

# O Efeito Aharonov Bohm

Emmanuel Mercado G.<sup>1\*</sup>

## Abstract

Este documento resume os conceitos básicos relacionados ao efeito Aharonov Bohm magnético, mostrando diferenças dos conceito clássico e quântico de potencial vetor. Além disso, calcula-se a contribuição e o significado físico que o potencial vetor obtido quando age sobre uma partícula carregada em regiões onde os campos magnéticos são nulos. Além disso se faz, uma análise das experiências e resultados experimentais do efeito Aharonov e Bohm.

## Keywords

Vetor potencial, efeito Aharonov Bohm.

<sup>1</sup> Grupo de optica, Instituto de Fisica de São Carlos - Universidade de São Paulo , SP, Brasil

\*Corresponding author: emmanuel.dv@usp.br; emmidv91@gmail.com

## Motivação

Este estudo foi realizado a fim de esclarecer o conceito que temos sobre o vetor potencial magnético. Classicamente considera-se como uma ferramenta matemática simples necessária para determinar os campos electromagneticos, mas na mecânica quântica tem um sentido maior já que as equações de movimento são escritas em termos deste potencial, desta forma podemos estudar um efeito físico real sobre uma partícula carregada em regiões onde os campos são zero, e onde potencial vetor não é.

## Introdução

Em 1959 Yakir Aharonov e David Bohm publicou um artigo [1] em que eles mostraram que, ao contrário do conceito clássico que tinha o potencial vetor, que é considerado como uma ferramenta matemática para o cálculo de campos elétricos e magnéticos [1]. A dinamica de uma partícula carregada na presença de campos nulos, não sofre qualquer alteração, uma vez que a equação de movimento é regulado pela força de Lorentz. Na mecânica quântica a equação que rege o estado de um sistema é a equação de Schrödinger onde os campos não são explicitamente incluídos no cálculo do estado da

partícula carregada. Assim, determinar o comportamento de uma partícula carregada na presença de um campo magnético estacionário, foi o principal objetivo do artigo da referencia [1] é determinar a influência do vector potencial da partícula em um espaço no qual o campo é nulo. Além disso, a energia do sistema é calculada mostrando a dependência com fluxo magnético.

A continuação fazemos uma revisão superficial da actuação destes campos.

Classicamente, os campos elétricos e magnéticos são calculadas usando o vetor potencial e escalar assim:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1)$$

Onde  $\mathbf{A}$  e  $\phi$  deve satisfazer a condição ou *gauge* de Lorentz,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{d\phi}{dt} = 0. \quad (2)$$

Para uma partícula com carga  $q$  e massa  $m$  sujeito a estes campos, a equação de movimento é:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = q\mathbf{E} + (q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3)$$

conhecida como a força de Lorentz.

Uma partícula carregada em uma região onde os campos são zero, não deve sentir qualquer efeito de campos porque a força clássica agindo sobre ele é zero [2].

Quanticamente os potenciais e não os campos estão presentes na equação de estado (equação de Schrödinger). O efeito Aharonov Bohm portanto, é definido como o efeito do vector potencial sobre uma partícula carregada numa região onde os campos são nulos. Fornecendo um significado físico real para o potencial vector .

## 1. Efeito Aharonov Bohm Quântico

Na mecânica quântica os potenciais desempenham um papel importante, porque o Hamiltoniano do sistema pode-se expressar como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\phi \quad (4)$$

Considerando-se o gauge de Lorentz  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , o hamiltoniano é:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( -\hbar^2 \nabla^2 + q^2 A^2 + 2iq\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \right) \quad (5)$$

Se considerarmos uma partícula de carga  $q$  girando em torno de um solenóide infinitamente longo de raio  $\rho = a$ , que transporta uma corrente  $I$  (figura 1), com um campo magnético:

$$\mathbf{B} = \mu I n \hat{z}, \quad 0 < \rho < a$$

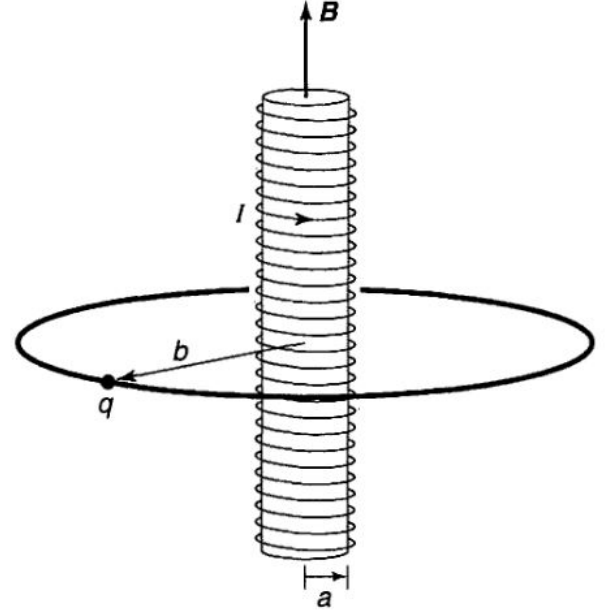
$$\mathbf{B} = 0, \quad \rho > a \quad (6)$$

O campo magnético de uma região fora do solenóide é zero, mas o vector potencial não é, e tem um valor fixo:

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi\rho} \hat{\phi}, \quad \rho > a \quad (7)$$

Aplicando a equação de Schrödinger independente do tempo e substituindo o valor do potencial vector em uma geometria cilíndrica com um raio  $\rho = b =$  constante, obtém-se:

$$\mathbf{H}\Psi(\varphi) = E\Psi(\varphi) \quad (8)$$



**Figure 1.** Diagrama esquemático de uma partícula com carga  $q$  órbita um solenóide transportando uma corrente  $I$ , que contém no interior de um campo de fluxo constante.

Então,

$$\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} - 2i\beta \frac{d\Psi}{d\varphi} + \varepsilon\Psi = 0, \quad (9)$$

$$\frac{1}{2m} \left[ -\frac{\hbar^2}{b^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} + \left( \frac{q\Phi}{2\pi b} \right)^2 + i \frac{\hbar q \Phi}{\pi b^2} \frac{d}{d\varphi} \right] \Psi(\varphi) = E\Psi(\varphi) \quad (10)$$

onde os termos,  $\beta$  e  $\varepsilon$  são

$$\beta \equiv \frac{q\Phi}{2\pi\hbar}, \quad \varepsilon \equiv \frac{2mb^2E}{\hbar} - \beta^2. \quad (11)$$

A solução da equação é da forma

$$\Psi(\varphi) = A \exp(in\varphi). \quad (12)$$

A condição de contorno do problema  $\Psi(\varphi + 2\pi) = \Psi(\varphi)$ , leva a:

$$n = \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE_n} \quad (13)$$

então, a energia do sistema é:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \left( n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2 \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

A energia da partícula que encontra-se fora do solenóide depende do fluxo magnético que está no interior do solenóide. Além disso, os valores positivos de  $n$  indicam que a partícula move-se na mesma direção do potencial vetor, e valores negativos indicam o.

Considere agora para equação Schrödinger que depende do tempo,

$$\mathbf{H}\Psi = \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\phi(t) \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (14)$$

A solução é

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \exp(ig(\mathbf{r}))\Psi'(\mathbf{r}) \quad (15)$$

Onde,  $\Psi'$  é a função de onda que satisfaz a equação Scrodinger quando o Vetor potencial fora do solenóide é zero. O termo de fase  $g(\mathbf{r})$  depende do fluxo magnético no interior do solenóide o qual é dada por:

$$g(\mathbf{r}) \equiv -\frac{q}{\hbar} \oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \pm \frac{q}{2\hbar} \Phi \quad (16)$$

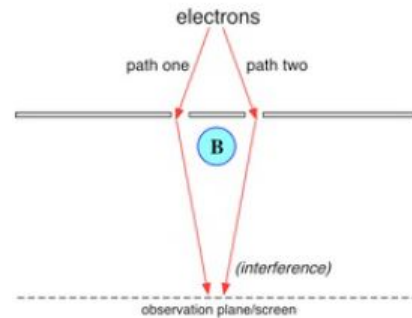
O sinal negativo ou positivo indica que a partícula pode ter o sentido oposto ou não o potencial vetor respectivamente. Por tanto a dinamica das partículas de uma forma ou de outra vão ter uma diferença de fase:

$$\Delta\phi = |g_{C1}(\mathbf{r}) - g_{C2}(\mathbf{r})| = \frac{q}{\hbar} \Phi \quad (17)$$

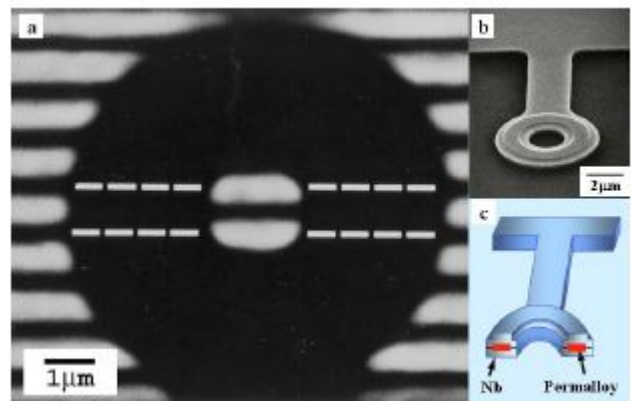
Podemos ver que o efeito produzido pelo potencial vetor induz uma diferença de fase na região de campo magnético nulo. desta forma, uma partícula carregada que se movimentava ao redor do solenoide (em uma direção ou na outra) tem um fluxo de campo magnético constante não nulo no interior do solenoide.[1,3].

## 2. comprovação experimental do efeito Aharonov Bohm

Em 1985, Akira Tonomura *et al*, realizou um experimento que iria verificar o efeito Aharonov Bohm, que uma fonte coerente de elétrons ao longo de caminhos diferentes através de um pequeno toróide revestido com uma película supercondutora, de dimensões diminutas são de aproximadamente  $10\mu\text{m}$  figura (3b). Quando os elétrons passam através do toróide as franjas de interferência são gerados devido à luz que passa através do pequeno toróide, mostrando a diferença de fase que é gerada na partícula carregada pelo potencial vetor nas regiões onde o campo é nulo [4].



**Figure 2.** Esquema experimental proposto por Aharonov Bohm para gerar o padrão de interferência, e confirmada experimentalmente por Tonomura et al.



**Figure 3.** a) Franjas de interferência do feixe de elétrons, e diferença de fase gerado pelo vetor potencial sobre os elétrons. b y c) Imagen del diminuto Toróide [4].

No experimento é possível obter uma diferença de fase muito Pequeno, no entanto, provas demonstra o efeito Aharonov Bohm.

## Bibliografia

1. Aharonov and D. Bohm, Significance of electromagnetic potentials in quantum theory, *Phys. Rev.* 115, 485 (1959).
2. Classical Electrodynamics, J. D Jacksonl, terceira edicion, 1998.
3. Introduction to Quantum Mecanhics, David J. Griffiths, second edition, 1995.
4. Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave, *Phys. Rev. Lett.* 56, 792 (1986).