Lei da Indução de Faraday

Nesta prática, vamos estudar campos magnéticos que variam lentamente no tempo. Introduziremos a lei de indução de Faraday e a verificaremos experimentalmente. Introduziremos o conceito de indutância, uma nova grandeza elétrica que as bobinas apresentam a serem submetidas a uma corrente que variam no tempo.

Sempre que surgir uma dúvida quanto à utilização de um instrumento ou componente, o aluno deverá consultar o professor para esclarecimentos.

I. Lei de Indução de Faraday

Uma das descobertas mais importantes do que conhecemos hoje como eletromagnetismo foi feita pelo inglês Michael Faraday em 1831. Quando Faraday aproximou dois circuitos elétricos, percebeu que no momento em que um deles era ligado ou desligado, aparecia por um instante de tempo uma corrente no outro circuito. Percebeu também que o sentido da corrente era diferente se o circuito estava sendo ligado ou desligado.

Para confirmar que era um efeito magnético, ele aproximou um ímã, e também observou o aparecimento de corrente. Essa corrente só se mantinha enquanto o ímã estava em movimento, e tinha sentido contrário dependendo se o ímã se aproximava ou se afastava. Ele também manteve o ímã fixo e movimentou o circuito, obtendo os mesmos resultados.

A conclusão de Faraday é que a variação do fluxo magnético que atravessa o circuito produz uma tensão elétrica, que dá origem a corrente. Na verdade, a própria idéia de fluxo é devida em grande parte a Faraday, que imaginava linhas de campo emanando de cargas elétricas e de magnetos para visualizar os campos elétricos e magnéticos, respectivamente. Essa forma de pensar só seria aceita e usada de forma sistemática pelos cientistas após sua morte, mas sua importância pode ser percebida pelo fato de Maxwell ter dado a seu primeiro artigo, de 1856, o título "*On Faraday's lines of force*". Em 1861, o artigo em que Maxwell corrige a lei de Ampère foi chamado de "*On physical lines of force*".

As linhas de campo dão a direção do campo em cada ponto. O fluxo de campo sobre uma superfície aberta é proporcional ao número de linhas que cruzam essa superfície (contadas como positivas se cruzam em um sentido e negativas se cruzam no sentido oposto). Na notação de cálculo vetorial, o fluxo é definido como:

$$\Phi_s = \iint_S \vec{B}.\hat{n}.dS \tag{1}$$

O campo magnético é solenoidal, ou seja, tem divergente nulo em todos os pontos. Isso tem duas conseqüências: o fluxo sobre qualquer superfície fechada é nulo, e o fluxo de duas superfícies abertas com a mesma fronteira é igual. Isso permite definir o fluxo através do circuito como sendo o fluxo através de uma superfície qualquer que tenha o circuito como fronteira.

De acordo com a lei de Faraday, a força eletromotriz (fem) induzida sobre o circuito é igual a taxa de variação do fluxo magnético. A forma matemática da lei da indução foi dada em 1845 pelo físico alemão Franz Ernst Neumann:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_s}{dt} \tag{2}$$

Essa é a lei da indução na forma mais apropriada para se trabalhar com circuitos, pois relaciona parâmetros que podem ser medidos diretamente ou calculados a partir da geometria do circuito.

A fórmula acima só tem sentido se for definido o sentido do fluxo e da corrente induzida sobre o circuito, o que é dado pela regra da mão direita: ao curvar a mão direita no sentido da corrente, o polegar aponta no sentido do fluxo positivo. A figura 1 mostra essa regra sendo aplicada a um circuito quadrado.

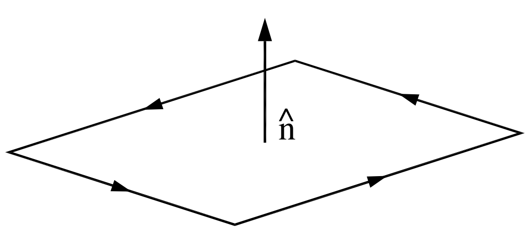

Figura 1 – Sentido da tensão positiva e do fluxo positivo em um circuito

A força eletromotriz induzida é nada mais do que a integral de linha do campo elétrico sobre o circuito. Logo podemos escrever:

$$\oint_{\partial S} \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.\hat{n}.dS \tag{3}$$

Essa é a forma integral da lei de indução, expressa em função dos campos, e é uma das equações de Maxwell. Ela pode ser convertida para uma forma diferencial, usando o teorema de Stokes no lado direito da equação, resultando em:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{4}$$

Vemos que, se o campo magnético estiver variando no tempo, o campo elétrico não é mais irrotacional, então não podemos mais pensar em potencial eletrostático, do qual o campo elétrico possa ser obtido fazendo $E = -\nabla\Phi$.

O sinal negativo da lei de indução, que dá a direção da tensão induzida, é explicado pela chamada *lei de Lenz*, publicada por Heinrich Lenz em 1834 (além da lei que leva seu nome, Lenz também descobriu de forma independente a lei de Joule enquanto trabalhava na Universidade de São Petesburgo; por esse motivo, na Rússia, essa lei é conhecida como lei de Joule-Lenz). O sinal negativo garante que a fem induzida é no sentido de criar um campo magnético que vai *se opor* à variação do fluxo. Em outras palavras, se o fluxo está aumentando, a tensão cria uma corrente que gera um fluxo negativo (na figura 1, isso corresponde a uma corrente no sentido oposto ao mostrado pelas setas).

A lei de Lenz é uma conseqüência da conservação de energia. Para ver isso, considere uma espira circular e um ímã com seus eixos alinhados, com o pólo norte do ímã voltado para a espira, como na figura 2. Se o ímã se aproxima da espira (figura 2a), é induzida uma corrente anti-horária na espira (vista a partir do ímã). Assim, a espira passa a atuar como um eletroímã, com o pólo norte voltado para o ímã, e eles se repelem. Caso o ímã esteja se afastando (figura 2b), a corrente seria no sentido horário, o pólo sul estaria voltado para o ímã, e a força seria de atração. Em qualquer um dos casos, a força é contrária ao movimento. Se não fosse assim, um pequeno movimento em qualquer sentido geraria uma força no mesmo sentido, e a velocidade (e a energia cinética) iria aumentar indefinidamente, o que não é compatível com a conservação de energia.

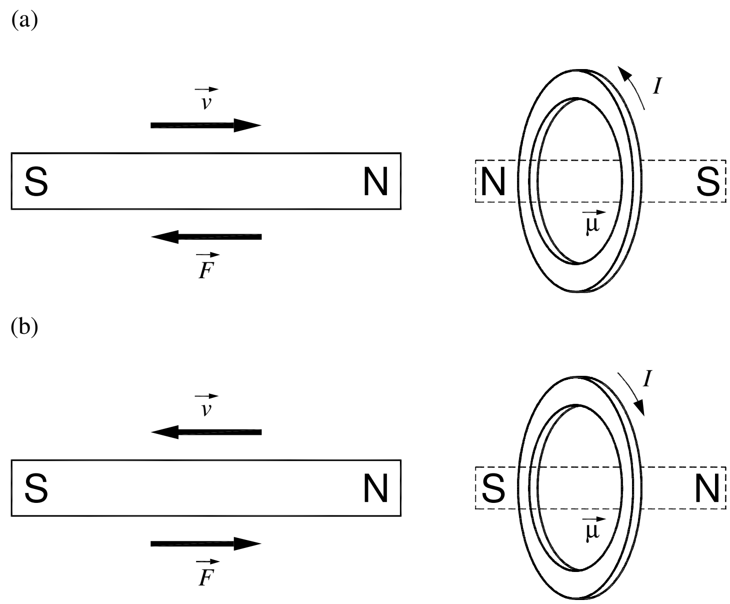

Figura 2 – Lei de Lenz aplicada a um ímã em movimento próximo a uma espira. (a) ímã se aproxima da espira, e é repelido. (b) ímã se afasta da espira, e é atraído.

Devido às contribuições de Neumann e Lenz, a lei da indução pode ser chamada de lei de Faraday, lei de Faraday-Lenz ou lei de Faraday-Neumann-Lenz.

II. Indutância mútua e auto-indutância

A corrente em um circuito gera um campo magnético que produz fluxo sobre o próprio circuito; assim, a variação de corrente produz uma tensão no circuito, fenômeno que é conhecido como *auto-indução*. O fluxo magnético é proporcional a corrente; a constante de proporcionalidade, que depende da geometria e das propriedades magnéticos do meio, é chamada de indutância (ou auto-indutância) do circuito, denotada por L. Essa definição de indutância foi dada por Oliver Heaviside em 1886 (Heaviside foi também o criador dos termos impedância, condutância, permeabilidade e eletreto). De acordo com essa definição:

$$\Phi = LI \tag{5}$$

A auto-indutância de um circuito é sempre positiva.

Com esse conceito, podemos reescrever a lei de indução de Faraday para o caso de um circuito fixo:

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} \tag{6}$$

Se houver um segundo circuito próximo, a corrente nesse também pode produzir fluxo magnético sobre o primeiro, que é proporcional a corrente no segundo circuito. Dessa maneira, dois circuitos eletricamente isolados podem influenciar um ao outro quando a corrente em um deles estiver variando. Esse fenômeno é conhecido como *indução mútua*.

Os fluxos sobre os circuitos 1 e 2 pode ser escritos como:

$$\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2 \tag{7a}$$

$$\Phi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2 \tag{7b}$$

Aqui L_{12} representa o fluxo sobre o circuito 1 provocado pela corrente no circuito 2, e a auto-indutância é representada com índices repetidos. Um fato importante, que não poderá ser provado aqui, é:

$$L_{12} = L_{21} \tag{8}$$

A indutância mútua é o coeficiente de proporcionalidade entre a corrente em um circuito pela corrente em outro. Seu valor pode ser positivo ou negativo; um valor positivo significa que o aumento da corrente em um circuito provoca uma diminuição da corrente no outro. Depende, portanto da definição (arbitrária) do sentido positivo das correntes em cada circuito.

III. Armazenamento de energia em indutores

Quando um circuito é desligado da fonte, sua corrente varia e ele pode induzir uma corrente em um outro circuito próximo. Isso pode parecer a princípio estranho, porque um campo magnético constante não realiza trabalho. No entanto, quando a corrente está aumentando, é necessário compensar a tensão induzida pela variação de corrente, e isso requer energia. É essa energia que fica armazenada e pode ser reaproveitada em outro momento.

Vamos considerar um circuito de auto-indutância L_1, e vamos elevar sua corrente de 0 a I_1. Sendo a corrente em certo instante é i_1, a energia necessária para esse processo é:

$$W_1 = \int L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} dt = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1 = \frac{1}{2} L I_1^2 \tag{9}$$

Essa é a energia armazenada em um circuito devido a auto-indutância. Se a corrente i_2 em um circuito próximo estiver variando de 0 a I_2, a energia necessária para manter a corrente no primeiro circuito constante é:

$$W_{12} = \int L_{12} I_1 \frac{di_2}{dt} dt = L_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 = L_{12} I_1 I_2 \tag{10}$$

Essa é a energia armazenada nos dois circuitos devido a indutância mútua.

Então, quando a corrente no circuito 1 for I_1 e a corrente em 2 for I_2, a energia armazenada nessa configuração é:

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2 \tag{11}$$

A energia tem que ser positiva para quaisquer valores de I_1 e I_2, porque, se não fosse assim, haveria uma situação com correntes energeticamente mais favorável do que a situação sem correntes; assim poderiam ser observados correntes aparecendo espontaneamente. A expressão 11 pode ser considerada um polinômio de segundo grau em I_1, e seu determinante deve ser negativo para que a expressão seja sempre positiva:

$$\Delta = (L_{12}{}^2 - L_1 L_2) I_2{}^2 \leq 0 \tag{12}$$

A condição para isso é:

$$|L_{12}| \leq \sqrt{L_1 L_2} \tag{13}$$

A indutância mútua é sempre menor (em módulo) do que a média geométrica das auto-indutâncias. Isso permite definir um parâmetro, o acoplamento magnético entre dois circuitos, que varia de 0 a 1:

$$k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{14}$$

Acoplamento magnético igual a 1 significa que as linhas de fluxo que atravessam um circuito são as mesmas que atravessam o outro. Acoplamento magnético igual a 0 significa que nenhuma linha de fluxo atravessa ambos os circuitos. O acoplamento magnético é uma medida da capacidade de dois circuitos influenciarem magneticamente um no outro.

IV. Indutância de algumas configurações simples

a) Solenóide longo

O campo no interior de um solenóide longo, de raio *r*, número de espiras *N* e comprimento *l,* percorrido por corrente *I,* é:

$$B = \frac{\mu_o N I}{l} \tag{15}$$

O fluxo é:

$$\Phi = NBA = \frac{\mu_o N^2 \pi r^2}{l} I \tag{16}$$

A auto-indutância é:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_o N^2 \pi r^2}{l} \tag{17}$$

b) Dois solenóides longos coaxiais (indutância mútua)

Vamos considerar dois solenóides coaxiais: o mais interno tem raio r_1 e N_1 voltas; o mais interno tem raio r_2 e N_2 voltas. O comprimento l dos dois é igual. Essa situação está mostrada na figura 3.

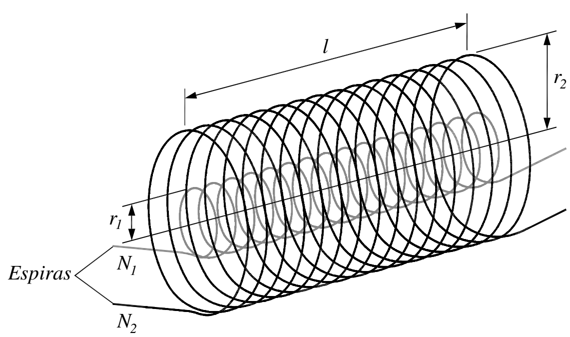

Figura 3 – Dois solenóides coaxiais

Na aproximação de solenóide longo, o campo magnético que o solenóide externo gera na região próxima ao eixo comum é:

$$B_2 = \frac{\mu_o N_2 I_2}{l} \tag{18}$$

O fluxo sobre o solenóide interno é:

$$\Phi_1 = N_1 B_2 A_1 = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi r_1^2}{l} I_2 \qquad (19)$$

A indutância mútua é a razão entre o fluxo e a corrente:

$$L_{12} = \frac{\Phi_1}{I_2} = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi r_1^2}{l} \qquad (20)$$

A indutância mútua depende apenas de fatores geométricos e das propriedades magnéticas do meio onde os solenóides estão inseridos.

Vamos agora calcular a indutância mútua considerando que o campo é gerado pelo solenóide interno e induz no solenóide externo. O campo devido ao solenóide interno é:

$$B_1 = \frac{\mu_o N_1 I_1}{l} \qquad (21)$$

Esse campo está presente apenas na região interna ao solenóide interno, e é nulo fora. O fluxo sobre o solenóide externo é o proporcional à área do solenóide *interno*:

$$\Phi_2 = N_2 B_1 A_1 = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi r_1^2}{l} I_1 \qquad (22)$$

A indutância mútua é a razão entre o fluxo e a corrente:

$$L_{21} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\mu_o N_1 N_2 \pi r_1^2}{l} \qquad (23)$$

Vemos então que $L_{12} = L_{21}$. De acordo com o que foi dito anteriormente, trata-se de uma relação geral.

O acoplamento magnético entre os dois solenóides é:

$$k = \frac{r_1}{r_2} \qquad (24)$$

Experimentos

Para quantificar o comportamento instantâneo de tensões, correntes e campos magnéticos que variam no tempo, utilizaremos um osciloscópio. Portanto, preste muita atenção na ligação do osciloscópio para que os cabos "terra" estejam sempre ligados no mesmo ponto do circuito.

1. Medida do campo magnético e auto indução de um solenóide percorrido por uma corrente que varia no tempo

a) Monte um circuito, como o mostrado na figura 4, utilizando um resistor de 10 Ω em série com uma bobina solenoidal.

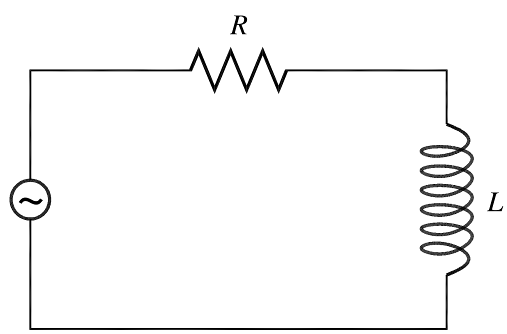

Figura 4 – Circuito para alimentar um indutor com corrente alternada

b) Ajuste o gerador de funções para a máxima tensão (amplitude) e uma onda senoidal com freqüência de aproximadamente 1 kHz.

c) Para obter a corrente que percorre a bobina, meça a tensão sobre o resistor (que é proporcional à corrente) no canal 1 do osciloscópio.

d) Conecte a saída da sonda Hall no canal 2 do osciloscópio. Introduza a sonda no centro da bobina maior (como na figura 5). Observe a curva de tensão na sonda Hall (proporcional ao campo magnético no centro da bobina) juntamente com a curva da tensão nos terminais do resistor (ajuste o osciloscópio para visualizar ambos os canais, em modo Alt e canal 2 normal). Compare as curvas da corrente (medida no canal 1 do osciloscópio) e da tensão Hall (medida no canal 2 do osciloscópio) e discuta a relação de fases entre elas. O comportamento observado é esperado de acordo com a lei de Faraday-Lenz. Explique por que.

e) Utilizando os dados da calibração da sonda Hall, obtenha o campo magnético como função do tempo no interior do solenóide.

f) Faça um esboço do gráfico do campo magnético e da corrente na bobina em papel milimetrado, indicando os parâmetros relevantes (valor de pico, período e fase relativa).

g) Utilizando os parâmetros geométricos da bobina, as característica magnética do meio, e a corrente do circuito, faça um gráfico do campo magnético como função de tempo utilizando a equação para o campo do solenóide finito de comprimento L. Compare essa curva com a curva experimental esboçada no item f.

h) Ajuste o canal 1 para medir a tensão nos terminais do solenóide e observe a curva de tensão juntamente com a curva da tensão Hall (canal 2 do osciloscópio). Faça um esquema do campo magnético e da tensão nos terminais do solenóide, indicando os parâmetros relevantes. Compare as curvas da tensão nos terminais do solenóide e da tensão Hall e discuta a relação de fases entre elas. O comportamento observado é esperado de acordo com a lei de Faraday-Lenz. Explique por que.

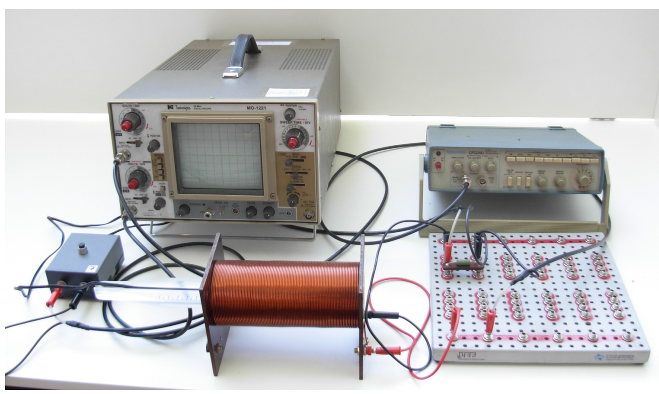

Figura 5 – Configuração para medir o campo magnético no interior de um solenóide

Medida do campo magnético e auto indução de um solenóide percorrido por uma corrente que varia no tempo

Período =	
Corrente (pico-a-pico) =	
Tensão Hall (pico-a-pico) =	
Campo Magnético (pico-a-pico) =	
Fase relativa entre corrente e campo magnético =	
Tensão nos terminais do solenóide (pico-a-pico) =	
Fase relativa entre a tensão nos terminais do solenóide e a corrente =	

2. Caracterização da tensão induzida em uma bobina

a) Na montagem anterior, aplique um sinal de tensão com forma de onda triangular de freqüência 100 Hz na bobina maior.

b) Conecte a saída da sonda Hall no canal 2 do osciloscópio. Introduza a sonda no centro da bobina maior (como na figura 5). Observe a curva de tensão na sonda Hall (proporcional ao campo magnético no centro da bobina) juntamente com a curva da tensão nos terminais do resistor (ajuste o osciloscópio para visualizar ambos os canais, em modo Alt e canal 2 normal). Compare as curvas da corrente da tensão Hall e discuta a forma das curvas. O comportamento observado é esperado. Explique por que utilizando as equações pertinentes.

c) Mantendo o circuito anterior, insira a bobina de prova, também solenoidal, no centro da bobina maior, como mostrado na figura 6. O suporte branco serve para garantir que as bobinas ficarão coaxiais.

d) Use o canal 1 do osciloscópio para medir a tensão sobre o resistor e o canal 2 para medir a tensão induzida na bobina de prova. Compare esses sinais. O comportamento observado é esperado de acordo com a lei de Faraday-Lenz. Explique por que usando as equações pertinentes.

e) Repita os procedimentos de a) a d) aplicando na bobina maior uma onda quadrada de 100 Hz.

(a) (b)

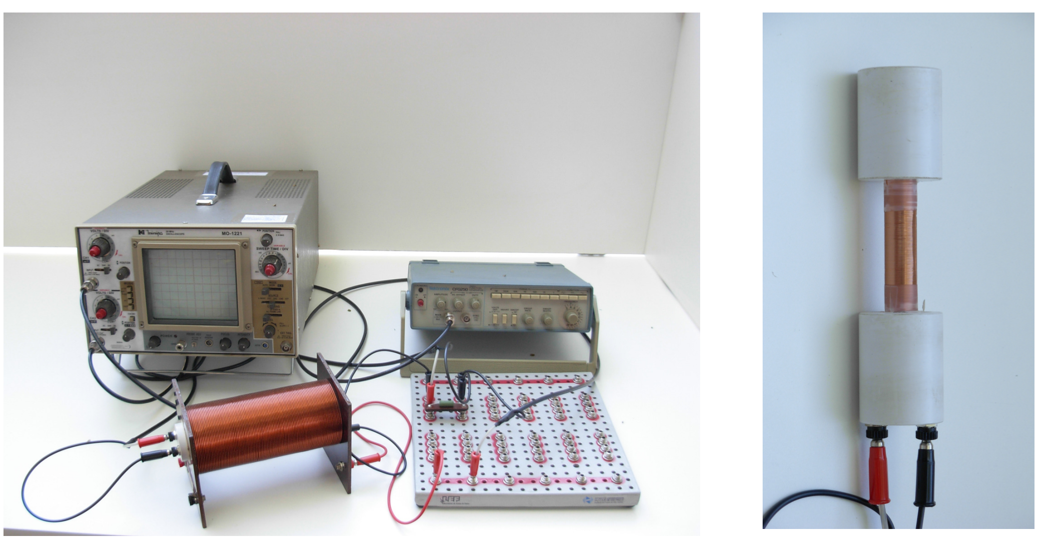

Figura 6 – (a) Montagem para observação da f.e.m induzida em uma bobina de prova soleinoidal. (b) Bobina de prova.

3. Determinação da indutância mútua entre dois solenóides

a) Na montagem anterior, aplique um sinal de tensão com forma de onda senóidal de freqüência 1 kHz na bobina maior.

b) Use o canal 1 do osciloscópio para medir a tensão sobre o resistor e o canal 2 para medir a tensão induzida na bobina de prova. Compare esses sinais. Compare as formas de onda observadas e discuta a relação de fases entre elas. O comportamento observado é esperado de acordo com a lei de Faraday-Lenz. Explique por que?

c) Faça um esquema em papel milimetrado das formas de onda das tensões observadas indicando os parâmetros relevantes.

d) Varie a freqüência da fonte para 500, 1000, 1500, 2000, 2500 Hz. Para cada freqüência meça a amplitude da corrente no solenóide externo (I_0) e da força eletromotriz induzida (ε_0) na bobina de prova. Faça um gráfico de ε_0 como função de ωI_0. Qual deve ser o comportamento da curva segundo lei de Faraday? Determine a indutância mútua a partir desta curva.

e) Calcule a indutância mútua utilizando a expressão 19 e também a expressão considerando os solenóides finitos (deduza essa expressão considerando a expressão para o campo de um solenóide finito deduzido na prática de campo magnetostático). Compare os valores calculados com o valor determinado experimentalmente.

Auto-indutância entre dois solenóides - Onda senoidal no solenóide maior

Período =	
Corrente =	
Tensão induzida na segunda bobina =	
Indutância mútua =	
Indutância mútua esperada (equação 19) =	
Indutância mútua esperada (solenóide finito) =	

Auto-indutância entre dois solenóides – Onda triangular e quadrada no solenóide maior

Forma de onda na bobina maior	Forma de onda na bobina menor
Onda triangular	
Onda quadrada	