. Taxas de juro para emprestar e pedir emprestado flutuam dependendo essencialmente da quantidade de grana disponível no mercado. Se há muita circulando, o juro será mais baixo do que no caso de grana escassa.

Ao invés de pedir emprestado num banco, voce pode também emitir títulos como *coupon-zero*, que já vimos na seção 3.1. Venderá os cupons no

mercado financeira com a obrigação de compra-los de volta na maturação T . Ou lançará debentures com a possibilidade de serem convertidas em ações da empresa – o que pode ser uma estratégia interessante de longo prazo.

Quanto ao **cupon-zero** temos seguinte definição :

- um cupon zero com maturação T é um contrato que garante ao dono do cupon o direito de receber \$1 real⁹⁷ no instante T . Indicamos o preço deste cupon hoje em $t = 0$ por $P(0, T)$.

Mas podemos encarar esta promessa de receber um real no tempo T como um bem, que podemos negociar antes da maturação . Se a empresa for muito bem financeiramente, pode querer liquidar esta dívida num instante $0 < t < T$. Indicamos este preço por $P(t, T)$. Ou seja

- $P(t, T)$ é o valor no instante t para receber um real na maturação $t = T$.

É claro, que $P(T, T) = 1$ e $P(t, T) \leq 1$: quanto mais tempo demorar para voce receber seu \$1, mais barato é o cupon. Também deve valer $P(t, t) = 1, \forall t$ para evitar arbitragem.

Podemos expressar qualquer fluxo de caixa determinístico por uma combinação linear destes cupons. Dai a grande utilidade deles.

Exemplo 31.1.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Vejamos como é a dependencia de $P(t, T)$ em t e T .

- Para um particular instante $t = \hat{t}$ o cupon-zero $P(\hat{t}, T)$ é uma função de T fornecendo o valor do cupon para todas as maturações . É chamada "curva de preço do cupon no tempo \hat{t} " ou "a estrutura de termos no tempo \hat{t} ". O valor de $P(\hat{t}, T)$ decresce com T de maneira mais ou menos lisa. No caso de uma taxa de juros constante, teriamos⁹⁸ $P(t, T) = e^{-r(T-t)} \cdot 1$ - com o fator 1 indicando o valor a receber na maturação . Pois crescendo exponencialmente durante o intervalo $T - t$, o valor do titulo $P(t, T)$ chega a $P(T, T) = 1$ em $t = T$.

⁹⁷É \$1 para simplificar as contas. Se o seu principal M for diferente de \$1, é só multiplicar tudo por M .

⁹⁸Muitas instituições não usam juros exponencialmente compostos, mas $e^{rT} \sim 1 + rT$. Cuidado quando negociares cupons!

- b. A dependencia de $P(t, T)$ em t para T fixo no entanto usualmente é bastante variavel, mesmo para titulos com o mesmo T . O valor depende das condições do mercado, pois r é uma função do tempo: $r(t)$. Veja a Fig.(31.1).

A taxa de juros flutuante é o principal fator de risco de cupons, inclusive do cupon-zero. Para uma taxa variavel é conveniente definir o *rendimento* $R(t, T)$ como

$$R(t, T) = -\log P(t, T)/(T - t), \quad (31.1)$$

chamada *yield* em ingles. Para um t fixo a função $T \rightarrow R(t, T)$ chama-se "curva de rendimento do cupon-zero". Invertendo temos

$$P(t, T) = e^{-(T-t)R(t, T)}.$$

Para $T \rightarrow t$ o rendimento $R(t, T)$ tende a taxa instantanea ou *taxa curta* $r(t)$:

$$r(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} R(t, t + \Delta T) = R(t, t) = -\lim_{\Delta T \rightarrow 0} (\log P(t, t + \Delta T)/\Delta T)$$

ou seja

$$r(t) = -\left\{ \frac{d \log P(t, T)}{dT} \right\}_{T=t}. \quad (31.2)$$

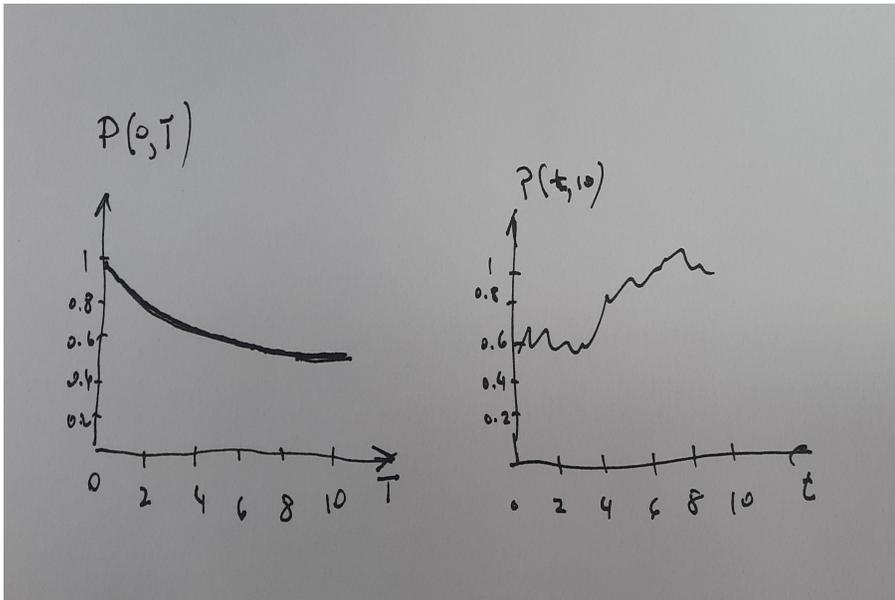


Figure 31.1: Cupon-zero $P(0, T)$ e $P(t, 10)$

O mercado de cupons-zero é parecido com o mercado de ações. A diferença crucial é que temos infinitos cupons, um para cada tempo de maturação T . Ainda mais, todos eles satisfazem $P(t, t) = 1$ estando portanto bastante correlacionados, o que não é verdade para ações. Os nossos modelos terão que levar isto em conta!

Tal como negociar ações a termo, também podemos fazê-lo com a taxa de juros. A taxa instantânea é a taxa $r(t)$, que lhe custa para pedir um empréstimo no instante t . Mas você poderia precisar de um empréstimo no futuro no instante $T > 0$ e gostaria de contratar uma taxa hoje no instante $t < T$. Ela é chamada **taxa-a-termo** $f(t, T)$.

Uma vez definido o cupon-zero é conveniente expressar os outros processos em termo de $P(t, T)$. Como então relacionar a taxa-a-termo f ao valor do cupon-zero $P(t, T)$?

Para isto vamos lançar mão de um "FRA" (*Forward-Rate-Agreement*). Ele tem a vantagem de ser um instrumento negociável, que a taxa-a-termo não é.

- **FRA** é um contrato, em que concordamos no presente instante t , de pagar uma taxa fixa entre dois instantes T_1 e T_2 com $t < T_1 \leq T_2$ sob uma quantidade fixa de grana igual a \$1 investida em T_1 . É portanto um contrato assinado no instante t , assegurando ao dono do FRA uma taxa de juro predeterminada durante o intervalo $[T_1, T_2]$ ao fazer um investimento de \$1 no instante $T_1 > t$. Se você comprou um FRA, está trocando uma taxa aleatória por uma fixa, enquanto que o vendedor deve pagar a taxa vigente do dia. O valor inicial do FRA no instante t é nulo e não há fluxo de caixa como num contrato *a-termo*.

A compra de um FRA protege o dono de uma possível subida do juros do mercado.

Se você compra uma FRA no instante t , o fluxo de caixa é $\$(-1)$ no instante T_1 e $\$e^{(T_2-T_1)f_{12}(t)}$ no instante T_2 , onde $f_{12}(t)$ é a taxa-a-termo fixa de T_1 para T_2 acordada em t . Para obter este fluxo em valores de hoje (ou seja no instante t e não em T_1 e T_2) usemos cupons-zero para fazer este serviço. O fluxo hoje é $-P(t, T_1) + e^{(T_2-T_1)f_{12}(t)}P(t, T_2)$. Este valor deve ser nulo ou seja

$$P(t, T_1) - e^{(T_2-T_1)f_{12}(t)}P(t, T_2) = 0 \quad (31.3)$$

ou

$$f_{12}(t) = -\frac{\log P(t, T_2) - \log P(t, T_1)}{T_2 - T_1}, \quad (31.4)$$

o que pode também servir como definição de $f_{12}(t)$ em termos de cupons-zero: é a *taxa-a-termo* para $[T_1, T_2]$ contratada no instante t . Para replicar este contrato faríamos o seguinte.

1. No instante t vendemos um cupon-zero maturando em T_1 (um T_1 cupon), recebendo o valor $P(t, T_1)$.
2. Usamos esta grana para comprar o número $k = \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)}$ de cupons maturando em T_2 . Nosso fluxo de grana portanto é zero.
3. No instante T_1 matura o T_1 -cupon e devemos pagar \$1.
4. No instante T_2 maturam os k T_2 -cupons e recebemos $\$ \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)}$.
5. O resultado é que um contrato assinado no instante t , rendeu $\$ \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)}$ em T_2 a partir de um investimento de \$1 em T_1 .

Efetivamente fizemos um contrato garantindo uma taxa fixa -a *taxa-a-termo*-durante o intervalo $[T_1, T_2]$. Note que devemos esperar até T_2 para receber a grana⁹⁹.

Exemplo 31.2

Suponha que queiramos saber hoje em $t = 0$ a taxa-a-termo para depositar grana durante seis meses daqui um ano. Temos $T_1 = 1, T_2 = 1.5$. Pesquisamos preços e encontramos para cupons-zero os valores $P(0, T_1) = 0.967$ e $P(0, T_2) = 0.93$. Da equ.(31.4) obtemos a taxa

$$f_{12}(0) = -\frac{\log(0.93/0.967)}{0.5} = 0.0780.$$

Poderíamos daqui um ano depositar \$1000 e sacar daqui um ano e meio o valor de $\$1000 \cdot e^{0.0780 \cdot 0.5} = \1039.7

Exemplo 31.3

Considere um FRA em que

⁹⁹Cupons, que não sejam "zero" pagam dividendos prefixados durante o intervalo $[T_1, T_2]$.

Escolhendo $T_1 = T$ e $T_2 = T + \Delta T$ e tomando o limite $\Delta T \rightarrow 0$ obtemos para a *taxa-a-termo instantanea*

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T}. \quad (31.5)$$

Esta é a taxa risco-neutra, contratado em t , para fazer empréstimos instantaneos, ou se quiser no intervalo $[T, T + \Delta T]$. Invertendo esta relação obtemos

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}. \quad (31.6)$$

Para $t < T_1 \leq T$ segue-se, que

$$P(t, T) = P(t, T_1)e^{-\int_{T_1}^T f(t,s)ds}. \quad (31.7)$$

O problema deste mercado de cupons é descrever o comportamento de um mercado com um numero infinito de T -cupons para:

1. Atribuir preços a estes cupons de maneira a evitar arbitragem.
2. Determinar estes preços a partir de um modelo para a taxa-curta $r(t)$.
3. Determinar o preço a opções vanilla com cupons como subjacentes.

Exercicio 31.1

Verifique que $P(t, t) = 1$ é necessario para evitar arbitragem.

31.1 Modelando a partir da taxa instantanea $r(t)$

Os cupons e a taxa-a-termo dependem da taxa instantanea $r(t) \equiv r_t$. Mas esta obviamente não é suficiente para determinar $P(t, T)$ ou $f(t, T)$, pois $r(t)$ ignora o conceito de maturação. Mas, seguindo a tradição modelaremos esta taxa, mas teremos que fazer hipoteses adicionais no caminho! Seja então a evolução da taxa instantanea dada por

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t. \quad (31.8)$$

Vamos adicionalmente supor que o cupon-zero tenha a estrutura

$$P(t, T) = F_T(t, r_t) \quad (31.9)$$

Colocamos a maturação T como índice para diferencia-la das outras variáveis. Temos obviamente a relação

$$F_T(T, \hat{r}) = 1, \forall \hat{r}, \quad (31.10)$$

onde \hat{r} é uma variável real e o chapéu serve para distingui-la do processo estocástico r_t ! Diferenciando F e suprimindo as variáveis (t, r_t) resulta

$$\begin{aligned} dF_T &= (\partial_t F_T + \mu \partial_r F_T + \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_r^2 F_T) dt + \sigma \partial_r F_T dW \\ &\equiv F_T \left[\begin{array}{l} a_T dt \\ + \sigma_T dW \end{array} \right] \\ a_T &= \frac{\partial_t F_T + \mu \partial_r F_T + \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_r^2 F_T}{F_T}, \quad \sigma_T = \frac{\sigma \partial_r F_T}{F_T}. \end{aligned} \quad (31.11)$$

Para obter a dinâmica de $F_t(t, r)$ consideremos um portfólio auto-financiante $\Pi[P(t, T), P(t, S)]$ composto por dois cupons maturando em T e S respectivamente:

$$\Pi = \phi_T P(t, T) + \phi_S P(t, S) \quad (31.12)$$

A evolução auto-financiante é

$$d\Pi = \phi_T dP(t, T) + \phi_S dP(t, S). \quad (31.13)$$

É conveniente expressar o portfólio em termos de coeficientes normalizados $\hat{\phi}_{1,2} \equiv \hat{\phi}_{T,S}$

$$\begin{aligned} \Pi &\equiv \sum_{i=1}^2 \phi_i P_i = \sum_{i=1}^2 \hat{\phi}_i, \\ \hat{\phi}_i &= \frac{\phi_i P_i}{\Pi}, \quad \sum_{i=1}^2 \hat{\phi}_i = \hat{\phi}_T + \hat{\phi}_S = 1. \end{aligned} \quad (31.14)$$

A condição auto-financiante (31.13) fica

$$d\Pi = \sum_{i=1}^2 \phi_i dP_i = \Pi \sum_{i=1}^2 \frac{P_i \phi_i dP_i}{\Pi P_i} = \Pi \sum_{i=1}^2 \hat{\phi}_i \frac{dP_i}{P_i}$$

ou seja

$$d\Pi = \Pi \left(\hat{\phi}_T \frac{dF_T}{F_T} + \hat{\phi}_S \frac{dF_S}{F_S} \right) \quad (31.15)$$

Com a equ.(31.11) a dinamica do portofolio resulta como

$$d\Pi = \Pi\{\hat{\phi}_T a_T + \hat{\phi}_S a_S\}dt + \Pi\{\hat{\phi}_T \sigma_T + \hat{\phi}_S \sigma_S\}dW \quad (31.16)$$

Para que o portofolio seja sem risco devemos ainda anular o termo $\sim dW$:

$$\sigma_T \hat{\phi}_T + \sigma_S \hat{\phi}_S = 0. \quad (31.17)$$

Com a equ.(31.14: $\hat{\phi}_T + \hat{\phi}_S = 1$) resulta

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_T &= -\frac{\sigma_S}{\sigma_T - \sigma_S} \\ \hat{\phi}_S &= \frac{\sigma_T}{\sigma_T - \sigma_S}. \end{aligned} \quad (31.18)$$

Com isto o portofolio evolui sem risco como

$$d\Pi = \Pi\{\hat{\phi}_T a_T + \hat{\phi}_S a_S\}dt = \Pi\left\{\frac{a_S \sigma_T - a_T \sigma_S}{\sigma_T - \sigma_S}\right\}dt \quad (31.19)$$

Par evitar arbitragem devemos impor $d\Pi = \Pi r_t dt$, resultando em

$$\frac{a_S \sigma_T - a_T \sigma_S}{\sigma_T - \sigma_S} = r_t \quad (31.20)$$

ou seja

$$\frac{a_T(t) - r(t)}{\sigma_T(t)} = \frac{a_S(t) - r(t)}{\sigma_S(t)} \equiv \lambda(t). \quad (31.21)$$

A função $\lambda(t)$ é "universal" no sentido que não depende nem de T nem de S ou seja ela é independente da maturação dos cupons num mercado sem arbitragem.

Inserindo

$$a_T = r + \lambda \sigma_T = r + \lambda \sigma \frac{\partial_r F_T}{F_T}$$

na equ.(31.11) resulta

$$a_T F_T = r F_T + \lambda \sigma \partial_r F_T = \partial_t F_T + \mu \partial_r F_T + \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_r^2 F_T.$$

Obtemos portanto para um mercado sem arbitragem a seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} \partial_t F_T + (\mu - \lambda \sigma) \partial_r F_T + \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_r^2 F_T - r F_T &= 0 \\ F_T(T, r) &= 1 \end{aligned} \quad (31.22)$$

É imperativo esclarecer a presença da variável λ . Lembremos primeiro, que no caso BSM a medida Q é única. Pois temos um ativo aleatorio negociavel e um e o modelo portanto é *completo*. A equação BSM vincula as flutuações da opção às do ativo subjacente negociavel. Aqui no entanto a taxa $r(t)$ não é um item negociavel e o numero de processos aleatorios é maior que os itens negociaveis e a presença da variável λ reflete a falta de unicidade: **O preço dos titulos não é univocamente determinado pelo dinamica de taxa instantanea $r(t)$** . No cenario BSM a precificação da opção é relativa ao item negociavel subjacente. Aqui este não existe!

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Seguindo os passos da seção 14 usando o "potencial" $V(x, t) = r(t)$ obtemos a correspondente formula de Feynman-Kac:

- O preço do coupon-zero $P(t, T) = F_T(t, r_t)$ é

$$P(t, T) = \langle e^{-\int_t^T r(s)ds} | \mathcal{F}_t \rangle_Q \quad (31.23)$$

com a evolução da taxa instantanea obdecendo

$$\begin{aligned} dr(s) &= (\mu - \lambda\sigma)ds + \sigma dW^Q(s) \\ r(t) &= r. \end{aligned} \quad (31.24)$$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Lembrando a equ.(15.4) e o teorema de Girsanov, vemos que $P(t, T) = F_T(t, r_t)$ obdece

$$dF_T(t, r_t) = (r(t)dt + \sigma_T(t)dW^Q(t))F_T(t). \quad (31.25)$$

Logo o processo descontado

$$\tilde{P}(t, T) = B^{-1}(t)P(t, T) \quad (31.26)$$

com $B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}$ não possui arrasto e é uma Q -martingale.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Podemos obter a taxa-a-termo de

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T} = -\frac{\partial P(t, T)/\partial T}{P(t, T)}.$$

Derivando a equ.(31.23) resulta

$$f(t, T) = \frac{\langle r(T)e^{-\int_t^T r(s)ds} | \mathcal{F}_t \rangle_Q}{\langle e^{-\int_t^T r(s)ds} | \mathcal{F}_t \rangle_Q}, \quad (31.27)$$

onde supusemos que é lícito passar a derivada para dentro da esperança. Confirmamos, que a taxa instantanea resulta corretamente como

$$f(t, t) = \langle r(t) | \mathcal{F}_t \rangle_Q = r(t), \quad (31.28)$$

pois \mathcal{F}_t garante que temos a disposição toda a informação até o instante t .

Podemos generalizar este resultado, quando o retorno não for $F_T(T, r) = 1$ ou seja $Z = \Phi(x) = 1$ na equ.(14.9), mas $Z = \Phi(r(T))$. A equ.(31.22) agora é

$$\begin{aligned} \partial_t F_T + (\mu - \lambda\sigma)\partial_r F_T + \frac{1}{2}\sigma^2\partial_r^2 F_T - rF_T &= 0 \\ F_T(T, r) &= \Phi(r(T)) \end{aligned} \quad (31.29)$$

com a solução

$$P(t, T) = \langle e^{-\int_t^T r(s)ds} \Phi(r(T)) | \mathcal{F}_t \rangle_Q \quad (31.30)$$

com a taxa instantanea evoluindo segundo a equ.(31.24).

31.2 Um modelo simples para a taxa-a-termo

Em oposição ao modelo BS para ações em que aparecem somente dois ativos negociáveis - $S(t)$ e $B(t)$, aqui temos um numero infinito de cupons-zero $P(t, T)$, um para cada T . Vamos escolher um deles para numerario e ver se os resultados são independentes desta escolha. Considere pois a seguinte evolução para taxa-a-termo para modelar a dinamica na variavel t

$$d_t f(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t \quad (31.31)$$

com α e σ funções deterministicas e limitadas para poder trocar derivadas e integrais etc. Integrando temos

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T)ds + \int_0^t \sigma(s, T)dW_s,$$

onde nesta equação T é um parametro! A taxa instantanea ou *taxa-curta* é dada pela taxa-a-termo com maturação instantanea

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, t) ds + \int_0^t \sigma(s, t) dW_s \quad (31.32)$$

e nosso titulo satisfazendo $B_t = e^{\int_0^t r(u) du}$ é

$$B(t) = e^{\int_0^t du \left(f(0, u) + \int_0^u \alpha(s, u) ds + \int_0^u \sigma(s, u) dW_s \right)}. \quad (31.33)$$

$B(t)$ seria o retorno de um deposito bancario. O cupon-zero para uma particular maturação T é dada pela equ. (31.6: $P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}$)

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T du \left(f(0, u) + \int_0^u \alpha(s, u) ds + \int_0^u \sigma(s, u) dW_s \right)}. \quad (31.34)$$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

32 Tecnicas de Teoria de Campos em Matematica Financeira

Se voce estiver interessado estritamente em matematica financeira, pode ignorar esta seção sem o menor prejuizo. Incluimo-la no entanto porque na aparecem na literatura artigos/livros sobre "Financeira Quantica" como por exemplo [58] e é preciso desmistificar este assunto mostrando que não tem absolutamente nada de quantico. A unica diferenca é a singela letra i - a unidade imaginaria.

O caso mais simples de uma teoria de campos $\phi(x, t)$ é uma teoria livre sem interação. Consiste basicamente de um numero infinito de osciladores harmonicos, um oscilador para cada ponto no espaço-tempo continuo x, t

$$\phi(x, t) \sim \sum_{k, \omega} \left(a_{k, \omega} e^{ikx - \omega t} + a_{k, \omega}^\dagger e^{ikx + \omega t} \right),$$

onde k, ω são coordenadas do espaço dual de (x, t) e (a^\dagger, a) são operadores de criação e destruição. A dinamica se realiza numa arena fixa, que é o substrato espaço-temporal. A aleatoriedade entra nas regras de comutação dos operadores de criação e destruição dos osciladores.

Na area financeira acontece o oposto. Pois o analogo da posição x é o ativo subjacente S e é este que segue uma trajetoria aleatoria. O analogo do campo $\phi(x, t)$ é o valor da opção $f(S, t)$. A relação entre S e $f(S, t)$ é completamente deterministica dado pelo retorno em $t = T$ como já enfatizamos no fim da seção ???. No caso de um só ativo subjacente $f(S, t)$ obdece a equação BSM, que pode ser vista como a versão euclideana, ou seja $i\hbar\partial_t \rightarrow \partial/\partial\tau$, da equação de Schrödinger. É uma equação de **um** só corpo. O analogo de uma teoria de campos aparece, quando consideramos um numero infinito de ativos subjacentes.

A equ.(1??)

$$f(s, t) = \langle \phi(X_T) | \mathcal{F}_t \rangle_{X_t=s}$$

Inserting this into Equ.(??) (now with \hbar inserted),

$$\begin{aligned} \langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle &= K(q_F, q_I; t_F - t_I) = \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{N/2} &\left[\prod_{k=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dq_k \right] e^{i \int_{t_I}^{t_F} dt L(q, \dot{q})}. \end{aligned} \quad (32.1)$$

With the notation

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{N/2} \prod_{k=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} dq_k \right] = \int_{q(t_I)}^{q(t_F)} D[q(t)] = \int Dq, \quad (32.2)$$

we have:

$$\langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle = \int_{q(t_I)}^{q(t_F)} D[q(t)] e^{i/\hbar \int dt L(q, \dot{q})} = \int Dq e^{iS/\hbar}, \quad (32.3)$$

with the action

$$S = \int_{t_I}^{t_F} L(q, \dot{q}) dt. \quad (32.4)$$

This equation is the one-dimensional version of Equ.(??) with $J = 0$.

$$Z_E(J) = \frac{1}{Z} \int_E D\varphi e^{-\int d^4x \mathcal{L}_E(\varphi) + \int d^4x J\varphi} \quad (32.5)$$

Usando as variaveis -veja equ.(C.3) -

$$S = Ke^x, \quad c(S, t) = Kv(x, \tau).$$

a equação BSM é

$$\frac{1}{D_\sigma} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (r_\sigma - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - r_\sigma v. \quad (32.6)$$

Exercício 32.1.

Verifique que a a densidade Lagrangiana correspondente a equação de BSM é

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\partial_x v^* \partial_x v - \frac{1}{2D_\sigma} (v^* \partial_t v - v \partial_t v^*) \\ & - \frac{1}{2} (r_\sigma - 1) (v^* \partial_x v - v \partial_x v^*) + r_\sigma v v^* \end{aligned} \quad (32.7)$$

Os momenta são

$$p = -\frac{1}{2D_\sigma} v^*, \quad p^* = \frac{1}{2D_\sigma} v. \quad (32.8)$$

A densidade Hamiltoniana é

$$\mathcal{H} = \partial_x v^* \partial_x v + \frac{1}{2} (r_\sigma - 1) (v^* \partial_x v - v \partial_x v^*) + 4D_\sigma^2 r_\sigma p p^* \quad (32.9)$$

Como a equação de difusão é de primeira ordem no tempo, tivemos que introduzir um campo auxiliar v^* [36]. Devido a esta complicação usamos o operador H_{BS} copiando o formalismo da mecanica quantica.

Veja no entanto ???. xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Apêndice A: O limite da distribuição binomial

De um total de N passos, a probabilidade de ocorrerem n passos a direita é

$$W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n \tilde{p}^{N-n}. \quad (A.1)$$

$W(n)$ é obviamente normalizado $\sum_{n=0}^N W(n) = 1$, que é explicitado pela identidade

$$1 = (p + \tilde{p})^N = \sum_{n=0}^N W(n) \quad \text{para } \tilde{p} = 1 - p. \quad (A.2)$$

A media de n , o número de passos para a direita, é ¹⁰⁰

$$\begin{aligned}\langle n \rangle &= \sum_{n=0}^N nW(n) = p \frac{\partial}{\partial p} (p + \tilde{p})^N \Big|_{\tilde{p}=1-p} \\ &= pN(p + \tilde{p})^{N-1} \Big|_{\tilde{p}=1-p} = Np.\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

A variância é

$$\sigma_n^2 = \langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2. \quad (\text{A.4})$$

Mas

$$\begin{aligned}\langle n^2 \rangle &= \left(p \frac{\partial}{\partial p} \right) [Np(p + \tilde{p})^{N-1}] \Big|_{\tilde{p}=1-p} = \\ &= p[N(p + \tilde{p})^{N-1} + pN(N-1)(p + \tilde{p})^{N-2}] \Big|_{\tilde{p}=1-p} = (Np)^2 + Np\tilde{p}\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

ou seja

$$\langle n^2 \rangle = (Np)^2 + Np\tilde{p} = \langle n \rangle^2 + Np\tilde{p}. \quad (\text{A.6})$$

A variância σ_n^2 é portanto

$$\sigma_n^2 = Np\tilde{p} \quad (\text{A.7})$$

com

$$\frac{\sigma_n}{\langle n \rangle} = \sqrt{\frac{\tilde{p}}{p} \frac{1}{\sqrt{N}}}$$

No limite $N \rightarrow \infty$ a distribuição binomial se torna uma Gaussiana com media Np e variância $Np\tilde{p}$

$$W(n) = \binom{N}{n} p^n \tilde{p}^{N-n} = (2\pi Np\tilde{p})^{-1/2} e^{-\frac{(n-Np)^2}{2Np\tilde{p}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (\text{A.8})$$

Para demonstrar este resultado expandiremos $W(n)$ em torno do maximo $\langle n \rangle = Np$ até segunda ordem em $z = n - \langle n \rangle$

$$\ln W(n) = \ln W(\langle n \rangle) + zB_1 + \frac{1}{2}z^2B_2 + \dots, \quad B_k \equiv \frac{d \ln W}{dn^k} \Big|_{n=\langle n \rangle}. \quad (\text{A.9})$$

No maximo $B_1 = 0$ e $B_2 < 0$. Temos então

$$W(n) \sim W(\langle n \rangle) e^{-\frac{1}{2}|B_2|(n-\langle n \rangle)^2}, \quad (\text{A.10})$$

¹⁰⁰Faça $\tilde{p} = 1 - p$ apos ter efetuado a derivada.

que é uma distribuição de Gauss. Precisamos verificar que $n = \langle n \rangle$ é um máximo e calcular B_2 . De fato temos

$$\ln W(n) = \ln \left[\binom{N}{n} p^n \tilde{p}^{N-n} \right] \sim \ln N! - \ln n! - \ln(N-n)! + n \ln p + (N-n) \ln q.$$

Para n grande podemos usar

$$\frac{d \ln n!}{dn} \sim \frac{\ln(n+1)! - \ln n!}{1} = \ln n,$$

e integrando

$$\ln n! \sim n \log n - n \quad (\text{A.11})$$

de modo que

$$\frac{d \ln W(n)}{dn} \sim -\ln n + \ln(N-n) + \ln p - \ln q.$$

Zerando esta expressão localiza o máximo em $n = \tilde{n}$

$$(N - \tilde{n})p = \tilde{n}\tilde{p} \rightarrow \tilde{n} = Np = \langle n \rangle \quad (\text{A.12})$$

Usaremos a aproximação de Stirling equ.(A.11)¹⁰¹. Obtemos

$$n! \sim n^n e^{-n}. \quad (\text{A.13})$$

Para expandir em torno do máximo, introduzamos o parâmetro de expansão $z \ll 1$ como $n = pN + z$, $N - m = qN - z$. Segue-se, que

$$\begin{aligned} \ln \binom{N}{n} &\sim N(\ln N - 1) \\ &\quad - (pN + z)[\ln N + \ln(p + z/N)] + m \\ &\quad - (qN - z)[\ln N + \ln(\tilde{p} - z/N)] + (N - m) \\ &= -(pN + z) \ln(p + z/N) - (qN - z) \ln(\tilde{p} - z/N) \end{aligned}$$

¹⁰¹Outra heurística é a seguinte.

$$\ln n! = \sum_{i=1}^n \log n_i \sim \int_1^n \log x dx = [x \log x - x]_1^n \sim n \log n - n$$

$$\begin{aligned}
&= -(pN + z) \ln\left[p\left(1 + \frac{z}{pN}\right)\right] - (\tilde{p}N - z) \ln\left[\tilde{p}\left(1 - \frac{z}{\tilde{p}N}\right)\right] \\
&\sim -(pN + z)\left(\ln p + \frac{z}{pN} - \frac{z^2}{2pN}\right) - (\tilde{p}N - z)\left(\ln \tilde{p} - \frac{z}{\tilde{p}N} + \frac{z^2}{2\tilde{p}N}\right) \\
&= -N(p \ln p + \tilde{p} \ln \tilde{p}) + z[-\ln p - 1 + \ln \tilde{p} + 1] + z^2\left[-\frac{1}{2pN} - \frac{1}{2\tilde{p}N}\right],
\end{aligned}$$

onde em \sim usamos $\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \mathcal{O}(z^3)$ com $z = n - pN$. Ou seja: a igualdade vale para $n \sim Np = \langle n \rangle$.

Usando ainda

$$\ln[p^n \tilde{p}^{N-n}] \sim (Np+z) \ln p + (N - \tilde{p}N - z) \ln \tilde{p} = N(p \ln p + \tilde{p} \ln \tilde{p}) + z(\ln p - \ln \tilde{p})$$

Resulta para $\ln W(n)$

$$\ln \left[\binom{N}{n} p^n \tilde{p}^{N-n} \right] \sim -\frac{z^2}{2Np\tilde{p}},$$

onde o termo $\sim z$ cancelou corretamente, pois estamos expandindo em torno do máximo¹⁰².

Em nossa aproximação de Stirling perdemos a normalização de $W(n)$, pois desprezamos termos $\sim \ln N/N$. Normalizando corretamente temos finalmente

$$W(n) = \binom{N}{n} p^n \tilde{p}^{N-n} = (2\pi Np\tilde{p})^{-1/2} e^{-\frac{(n-Np)^2}{2Np\tilde{p}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (\text{A.14})$$

No expoente temos

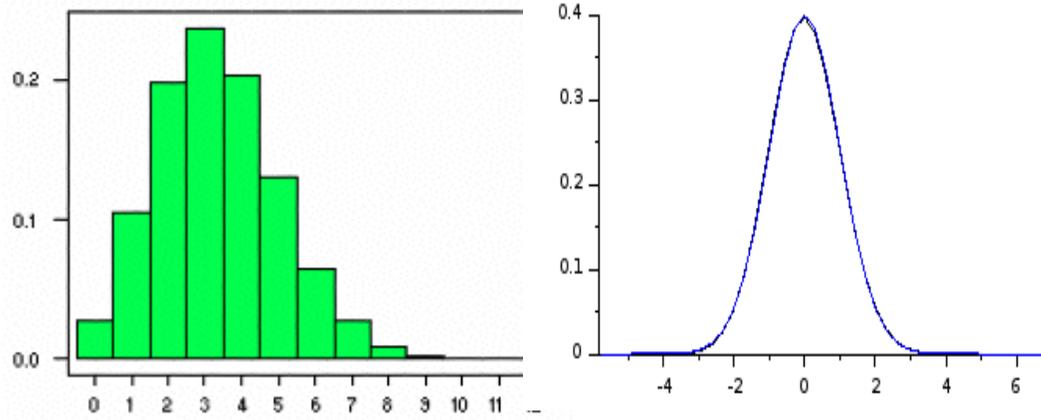
$$n - Np = \frac{1}{2}[m - N(p - \tilde{p})],$$

onde usamos $n = (m + N)/2$. Resulta, que a probabilidade do andarilho estar entre ml e $(m + \Delta m)l$ é

$$P[ml \leq x \leq (m + \Delta m)l] = (8\pi Np\tilde{p})^{-1/2} e^{-\frac{[m - N(p - \tilde{p})]^2}{8Np\tilde{p}}}. \quad (\text{A.15})$$

Note que em relação a equ.(A.14) ganhamos uma 2 devido a $\Delta m = 2\Delta n$. As figura abaixo comparam a distribuição binomial e a Gaussiana.

¹⁰²Mais precisamente: no limite a razão do lado esquerdo pelo lado direito tende a 1.



(a) Binomial para $N = 20, p = 1/6$.

(b) Binomial($N = 50, p = 0.4$) e Gaussiana com mesma variância centradas na média.

Figure A.1: Comparando Binomial e Gaussiana.

A distribuição de Poisson é o limite da distribuição binomial

$$W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n \tilde{p}^{N-n},$$

quando

$$N \rightarrow \infty, p \rightarrow 0 \quad \text{com} \quad Np = \lambda = \text{fixo}.$$

Reescrevendo com

$$p^n (1-p)^{N-n} = \left(\frac{\lambda}{N}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-n} = \frac{\lambda^n \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N}{(N-\lambda)^n}$$

temos

$$\begin{aligned} W(n) &= \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!} \frac{\lambda^n \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N}{(N-\lambda)^n} \\ &= \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{(N-\lambda)^n} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \\ &\sim 1 \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}. \end{aligned} \tag{A.16}$$

Apêndice B: Verificação explícita da solução da equação BSM

Vamos verificar¹⁰³ que

$$\begin{aligned} c(S, t) &= +S\mathcal{N}(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_-) \\ p(S, t) &= -S\mathcal{N}(-d_+) + Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_-). \end{aligned}$$

com

$$d_{\pm} = \frac{\ln(S/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (\text{B.1})$$

e

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy. \quad (\text{B.2})$$

satisfazem a equação de BSM¹⁰⁴. A verificação envolve um cálculo meio laborioso, porém sem maiores dificuldades. Temos as seguintes derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_{\pm}}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{T-t}} \left(\frac{d_{1,2}}{2\sqrt{T-t}} - \left(\frac{r}{\sigma} \pm \frac{\sigma}{2} \right) \right). \\ \frac{\partial d_+}{\partial S} &= \frac{\partial d_-}{\partial S} = \frac{1}{\sigma S \sqrt{T-t}} \\ \frac{\partial \mathcal{N}(d_-)}{\partial t} &\equiv \mathcal{N}'(d_-) = \frac{e^{-d_-^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{T-t}} \left(\frac{d_-}{2\sqrt{T-t}} - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) \right) \right] \\ &= \mathcal{N}'(d_+) \exp\{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t) - \sigma^2(T-t)/2\} \\ &= \mathcal{N}'(d_+) \frac{S}{K} e^{r(T-t)} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

ou seja

$$S\mathcal{N}'(d_+) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_-). \quad (\text{B.4})$$

¹⁰³Esta seção é um exercício em derivadas e você pode pula-lo, se não estiver afim, sem perder algo essencial.

¹⁰⁴Como já foi mencionado na equ.(10.23), podemos obter a solução acima a partir da formula de Black (10.19) fazendo a substituição

$$\begin{cases} T & \rightarrow T-t \\ S_0 & \rightarrow S \end{cases}$$

nesta equação com $\tau = T-t$ o tempo até a maturação.

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} &= S\mathcal{N}'(d_+)\frac{\partial d_+}{\partial t} - rKe^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_-) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_-)\frac{\partial d_-}{\partial t} \\
&= S\mathcal{N}'(d_+)\left(\frac{\partial d_+}{\partial t} - \frac{\partial d_-}{\partial t}\right) - rKe^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_-) \\
&= -S\mathcal{N}'(d_+)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} + r(c - S\mathcal{N}(d_+)). \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Para as derivadas em relação a S temos usando a equ.(B.4)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial S} &= \mathcal{N}(d_+) + S\frac{d\mathcal{N}(d_+)}{dd_+}\frac{\partial d_+}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}\frac{d\mathcal{N}(d_-)}{dd_-}\frac{\partial d_-}{\partial S} \\
&= \mathcal{N}(d_+) + \{S\mathcal{N}'(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_-)\}\frac{\partial d_+}{\partial S} \\
&= \mathcal{N}(d_+). \tag{B.6}
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\partial \mathcal{N}(d_+)}{\partial S} = \frac{\mathcal{N}'(d_+)}{\sigma S\sqrt{T-t}} \tag{B.7}$$

Finalmente juntando os cacos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial c}{\partial t} + rS\frac{\partial c}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} - rc \\
&= -\frac{\sigma S\mathcal{N}'(d_+)}{2\sqrt{T-t}} + r(c - S\mathcal{N}(d_+)) + rS\mathcal{N}(d_+) + \frac{\sigma S}{2}\frac{\mathcal{N}'(d_+)}{\sqrt{T-t}} - rc = 0 \tag{B.8}
\end{aligned}$$

verificando a equação BSM para uma opção *call*. Para uma opção *put* o calculo é analogo.

Apêndice C: Transformando na equação de difusão

Black e Scholes originalmente resolveram a equ.(17.7), transformando-a na equação de difusão (9.27). A equação BSM para uma opção *call*, ou seja $f = c$, é

$$\begin{cases} \frac{1}{D_\sigma}\frac{\partial c}{\partial t} + r_\sigma S\frac{\partial c}{\partial S} + S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = r_\sigma c, & 0 < t < T \\ c(S, T) = (S - K, 0)_+ & \text{(condição final).} \end{cases} \tag{C.1}$$

onde introduzimos a constante de difusão $D_\sigma = \sigma^2/2$ e $r_\sigma = r/D_\sigma = 2r/\sigma^2$. Para o domínio semi-infinito $0 \leq S \leq \infty$, a única condição de contorno é a integrabilidade equ.(14.10) ou seja $c(S, t)$ não deve crescer mais que uma Gaussiana.

Para mudar a condição final para uma condição inicial invertemos a variável temporal, mudando $t \rightarrow \tau$

$$t = T - \tau \quad (\text{C.2})$$

e também re-escalamos $c(s, t)$ e S :

$$S = Ke^x, \quad c(S, t) = Kv(x, \tau) \quad \text{com} \quad -\infty \leq x \leq \infty. \quad (\text{C.3})$$

Como veremos a transformação $x \sim \log S$ linearisa a equação!

As derivadas são

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -K \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad \frac{dS}{dx} = Ke^x = S$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial S} &= K \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dS} = e^{-x} \frac{\partial v}{\partial x} = \left[\frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} &= \frac{dx}{dS} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial c}{\partial S} \right) = e^{-x} \left(-e^{-x} \frac{\partial v}{\partial x} + e^{-x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ &= \frac{e^{-2x}}{K} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = \left[\frac{K}{S^2} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Inserindo as expressões entre [...] na equ.(17.7) obtemos a equação linear

$$\frac{1}{D_\sigma} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (r_\sigma - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - r_\sigma v. \quad (\text{C.4})$$

Podemos eliminar o termo v e $\frac{\partial v}{\partial x}$ introduzindo

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + D_\sigma \beta \tau} u(x, \tau) \quad (\text{C.5})$$

com α, β a determinar. A equação para $u(x, \tau)$ é

$$\beta u + \frac{1}{D_\sigma} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (r_\sigma - 1) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - r_\sigma u. \quad (\text{C.6})$$

Zerando os coeficientes de u e $\frac{\partial u}{\partial x}$ requer

$$\begin{aligned}\alpha^2 + (r_\sigma - 1)\alpha - r_\sigma - \beta &= 0, \\ 2\alpha + r_\sigma - 1 &= 0,\end{aligned}$$

cujas soluções são

$$\alpha = -\frac{1}{2}(r_\sigma - 1), \quad \beta = -\frac{1}{4}(r_\sigma + 1)^2 \quad (\text{C.7})$$

resultando para $v(x, \tau)$

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(r_\sigma - 1)x - \frac{D_\sigma}{4}(r_\sigma + 1)^2 \tau} u(x, \tau). \quad (\text{C.8})$$

A equação para $u(x, \tau)$ fica¹⁰⁵

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - D_\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{C.9})$$

com $D_\sigma = \sigma^2/2$ e $r_\sigma = r/D_\sigma$.

Esta é a bem conhecida equação de condução de calor. Sua solução *fundamental* é - veja equ.(9.40) -

$$G(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_\sigma \tau}} e^{-x^2/4D_\sigma \tau}, \quad (\text{C.10})$$

cujos limites para $\tau \rightarrow 0$ é a delta de Dirac como vimos na seção 9.2.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} G(x, \tau) = \delta(x). \quad (\text{C.11})$$

A solução para a condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ é

$$u(x, \tau) = \int dy G(x - y, \tau) u_0(y),$$

ou seja

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_\sigma \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x-y)^2/4D_\sigma \tau} u_0(y), \quad (\text{C.12})$$

¹⁰⁵Se voce estiver incomodado com os truques tirados da manga aqui, fique sossegado. Existe o "metodo das caracteristicas", que transforma qualquer equação parabolica na equação de difusão. Veja e.g. [19], cap. 2.

onde supusemos um crescimento limitado de $u_0(x)$ para que a integral converja¹⁰⁶. Para $u_0(x)$ limitado e contínuo, a solução equ.(C.12) é única.

Para determinar $u_0(x)$ (ou seja em $t = T$) usemos a segunda equ.(C.1) e com a equ.(C.8) obtemos

$$v(x, 0) = (S/K - 1, 0)_+ = \max[e^x - 1, 0],$$

que fornece

$$u_0(x) = e^{\frac{1}{2}(r_\sigma - 1)x} (e^x - 1)_+ = \max\left(e^{\frac{1}{2}(r_\sigma + 1)x} - e^{\frac{1}{2}(r_\sigma - 1)x}, 0\right). \quad (\text{C.13})$$

Falta calcular a integral da equ.(C.12). Mudando de variável $s = (y - x)/\sqrt{2D_\sigma\tau}$ temos

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-s^2/2} u_0(x + \sqrt{2D_\sigma\tau}s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-s^2/2} \left(e^{\frac{1}{2}(r_\sigma + 1)(x + \sqrt{2D_\sigma\tau}s)} - e^{\frac{1}{2}(r_\sigma - 1)(x + \sqrt{2D_\sigma\tau}s)} \right)_+ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2D_\sigma\tau}}^{\infty} ds e^{-s^2/2} \left[e^{\frac{1}{2}(r_\sigma + 1)(x + \sqrt{2D_\sigma\tau}s)} - e^{\frac{1}{2}(r_\sigma - 1)(x + \sqrt{2D_\sigma\tau}s)} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Completando o quadrado como fizemos na equ.(10.4) temos para o primeiro termo

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2D_\sigma\tau}}^{\infty} ds e^{-s^2/2} e^{\frac{1}{2}(r_\sigma + 1)(x + \sqrt{D_\sigma\tau}s)} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(r_\sigma + 1)x}}{\sqrt{2\pi D_\sigma\tau}} \int_{-x/\sqrt{4D_\sigma\tau}}^{\infty} ds e^{-s^2/2} e^{\frac{1}{2}(r_\sigma + 1)\sqrt{2D_\sigma\tau}s} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(r_\sigma + 1)x + \frac{1}{4}(r_\sigma + 1)^2 D_\sigma\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2D_\sigma\tau}}^{\infty} ds e^{-\frac{1}{2}(s - \frac{1}{2}(r_\sigma + 1)\sqrt{D_\sigma\tau})^2} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(r_\sigma + 1)x + \frac{1}{4}(r_\sigma + 1)^2 D_\sigma\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2D_\sigma\tau} - \frac{1}{2}(r_\sigma + 1)\sqrt{2D_\sigma\tau}}^{\infty} ds e^{-s^2/2}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(r_\sigma + 1)x + \frac{1}{4}(r_\sigma + 1)^2 D_\sigma\tau} \mathcal{N}(d_+) \quad (\text{C.15})$$

¹⁰⁶Note que na dedução de fórmula de Feynman-Kac impusemos esta mesma condição: equ.(14.10).

com

$$d_+ = \frac{x}{\sqrt{2D_\sigma\tau}} + \frac{1}{2}(r_\sigma + 1)\sqrt{D_\sigma\tau} \quad (\text{C.16})$$

Analogamente temos

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x/\sqrt{2D_\sigma\tau}}^{\infty} ds e^{-s^2/2} e^{\frac{1}{2}(r_\sigma-1)(x+\sqrt{2\tau}s)} = I_1([r_s+1] \rightarrow [r_s-1]) \quad (\text{C.17})$$

Juntando resulta

$$u(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(r_\sigma+1)x + \frac{1}{4}(r_\sigma+1)^2 D_\sigma\tau} \mathcal{N}(d_+) - e^{\frac{1}{2}(r_\sigma-1)x + \frac{1}{4}(r_\sigma-1)^2 D_\sigma\tau} \mathcal{N}(d_-) \quad (\text{C.18})$$

com

$$d_\pm = \frac{x}{\sqrt{D_\sigma\tau}} + \frac{1}{2}(r_\sigma \pm 1)\sqrt{D_\sigma\tau}. \quad (\text{C.19})$$

Falta reintroduzir as variaveis originais usando as equ.(C.3,C.8):

$$\begin{aligned} c(S, t) &= K e^{-\frac{1}{2}(r_\sigma-1)x - \frac{D_\sigma}{4}(r_\sigma+1)^2\tau} \\ &\left(e^{\frac{1}{2}(r_\sigma+1)x + \frac{D_\sigma}{4}(r_\sigma+1)^2\tau} \mathcal{N}(d_+) - e^{\frac{1}{2}(r_\sigma-1)x + \frac{D_\sigma}{4}(r_\sigma-1)^2\tau} \mathcal{N}(d_-) \right) \\ &= K (e^x \mathcal{N}(d_+) - e^{-r_s D_\sigma\tau} \mathcal{N}(d_-)), \end{aligned}$$

resultando em

$$c(S, t) = S \mathcal{N}(d_+) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_-) \quad (\text{C.20})$$

com

$$d_\pm = \frac{\ln(S/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (\text{C.21})$$

que coincide com a solução equ.(16.13).

O resultado para uma opção *put* Europeia é analogo e está de acordo com $p = -c(-d_\pm)$.

No limite $S \rightarrow \infty$ temos $d_\pm \sim \ln(S/K) \rightarrow \infty$ e

$$\mathcal{N}(d_\pm) \rightarrow 1, \quad \mathcal{N}(-d_\pm) \rightarrow 0, \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{aligned} \phi_t &\rightarrow 1, & B_t \psi_t &\rightarrow -K e^{r(T-t)} \\ c &\rightarrow S - K e^{-r(T-t)}. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Apêndice D: Solução da equação Black-Scholes para parâmetros dependentes do tempo

Considere a equação de BS com parâmetros dependentes do tempo [29, 48] pagando $d(t)$ dividendos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(S, t)}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 f(S, t)}{\partial S^2} + [r(t) - d(t)]S\frac{\partial f(S, t)}{\partial S} - r(t)f(S, t). \end{aligned} \quad (D.1)$$

Introduzindo $x = \ln(S/S_0)$ a equação simplifica para

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + [r(t) - d(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)]\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} - r(t)f(x, t). \end{aligned} \quad (D.2)$$

Esta é uma equação linear com coeficientes dependentes do tempo, cuja solução é

$$f(x, t) = e^{c_3(t)} e^{c_1(t)\frac{\partial}{\partial x}} e^{c_2(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}} \quad (D.3)$$

com

$$c_1(t) = \int_0^t [r(t') - d(t') - \frac{1}{2}\sigma(t')^2] dt' \quad (D.4)$$

$$c_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(t')^2 dt' \quad (D.5)$$

$$c_3(t) = - \int_0^t r(t') dt' \quad (D.6)$$

Fazendo uso das identidades

$$e^{\theta\frac{\partial}{\partial x}} f(x) = f(x + \theta) \quad (D.7)$$

$$e^{\theta\frac{\partial^2}{\partial x^2}} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{4\pi\theta}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\theta}} f(y) \quad (D.8)$$

podemos expressar $f(x, t)$ como

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' G(x, t; x', 0) f(x', 0) \quad (D.9)$$

com o propagador

$$G(x, t; x', 0)dx = \frac{dx}{\sqrt{4\pi c_2(t)}} e^{-\frac{[x-x'+c_1(t)]^2}{4c_2(t)} + c_3(t)}. \quad (\text{D.10})$$

Reintroduzindo $\ln(S/S_0) = x$ e trasladando $[0, t] \rightarrow [t, T]$ com $\tau = T - t$ obtemos

$$\begin{aligned} G(S_T; S, t)dS &= \frac{dS}{S\sqrt{2\pi \int_t^T \sigma(t)^2 dt'}} e^{-\frac{\left(\log \frac{S_T}{S} + \int_0^t [r(t') - d(t') - \frac{1}{2}\sigma(t')^2] dt'\right)^2}{2 \int_0^t \sigma(t)^2 dt'}} - \int_0^t r(t') dt' \\ &= \frac{dS}{S\sqrt{2\pi \int_t^T \sigma(t)^2 dt'}} e^{-\frac{\left(\log \frac{S_T}{S} - \int_0^t [r(t') - d(t') - \frac{1}{2}\sigma(t')^2] dt'\right)^2}{2 \int_0^t \sigma(t)^2 dt'}}. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Para coeficientes constantes e $d(t) = 0$ isto reproduz a probabilidade risco-neutra equ.(16.30).

Exercício D.1. Seja $c(S, t, K, r, \sigma)$ o valor de uma opção Europeia no instante t no modelo BSM. Suponha que um ativo evolua como

$$dS_t = r(t)S_t dt + \sigma(t)dW_t,$$

com W_t Wiener sob a medida risco-neutra. Mostre que $c(S, t, K, \bar{r}, \bar{\sigma})$ com

$$\bar{r} = \frac{1}{t} \int_0^t r(s) ds, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \sigma^2(s) ds}$$

satisfaz a equ.(D.1).

Para aplicações com dados reais veja [48].

Apêndice E: Métodos Numéricos

A equação BSM para uma opção *call* é

$$\begin{cases} \frac{1}{D_\sigma} \frac{\partial c}{\partial t} + r_\sigma S \frac{\partial c}{\partial S} + S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = r_\sigma c, & 0 < t < T \\ c(0, t) = 0, \quad c(L, t) = S, & \text{(conds. de contorno)} \\ c(S, T) = (S - K, 0)_+ & \text{(condição final).} \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

com $0 \leq S \leq L$, $D_\sigma = \sigma^2/2$ e $r_\sigma = r/D_\sigma = 2r/\sigma^2$. O parametro $L \gg K$ delimita o dominio de S e idealmente deve $\rightarrow \infty$.

E.1 Monte Carlo etc

Na seção 14 obtivemos a formula de Feynman

$$f(x, t) = e^{-r(T-t)} \langle \phi(X_T) | \mathcal{F}_t \rangle_{X_t=x}. \quad (\text{E.2})$$

para uma opção com retorno $\phi(X_T)$ na maturação para um ativo subjacente evoluindo como

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad (\text{E.3})$$

e como

$$dS_t = r dt + \sigma dW_t \quad (\text{E.4})$$

sob a medida risco-neutra \mathcal{Q} . A esperança acima é uma representação conveniente para calcula-la por metodos Monte Carlo. Impondo $S(t) = s$

$$S(t + k\delta t) = s e^{\sum_{i=1}^k (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t + \sigma w_i \sqrt{\delta t}}, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (\text{E.5})$$

Cada w_i é retirado da distribuição normal $N(0, 1)$.

xxx

E.2 Resolvendo PDE

Suponha que queiramos resolver a equ.(22.6), mas somente com o termo da volatilidade local dependendo tambem do ativo. Neste caso o ativo evolui como

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(t, S)S(t)d\tilde{W}_t, \quad \mu = r - d \quad (\text{E.6})$$

e a opção satisfará a equ.(22.6) simplificada

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2(S, t)S^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (\text{E.7})$$

ou seja uma equaçãoBSM com volatilidade variavel. Mudando como de costume $t \rightarrow \tau = T - t$ e $x = \log(S/K)$ a equação acima fica

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma(\tau, x)^2 \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma(\tau, x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - rf. \quad (\text{E.8})$$

Esta equação é da forma

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \mathcal{L}f \quad (\text{E.9})$$

com o operador \mathcal{L} envolvendo somente derivadas em relação a x .

Vamos discretizar o eixo τ em intervalos $\Delta\tau = T/N$, de modo que

$$f(\tau, x) \rightarrow f^n(x) = f(\tau_n, x), \tau_n = n\Delta\tau. \quad (\text{E.10})$$

Podemos agora discretizar a derivada $\frac{\partial f}{\partial \tau}$ de duas maneiras, resultando para a equação diferencial

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta\tau} = \mathcal{L}f^n & \textit{explicito} \\ \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta\tau} = \mathcal{L}f^{n+1} & \textit{implicito} \end{array} \right. \quad (\text{E.11})$$

ou uma combinação das duas

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta\tau} = \theta\mathcal{L}f^n + \tilde{\theta}\mathcal{L}f^{n+1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \tilde{\theta} = 1 - \theta. \quad (\text{E.12})$$

Obtemos para f^{n+1}

$$f^{n+1} = (1 - \Delta\tau\theta\mathcal{L})^{-1}[1 + \Delta\tau\tilde{\theta}\mathcal{L}]f^n \quad (\text{E.13})$$

Se $\theta = 0$ não precisamos inverter um operador e por isto este esquema chama-se "explicito". O caso especial $\theta = 1/2$ chama-se *Crank-Nicholson*. O caso implícito é muito mais estável por causa do $(\dots)^{-1}$, que suprime modos potencialmente explosivos[55]¹⁰⁷.

Escrevendo a equação acima como

$$f^{n+1} = \mathcal{A}f^n, \quad \mathcal{A} \equiv (1 - \Delta\tau\theta\mathcal{L})^{-1}[1 + \Delta\tau\tilde{\theta}\mathcal{L}], \quad (\text{E.14})$$

podemos itera-la, obtendo

$$f^n = \mathcal{A}^n f^0 \quad (\text{E.15})$$

e obviamente necessitamos de uma condição inicial para f^0 .

Se \mathcal{A} for diagonalizável, podemos usar uma base em que \mathcal{A} seja diagonal com autovetores \mathbf{e}_j e autovalores a_j : $\mathcal{A}\mathbf{e}_j = a_j\mathbf{e}_j$. Expandindo $f^n(x)$ em autovetores temos

$$f^n(x) = \sum_j f_j^n \mathbf{e}_j(x) \quad (\text{E.16})$$

¹⁰⁷No contínuo condições de contorno selecionam a solução correta.

Condições de contorno selecionarão os autovetores apropriados.

Discretizando também o eixo x como $\Delta x = (x_M - x_0)/M$, o operador \mathcal{A} se torna uma matriz A de tamanho $M \times M$ e as variáveis são τ_n, x_m e

$$f(\tau, x) \rightarrow f_m^n = f(\tau_n, x_m) \quad (\text{E.17})$$

Da equ.(E.15) resulta

$$f_j^n = (a_j)^n f_j^0. \quad (\text{E.18})$$

Apêndice F: Codigos SciLab

Veja <https://www.scilab.org/>

F.1 Processo de Wiener

```

////////////////////////////////////
//
//          Check  properties of the Wiener process
//
////////////////////////////////////

N = 100;           // No of time steps
Nw = 1000;        // No of repetitions
dW = grand(N,Nw, "nor", 0, 1); // Gaussian increments

mean(dW, 'c'), // Should be a column of zeros
size(mean(dW, 'c'));
stdev((dW, 'c'), // Should be a column of 1s
mean(dW.^2, 'c'), // Should be a column of 1s

W=[zeros(1,Nw);cumsum(dW, 'r')];
mean(W, 'c'), // Should be zero
mean(W), // Should be zero
[mean(W(2:101,:), 'c'), mean(dW, 'c')] // Compare quality of 'zeros'

```

```

t0 = N;
mm = zeros(t0,1);
for ti=1:t0
    mm(ti) = mean(W(ti,:).^2),
end
// Plot result
c_f = 1; tt='<W^2(t)>';
nplot(c_f,[mm,[0:t0-1]'],'[Wiener vs t]',tt);

////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
//          Compute two point function
//          $< W(t_1)W(t_2)>=min(t_1 , t_2)$
//
//          Wiener process is not stationary:
//          beware of Fourier Transform!
////////////////////////////////////

M12 = zeros(40,30)
for t11=1:40
    for Del_t=1:30
        t12=t11+Del_t;
        W1 = W(t11 ,:);
        W2 = W(t12 ,:);
        M12(t11+1,Del_t+1) = mean(W1.*W2);
        // Should be t11-1, independent of Delt
        M12(t11+1,Del_t+1)-(t11-1),
    end
end

me_1 = mean(M12(1:31,:), 'c');
me_2 = mean(M12, 'r')
// [mean(M12(1:31,:), 'c'), mean(M12, 'r')] ,
//
c_f = 2;
tt = 'Wiener 2-point function';
figure(c_f);

```

```

clf(c_f);
// Start indices from 0
plot2d([1:41]',M12-ones(size(M12,1),size(M12,2)))
xlabel('$t_1$')
ylabel('$W(t_1,t_2) \sim t_1$');
legend('Wiener 2-point function',2)

```

////////////////////////////////////

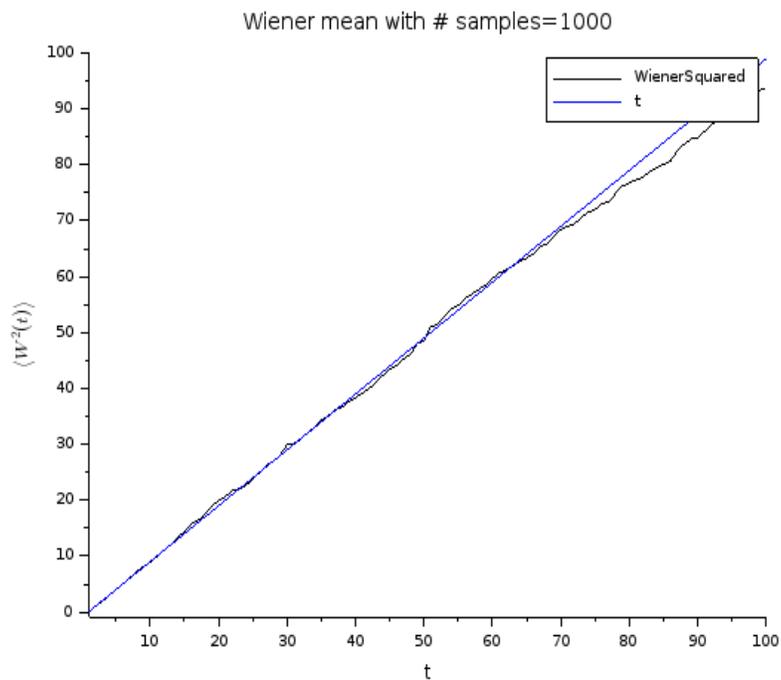


Figure F.1: Verificação de $\langle W^2(t) \rangle = t$.

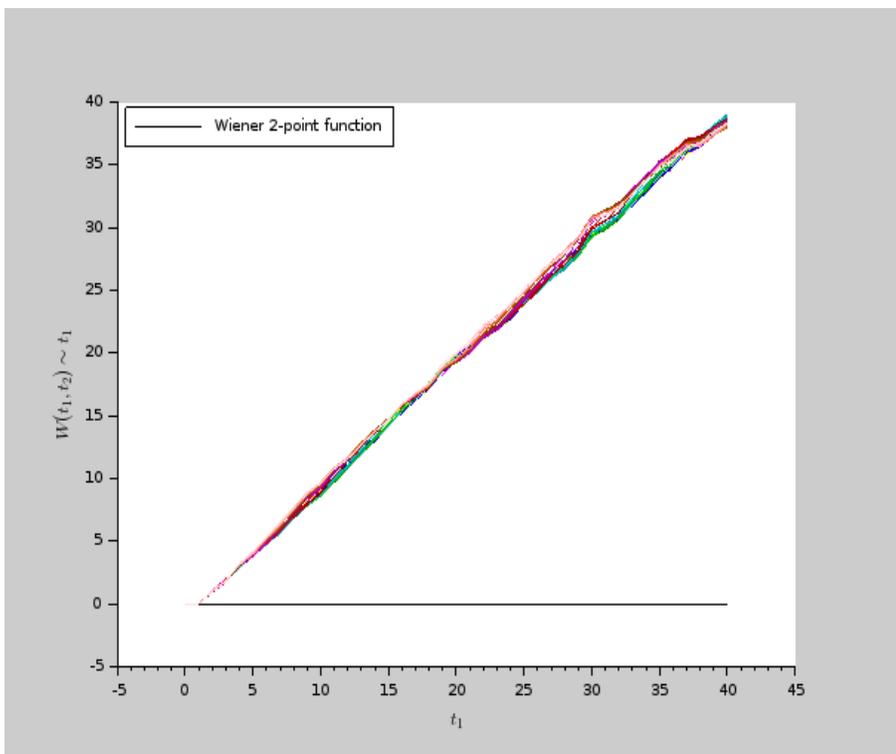


Figure F.2: Verificação de $\langle W(t_1)W(t_2) \rangle = \min(t_1, t_2)$.

F.2 Precificação Black-Scholes

```

////////////////////////////////////
//
// Dynamic hedging with Black-Scholes
//
////////////////////////////////////
//
// Get Normal Distribution

function [cdf]=normcdf(x)
    cdfN=length(x);
    cdf=cdfnor("PQ",x,zeros(1,cdfN),ones(1,cdfN));
//                               Mean zero,      sigma=1
endfunction

```

```

//
//
// Compute BSM vanilla options for all times [0:T]
//

function [v,n1,n2] = Vanilla(SS,K,r,sigma,Tau,pc,eps_ATM);
// tau = T-t Time zero is t=0, tau=T
// pc=1 for call and -1 for put
// eps_ATM sets the limit for  $S \sim K$  of ATM-options

d1 = (log(SS/K)+(r+0.5*sigma^2)*Tau)./(sigma*sqrt(Tau));
d2 = (log(SS/K)+(r-0.5*sigma^2)*Tau)./(sigma*sqrt(Tau));
// d2=d1-sigma*sqrt(Tau)
n1 = zeros(length(SS),1); n2 = n1;
for i=1:length(SS); n1(i)=normcdf(d1(i)); n2(i)=normcdf(d2(i));
v = SS.*n1-K*(%e^(-r*Tau)).*n2);
if abs(SS(length(SS))-K)<eps_ATM
// For ATM options with precision eps_ATM at maturity
v(length(SS))=0;
end
// Get put from call/put parity
if pc==-1 then
v = v-(SS-K*(%e^(-r*Tau))),
//  $\Delta_p = \Delta_c - 1$ 
n1 = n1-1; n2 = n2-1;
end
endfunction

//
// Initialize parameters

E = %e;
T = 1; // one year
S0 = 1; // initial share value
r = 0.3; // risk free rate 5% =0.05
sig = 0.05; // annual volatility 10%
eps_ATM = 0.01*S0; // Limitation for ATM option

```

```

N = 600;           // trading 'days'
dt = T/N;         // Time step
S = zeros(N+1,1); hedge = S; borrow = S; value = S; KK=S;
//
// Get times and interest-rating bonds

TT = [0:T/N:T]'; // Time from 0 to T
Ttau = TT($:-1:1) ; // Time to maturity = tau
B = E^[r*TT]; // Bond value starting at 1
R = E^[(r-sig^2/2)*TT]; R1 = E^[r*T]; [R1-R];

////////////////////////////////////
// Generate Wiener path for our asset

Is = 334;//135443; // Any value here-
grand("setsd",Is);
// Get Wiener acrescimos
dW = grand(N,1, "nor", 0, 1);
// Enforce mean==0, after all we have only one item
dW = dW-mean(dW); //
W = [0;cumsum(dW)];
stdev(W), // Should == 1

// Get GBM stock price

S0 = 1; // Stock at t=0
S = S0*R.*E^((sig*W)); // Geometric Wiener process
ll = length(S);

////////////////////////////////////
// Check GBM, whose integration uses dW^2=dt
Diff = (r*dt+sig*dW).*S(2:ll) - diff(S);
// Might use precS as a reference error
precS = mabs( (r*dt+sig*dW).*S(2:ll)-diff(S)),
////////////////////////////////////
// Check integration -> diferention
// After all we don't expect dW=dt to be true for one single sa

```

```

// Compare differentials
fig(1);
plot2d(Diff);
xlabel('t'); ylabel('$dS-\Delta S$');
legend(['dS=r*dt+sig*dW, diff(S)=S(i+1)-S(i)']);
////////////////////////////////////

// Choose strike K to get either ITM, OIM or ATM,
// depending on the value of
S_T = S(length(S));
K = 0.8*S_T, // K=1.2*S
//
////////////////////////////////////
//
// Get vanilla option values f_t
//
cp = 1, // cp = -1; // Choose call or put

////////////////////////////////////

[f_t ,N1,N2] = Vanilla(S,K,r , sig , Ttau , cp , eps_ATM);

// Check whether == psi updates like $B(i+1)-B(i)=B(i)r*dt$
Pi_til = (f_t-N1.*S);
dPi_til = diff(Pi_til);
dpsiB = (dPi_til - Pi_til(1:ll-1)*r*dt)
prec = mabs(dpsiB), // should be zero
fig(88); plot2d(2d(dpsiB));
// Show
disp('S, f_t , N1_t, N2_t, Ttau, TT'), // N1_t=Delta
[S, f_t , N1, N2, Ttau, TT]

fig(2); plot2d([S, f_t ], leg='S@f_t ');
fig(3); plot2d([N1, N2], leg='N1_t@N2_t ');

////////////////////////////////////
////////////////////////////////////
//

```

```

// Allocate variables
Portof= zeros(11,1); Hedge=Portof; Psi=Portof; Phi=Psi; Psi2=Portof
D_repl= Portof;
////////////////////////////////////
PPortof1 = Portof; // Haugh
Portof_ex = Portof;
Portof2 = Portof; // Enforce == f_t , MThesis
dd = Portof; hedge = Portof; dpsib = Portof; E_self = Portof;
DD = Portof;
// Initialize at t=0
// compute Delta for option at t=0
// Select call or put
phi = N1(1);
if cp==-1 then phi=1-N1(1);
end
//
Hedge(1) = phi*S(1); // initial hedge: amount of stock
psi = (f_t(1) - Hedge(1))/B(1); // borrow money for hedge
psi2 = psi;
Portof(1) = phi*S(1) + B(1)*psi; // Self-financing portfolio
Portof_ex(1) = f_t(1);
E_self(1) = 0;
// Store phi's
Phi(1) = phi;
Psi(1) = psi; // Store psi' \neq N2(1)
Psi2(1) = psi;

// Go thru the hedging process
for i=2:11-1
s = S(i);
// Stock and bond values changed, but phi and psi don't
// Portof is self-financing, but not necessarily replicating, b
Portof(i) = phi*s + psi *B(i);
// Portof is not necessarily equal to r_t(2) for finite Delta t
D_repl(i) = Portof(i)-f_t(i);
////////////////////////////////////

// Get new phi from BSM to hedge to first order in $\Delta t$

```

```

phi = N1(i); if cp==1 then phi=1-N1(i); end
//
// Compute the amount of bonds needed to keep Portof self-financing
psi = (Portof(i) - phi*s)/B(i); // Because that's what we have left
//
// Compute the amount of bonds needed to replicate exactly
psi_ex = (f_t(i) - phi*s)/B(i);
////////////////////////////////////
// Portof1 replicates exactly, but is not necessarily self-financing
Portof_ex(i) = phi*s + psi_ex*B(i);
////////////////////////////////////
// Get self-financing error from psi
D_self(i) = (psi - psi_ex)*B(i); // (Portof(i) - Portof_ex(i))*B(i);
//
// Compute additional stock to buy for new portfolio
Hedge(i) = N1(i)*s - N1(i-1)*S(i-1);
// Update $phi, $psi$
Phi(i) = phi; // == N1
Psi(i) = psi;
Psi1(i) = psi_ex;
end
////////////////////////////////////
//
// At t = T we compute
Portof(11) = phi*S(11) + psi*B(11),
Portof_ex(11) = phi*S(11) + psi_ex*B(11),

////////////////////////////////////
//
// Replication error
(S_T - K) - Portof(11)
mabs(f_t - Portof),
fig(11); plot2d([f_t, Portof], leg='f_t@Portof');
xlabel('Replication error of selffinancing portfolio');

////////////////////////////////////
//
// Obligations

```

```

////////////////////
// For a CALL
// Below should be equal for ITM( $S > K$ ), 0 and negative for OTM, [0
// For a PUT
// Below should be equal for OTM( $S < K$ ), 0 and negative for ITM, [0
// [f_t(11),(S-T-K)*cp],

// Check obligations for portofolios
// [f_t(11), (S(11)-K)*cp,Portof(11)],
// [p_t(11),K-S,Portof(11),Portof1(11),Portof2(11)],
// Check obligations for calls
f_t(11)-(S-K)*cp,
if cp*(S-T-K)>0
    // in the money ITM
    pay2buyer = (S-T-K)*cp,
    disp('Pay 2 buyer: '+string(pay2buyer)),
    disp('Is there enough money? '+string(Portof(11))),
    disp('MymoneyLeft = '+ string(Portof(11)-pay2buyer)),
else
    // OUT of money OIM
    // In case "out of money", we need Portof(11)=0
    pay2buyer = 0,
    // Do we have enough money?
    disp('No need to pay. Therefore MyMoneyLeft = '+ string(Portof
end
////////////////////

```

Ilumina muito pouco calcular a precificação e o seu erro para uma particular trajetória especificada pela semente $Is = xxx$. Temos que portanto computar médias sobre muitas trajetórias para ter alguma ideia da robustez do procedimento.

F.3 Gerar funções de dois pontos do processo de Ornstein-Uhlenbeck

%%%

```

//  Abril 11 2024
//  Calcular funcao de 2 pontos para processo de Ornstein-Uhlenbeck
//
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Tau = [10,20,30,5]; //0,100,200]; // Tempo de decaimento exponencia
    Is1 = 66;
n_str = 1000; // numero de segmentos com sementes diferentes

grand('setsd',Is1);
c_f = 1;
Write='';
for i = 1:length(Tau);
    c_f =c_f+1;
    figure(c_f);
    [OU_out] = OU_stim_2(Tau(i),n_str,Is1,c_f,Write);
end
//  Calcular funcao de 2 pontos para processo de Ornstein-Uhlenbeck
//
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Tau = [10,20,30,5]; //0,100,200]; // Tempo de decaimento
                                exponencial
    Is1 = 66;
n_str = 1000; // numero de segmentos com sementes diferentes

grand('setsd',Is1);
c_f = 1;
Write='';
for i = 1:length(Tau);
    c_f =c_f+1;
    figure(c_f);
    // [OU_out] = OU_stim_2(tau_B,n_str,Is1,c_f,Write)
    [OU_out] = OU_stim_2(Tau(i),n_str,Is1,c_f,Write);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

function [OU_out] = OU_stim_2(tau_B, n_str, Is1, c_f, Write)
//      RK 11/04/2024
//      Adaptado de OU_stim para curso Fin_Math de OU_stim_1
//
//      See Papoulis, pg. 410 for AR process
//
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

nplot unknown

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

[lhs, rhs]=argn(0);
//
name = 'OU_';
//
tc = 4*tau_B; // Length of 2-point function
grand('setsd', Is1);
gama = 1/tau_B;
clear r;
r(1:tc) = exp(-gama*[0:tc-1]');
[ar, sigma2, rc]=lev(r);
sigma = sqrt(sigma2);
WN = grand(tc, n_str, 'nor', 0, sigma);
OU_out = zeros(tc, n_str);
i0=2;
for i=i0:tc
    //      For exponential decay need only ar(1) !!
    OU_out(i,:) = - ar(1)*OU_out(i-1,:) + WN(i,:);
end;
svel = size(OU_out);
//      vel = vel

//      O argumento de f_vel2pos eh um vetor: convertemos de //
vel para pos com o MESMO fator
//      Se vel for uma matriz, o fator muda para cada segmento.

```

```

//
// Test result
// if c_f~=0 then

lr = length(r);
[P]=real(corr2(OU_out,0,2*lr,0,1));
c_vel_2 = P(:,1) - P(:,4).^2;
c_vel_2 = c_vel_2/max(c_vel_2);
//

tt= ['OU 2-point function for tau_B = '+sci2exp(tau_B)];
nplot(c_f,[c_vel_2(1:lr),ones(lr,1)/%e], 'Corrf-OU@1/e',tt);

end
//
if Write=='vel' then
vel = OU_out;
velfile = [dirstim+name+sci2exp(tau_B)+'_' +...
sci2exp(Is1)+'vel'];
sv = size(vel);
fmt = '('+sci2exp(sv(2))+ 'f20.10)';
fid_out = file('open',velfile,'unknown');
fmt = '('+sci2exp(sv(2))+ 'f20.10'+')';
write(fid_out,vel(:));
// write(fid_out,vel,fmt)
file('close',fid_out);
end

endfunction
////////////////////////////////////

function P = corr2(x,y,nfft,n_overlap,win)

n = length(x); // Number of data points
k = fix((n-n_overlap)/(nfft-n_overlap)); // Number of windows

```

```

//      (k = fix(n/nfft) for n_overlap=0)
// -----

x = x(:);
if y==0 then y = zeros(length(x),1); end
y = y(:);

if win==1 then
    w = ones(nfft,1);          // square window
    Norm1 = k*nfft;
    Norm2 = k*nfft;
else
    w = .5*(1 - cos(2*%pi*(1:nfft)'/(nfft+1)));
//      w = hanning(nfft);
    Norm2 = k*norm(w)^2;      // Normalizing scale factor
    Norm1 = k*norm(w);
end

Pxx = zeros(nfft,1);
Pyy = Pxx; Pxy = Pxx; Px = Pxx; Py = Pxx;
fxx=Pxx; fxy=fxx; fyy=fxx; fx=Px; fy=fx;

//      If n_overlap==0 then we can use matrix algebra to avoid loop.
if n_overlap~=0 then
    index = 1:nfft;
    for i=1:k

        xi = x(index);
        yi = y(index);
        xw = w.*xi;
        yw = w.*yi;
        index = index + (nfft - n_overlap);

        Xx = fft(xw,-1);
        Yy = fft(yw,-1);
        Xy = Xx .* conj(Yy);

        fx = fx + Xx;

```

```

        fy = fy + Yy;
        fxx = fxx + abs(Xx).^2;
        fyy = fyy + abs(Yy).^2;
        fxy = fxy + Xy;

    end
else

    nw = floor(length(x)/nfft);
    x = x(1:nfft*nw);
    y = y(1:nfft*nw)
    x = matrix(x, nfft, nw);
    y = matrix(y, nfft, nw);
    fx = fft(x, -1);
    fxx = fx.*conj(fx);
    fy = fft(y, -1);
    fyy = fy.*conj(fy);
    fxy = fx.*conj(fy);

    // X = real(fft(sum(fxx, 'c'), 1))/(nw*nfft);

end

Px = real(fft(sum(fx, 'c'), 1));
Py = real(fft(sum(fy, 'c'), 1)); // fft(fy, 1);
Pxx = real(fft(sum(fxx, 'c'), 1)); // fft(fxx, 1);
Pyy = real(fft(sum(fyy, 'c'), 1)); // fft(fyy, 1);
Pxy = real(fft(sum(fxy, 'c'), 1)); // fft(fxy, 1);

P = [ [Pxx Pyy Pxy ]./Norm2, Px./Norm1, Py./Norm1,
      fxx, fyy, fxy, fx, fy ];

endfunction

```

References

- [1] R. Napolitano, <https://www.ifsc.usp.br/~reginaldo/Econo/>

- [2] B. Bromberg, *The Journal of Economic History*, Vol. **2**, No.1 (May, 1942), pg. 77-88. Cambridge University Press on behalf of the Economic History Association
<https://www.jstor.org/stable/2113028>
- [3] Aristoteles, *Politics*, Encyclopedia Britannica, Edinburgh (1952), Book I, chapter 11
- [4] N. van der Wijst, <https://www.cambridge.org/gh/files/7113/8234/8312/chpt7prt2Found.pdf>
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Short_\(finance\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Short_(finance))
- [6] E. Stringham, *The Extralegal Development of Securities Trading in Seventeenth Century Amsterdam*, Quarterly Review of Economics and Finance. **43** (2): 321 (2003)
- [7] <https://theeconreview.com/2018/10/16/how-soros-broke-the-british-pound/>
- [8] A. Versignassi, *Crash: Uma breve história da economia*, Harper Collins Brasil(2019)
- [9] E. Derman & M.B. Miller, *The Volatility Smile*, Wiley(2016)
- [10] R. Köberle, *Introduction to path-integral Quantum Field Theory (a toolbox)*, Rev. Bras. Ens. de Física, **43** (2021).
<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0170>
- [11] J.C.Hull, *Options, Futures and other Derivatives*, Pearson Education Limited(1988)
- [12] https://www.b3.com.br/pt_br/institucional
- [13] <https://www.math.nyu.edu/~cai/Courses/Derivatives/lecture8.pdf>
- [14] <https://www.investopedia.com/terms/p/protective-put.asp>
- [15] M. Baxter and A. Remnie, *Financial Calculus: An introduction to derivative pricing*, Cambridge University Press (2012)
- [16] E.T. Jaynes, *Probability Theory: the logic of science*, Cambridge University Press (2003)

- [17] J. Björefeldt et al., *The Trinomial Asset Pricing Model*(2016), <https://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/238499/238499.pdf>
- [18] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* Springer-Verlag, Berlin, (2002)
- [19] F. John, *Partial Differential Equations* Springer-Verlag, Berlin, (1982)
- [20] T.J. P. Bouchard and M. Potters, *Theory of Financial Risk*, Cambridge University Press (2000)
- [21] <https://www.federalreservehistory.org/essays/stock-market-crash-of-1987>
- [22] M. Reed and B. Simon, *Functional Analysis (Methods of Modern Mathematical Physics)*, Academic Press (1980)
- [23] T. Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Second Edition, Oxford University Press (2003)
- [24] M. Kac, *On Distributions of Certain Wiener Functionals*, Transactions of the American Mathematical Society. 65 (1): 1–13(1949);
R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw Hill Book Company (1965)
- [25] F. Black and M. Scholes, *Journal of Political Economy*, Vol. **81**,3, (Julho 1973); R. C. Merton, *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, **4** (Maio 1973).
- [26] <https://www.macroption.com/black-scholes-history/>
- [27] R. H. Chan, Y. Z. Guo, S. T. Lee and X. Li, *Financial Mathematics, Derivatives and Structured Products*, Springer Nature Singapore (2019)
- [28] L. Bachelier, *Théorie de la speculation*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, **3** (17), pp. 21–86, (1900)
- [29] C. F. Lo and C. H. Hui, *Valuation of financial derivatives with time-dependent parameters: Lie-algebraic approach*, Quantitative Finance **1**, pg.73, (2001)

- [30] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, (Chapter V, Prop 3.2)
- [31] F. Black, *The pricing of commodity contracts*, Journal of Financial Economics **3**, pg. 167, (1976)
- [32] S. N. Majumdar, *Brownian Functionals in Physics and Computer Science*, arXiv:cond-mat/0510064v1,(2005); <https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0510064.pdf>
- [33] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications*, Springer-Verlag (2000)
- [34] M. Davis, *Mathematics of Financial Markets* em https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-56478-9_16(2001)
- [35] F. Russo & P. Vallois, *Forward, backward and symmetric stochastic integration*, Probab. Theory Relat. Fields **97**, pg. 403 (1993)
- [36] P. M. Morse & H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, cap. 3, McGraw-Hill, (1953); H. H. Denman, *Time Translation Invariance for Certain Dissipative Classical Systems*, Am.J.Physics **36**, pg. 516(1968).
- [37] L. Bergomi, *Stochastic Volatility Modeling*, CRC Press, Financial Mathematics Series(2016)
- [38] J. C. Guimarães, *Uma análise sobre o modelo binomial de precificação de opções*, Dept. de Economia, PUC-Rio (2004)
- [39] M. S. Joshi, *The Concepts and Practice of Mathematical Finance*, Cambridge University Press (2003)
- [40] J. Gatheral, *The Volatility Surface*, J.Wiley&Sons (2006)
- [41] S. L. Heston, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Review of Financial Studies **6**(2), pg. 327(1993)
Para um código Matlab veja: <https://github.com/jcfrei/Heston>
- [42] <http://faculty.baruch.cuny.edu/jgatheral/IMPLIEDVOLATILITYSURFACE.PDF>

- [43] <https://www.investopedia.com/articles/stock-analysis/081916/volatility-surface-explained.asp>
- [44] <http://www.bsam.com/using-the-volatility-surface-to-estimate-expected-returns>
- [45] B. Dupire, *Arbitrage pricing with stochastic volatility*. Proceedings of AFFI conference, Paris(1992), reprinted in "Derivatives Pricing: The Classic Collection", edited by Peter Carr, Risk Books, London (2004)
- [46] R. Balestro Dias da Silva, V.V.L.Albani, *Backtesting SVI Parametrization of Implied Volatilities*, Instituto de Matematica Pura e Aplicada(2016)
- [47] P. S. Hagan et al. <http://web.math.ku.dk/~rolf/SABR.pdf>(2002)
- [48] C. F. Lo, H. C. Lee and C. H. Hui, *A simple approach for pricing barrier options with time-dependent parameters*, Quantitative Finance **3**, pg.98, (2003)
- [49] <https://zerodha.com/varsity/chapter/gamma-part-2/>
- [50] P. Austing, *Smile Pricing Explained*, Financial Engineering Explained series, ISBN: 978-1137-32733-8(2014)
- [51] P. Austing, *Finite Difference Schemes with Exact Recovery of Vanilla Option Prices* (2019), https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=4194884
- [52] P. Austing, *Practical Solution of Partial Differential Equations in Finance With Numerical Examples and Python Code*. Working paper (2022). <http://ssrn.com/abstract=4194884>
- [53] H. Albrecher, P. Mayer, W. Schoutens e J. Tistaert, *The Little Heston Trap*, <https://perswww.kuleuven.be/~u0009713/HestonTrap.pdf>; C. Kahl e P. Jäckel, *Not-so-complex logarithms in the Heston model*, <https://www2.math.uni-wuppertal.de/~kahl/publications/NotSoComplexLogarithmsInTheHestonModel.pdf>
- [54] I. Gyöngy. *Mimicking the one-dimensional distributions of processes having an Ito differential*. Prob. Th. Rel. Fields, **71**,(1986)

- [55] W. H. Press et al., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press (1992)
- [56] *Mathematical Finance Library: Algorithms and methodologies related to mathematical finance*, <https://www.finmath.net/finmath-lib/>
- [57] W. Volk-Makarewicz, S. Borovkova, B. Heidergott, *Assessing the impact of jumps in an option pricing model: A gradient estimation approach*, *Europ. J. Operational Research* **298** pg. 740 (2022)
- [58] B. Baquie, *Quantum field theory for economics and finance*, Cambridge University Press (2018)