

**Exercício 1:** Considere um poço de potencial unidimensional entre 0 e  $L$  com paredes infinitas. No centro do poço seja uma pequena perturbação

$$H^{(1)} = \begin{cases} \varepsilon & \text{para } \frac{1}{2}(L-a) \leq x \leq \frac{1}{2}(L+a) \\ 0 & \text{fora dessa região .} \end{cases}$$

**Exercício 2:** Considere um poço de potencial unidimensional entre 0 e  $L$  com paredes infinitas. O fundo do poço seja modificado por uma perturbação,

$$H^{(1)} = \begin{cases} -\varepsilon \sin \frac{\pi x}{L} & \text{para } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{fora dessa região .} \end{cases}$$

**Exercício 3:** Demonstre que o produto escalar  $\langle \psi_n^{(0)} | \psi_n^{(1)} \rangle$  (da correção de primeira ordem ao estado do sistema "perturbado" com o  $n$ -ésimo estado do hamiltoniano livre), anula-se quando impomos que o estado "perturbado"  $|\psi(\lambda)\rangle$  seja normalizado e que o produto  $\langle \psi_n^{(0)} | \psi(\lambda) \rangle$  seja real.<sup>1</sup>

**Exercício 4:** Considere um oscilador harmônico (OH) carregado, imerso num campo elétrico uniforme  $\mathcal{E}$ , descrito pelo hamiltoniano  $H = H_0 - q\mathcal{E}X$ , sendo  $H_0 = P^2/2m + m\omega^2 X^2/2$  o hamiltoniano do OH unidimensional livre, e  $q$  a carga do oscilador.

- Obtenha, analiticamente as autoenergias e os autoestados do hamiltoniano.
- Obtenha, em seguida, via Teoria das Perturbações Independentes do Tempo (TPIT), as autoenergias (correções de primeira a segunda ordem). Compare os resultados obtidos via TPIT com os analíticos.<sup>2</sup>

**Exercício 5:** Considere os itens a. e b. do problema anterior aplicados agora ao OH unidimensional submetido à uma perturbação da forma  $\rho\hbar\omega X^2/2$ .<sup>3</sup>

**Exercício 6:** Obtenha, via TPIT, as autoenergias (correções de primeira a segunda ordem) e autoestados (correções de primeira ordem) do OH unidimensional submetido ao hamiltoniano perturbativo  $\sigma\hbar\omega X^3$ .<sup>4</sup>

---

<sup>1</sup>Veja Cohen-Tannoudji, Cap XI, A-2.

<sup>2</sup>Veja Cohen-Tannoudji, Complemento A\_XI.

<sup>3</sup>Veja Cohen-Tannoudji, Complemento A\_XI.

<sup>4</sup>Veja Cohen-Tannoudji, Complemento A\_XI.

**Exercício 7:** Considere um elétron numa "caixa unidimensional", isto é, num poço infinito de largura  $a$  na direção  $x$ . Quando um campo uniforme  $\mathcal{E}$  é ligado também na direção  $x$ , o elétron experimenta uma força igual a  $-e\mathcal{E}$ , sendo  $-e$  a carga do elétron, de forma que a energia potencial no interior da caixa torna-se  $e\mathcal{E}x$  (em acordo com o problema 3).

- Qual a energia do estado fundamental do elétron (em aproximação de primeira ordem)? Podemos assumir que  $e\mathcal{E}a$  seja muito menor que a energia do estado fundamental do elétron na caixa, na ausência do campo elétrico.
- Utilize a TPID em primeira ordem para obter uma aproximação para a função de onda do estado fundamental, calculando o primeiro termo da correção.

**Exercício 8:** Seja uma partícula confinada a um poço cúbico tri-dimensional e infinito, descrito pela energia potencial  $V(x, y, z) = 0$  para  $0 < x < a$ ,  $0 < y < a$  e  $0 < z < a$  e  $V(x, y, z) = \infty$  além da região acima definida. Sabemos que os estados estacionários da partícula são  $\Psi_{n_x, n_y, n_z}^{(0)}(x, y, z) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{a} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{a} z\right)$ , sendo  $n_x, n_y, n_z$  inteiros positivos. As energias associadas são  $E_{n_x, n_y, n_z}^{(0)} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$ . Note que o estado fundamental não é degenerado enquanto o primeiro estado excitado é três vezes degenerado. Considere que a partícula nesta caixa seja submetida a uma perturbação da forma  $H^{(1)} = V_0$  para  $0 < x < a/2$  e  $0 < y < a/2$  e  $H^{(1)} = 0$  além da região acima definida.

- Obtenha a correção de primeira ordem da energia do estado fundamental.
- Obtenha a correção de primeira ordem para a energia (degenerada) do primeiro estado excitado, além da *base ótima* (que decorre das combinações lineares dos estados degenerados) que mais se aproxima dos estados perturbados.

**Exercício 9:** Obtenha, através do método variacional, a energia do estado fundamental do oscilador harmônico unidimensional, descrito pelo hamiltoniano  $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ , e a correspondente função de onda, a partir das funções tentativas

- $\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$  sendo  $\alpha$  uma constante;
- $\psi(x) = A/(x^2 + \beta)$  sendo  $\beta$  uma constante.

**Exercício 10:** Usando a função tentativa  $\psi(x) = e^{-\alpha x^2}$ , obtenha agora a energia do estado fundamental de uma partícula submetida a um potencial descrito por uma função delta, isto é,  $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \alpha \delta(x)$ .

**Exercício 11:** Considere o átomo de hidrogênio imerso num campo elétrico uniforme  $\mathcal{E}$  aplicado ao longo da direção  $\mathbf{e}_z$ . O termo que corresponde a esta interação no hamiltoniano total é  $H^{(1)} = -e\mathcal{E}z$  (veja problemas 3 e 6 desta lista). Para campos elétricos típicos, produzidos em laboratório, a condição  $H^{(1)} \ll H_0$ , que permite a aplicação da TPIT, é satisfeita. O efeito da perturbação  $H^{(1)}$  denominado efeito Stark, é a remoção da degenerescência de alguns dos estados do átomo de hidrogênio. Calcule o efeito Stark para o estado  $n = 2$  do átomo de hidrogênio.

**Exercício 12:** Considere o oscilador harmônico (OH) unidimensional inicialmente preparado ( $t = -\infty$ ) no estado fundamental  $|0\rangle$  do hamiltoniano não perturbado  $H^{(0)} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , tal que  $H^{(0)}|n\rangle = E_n|n\rangle$  com  $E_n = n\hbar\omega$ .

- a) Através da expressão obtida em classe,  $a_f(t) \approx \frac{1}{i\hbar} \int_{t_i}^{t_f} H_{fi}^{(1)} e^{i\omega_{fi}t} dt$ , e do hamiltoniano perturbativo  $H^{(1)}(t) = -e\mathcal{E}xe^{-t^2/\tau^2}$  ( $x$  é o operador posição do OH), aplicado entre  $t = -\infty$  e  $t = +\infty$ , calcule a probabilidade de que o sistema esteja no estado excitado  $|n\rangle$ , especificando  $n$ , em  $t = +\infty$ . Analise o resultado.
- b) Faça o mesmo para uma perturbação da forma  $H^{(1)}(t) = \Lambda x^2 e^{-t^2/\tau^2}$ .

**Exercício 13:** Efeito fotoelétrico. Um átomo de hidrogênio no estado fundamental  $1s$  é colocado num campo elétrico  $\vec{\mathcal{E}}(t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \sin \omega t$ , tal que  $H^{(1)}(t) = -e\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}(t) = V e^{-i\omega t} + V^\dagger e^{i\omega t}$ , com  $V = e\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{E}}_0 / (2i)$ . Encontre, via regra de ouro de Fermi,

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H^{(1)}(t) | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i \mp \hbar\omega) ,$$

utilizando a densidade de estados  $\rho(k)dE_k = (L/2\pi)^3 k^2 dk d\Omega$ , a probabilidade por unidade de tempo para que o átomo seja ionizado, excitando-se do estado fundamental  $\psi_{100} = e^{-r/a_0} / (\pi a_0^3)^{1/2}$  para o estado descrito pela onda plana  $\psi_{\vec{k}} = e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} / L^{3/2}$ .